

**Universidade Federal do Espírito Santo**  
**Departamento de Informática**  
**2º Trabalho de Algoritmos Numéricos - 17/2**

**Método das Diferenças finitas**  
(Cursos: Engenharia Mecânica e Ciência da Computação)

**Data de entrega:** 18/12/17

## 1 Descrição do Trabalho

Equações diferenciais parciais, aparecem frequentemente na solução de problemas em diversas áreas de conhecimento tais como Física, Matemática, Engenharias, Biologia, Economia, etc. Sendo assim, nesse trabalho vamos estudar o processo de discretização pelo método das diferenças finitas de equações diferenciais parciais bidimensionais regidas por equações do tipo:

$$-k \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \beta_x(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + \beta_y(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + \gamma(x, y)u = f(x, y) \quad \text{em } \Omega \quad (1)$$

considerando  $k \in \mathbb{R}$ ,  $\beta_x(x, y)$ ,  $\beta_y(x, y)$ ,  $\gamma(x, y)$  e  $f(x, y)$  fornecidas e no contorno  $\Omega$  temos:

$$\begin{aligned} u &= g & \text{para } (x, y) \in \Gamma_g \\ -k \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} &= h & \text{para } (x, y) \in \Gamma_h \\ \text{ou} \\ k \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + cu &= cq & \text{para } (x, y) \in \Gamma_h \end{aligned} \quad (2)$$

sendo  $c$  e  $q$  conhecidas e  $\Omega = \Gamma_g + \Gamma_h$  e  $\mathbf{n}$  o vetor normal unitário a  $\Gamma_h$ .

Deseja-se obter a solução  $u(x, y)$  em um domínio retangular de dimensões  $(x_1, x_n) \times (y_1, y_m)$ . Considere uma subdivisão do domínio em células retangulares, sendo  $n - 1$  divisões na horizontal e  $m - 1$  divisões na vertical, respectivamente, de dimensões  $h_x$  e  $h_y$ .

## 2 Objetivos

- Discretizar a Equação (1) pelo método das diferenças finitas e resolver o sistema linear resultante através do método SOR, armazenando a matriz resultante pela estrutura de armazenamento para matrizes esparsas desenvolvida no primeiro trabalho.
- Fazer uma análise do comportamento do método SOR aplicado a equações diferenciais parciais bidimensionais.
- Estudar soluções aproximadas de aplicações.

## 3 Etapas do trabalho

### 3.1 Implementação

Faça um programa computacional modularizado para resolver a equação bidimensional (1) pelo método das diferenças finitas. O programa principal deve ter a seguinte estrutura:

- Um procedimento ou função para leitura dos dados (pode ser feita através de um arquivo de entrada):  $n$ ,  $m$ ,  $x_1$ ,  $x_n$ ,  $y_1$ ,  $y_m$ , número máximo de iterações ( $Niter_{max}$ ), parâmetro do SOR ( $w$ ), tolerância ( $etol$ ).
- Um procedimento ou função para o cálculo das funções e/ou constantes conhecidas ( $k$ ,  $\beta_x(x, y)$ ,  $\beta_y(x, y)$ ,  $\gamma(x, y)$  e  $f(x, y)$ ) nos pontos incógnitas ( $x_i, y_j$ )
- Um procedimento ou função para a montagem do sistema esparso. Considere aproximações de 2a. ordem para discretizar a Eq. (1) por diferenças finitas., gerando um sistema com ordem  $I = n \times m$ .
- Um procedimento ou função para tratar as condições de contorno. Considere aproximações de 1a. ordem para tratar derivadas de fluxo prescrito.
- Um procedimento ou função para solução do sistema linear resultante pelo método SOR.
- Um procedimento ou função para imprimir os resultados em um arquivo de saída.
- Um script que plote os gráficos a partir do arquivo gerado.

