

Linearização de Dados Espaço-Temporais Implementação e Avaliação de Curvas de Preenchimento de Espaço Guiadas por Dados

Gabriel de A. S. Meireles, Nivan Ferreira

Centro de Informática
Universidade Federal de Pernambuco (UFPE) – Recife, PE – Brazil

{gasm, nivan}@cin.ufpe.br

Abstract.

Resumo.

1. Introdução

2. Trabalhos Relacionados

3. Metodologia

3.1. Visão Geral

A abordagem proposta fundamenta-se na linearização de estruturas multidimensionais (2D ou 3D) em sequências unidimensionais (1D). Expandido o conceito de curvas baseadas em contexto (*Context-based Space-Filling Curves*) [1], utiliza-se a técnica de curvas de preenchimento de espaço guiadas por dados (*Data-Driven Space-Filling Curves*) [6]. O núcleo do processamento estabelece um ciclo hamiltoniano que percorre integralmente a grade de pixels, com o objetivo de preservar simultaneamente a coerência espacial, referente a localidade geométrica do caminho, e a coerência dos dados, associada à localidade dos dados no caminho.

Para viabilizar a implementação e a análise experimental, desenvolveu-se uma arquitetura de software híbrida entre C++ e Python. A metodologia trata imagens estáticas no formato $H \times W$ (2D) ou $H \times W \times C$ (3D). Analogamente, vídeos são processados como uma sequência de imagens estáticas do tipo $F \times H \times W$ ou $F \times H \times W \times C$, onde os parâmetros são definidos como:

- F : quantidade de quadros do vídeo;
- H : altura da imagem (número de linhas);
- W : largura da imagem (número de colunas);
- C : número de canais de cor.

O processamento de um vídeo ocorre, inicialmente, pela linearização independente de cada quadro. No entanto, curvas geradas de forma isolada para quadros consecutivos podem apresentar variações topológicas abruptas, prejudicando a coerência temporal. Para mitigar esse problema, o sistema implementa técnicas de alinhamento temporal, visando maximizar a correlação estrutural entre as curvas de frames adjacentes.

Dessa forma, o trabalho atua em duas frentes principais:

- **Imagens:** Implementação modular e reproduzível do método *data-driven* descrito por Zhou et al. [6] para grades regulares, visando a validação dos resultados teóricos;
- **Vídeos:** Investigação e avaliação de técnicas de alinhamento entre quadros para garantir a coerência temporal após a linearização individual de cada quadro do vídeo.

3.2. O método de linearização *data-driven*

A compreensão do método *data-driven* requer a análise preliminar da abordagem (*Context-based*) proposta por Dafner et al. [1]. O conceito central fundamenta-se no mapeamento da imagem original para o seu grafo dual, realizado através da construção de pequenos circuitos, conforme ilustrado na Figura 1.

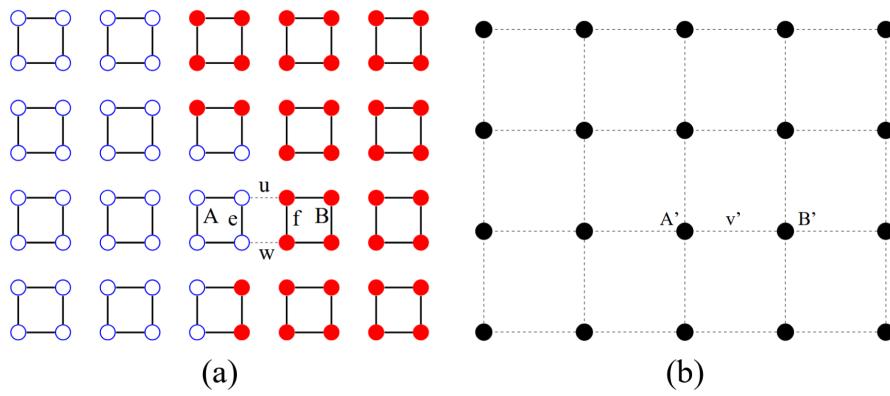


Figura 1. Pequenos circuitos de Dafner et al. [1]

Após esse mapeamento, observa-se que uma árvore geradora no grafo dual equivale a um ciclo hamiltoniano no grafo original. Dessa forma, busca-se definir uma função de peso para as arestas do grafo dual que considere os valores dos pixels da imagem. A partir dessa ponderação, constrói-se uma Árvore Geradora Mínima (MST) no grafo dual para, subsequentemente, recuperar o ciclo hamiltoniano no grafo original. Nesta implementação, adotou-se o algoritmo de Prim para a construção da MST.

A função de custo originalmente proposta é descrita na Equação 1. Nela, $W(C_i, C_j)$ representa o custo de conectar o vértice C_j à árvore geradora, partindo de um vértice C_i já pertencente a ela. As variáveis da equação (u, w, x, y, z, e, f) correspondem aos pesos das arestas no grafo original (ver Figura 2). O peso de cada aresta é definido pela diferença absoluta entre os valores dos pixels em seus extremos. Segundo Dafner et al. [1], para uma aresta $e = (a, b)$, tem-se $w(e) = |a - b|$. Para imagens coloridas (RGB), a diferença é a soma das diferenças absolutas de cada canal: $w(e) = \sum_{k \in \{R, G, B\}} |a_k - b_k|$.

Dessa maneira, a abordagem *context-based* gera linearizações que priorizam a coerência dos dados. Contudo, este método não considera explicitamente a coerência espacial durante a construção da curva. A abordagem *data-driven*, detalhada por Zhou et al. [6], soluciona essa limitação introduzindo uma nova função de custo composta, preservando, no entanto, a estrutura fundamental de mapeamento dual e MST proposta no artigo original [1].

A abordagem *data-driven*, conforme proposto em [6] utiliza a função de custo ponderada descrita na Equação 2. Os componentes da equação são definidos como:

- $N(C_i, C_j)$: Custo baseado na coerência dos dados, idêntico à função de Dafner et al. [1] (Equação 1);
- $R_\beta(C_j)$: Custo baseado na coerência espacial, definido pela distância euclidiana entre a célula C_j e o seu centróide S_{C_j} , i.e., $\|C_j - S_{C_j}\|$;
- $\alpha \in [0, 1]$: Fator de ponderação. Valores menores de α priorizam a similaridade dos dados, enquanto valores maiores priorizam a regularidade espacial do caminho;
- β : Inteiro que define a dimensão $\beta \times \beta$ dos blocos no grafo dual, determinando a posição dos centroides S_{C_j} no centro de cada bloco. Experimentalmente, valores elevados de α tendem a confinar o ciclo hamiltoniano dentro de cada bloco antes de permitir a transição para regiões vizinhas.

Na implementação desenvolvida neste trabalho, α e β foram definidos como hiperparâmetros configuráveis, permitindo o ajuste fino do comportamento da curva e a análise do impacto que a variação desses parâmetros exerce sobre a preenchimento resultante. A relação geométrica e estrutural entre os custos de dados $N(C_i, C_j)$ e espacial $R_\beta(C_j)$ é ilustrada na Figura 3.

