Revisão: Continuidade.

Seja $z = f(x,y)$. Então f é contínua em $P=(a,b)$ se:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b).$$

Se $p(x,y)$ e $r(x,y)$ forem funções polinomiais, ou seja, funções dadas pela soma de termos $a x^m y^n$, então:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} p(x,y) = p(a,b) \quad e \quad \lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{p(x,y)}{r(x,y)} = \frac{p(a,b)}{r(a,b)}$$

onde $\lim_{(x,y)\to(a,b)} r(x,y) \neq 0$ //

Obs.: se f for um produto $f(x,y) = h(x)\cdot g(y)$, onde os limites de $h(x)$ e $g(y)$ ambos existem, então:

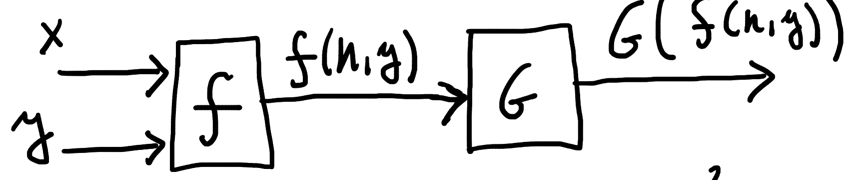
$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(a,b)} h(x)\cdot g(y) = \left(\lim_{x\to a} h(x)\right)\cdot\left(\lim_{y\to b} g(y)\right)$$

Exemplo: Avalie $\lim_{(x,y)\to(3,0)} \overbrace{x^3 \cdot \frac{\operatorname{sen} y}{y}}^{f(x,y)}$. $\begin{cases} h(x) = x^3 \\ g(y) = \frac{\operatorname{sen} y}{y} \end{cases}$

$$\lim_{(x,y)\to(3,0)} x^3 \cdot \frac{\operatorname{sen} y}{y} = \left(\lim_{x\to 3} x^3\right)\cdot\left(\lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{sen} y}{y}\right) = 3^3 \cdot (1) = 27$$

<u>Composição de funções</u>: Se $\overset{f(x,y)}{f}$ for uma função de duas variáveis e $G(u)$ uma função de uma variável, então a função composta $G \circ f$ é a função de duas variáveis dada por:

$$\begin{cases} u = f(x,y) \\ G(u) \end{cases} \Rightarrow G(f(x,y))$$



<u>Exemplo</u>: Escreva $H(x,y) = e^{-x^2+2y}$ como uma função composta e avalie $\lim_{(x,y)\to(1,2)} H(x,y)$.

$$\Rightarrow H(x,y) = G\circ f = G(f(x,y))$$

$$= e^{-x^2+2y} \Rightarrow \begin{cases} G(u) = e^{u} \\ f(x,y) = -x^2+2y = u \end{cases}$$

$$= G(u) = G(f(x,y)) = G(-x^2+2y) = e^{-x^2+2y}$$

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} H(x,y) = \lim_{(x,y)\to(1,2)} e^{-x^2+2y} = e^{-(1)^2+2.(2)} = e^{3} \;//$$

<u>Teorema</u>: Se uma função $f(x,y)$ for contínua em (a,b) e uma função $G(u)$ for contínua em $c = f(a,b)$, então a função composta $G(f(x,y))$ é contínua em (a,b).

$$(*) \quad \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \underbrace{f(a,b)} = c$$

$$(*) \quad \lim_{(x,y)\to(a,b)} G(f(x,y)) = G(f(a,b)) = G(c) \;//$$

Derivadas Parciais

Consideremos o índice de massa corporal (IMC) de uma pessoa definido por:

$$B(m,h) = \frac{m}{h^2} \quad \begin{cases} m: \text{ massa da pessoa (kg)} \\ h: \text{ altura } '' \quad '' \quad (m) \end{cases}$$

Note que: $B(m,h)$ é crescente como uma função de m (quando h é fixo) mas decrescente como uma função de h (quando m é fixo).

(x) Se fixarmos, por exemplo, $h = h_0$, estamos considerando o IMC como uma função da única variável m.

(x) Se escrevermos $g(m) = B(m, h_0)$, então $g(m)$ descreve como o IMC aumenta à medida que a massa m aumenta quando a altura é $h = h_0$.