### 3.2 Exemplos Sugeridos

#### 3.2.1 Validação 1 - Problema Trivial com solução conhecida

Determine a distribuição de calor em uma chapa de metal, com faces termicamente isoladas e com espessura desprezível. Considere que a temperatura  $T(x, y) = T_0$  em todas as faces da chapa, logo espera-se que os valores no interior da placa sejam iguais em todos os pontos de discretização.

$$-\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) = 0 \quad \text{em} \quad R \quad (3)$$

para  $(x, y)$  no conjunto  $R = \{(x, y) \mid 0 < x < L \text{ e } 0 < y < L\}$  com as condições de contorno:

$$\begin{aligned} u(0, y) &= T_0 \\ u(x, 0) &= T_0 \\ u(x, L) &= T_0 \\ u(L, y) &= T_0 \end{aligned}$$

Para testar seu programa varie o número de incógnitas em cada direção  $n$  e  $m$  considerando valores fixos para  $T_0$  e  $L$ .

### 3.2.2 Validação 2 - Problema com solução conhecida

Determine a distribuição de calor em uma chapa de metal, com faces termicamente isoladas e com espessura desprezível, satisfazendo a equação:

$$-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0 \quad \text{em} \quad R \quad (4)$$

para  $(x, y)$  no conjunto  $R = \{(x, y) \mid -1 < x < 1 \text{ e } -1 < y < 1\}$  com as condições de contorno:

$$\begin{aligned} u(-1, y) &= 1 - y^2 & -1 < y \leq 1 \\ \frac{\partial u(x, -1)}{\partial \mathbf{n}} &= -2y & -1 \leq x \leq 1 \\ \frac{\partial u(1, y)}{\partial \mathbf{n}} &= 2x & -1 \leq y \leq 1 \\ u(x, 1) &= x^2 - 1 & -1 \leq x < 1 \end{aligned}$$

A solução exata desse problema é  $u(x, y) = x^2 - y^2$ . Para testar seu programa varie o número de incógnitas em cada direção  $n$  e  $m$ .

### 3.2.3 Transferência de Calor em uma placa retangular

Dada uma placa retangular de prata com dimensões 6 x 5 cm. O calor está sendo gerado uniformemente em todos os pontos com taxa  $q = 1,5 \text{ cal/cm}^3.s$ . A temperatura em cada ponto da placa satisfaz a equação de Poisson:

$$-K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = q \quad \text{em} \quad 0 < x < 6, 0 < y < 5 \quad (5)$$

onde  $K$ , a condutividade térmica, é de  $1,04 \text{ cal/cm.deg.s}$ . Supondo que a temperatura ao longo da borda se mantenha nas seguintes temperaturas:

$$\begin{aligned} u(0, y) &= y(5 - y) \\ u(6, y) &= 0 \\ u(x, 0) &= x(6 - x) \\ u(x, 5) &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

Aproxime a temperatura  $u(x, y)$  no interior da placa.

### 3.2.4 Resfriador bidimensional

Considere o problema de resfriar uma massa aquecida como mostra a Fig. 1. Exemplos podem incluir o resfriamento de chips de computadores ou amplificadores elétricos. O modelo matemático que descreve a transferência de calor nas direções  $x$  e  $y$  é dado pela Eq. (7). Detalhes sobre a definição do modelo matemático pode ser encontrado em <sup>(1)</sup>, disponível na página do curso.

---

<sup>1</sup>R. E. White, *Computational Modeling with Methods and Analysis*, Department of Mathematics, North Carolina State University, 2003

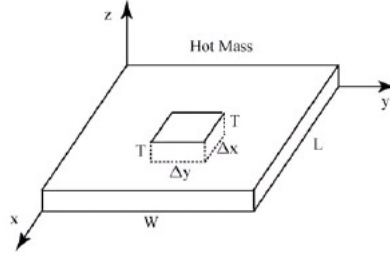


Figura 1: Geometria do Resfriador 2d

$$-K \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{2c}{T} u = \frac{2c}{T} u_{ref} \quad \text{em} \quad \Omega = (0, L) \times (0, W) \quad (7)$$

onde  $K$  é a condutividade térmica (considerada aqui constante),  $c$  é o coeficiente de transferência de calor,  $T$  é a altura do resfriador,  $u_{ref}$  é a temperatura de referência. Encontre a temperatura no interior do resfriador considerando as seguintes condições de contorno:

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= 70, & 0 < x \leq L \\ u(x, W) &= 70, & 0 < x \leq L \\ u(0, y) &= 200, & 0 \leq y \leq W \\ k \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} u(L, y) &= c(u_{ref} - u(L, y)), & 0 < y < W \end{aligned}$$

e os seguintes parâmetros físicos:  $T = 2$ ,  $L = W = 1$ ,  $K = 1$ ,  $u_{ref} = 70$  e  $c = 100$ . Neste teste todas as constantes físicas estão adimensionalizadas.

### 3.3 Potencial e Campo elétrico

O cálculo do potencial elétrico  $V$  e do campo elétrico  $\vec{E}$  satisfazem, respectivamente, as equações:

$$\nabla \cdot (\epsilon \nabla V) = -\rho \quad (8)$$

$$\vec{E} = -\nabla V \quad (9)$$

onde  $\rho$  é a densidade de carga e  $\epsilon$  é a permissividade elétrica. Se considerarmos que a permissividade é constante as equações acima podem ser representadas pela equação de Poisson:

$$\nabla^2 V = -\rho/\epsilon \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = -\rho/\epsilon \quad (10)$$

Em geral a razão da densidade de carga  $\rho$  e a permissividade do meio  $\epsilon$  é diferente de zero apenas em uma região do domínio, como mostra a Figura 2.

Considere na implementação as seguintes situações:

#### Situação A:

- Domínio retangular de dimensões  $(0.0; 1.0) \times (0.0; 0.5)$
- $\rho/\epsilon = 10^{-9}$  no ponto  $(0.5; 0.25)$  e nula no resto do domínio.

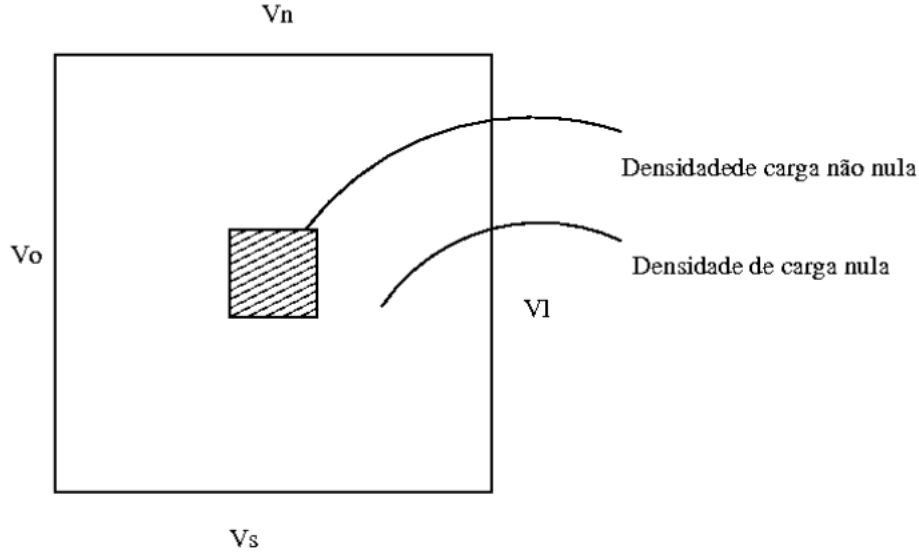


Figura 2: Geometria do Domínio para cálculo do potencial e campo elétrico

- $V_s = 0.0, V_l = 0.0, V_n = 0.0$  e  $V_o = 40.0$ .