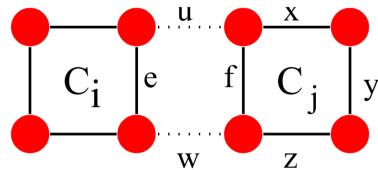


Figura 2. Pesos da função proposta de Dafner et al. [1]

$$W(C_i, C_j) = |u| + |w| + |x| + |y| + |z| - |e| - |f| \quad (1)$$

$$W(C_i, C_j) = (1 - \alpha)N(C_i, C_j) + \alpha R_\beta(C_j) \quad (2)$$

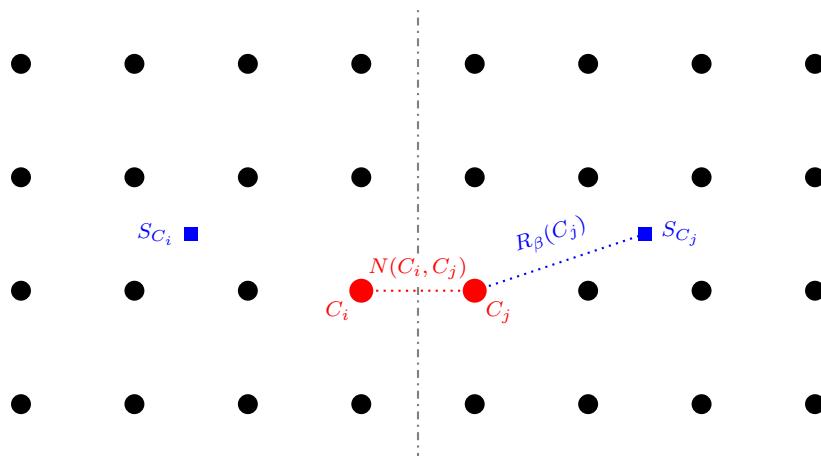


Figura 3. Representação das relações no grafo dual: o custo de dados $N(C_i, C_j)$ e o custo espacial $R_\beta(C_j)$.

3.3. Técnicas de Alinhamento Temporal

Entre dois quadros consecutivos, por mais semelhantes que sejam, pequenas variações nos valores dos pixels podem resultar em linearizações bem distintas. Esse fenômeno prejudica a análise da evolução temporal dos dados, pois quebra visualmente a continuidade entre os quadros. Para mitigar essa instabilidade e promover a coerência temporal na visualização, este trabalho explora duas técnicas de alinhamento. O método fundamenta-se na propriedade de que qualquer rotação cíclica ou inversão de sentido de um ciclo hamiltoniano constitui também uma representação válida de uma curva que cobre integralmente a imagem.

Dessa maneira, o problema de alinhamento consiste em encontrar, para o quadro atual, a rotação e a direção que minimizem uma função de custo objetiva em relação ao quadro anterior. Esse problema pode ser expresso como uma busca pelos parâmetros ótimos definidos na Equação 3. A função f presente nela é definida na Equação 4. Todos os parâmetros e seus significados são explicados a seguir:

- N : Tamanho do vetor da imagem linearizada;
- s : Índice do *cyclic shift* aplicado ao vetor;
- σ : Número binário que indica se o vetor foi invertido ou não;
- V_{t-1} e V_t : Vetores linearizados do quadro anterior e do atual;
- f : Função de custo global que quantifica a dissimilaridade total entre duas sequências;
- g : Função de custo local aplicada elemento a elemento.

$$(s^*, \sigma^*) = \arg \min_{\substack{s \in [0, N-1] \\ \sigma \in \{0,1\}}} f_\sigma(s) \quad (3)$$

$$f_\sigma(s) = \sum_{i=0}^{N-1} g(V_{t-1}[i], V_{\sigma,t}[(i+s) \bmod N]) \quad (4)$$

Neste trabalho, foram avaliadas duas métricas distintas para a função g : a *L1-norm* e a *L2-norm*. Para ambas, são funções facilmente extensíveis para imagens com múltiplos canais.

3.3.1. L1-norm

Nesta abordagem, a métrica local g é a diferença absoluta, conforme a Equação 5. Essa escolha mantém a consistência com a função de custo utilizada na construção da MST durante o algoritmo de Prim. Para imagens com múltiplos canais, a função é generalizada pelo somatório das diferenças em cada canal c , correspondendo à distância de Manhattan como destacado na Equação 6.

$$g(a, b) = |a - b| \quad (5)$$

$$g(a, b) = \sum_c |a_c - b_c| \quad (6)$$

Devido ao uso do módulo, a busca pela configuração ótima nesta estratégia ocorre de maneira exaustiva. Visto que para cada possível deslocamento é necessário computar a diferença em todos os pixels e canais, a complexidade resultante é $O(C \cdot N^2)$, onde C é o número de canais.

3.3.2. L2-norm

Nesta abordagem, a métrica local g é o quadrado da diferença, conforme a Equação 7. Similarmente, essa função pode ser generalizada para imagens com múltiplos canais como apresentado na Equação 8.

$$g(a, b) = (a - b)^2 \quad (7)$$

$$g(a, b) = \sum_c (a_c - b_c)^2 \quad (8)$$

Essa formulação permite expandir o termo quadrático da função global que se deseja minimizar e alcançar propriedades algébricas interessantes, como demonstrado na Equação 9:

$$\begin{aligned} f_\sigma(s) &= \sum_{i=0}^{N-1} \left(V_{t-1}[i] - V_{\sigma,t}[(i+s) \bmod N] \right)^2 \\ &= \sum_{i=0}^{N-1} V_{t-1}[i]^2 + \sum_{i=0}^{N-1} V_{\sigma,t}[(i+s) \bmod N]^2 - 2 \sum_{i=0}^{N-1} V_{t-1}[i] V_{\sigma,t}[(i+s) \bmod N] \\ &= \sum_{i=0}^{N-1} V_{t-1}[i]^2 + \sum_{i=0}^{N-1} V_t[i]^2 - \underbrace{2 \sum_{i=0}^{N-1} V_{t-1}[i] V_{\sigma,t}[(i+s) \bmod N]}_{\text{correlação cruzada circular}} \end{aligned} \quad (9)$$

Dessa maneira, observa-se que, para alcançar o mínimo de f_σ , é preciso encontrar os valores de s e σ que maximizem a correlação cruzada circular [5], uma vez que os termos de soma quadrática são constantes e independem da rotação e da direção. Essa propriedade é fundamental pois, dado um $\sigma \in \{0, 1\}$, a correlação pode ser calculada para todo valor de s simultaneamente utilizando a Transformada Rápida de Fourier (FFT) em $O(N \log N)$. Como existem apenas duas orientações possíveis para σ , a complexidade assintótica se mantém. Assim, a complexidade final alcançada é $O(C \cdot N \log N)$, tal que C é o número de canais.

3.4. Detalhes de Implementação

Visando alto desempenho computacional, o núcleo de processamento numérico foi implementado inteiramente em C++20. Para garantir interoperabilidade e facilitar a análise exploratória, as funcionalidades foram expostas ao ambiente Python utilizando a biblioteca Pybind11, que atua como uma camada de integração leve.

O ambiente de validação experimental foi construído sobre *Jupyter Notebooks*, permitindo prototipagem rápida e visualização imediata dos resultados. Essa estrutura permitiu avaliar como a variação dos hiperparâmetros impacta o tempo de execução, a correlação entre quadros e a qualidade visual das curvas geradas.

O código-fonte desenvolvido encontra-se disponível publicamente no repositório: <https://github.com/gabmei/TCC>.

4. Experimentos

4.1. Ambiente Computacional

Todos os testes foram realizados em um computador de uso pessoal, equipado com processador Intel Core i5-9300H 2.40 GHz, 16 GB de memória RAM e armazenamento em SSD Samsung 980 PRO. A implementação foi executada em um ambiente virtual (venv) operando dentro do Subsistema Windows para Linux (WSL2).

É importante ressaltar que o ambiente WSL2 dispunha de apenas 8 GB de memória RAM e os experimentos não fizeram uso de técnicas de paralelismo. Essa restrição assegura que as métricas de tempo coletadas refletem estritamente a complexidade algorítmica.

4.2. Conjuntos de Dados

Para a validação experimental, foi selecionado um conjunto diversificado de dados, provenientes de três fontes distintas. Ressalta-se que, para garantir a consistência nos experimentos, todos os dados foram normalizados para valores em ponto flutuante no intervalo [0.0, 1.0].

4.2.1. Volumes do *Open Scientific Visualization Datasets*

Para a validação experimental, foram utilizados diversos volumes de dados disponíveis na coleção *Open Scientific Visualization Datasets* [3], amplamente adotada na literatura, incluindo datasets usados por Köpp e Weinkauf [4] e por Zhou et al. [6] em seus respectivos trabalhos. As especificações técnicas destes volumes encontram-se na Tabela 1. Cortes transversais ao longo do eixo z também são apresentados na Figura 4, destacando a diversidade dos dados.

