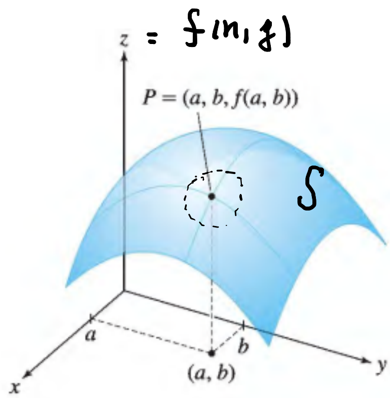
Derivadas Parciais

Em geral, se f for uma função de duas variáveis, suas derivadas parciais são:

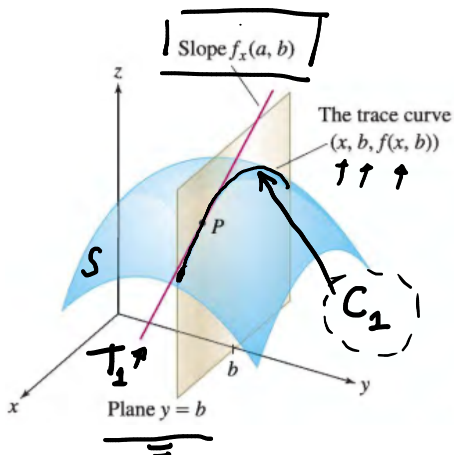
$$\begin{cases} f_x(x,y) = \lim\limits_{k \to 0} \dfrac{f(x+k,y) - f(x,y)}{k} = \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} \\[2ex] f_y(x,y) = \lim\limits_{k \to 0} \dfrac{f(x,y+k) - f(x,y)}{k} = \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} \end{cases}$$

Interpretações das derivadas parciais



Lembre-se: $z = f(x,y)$ representa uma superfície S (o gráfico de f).

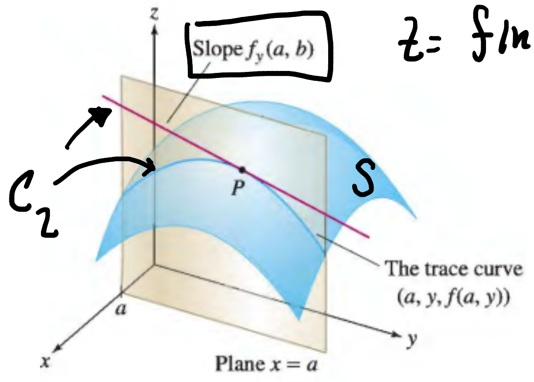
Se $f(a,b) = c$, então o ponto $P = (a,b,c) \in S$.



(*) Fixando $y = b$, $\boxed{z = f(x,b)}$ é o traço de S no plano $y = b$ $\Rightarrow$ curva C_1.

$$z = f(x, \underset{\uparrow}{y})^{\to b}$$

(*) Fixando $x = a$, $z = f(a,y)$ é o traço de S no plano $x = a$ $\Rightarrow$ curva C_2



$z = f(x,y)$

$f_y(x,y)$, a

(a,b)

$x = a$

$\boxed{f_y(a,b)}$

Obs.: • C_1 é o gráfico da função $g(x) = f(x,b)$, então o coef. angular da sua tangente T_1 em P é

$$g'(a) = f_x(a,b).$$

• C_2 é o gráfico da função $G(y) = f(a,y)$, então o coef. angular da sua tangente T_2 em P é

Exemplo: Encontre $\partial z/\partial x$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ se z é definida implicitamente como uma função de x e y pela equação

$$x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz + 4 = 0 \therefore \underbrace{F(x,y,z) = 0}_{F(x,\,y,\,f(x,y)) = 0}$$

Então avalie essas derivadas parciais no ponto $(-1, 1, 2)$.

$$\Rightarrow x^3 + y^3 + \boxed{z}^3 + \overbrace{6x\,y\,z}^{6y(x.z)} + 4 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}:\ 3x^2 + 0 + 3z^2 \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + 6y\left(1 \cdot z + x \cdot \frac{\partial z}{\partial x}\right) + 0 = 0$$

$$3x^2 + 3z^2 \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + 6yz + 6yx \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

$\div 3$ $\qquad$ $\div 3$

$$(3z^2 + 6xy) \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = -3x^2 - 6yz$$

$$(z^2 + 2xy) \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = -x^2 - 2yz$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x^2 - 2yz}{z^2 + 2xy} = -\frac{x^2 + 2yz}{z^2 + 2xy} \quad //$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(-1,1,2)} = -\frac{(-1)^2 + 2\cdot(1)\cdot 2}{(2)^2 + 2\cdot(-1)\cdot 1} = -\frac{1+4}{4-2} = \boxed{-\frac{5}{2}}$$

$$\Rightarrow x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz + 4 = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} : 0 + 3y^2 + 3z^2 \cdot \frac{\partial z}{\partial y} + 6x\left(1 \cdot z + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y}\right) + 0 = 0$$

$$3y^2 + 3z^2 \cdot \frac{\partial z}{\partial y} + 6xz + 6xy \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

$\div 3$ $\qquad$ $\div 3$

$$(3z^2 + 6xy) \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = -3y^2 - 6xz$$

$$\underbrace{(z^2 + 2xy)}\, \frac{\partial z}{\partial y} = -y^2 - 2xz$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y^2 + 2xz}{z^2 + 2xy} \quad //$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(-1,1,2)} = -\frac{(1)^2 + 2.(-1).2}{(2)^2 + 2.(-1).1} = -\frac{1-4}{4-2} = \frac{3}{2}$$