#### Situação B:

- Domínio retangular de dimensões  $(0.0; 1.0) \times (0.0; 1.0)$
- $\rho/\epsilon = 10^{-9}$  no quadrado  $(0.4; 0.6) \times (0.4, 0.6)$  e nula no resto do domínio.
- $V_s = 0.0, V_l = 0.0, V_n = 0.0$  e  $V_o = 0.0$ .

Nesta aplicação temos interesse no potencial elétrico  $V$  e no campo elétrico  $\vec{E}$  em cada ponto  $(x_i, y_j)$  do domínio. Para o cálculo do campo elétrico considere a aproximação por diferenças finitas dada por diferenças centrais:

$$\vec{E} = -\nabla V = - \begin{bmatrix} \frac{V_{i+1,j} - V_{i-1,j}}{2h_x} \\ \frac{V_{i,j+1} - V_{i,j-1}}{2h_y} \end{bmatrix} \quad (11)$$

### 3.4 Testes

- Para os problemas com solução exata conhecida medir a qualidade da solução aproximada encontrada calculando o erro. Para tal o erro utilizado deve ser dado por:

$$erro = \max_{\forall i \forall j} |u_{i,j} - u(x_i, y_j)| \quad (12)$$

- Para os demais problemas medir o tempo gasto e o número de iterações necessárias para aproximar a solução da equação (1) por diferenças finitas utilizando o método SOR considerando um parâmetro  $\omega$  adequado.
- Analisar os resultados aproximados com relação as características das aplicações físicas.
- Para todos os problemas presente em tabelas e/ou gráficos os tempos de processamento e o número de iterações necessárias para os seguintes casos de malhas:

- Pequenas:  $256 \times 64$ ,  $64 \times 256$  e  $256 \times 256$ ,
- Grandes:  $1024 \times 1024$ ,  $1026 \times 2048$  e  $2048 \times 2048$ .

Caso algum dos sistemas resultantes das malhas mencionadas não execute, fazer uma análise do porquê.

- Escolha uma malha (não é recomendado ser a mais refinada) e gere os gráficos referentes a solução dos exemplos físicos considerando a solução pelo método  $SOR(\omega)$ . Os gráficos devem ser obtidos a partir dos arquivos de saída (arquivo da solução) e gerados com o auxílio do Gnuplot/Octave. Para o último exemplo faça o gráfico do potencial e do campo elétrico, lembrando que o campo elétrico é um campo vetorial.

## 4 Estrutura do relatório

O relatório deverá ser escrito observando as normas do padrão ABNT.

### Readme

O grupo deve entregar um arquivo denominado Readme dando instruções de como compilar e executar o código, apresentando com detalhes os arquivos de entrada e saída. Vale ressaltar que o código será testado em linux!

### Instruções para entrega

- Os códigos fonte e o Relatório devem ser enviados por e-mail para [luciac@inf.ufes.br](mailto:luciac@inf.ufes.br) até às 23:59:59 horas do dia 18/12/2017. O assunto do e-mail deve ser AN1172:trab2: <nome1>:<nome2> e conter, em anexo, um arquivo do tipo trab2<nome1><nome2>.zip. Neste caso <nome1><nome2> deve conter os nomes e últimos sobrenomes dos integrantes do grupo (por exemplo, AN1172:trab2:LuciaCatabriga:MariaSilva). (Obs: emails com padrões diferentes serão descartados).
- Se você enviar o seu trabalho múltiplas vezes, apenas a última versão enviada será considerada, inclusive para efeito de desconto por atraso.

A divisão do relatório deve ser de acordo com as seguintes seções:

- **Introdução:** onde o grupo deverá apresentar a estrutura do trabalho e os objetivos
- **Método das Diferenças finitas:** onde o grupo sintetizará o conteúdo do método das diferenças finitas.
- **Implementação:** onde serão apresentados a estrutura do código e partes significativas do código comentado.

- **Experimentos Numéricos:** onde serão apresentados os exemplos testes utilizados pelo grupo, tanto as entradas para os programas bem como tabelas e gráficos das respectivas saídas geradas pelas soluções.
- **Conclusão:** onde serão discutidos os resultados obtidos.