Tabela 1. Conjuntos de dados do *Open SciVis*.

Dataset	Dimensões	Formato
Bonsai	256 × 256 × 256	uint8
Carp	256 × 256 × 512	uint16
Engine	256 × 256 × 128	uint8
Frog	256 × 256 × 44	uint8
Head MRI CISS	256 × 256 × 124	uint8
Nucleon	41 × 41 × 41	uint8

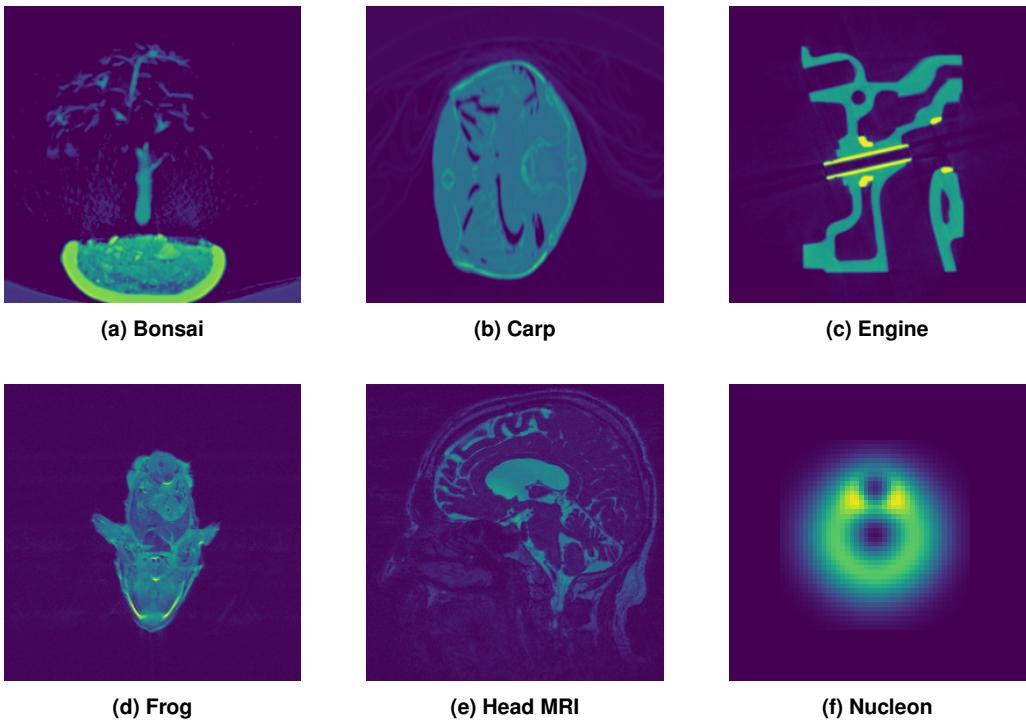


Figura 4. Cortes transversais dos datasets utilizados nos experimentos, obtidos do repositório Open SciVis [3].

4.2.2. Imagens de Teste

Para a validação do método em imagens estáticas, foram adotadas as figuras sintéticas propostas por Köpp e Weinkauf [4]. Estes dados possuem dimensões 128×128 com valores em ponto flutuante. Neste trabalho, tais imagens foram utilizadas para testar como diferentes distribuições de dados influenciam o comportamento da curva e como a variação de hiperparâmetros afeta o padrão de preenchimento resultante. A Figura 5 ilustra esses padrões.

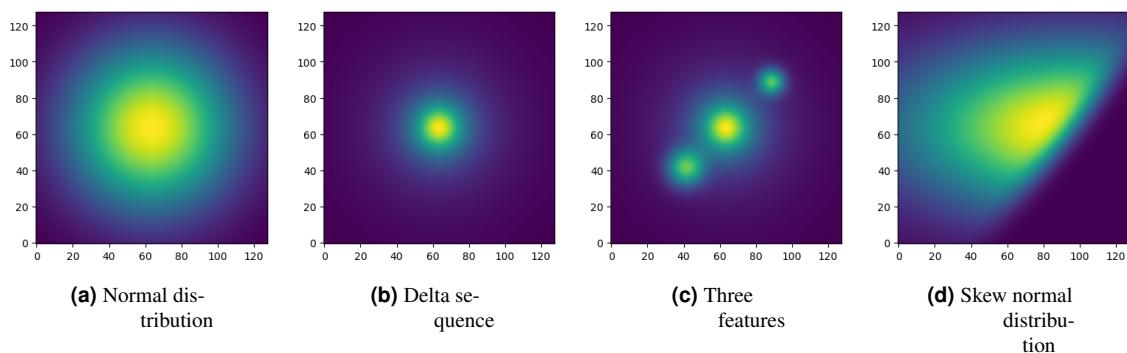


Figura 5. Imagens de teste de Köpp e Weinkauf [4]

4.2.3. Animações Geradas

Para os experimentos espaço-temporais, foram gerados conjuntos de dados sintéticos especificamente para este trabalho, representando animações de objetos em diferentes cenários. Cada animação é composta por 60 quadros com resolução de 128×128 pixels, possuindo dimensão total $128 \times 128 \times 60$. A Figura 6 apresenta quadros selecionados destas animações. Os cenários são descritos a seguir:

- **Distribuição normal:** Uma distribuição normal em movimento diagonal, cuja intensidade surge e desaparece gradativamente;
- **Duas distribuições:** Duas distribuições normais, sendo uma estática de maior porte e outra menor em movimento diagonal, também com variação gradativa de intensidade;
- **Anel em expansão:** Um anel que cresce gradativamente em raio e intensidade. Este experimento replica o cenário proposto por Franke et al. [2] e utilizado por Köpp e Weinkauf [4].

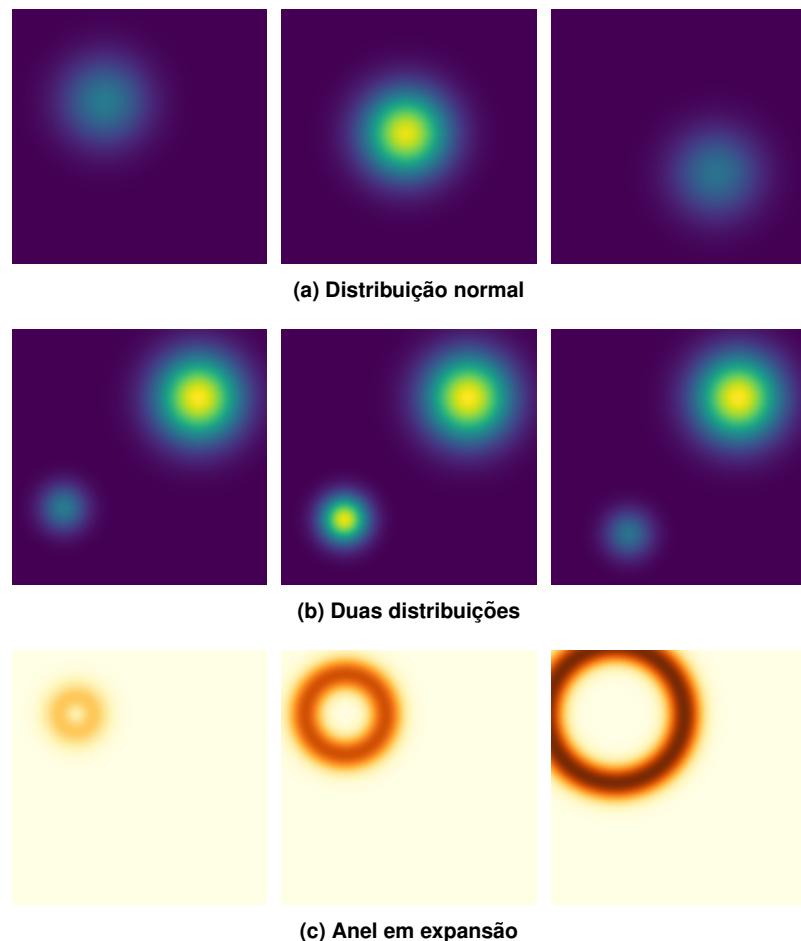


Figura 6. Evolução temporal das animações sintéticas geradas.

