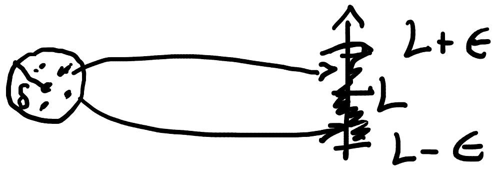
Exemplo: $f(x,y) = \dfrac{3x^2y}{x^2+y^2}$. Discuta sobre $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

$\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L \Rightarrow$ "quanto mais próximo (x,y) estiver de $P=(a,b)$, mais próximo $f(x,y)$ estará de L."

Dado $\epsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ tal que se

$$0 < d[(x,y),(a,b)] < \delta \Rightarrow |f(x,y) - L| < \epsilon$$

0,02



$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y}{x^2+y^2}$$

$\Rightarrow$ Primeiro: Consideremos $(x,y)\to(0,0)$ ao longo de qualquer reta pela origem.

Retas: $y = mx$ ↳ Coef. angular e $x = 0$ $(\underbrace{\text{Reta Vertical}}_{\text{eixo } y})$

① $f(x,y) = f(x,mx) = \dfrac{3x^2.(mx)}{x^2+(mx)^2} = \dfrac{3mx^3}{x^2+m^2x^2}$

$$= \frac{3m\cancel{x^3}}{\cancel{x^2}(1+m^2)} = \boxed{\frac{3mx}{1+m^2}}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,mx) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \boxed{\frac{3mx}{1+m^2}} = \boxed{0}$$

$f(x,y) \to 0$ quando $(x,y) \to (0,0)$ ao longo de $y = mx$.

(*) Pela reta $x = 0$:

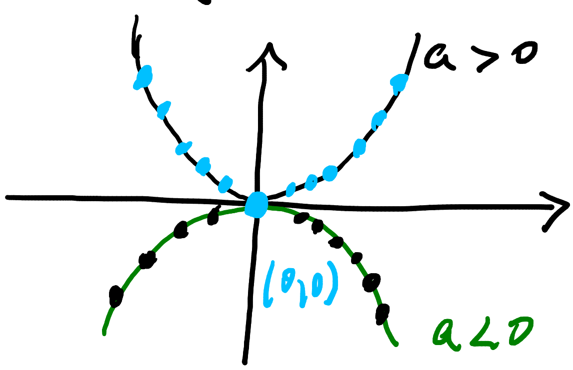
$$f(x,y) = f(0,y) = \frac{3 \cdot 0^2 \cdot y}{0^2 + y^2} = 0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(0,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} 0 = \boxed{0}$$

(*) $f(x,y) \to 0$ quando $(x,y) \to (0,0)$ ao longo da reta $x = 0$.

⇒ Segundo: Consideremos $\boxed{(x,y)} \to (0,0)$ ao longo das parábolas $y = ax^2$ e $x = by^2$. //

(*) $y = ax^2$



$$f(x,y) = \frac{3x^2 y}{x^2+y^2}$$

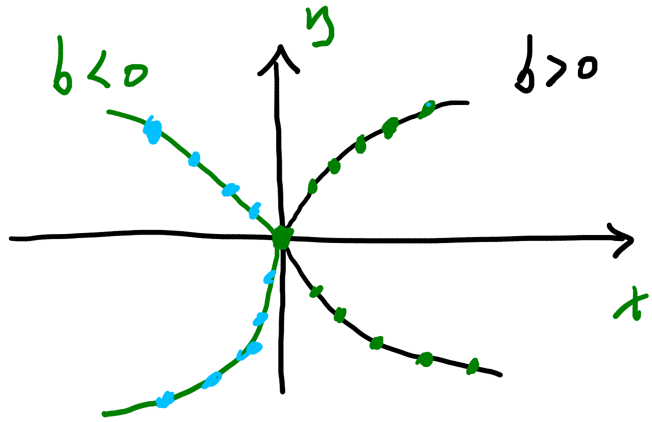
(✱) $$f(x,y) = f(x, ax^2) = \frac{3x^2(ax^2)}{x^2+(ax^2)^2} = \frac{3ax^4}{x^2+a^2x^4}$$

$$= \frac{3a\cancel{x^4}}{\cancel{x^2}(1+a^2x^2)} = \boxed{\frac{3ax^2}{1+a^2x^2}}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,ax^2) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3ax^2}{1+a^2x^2} = \boxed{0}$$

(✱) $f(x,y) \to 0$ quando $(x,y) \to (0,0)$ ao longo da parábola $y = ax^2$.