Em geral, se $\underline{u}$ for uma função de $\underline{n}$ variáveis,

$u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, sua derivada parcial em relação a

i-ésima variável x_i é: $1 \leq i \leq n$

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \lim_{k \to 0} \frac{f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + k, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)}{k}$$

e também escrevemos $\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} = f_{x_i} = f_i = D_i f$

<u>Exemplo</u>: calcule $f_z(0,0,1,1)$, onde $f(x,y,z,w) = \frac{e^{xz+y}}{z^2+w}$.

$$\Rightarrow f_z(x,y,z,w) = \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{e^{xz+y}}{z^2+w}\right)$$

$$f_z = \frac{\frac{\partial}{\partial z}\left(e^{xz+y}\right).(z^2+w) - \left(e^{xz+y}\right).\frac{\partial}{\partial z}(z^2+w)}{(z^2+w)^2}$$

$$\updownarrow$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{e^{xz+y}.\frac{\partial}{\partial z}(xz+y).(z^2+w) - \left(e^{xz+y}\right).2z}{(z^2+w)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{e^{(xz+y)} \cdot \left[x \cdot (z^2+w) - 2z\right]}{(z^2+w)^2}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{\substack{x\ y\ z\ w \\ (0,0,1,1)}} = \frac{e^{(0.1+0)} \cdot \left[0 \cdot (1^2+1) - 2.1\right]}{(1^2+1)^2}$$

$$= \frac{\overset{1}{\cancel{e^0}} \cdot (0-2)}{4} = -\frac{1}{2}$$

Equações das Retas Tangentes

Seja $z = f(x,y)$. Então, em $P = (a,b)$;

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(a,b)} = f_x(a,b)$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(a,b)} = f_y(a,b)$$

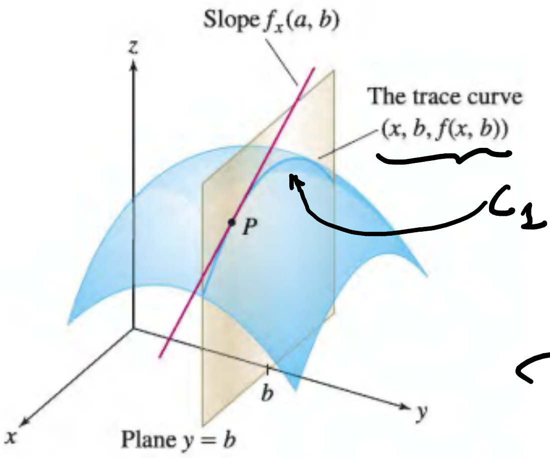
São os Coeficientes angulares das tangentes a C_1 e C_2.

C_1 : Curva traço no plano $y = b \Rightarrow z = f(x,b)$

$(x, b, f(x,b))$

C_2 : Curva traço no plano $x = a \Rightarrow z = f(a,y)$

$(a, y, f(a,y))$



Equação da Tangente a C_1:

$$z - z_0 = f_x(a,b)(x - x_0),$$

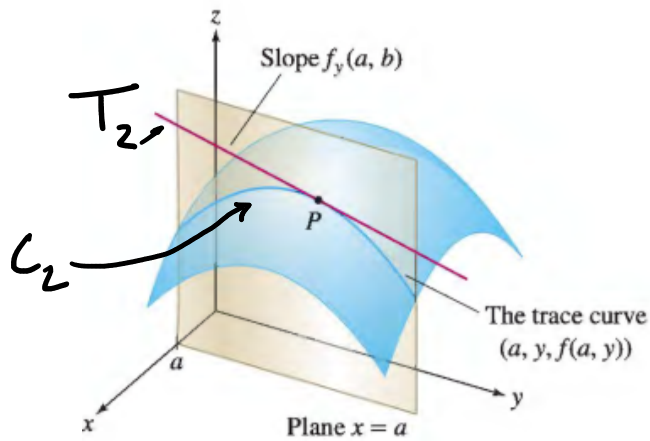
onde $y = y_0$

Parametrização: Defina $x - x_0 = t$

$$\begin{cases} x = x_0 + t \\ y = y_0 \\ z = z_0 + f_x(a,b)\, t \end{cases}$$

De forma similar:

Equação da Tangente a C_2:



$$z - z_0 = f_y(a,b)(y - y_0)$$

onde $x = x_0$

Parametrização:

$y - y_0 = t$

$$\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 + t \\ z = z_0 + f_y(a,b) \cdot t \end{cases}$$

Exemplo: $f(x,y) = 4 - x^2 - 2y^2$

$f_x(1,1)$ e $f_y(1,1)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(4 - x^2 - 2y^2) = \underbrace{-2x}$$ //

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,1)} = f_x(1,1) = -2.1 = -2$$

Tangente

$$\begin{cases} x = x_0 + t = 1 + t \\ y = y_0 = 1 \\ z = z_0 + f_x(1,1).t = 1 - 2t \end{cases}$$

$$f(1,1) = 4 - (1)^2 - 2.(1)^2 = 4 - 1 - 2 = 1$$

(*) $$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(4 - x^2 - 2y^2) = -4y$$

$$f_y(1,1) = -4.1 = -4$$

Tangente

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + t \\ z = 1 - 4t \end{cases}$$