4.3. Avaliação de Linearização

Inicialmente, avalia-se a abordagem proposta em comparação com curvas de preenchimento estabelecidas na literatura, especificamente *Hilbert*, *Scanline* e *Context-based*.

Para este comparativo, foi adotada a imagem *Nucleon* da Figura 4(f), um dataset de referência frequentemente utilizado para validação de linearizações em trabalhos correlatos, como os de Zhou et al. [6] e Köpp e Weinkauf [4].

Em seguida, analisa-se a sensibilidade da implementação *data-driven* à variação de seus hiperparâmetros. Esse estudo é conduzido sobre os padrões sintéticos apresentados na Figura 5, o que permite a inspeção visual das alterações no padrão de preenchimento resultantes de diferentes configurações.

Por fim, replicam-se os testes estabelecidos por Zhou et al. [6], calculando-se a média da autocorrelação normalizada de duas métricas para analisar o desempenho das curvas. A normalização dos dados assegura que a correlação varie no intervalo $[-1, +1]$, o que possibilita a comparação justa entre diferentes datasets.

A métrica de média definida pelos autores consiste em um gráfico onde o eixo x representa o *lag* e o eixo y exibe a média dos valores de correlação computados na janela de $-lag$ a $+lag$. As métricas adotadas são:

- **Média Autocorrelação de Dados:** Considera a sequência das intensidades da linearização, *i.e.*, $s(i) = \text{image}(P(i).x, P(i).y)$;
- **Média Autocorrelação Radial:** Considera a norma da posição espacial na linearização, *i.e.*, $s(i) = \|(P(i).x, P(i).y)\|$

4.3.1. Comparativo Visual no Dataset Nucleon

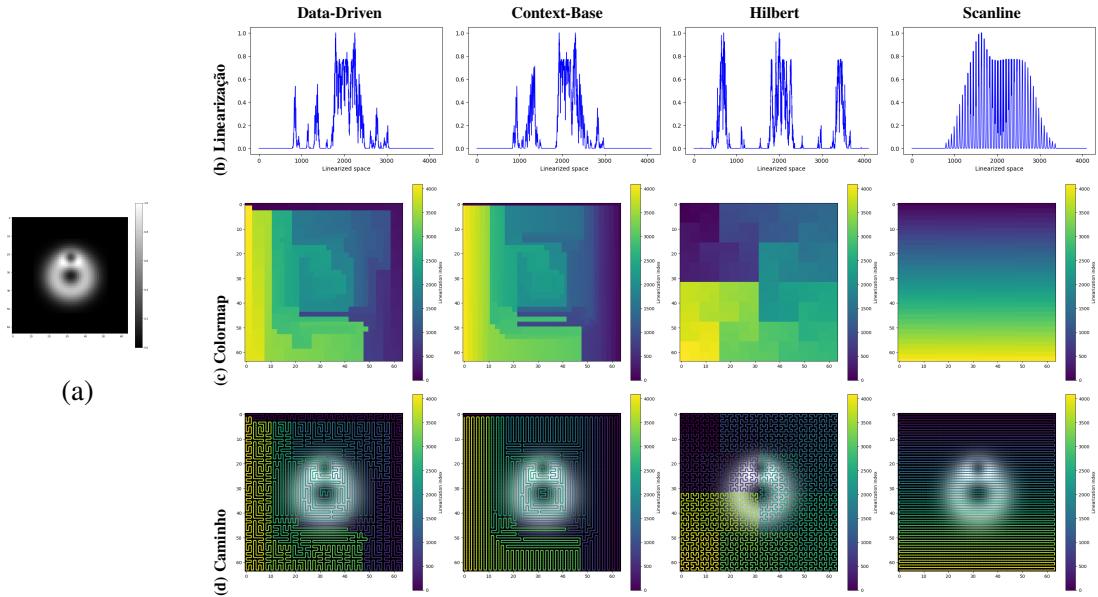


Figura 7. Comparação visual do método de linearização *data-driven* com demais métodos sobre o corte transversal do dataset Nucleon (a) inspirado por comparação similar em Zhou et al [6].

A Figura 7 apresenta a análise comparativa entre o método *data-driven* e as abordagens *context-based*, *hilbert* e *scanline* implementados neste trabalho. A avaliação foi conduzida sobre um corte transversal do volume *Nucleon* destacado na Figura 7a, que consiste de uma única feature com dois máximos locais próximos.

Uma representação da linearização resultante é exibida na linha **(b)**. Observa-se que tanto a abordagem *data-driven* quanto a *context-based* conseguem capturar a semântica dos dados, traduzindo os dois picos originais em elevações contínuas e distintas no gráfico. Em contrapartida, as curvas *hilbert* e *scanline*, por serem agnósticas aos dados, fragmentam essas estruturas, gerando um sinal oscilatório que não reflete diretamente a estrutura do dataset.

A distinção estrutural entre as abordagens guiadas por dados torna-se evidente na visualização do caminho percorrido, apresentada na linha **(d)**:

- Na abordagem *context-based*, o algoritmo minimiza estritamente a diferença de valores destacados na Equação 1, o que frequentemente resulta em arestas longas e retilíneas que conectam pixels de intensidade similar.
- Na implementação *data-driven*, a introdução do custo de coerência espacial presente na Equação 2 força a curva a ser mais compacta e sinuosa, preenchendo localmente uma região antes de transitar para a próxima.

Este comportamento sinuoso da abordagem *data-driven* e as linhas retilíneas da abordagem *context-based* corroboram os resultados apresentados originalmente por Zhou et al. [6]. Vale ressaltar que a formação desses padrões geométricos repetitivos decorre da natureza determinística do algoritmo de Prim. Em situações em que múltiplos vizinhos apresentam custo idêntico na Equação 2, a ordem de precedência das direções (norte, sul, leste, oeste) atua como critério de desempate, induzindo a curva em direções preferenciais.

4.3.2. Análise de Sensibilidade a Hiperparâmetros

A Figura 8 destaca o impacto de alterações nos hiperparâmetros da Equação 2 do método *data-driven*. Diferentemente das limitações discutidas por Köpp e Weinkauf [4], nota-se que a abordagem *data-driven* gera linearizações bem distintas entre si, o que indica sua capacidade de diferenciar tais distribuições. É perceptível também que o aumento do hiperparâmetro α induz uma maior segmentação na linearização resultante, pois força a curva a percorrer a imagem em blocos. Em especial, nota-se que a capacidade de distinguir o número de estruturas em 8(c) é gradativamente atenuada ao se aumentarem os valores dos hiperparâmetros, visto que a combinação de α e β pode fragmentar uma mesma estrutura em múltiplos segmentos do caminho.