(x) Logo, a derivada de g quando $m = m_0$ é a taxa de variação de B em relação a m quando $m = m_0$.

$$\boxed{g(m) = B(m, h_0)} \qquad B(m, h_0) = \frac{m}{h_0^2} = \frac{1}{h_0^2} \cdot m$$

$$g'(m)\Big|_{m=m_0} = \lim_{\Delta m \to 0} \frac{g(m_0 + \Delta m) - g(m_0)}{\Delta m} =$$

$$= \lim_{\Delta m \to 0} \frac{B(m_0 + \Delta m, h_0) - B(m_0, h_0)}{\Delta m}$$

<u>Definição</u>: As derivadas parciais são taxas de variação em relação a cada variável separadamente.

Uma função $f(x,y)$ de duas variáveis tem <u>duas</u> derivadas parciais, definidas pelos seguintes limites:

$$\begin{cases} f_x(x,y) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x+h, y) - f(x,y)}{h} \\ f_y(x,y) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x, y+h) - f(x,y)}{h} \end{cases}$$

Notações para derivadas parciais: Se $z = f(x,y)$, escrevemos

$$\underline{f_x(x,y)} = f_x = \frac{\partial f}{\underbrace{\partial x}} = \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \frac{\partial z}{\partial x} = f_1 = D_1 f = D_x f$$

$$f_y(x,y) = f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \frac{\partial z}{\partial y} = f_2 = D_2 f$$
$$= D_y f$$

Exemplo: Seja $B(m,h) = \frac{m}{h^2}$. Calcule $\frac{\partial B}{\partial m}$ e $\frac{\partial B}{\partial h}$ para uma pessoa com $m = 64$ kg e $h = 1,68$ m.

$$\Rightarrow \frac{\partial B}{\partial m} = \frac{\partial}{\partial m}\left(\frac{m}{h^2}\right) = \frac{1}{h^2} \cdot \frac{\partial}{\partial m}(m) = \frac{1}{h^2} \cdot (1) = \frac{1}{h^2} \text{ //}$$

$$\left.\frac{\partial B}{\partial m}\right|_{(64,\ 1,68)} = \frac{1}{(1,68)^2} \approx \boxed{0,35 (kg/m^2)/kg}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial B}{\partial h} = \frac{\partial}{\partial h}\left(\frac{m}{h^2}\right) = m \frac{\partial}{\partial h}\left(\frac{1}{h^2}\right) = m \frac{\partial}{\partial h}(h^{-2})$$

$$= m \cdot (-2 \cdot h^{-3}) = \boxed{-\frac{2m}{h^3}}$$

$$\left.\frac{\partial B}{\partial h}\right|_{(64,\ 1,68)} = -\frac{2 \cdot 64}{(1,68)^3} \approx -27 (kg/m^2)/m$$

Exemplo: Se $f(x,y) = x^3 + x^2 y^3 - 2y^2$, encontre $f_x(2,1)$ e $f_y(2,1)$.

$$\Rightarrow f_x(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^3 + x^2 \cdot y^3 - 2y^2\right)$$

$$= 3x^2 + y^3 \cdot 2x = 3x^2 + 2xy^3.$$

$$\Rightarrow \underbrace{f_x(2,1)} = 3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 1^3 = 12 + 4 = \boxed{16}$$

$$\Rightarrow f_y(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^3 + x^2 \cdot y^3 - 2y^2\right)$$

$$= x^2 \cdot (3y^2) - 2 \cdot 2y = \boxed{3x^2 y^2 - 4y}$$

$$f_y(2,1) = 3 \cdot 2^2 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 = 12 - 4 = 8$$

Exemplo: Se $f(x,y) = \operatorname{sen}\left(\frac{x}{1+y}\right)$, calcule $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$.

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{sen}\left(\frac{x}{1+y}\right) = \cos\left(\frac{x}{1+y}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{1+y}\right)$$

$$= \cos\left(\frac{x}{1+y}\right) \cdot \frac{1}{1+y} \cdot \frac{\partial}{\partial x}(x) = \frac{1}{1+y} \cdot \cos\left(\frac{x}{1+y}\right).$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \sin\left(\frac{x}{1+y}\right) = \cos\left(\frac{x}{1+y}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{1+y}\right)$$

$$= \cos\left(\frac{x}{1+y}\right) \cdot x \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{1+y}\right)$$

$$= x \cos\left(\frac{x}{1+y}\right) \cdot \left(\frac{\cancelto{0}{0 \cdot (1+y)} - 1 \cdot 1}{(1+y)^2}\right)$$

$$= -\frac{x}{(1+y)^2} \cdot \cos\left(\frac{x}{1+y}\right) \quad //$$