(✱) Parábola: $x = by^2$

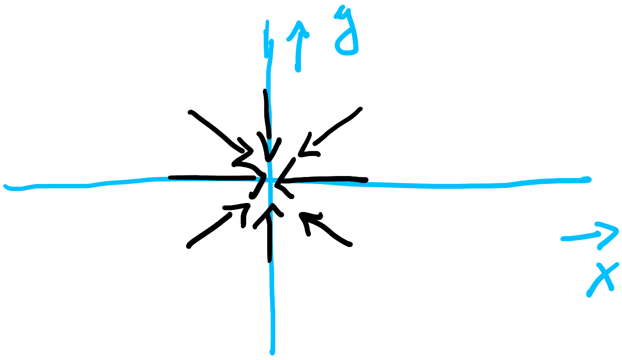


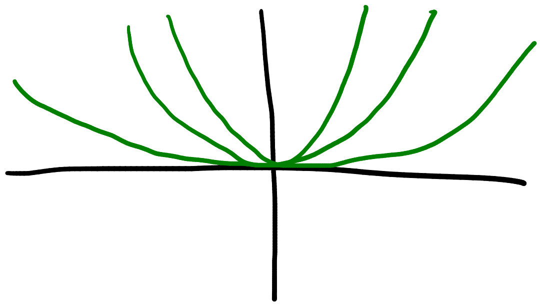
$$f(x,y) = \frac{3x^2 y}{x^2+y^2}$$

(✱) $$f(by^2, y) = \frac{3(by^2)^2 \cdot y}{(by^2)^2 + y^2} = \frac{3b^2y^4 \cdot y}{b^2y^4+y^2} = \frac{3b^2y^5}{y^2(1+b^2y^2)}$$

$$= \frac{3by^3}{1+b^2y^2}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(bx^2, y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3by^3}{1+b^2y^2} = \boxed{0}$$

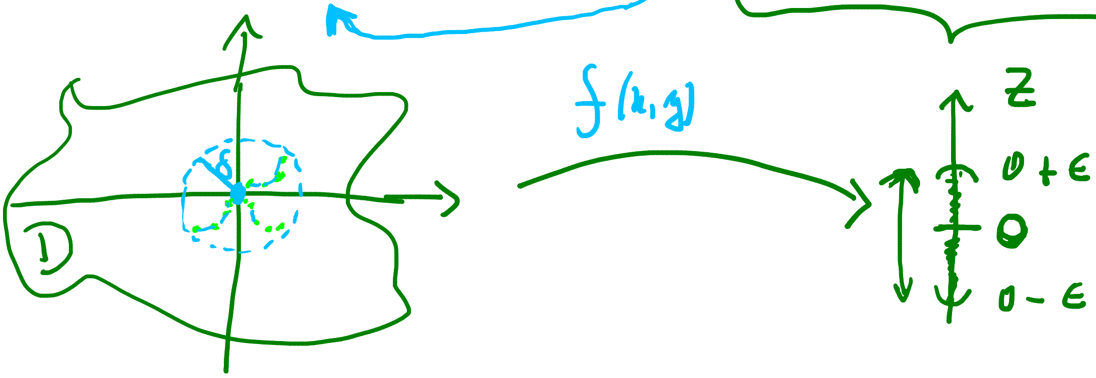




Assumimos: $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y}{x^2+y^2} = 0$. //

Demonstração: Seja $\epsilon > 0$. Queremos encontrar $\delta > 0$ tal que se

$$0 < \underbrace{d[(x,y),(0,0)]} < \delta \Rightarrow \underbrace{\overbrace{|f(x,y) - 0|} < \epsilon}$$ ///



$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que se

$$0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta \quad \text{então} \quad \left|\frac{3x^2y}{x^2+y^2}\right| < \epsilon$$

$$\underbrace{\frac{3x^2|y|}{x^2+y^2}} < \epsilon$$

Obj.: Relacionar essa quantidade com $\sqrt{x^2+y^2}$ //

$$\underbrace{3|y|\cdot\frac{x^2}{x^2+y^2}}$$

$\Big\{$ $x^2 \le x^2+y^2$, pois $y^2 \ge 0$, então

$$\frac{x^2}{x^2+y^2} \le 1 \text{ //}$$

$$\underbrace{3|y|\cdot\frac{x^2}{x^2+y^2}} \le 3\underbrace{|y|}_{\sqrt{y^2}}\cdot 1 = 3\underbrace{\sqrt{y^2}}_{y^2 \le x^2+y^2} \le 3\underbrace{\sqrt{x^2+y^2}}$$