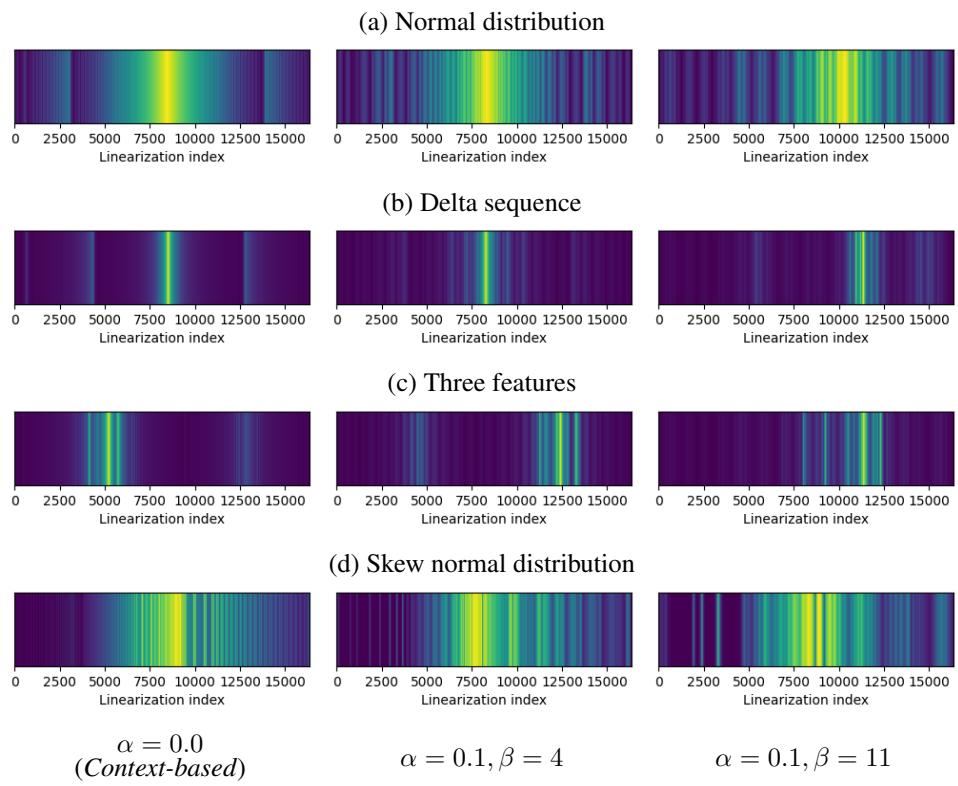
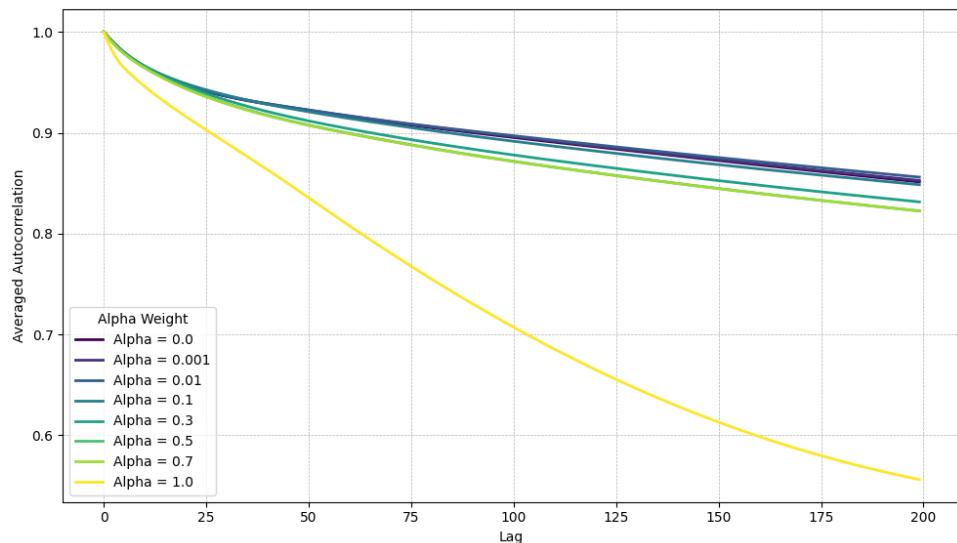


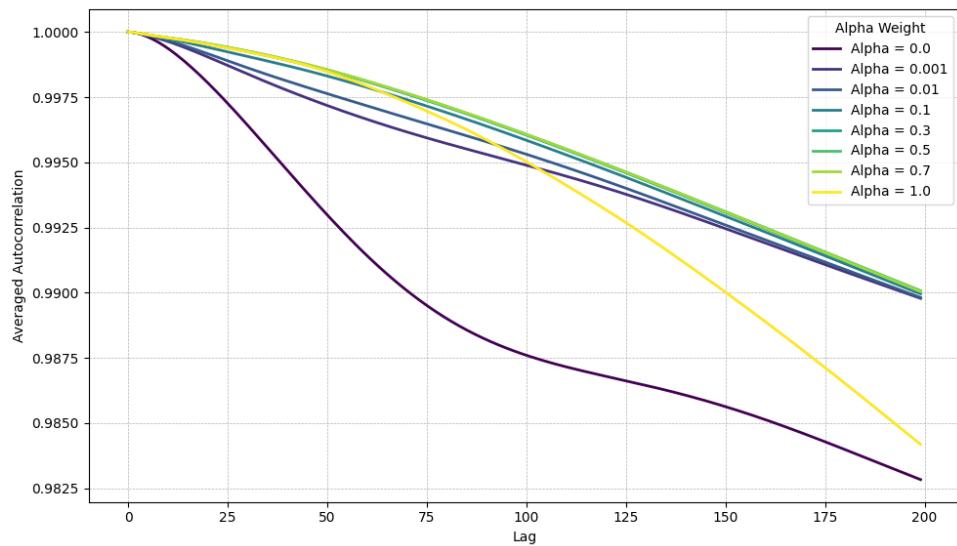
Figura 8. Análise de sensibilidade aos hiperparâmetros sobre os padrões sintéticos de Köpp e Weinkauf [4] presentes na Figura 5. As colunas evidenciam o impacto das variações de α e β na linearização resultante.

4.3.3. Avaliação Quantitativa via Autocorrelação

Para a avaliação quantitativa da autocorrelação, estabeleceu-se um conjunto de dados composto por 10 cortes transversais de cada volume do *Open SciVis* presentes na Tabela 1, somados a 10 quadros das animações sintéticas apresentadas na Figura 6. Nos experimentos subsequentes, manteve-se o valor de β fixo, variando-se exclusivamente o hiperparâmetro α . Para cada imagem selecionada, foram computadas as métricas de autocorrelação de dados e radial, obtendo-se a média global dos resultados para as diferentes configurações avaliadas.

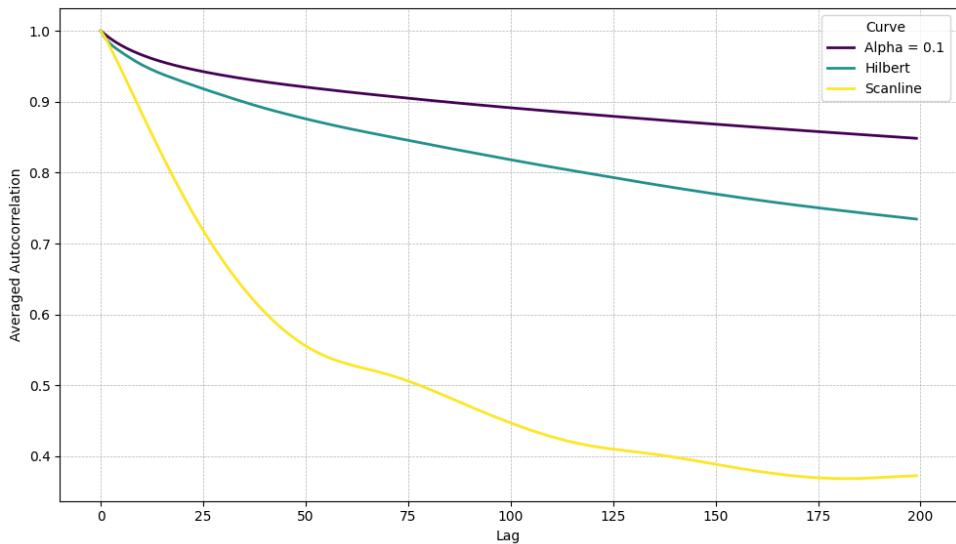


(a) Média de Autocorrelação de Dados

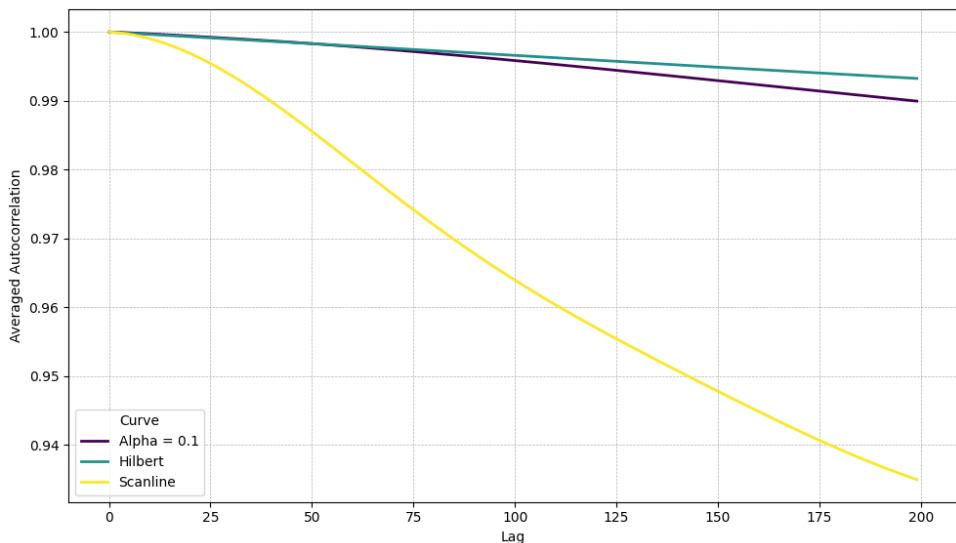


(b) Média de Autocorrelação Radial

Figura 9. Impacto da variação de α na autocorrelação média normalizada. (a) A métrica de dados avalia a continuidade das intensidades. (b) A métrica radial avalia a preservação da vizinhança espacial.



(a) Média de Autocorrelação de Dados



(b) Média de Autocorrelação Radial

Figura 10. Comparação da autocorrelação média normalizada entre as abordagens *data-driven*, *hilbert* e *scanline*. (a) A métrica de dados avalia a continuidade das intensidades. **(b)** A métrica radial avalia a preservação da vizinhança espacial.

Os resultados comparativos dessa avaliação são detalhados nas Figuras 9 e 10.

A Figura 9 ilustra o comportamento médio das curvas em relação ao deslocamento (*lag*), evidenciando o *trade-off* imposto pelo hiperparâmetro α , cujo incremento reduz a autocorrelação de dados ao passo que amplia a autocorrelação radial. Observa-se, contudo, uma degradação acentuada nas métricas para o caso limite de $\alpha = 1$. Isso ocorre pois, neste extremo, o método negligencia o termo dos dados em favor do termo puramente espacial da Equação 2, o que aproxima o comportamento da curva ao do algoritmo *scanline* ao percorrer a imagem em blocos rígidos.

Por sua vez, a Figura 10 confronta a abordagem *data-driven* para o valor fixo $\alpha = 0.1$ com as curvas de hilbert e *scanline*. Os resultados corroboram as observações de Zhou et al. [6], pois nota-se que o ganho na coerência espacial aproxima o método proposto do desempenho da curva de hilbert, ainda que isso acarrete uma leve penalidade na autocorrelação de dados.

4.4. Avaliação de Animação

O resultado do processamento espaço-temporal constitui uma imagem 2D, onde o eixo vertical corresponde ao espaço linearizado de cada quadro e o eixo horizontal representa a evolução temporal. A resolução final é dada por $m \times n$, sendo m o número total de pixels por quadro e n a quantidade quadros.

A eficácia dos alinhamentos temporais para as animações da Figura 6 foi validada visualmente. A análise comparativa confronta os resultados obtidos para $\alpha = 0.0$ e $\alpha = 0.1$ sob diferentes estratégias de alinhamento (Sem alinhamento, Normas L1 e L2), mantendo-se fixo o hiperparâmetro β .

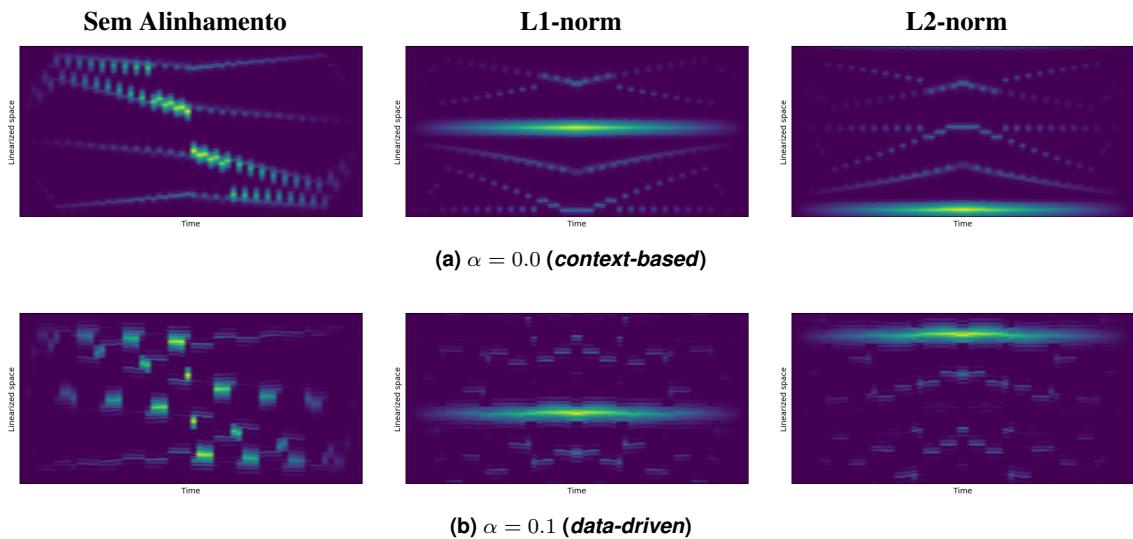


Figura 11. Linearizações para a animação da Distribuição Normal visualizada na Figura 6a.

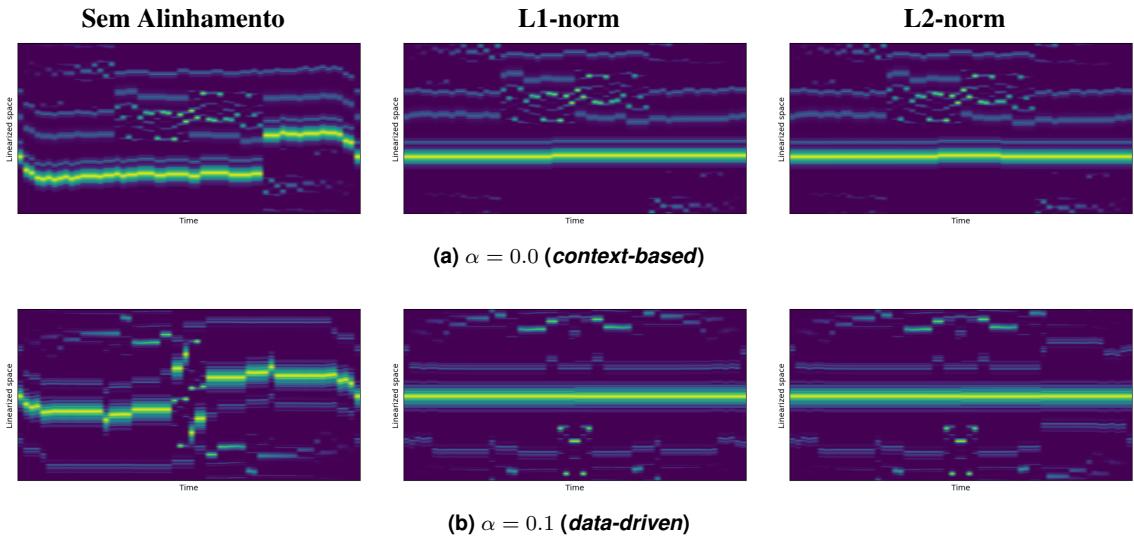


Figura 12. Linearizações para a animação de Duas Distribuições visualizada na Figura 6b.