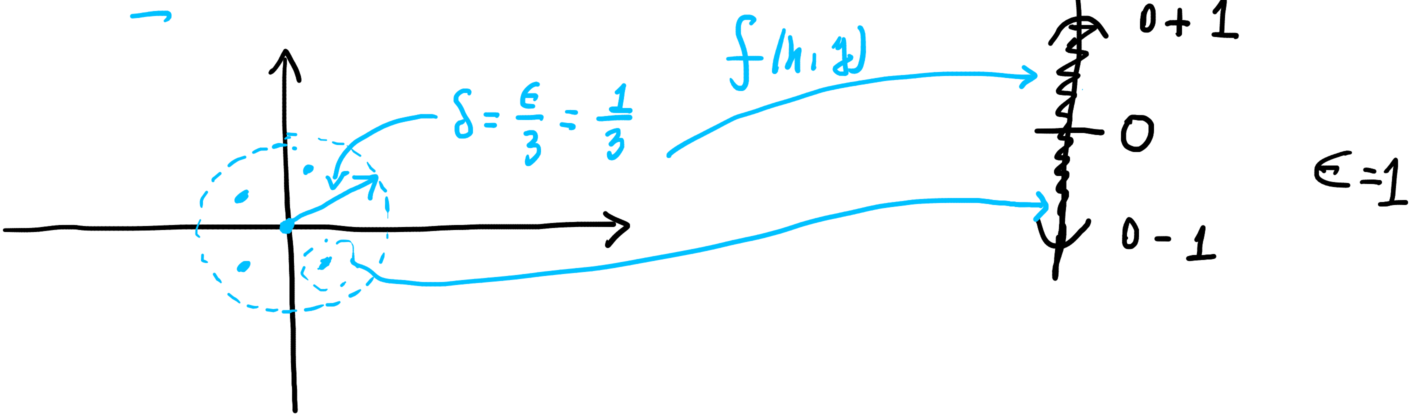
Logo, $$\left|\frac{3x^2y}{\underbrace{x^2+y^2}_{|f(x,y)-0|}} - 0\right| \le 3\sqrt{x^2+y^2} < 3\delta = 3\cdot\frac{\epsilon}{3} = \epsilon$$

$\Rightarrow$ Para cada $\epsilon > 0$ dado, se escolhermos $\delta = \frac{\epsilon}{3}$ e deixarmos $0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta = \frac{\epsilon}{3}$, então:

Consequentemente, pela definição de limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y}{x^2+y^2} = 0. \text{ ///}$$

$$f(x,y) = \frac{3x^2 y}{x^2+y^2}$$



Teorema: Assuma que $\lim\limits_{(x,y)\to P} f(x,y)$ e $\lim\limits_{(x,y)\to P} g(x,y)$ existem.

(i) Lei da Soma:

$$\lim_{(x,y)\to P} [f(x,y)+g(x,y)] = \lim_{(x,y)\to P} f(x,y) + \lim_{(x,y)\to P} g(x,y)$$

(ii) Lei do Múltiplo Constante: $\forall K \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{(x,y)\to P} K \cdot f(x,y) = K \cdot \lim_{(x,y)\to P} f(x,y)$$

(iii) Lei do Produto:

$$\lim_{(x,y)\to P} f(x,y)\cdot g(x,y) = \lim_{(x,y)\to P} f(x,y) \cdot \lim_{(x,y)\to P} g(x,y)$$

(iv) Lei do Quociente: se $\lim\limits_{(x,y)\to P} g(x,y) \neq 0$, então

$$\lim_{(x,y)\to P} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{\lim\limits_{(x,y)\to P} f(x,y)}{\lim\limits_{(x,y)\to P} g(x,y)}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{(*)} \lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} x = a; \quad \text{(*)} \lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} y = b; \\ \\ \text{(*)} \lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} c = c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{array}}$$

Função Polinomial (de duas variáveis): uma soma de termos da forma $c x^m y^n$, onde c é uma constante e m e n são inteiros não negativos.

$$p(x,y) = x^4 + 5x^3y^2 + 6xy^4 - 7y + 6$$

Função racional: uma razão entre dois polinômios.

$$q(x,y) = \frac{2xy + 1}{x^2 + y^2}$$

Teorema: Seja $p(x,y)$ e $r(x,y)$ funções polinomiais quaisquer. Então,

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} p(x,y) = p(a,b) \quad \text{e}$$

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{p(x,y)}{r(x,y)} = \frac{p(a,b)}{r(a,b)}, \quad \text{desde que} \lim_{(x,y)\to(a,b)} r(x,y) \neq 0.$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(a,b)} (x^2 y + x \cdot y) = \lim_{(x,y)\to(a,b)} x^2 \cdot y + \lim_{(x,y)\to(a,b)} x \cdot y$$

$$= \lim_{(x,y)\to(a,b)} \overbrace{x^2}^{x \cdot x} \cdot \lim_{(x,y)\to(a,b)} y + \lim_{(x,y)\to(a,b)} x \cdot \lim_{(x,y)\to(a,b)} y$$

$$= a^2 \cdot b + ab = p(a,b)$$

(*) Avalie: $$\lim_{(x,y)\to(-2,3)} \frac{\overbrace{x^2 y + 1}^{p(x,y)}}{\underbrace{x^3 y^2 - 2x}_{r(x,y)}}$$ //

$$\frac{(-2)^2 \cdot 3 + 1}{(-2)^3 \cdot 3^2 - 2 \cdot (-2)} = \frac{4 \cdot 3 + 1}{(-8) \cdot 9 + 4} = \boxed{-\frac{13}{68}}$$

Definição: Continuidade. Uma função f de duas variáveis é "Contínua" em $P=(a,b)$ se

$$\boxed{\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)}$$

Dizemos que f é contínua se f for contínua em cada ponto $P=(a,b)$ do seu domínio.

Exemplo: $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ //

A função f é descontínua em $(0,0)$, pois ela não está definida nesse ponto. Como f é uma função racional, ela é contínua em seu domínio.

$$D(f) = \{(x,y) \mid (x,y) \neq (0,0)\}$$ ///