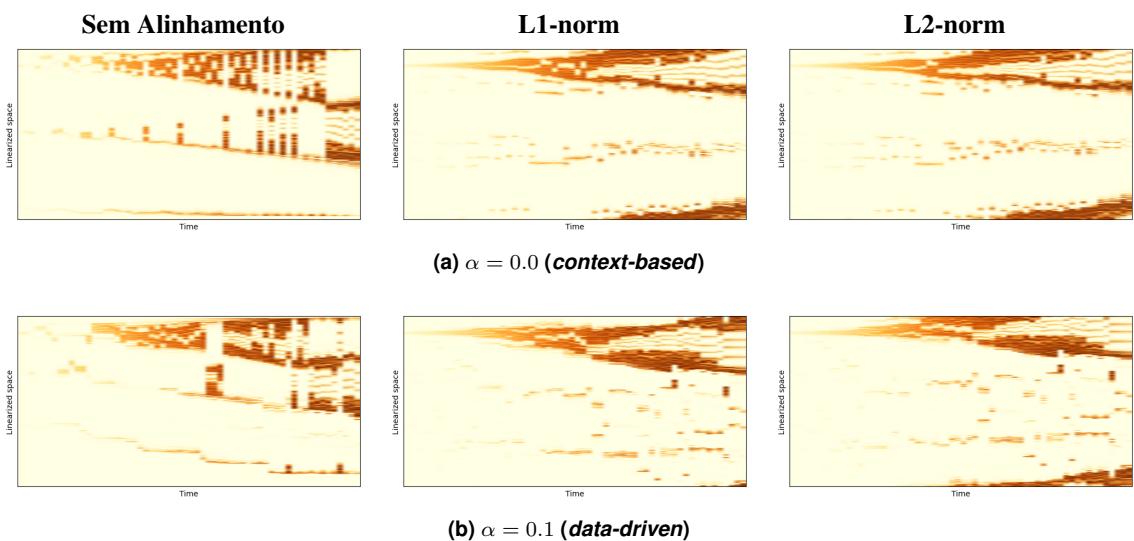


Figura 13. Linearizações para a animação do Anel em Expansão visualizada na Figura 6c.

As Figuras 11, 12 e 13 apresentam as imagens resultantes para cada configuração avaliada. É perceptível que, independentemente da técnica aplicada, a abordagem *data-driven* tende a fragmentar as *features* presentes nos dados, efeito que se intensifica com o aumento do termo de regularização espacial α .

Embora a abordagem *data-driven* preserve a conectividade das *features* dentro de um único quadro, a instabilidade da representação entre quadros consecutivos dificulta o alinhamento temporal em cenários com múltiplos objetos. Isso é evidenciado na Figura 12, onde a fragmentação excessiva torna impossível inferir visualmente a quantidade de *features* existentes na animação.

Em contrapartida, as Figuras 11 e 13 são cenários que contêm apenas uma estrutura de interesse. Nestes casos, as imagens espaço-temporais geradas preservam a coerência da animação original, mesmo sob maior influência do fator espacial α da Equação 2.

Além disso, é importante notar que cada quadro da animação representa um circuito hamiltoniano fechado. Dessa forma, aplicar uma mesma rotação cílica nos quadros preserva a coerência do alinhamento resultante da mesma maneira. Essa propriedade é demonstrada na Figura 14, onde uma versão rotacionada do resultado obtido é comparada diretamente com o padrão da literatura reportado por Köpp e Weinkauf [4].

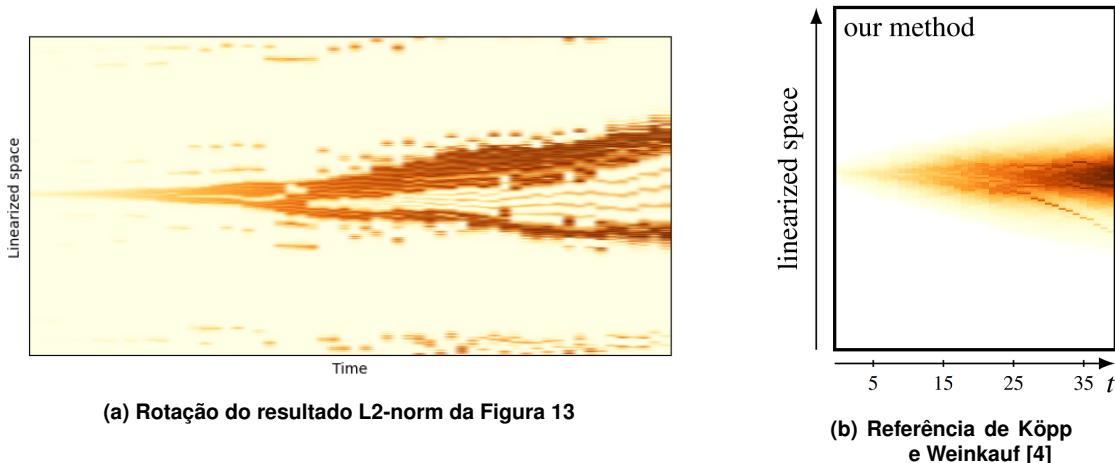


Figura 14. Comparação visual entre o resultado rotacionado do método proposto (a) e o resultado reportado na literatura (b) para o cenário do Anel em Expansão.

4.5. Tempos de execução

Para avaliar o desempenho computacional, calculou-se a média dos tempos de execução após 20 repetições para cada experimento. Nessas medições, os conjuntos de imagens de teste foram gerados de maneira aleatória. O primeiro experimento, apresentado na Figura 15, avalia os custos temporais associados à geração do caminho linearizado para uma única imagem. O gráfico relaciona o número de pixels da imagem no eixo horizontal com o tempo de execução em milissegundos no eixo vertical. As legendas são detalhadas a seguir:

- **C++ core algorithm:** Custo computacional exclusivo da execução do algoritmo de Prim sobre a imagem;

- **Pybind interface overhead:** Custo de tempo para pré-processar a entrada e adequá-la ao formato da implementação;
- **Python overhead:** Custo adicional referente à mudança de contexto entre as linguagens de programação.

O que pode ser observado pela Figura 15 é que o principal custo de toda a execução está no processamento da imagem durante o algoritmo de Prim, o que indica que não existem perdas de performance significativas ao adotar a biblioteca Pybind para expor a implementação de C++ para Python.

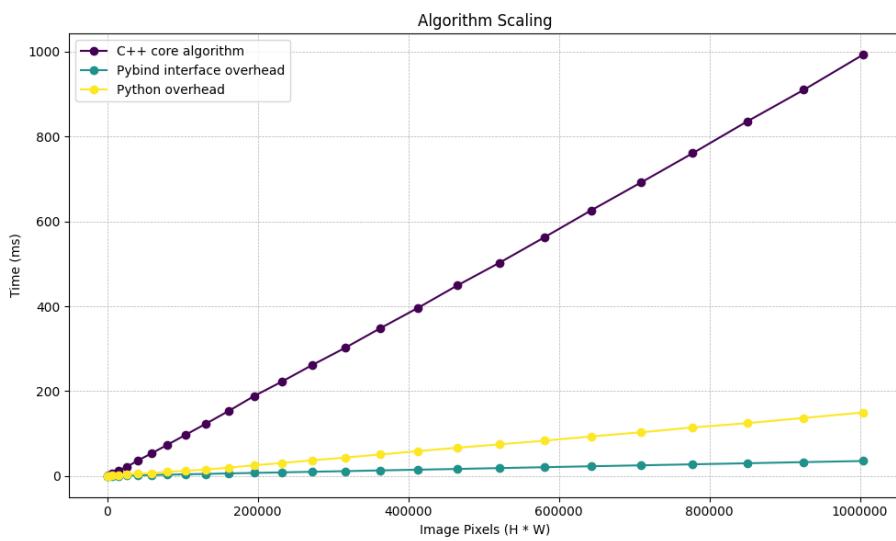


Figura 15. Tempo de execução para calcular o caminho hamiltoniano de uma imagem única, discriminando os custos entre C++, Pybind e Python

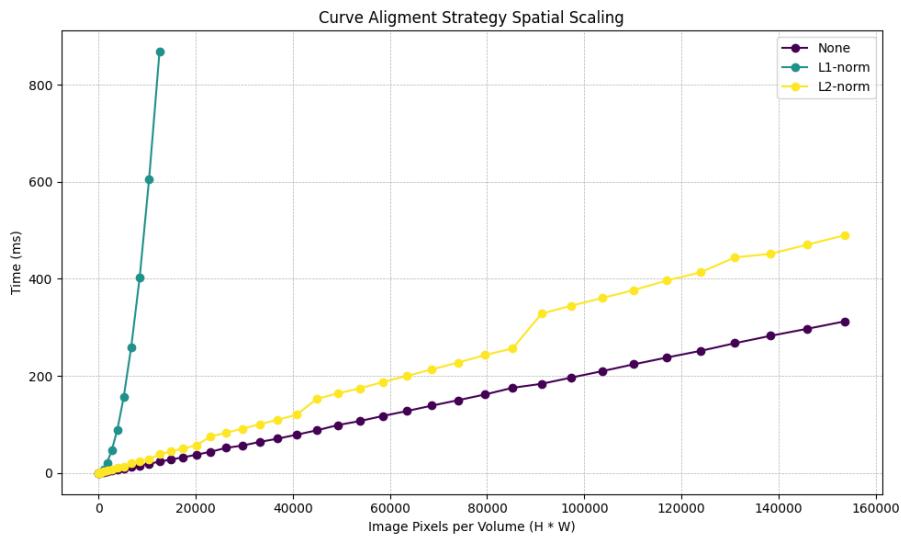


Figura 16. Impacto do aumento do número de pixels no tempo de execução para diferentes estratégias de alinhamento

As Figuras 16 e 17 avaliam o tempo de execução total decorrente da estratégia de alinhamento escolhida. Na Figura 16, considera-se um volume de dados com apenas

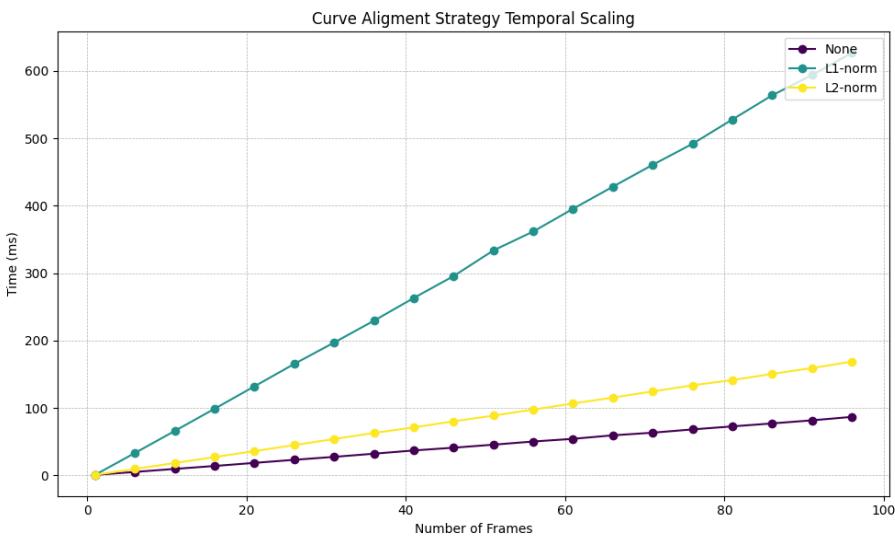


Figura 17. Impacto do aumento do número de quadros no tempo de execução para diferentes estratégias de alinhamento

dois quadros, variando-se o número de pixels em cada um deles. Observa-se o elevado custo da estratégia *L1-norm*, que exibe complexidade quadrática em relação ao número de pixels, enquanto a estratégia *L2-norm* introduz pouco custo adicional, pois possui a mesma ordem de complexidade do algoritmo de Prim.

Por sua vez, na Figura 17, mantém-se fixo o número de pixels por quadro em 32×32 , variando-se o número total de quadros. Observa-se que as estratégias apresentam comportamento linear em relação à quantidade de quadros, uma vez que o processamento ocorre de maneira independente para cada quadro da animação.

5. Conclusão

Este trabalho apresentou o desenvolvimento e a análise de uma implementação eficiente do método de linearização *data-driven*, expandindo sua aplicação para o domínio espaço-temporal. A arquitetura híbrida adotada permitiu combinar a eficiência de C++ para a implementação dos algoritmos utilizados com a flexibilidade de Python para a validação de hiperparâmetros e métricas de qualidade.

Os experimentos realizados confirmam o *trade-off* imposto pelo fator de regularização espacial α , onde valores maiores promovem curvas de preenchimento de espaço em blocos compactos, em detrimento da coerência dos dados.

No contexto das animações, foram introduzidas duas estratégias de alinhamento espaço-temporal entre quadros: *L1-norm* e *L2-norm*. Os resultados indicam a necessidade dessas técnicas, uma vez que sua ausência gera figuras desconexas. A adoção dessas estratégias mostrou-se efetiva em cenários simples, onde há apenas uma *feature* de interesse ao longo da animação. Contudo, observou-se uma limitação em cenários contendo múltiplos objetos simultâneos. Mesmo que o método *data-driven* seja capaz de linearizar adequadamente cada quadro individualmente, a instabilidade na ordenação das *features* entre quadros consecutivos prejudica o alinhamento temporal.

Adicionalmente, notou-se que a implementação de referência de Zhou et al. [6] e

a proposta neste trabalho adotam direções preferenciais determinísticas para o desempate da Equação 2 durante a construção da MST. Essa característica pode introduzir vieses direcionais sutis na linearização resultante.

Como direções para trabalhos futuros, sugere-se:

- Analisar como estratégias de desempate da Equação 2, como a aleatória, afetam as métricas de autocorrelação;
- Adaptar as métricas de autocorrelação para avaliar formalmente a consistência temporal;
- Explorar novas técnicas de alinhamento, como considerar uma janela temporal em vez de apenas o quadro anterior e a inclusão de um fator espacial durante o alinhamento.

Por fim, o código-fonte está disponível e é facilmente customizável, oferecendo à comunidade uma ferramenta para exploração de técnicas de linearização e visualização de dados espaço-temporais.

Referências

- [1] Revital Dafner, Daniel Cohen-Or e Yossi Matias. “Context-based space filling curves”. Em: *Computer Graphics Forum* 19.3 (2000), pp. 209–218. DOI: 10.1111/1467-8659.00413.
- [2] M. Franke et al. “Visual Analysis of Spatio-temporal Phenomena with 1D Projections”. Em: *Computer Graphics Forum* 40.3 (2021). (Proc. EuroVis), pp. 335–347. DOI: 10.1111/cgf.14311.
- [3] Pavol Klacansky. *Open SciVis Datasets*. <http://klacansky.com/open-scivis-datasets/>. Acessado em: 8 de janeiro de 2026. 2017.
- [4] Wiebke Köpp e Tino Weinkauf. “Temporal Merge Tree Maps: A Topology-Based Static Visualization for Temporal Scalar Data”. Em: *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics (Proc. IEEE VIS)* 29.1 (jan. de 2022). DOI: 10.1109/TVCG.2022.3209387.
- [5] Chen Wang. “Kernel learning for visual perception”. Capítulo 2.2.1, pp. 17–18. Tese de dout. Singapore: School of Electrical e Electronic Engineering, Nanyang Technological University, 2019. DOI: 10.32657/10220/47835. URL: <https://hdl.handle.net/10220/47835>.
- [6] Liang Zhou, Chris R. Johnson e Daniel Weiskopf. “Data-Driven Space-Filling Curves”. Em: *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics* 27.2 (2020), pp. 1591–1600. DOI: 10.1109/TVCG.2020.3030473.