

# Rapport d'EA MAP 571 - Volatility is Rough

Gabriel Misrachi & Alexis Rougé

12 décembre 2017

## Résumé

Avertissement : les résultats présentés dans ce rapport sont entièrement issus des articles cités en référence.

Le but de ce rapport est d'exposer la démarche permettant de reproduire certains faits stylisés macroscopiques à partir des faits stylisés microscopiques de la finance de marché à haute fréquence.

Après un bref historique des techniques de modélisation du prix d'un actif financier, nous expliquerons quelques faits stylisés concernant le processus de volatilité. Par la suite, nous expliquerons comment, à partir de l'encodage des faits stylisés microscopiques dans un processus de Hawkes bidimensionnel, il est possible d'obtenir, en faisant tendre le temps vers l'infini, un processus continu qui vérifie les faits stylisés macroscopiques.

Cet exposé se veut être un état de l'art succinct rendant accessibles certains résultats récents de la recherche en mathématiques financières. Dans un objectif de clarté et de fluidité, les différents résultats exposés ne seront pas directement reliés aux articles desquels ils sont issus. Pour autant, ils ne sont en aucune manière le fruit de nos recherches.

# 1 Petit historique de la modélisation financière

## 1.1 Premiers modèles : volatility is constant

### 1.1.1 Le mouvement Brownien

C'est en 1827 que le mouvement Brownien est associé aux trajectoires non différentiables de fines particules dans un fluide par Robert Brown. Par la suite, en 1900, Louis Bachelier l'utilise le premier pour modéliser la dynamique des cours de la Bourse, puis Einstein en 1905, pour décrire une particule qui diffuse. Ce n'est qu'en 1923 que Wiener formalise sa construction et c'est le début d'une activité de recherche intense, continuant de nos jours.

### 1.1.2 Le début des mathématiques financières

Le premier modèle en mathématiques financières est très simple : le cours d'une action évolue suivant un mouvement brownien décrit par la formule ci dessous :

$$S_t = \sigma W_t + S_0 \quad (1)$$

Où  $S$  est le prix de l'action à l'instant  $t$ ,  $W$  est un processus de Wiener (i.e un brownien) et  $\sigma$  est la volatilité. Cependant, ce modèle ne reflète pas certains faits stylisés élémentaires comme le fait que le prix soit toujours positif.

### 1.1.3 Modèle de base : Black & Scholes

Pour pallier à ces imperfections, Black et Scholes proposent un modèle prenant en compte ce fait stylisé. Il repose sur un certain nombre d'hypothèses permettant de poser la formule suivante :

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \quad (2)$$

$\mu$  représente une dérive constante. Si on se place dans un cas où le taux d'intérêt est nul et l'action du sous-jacent ne verse pas de dividendes, alors le terme de dérive disparaît et cette équation devient :

$$dS_t = \sigma S_t dW_t \quad (3)$$

En intégrant, on obtient :

$$S_t = S_0 e^{\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2} t} \quad (4)$$

Dans le cas d'un call dont le payoff est  $(S_T - K)^+$ . On peut, grâce au théorème de Feynman-Kac, établir que le prix de l'option est donné par la formule suivante :

$$C(\sigma, T, K) = S_0 \mathcal{N}(d_+) - K \mathcal{N}(d_-) \quad (5)$$

où  $T$  est la maturité du sous-jacent,  $K$  est le prix d'exercice fixé par l'option,  $S_0$  est le prix actuel du sous-jacent et  $d_{\pm}$  est défini comme suit :

$$d_{\pm} = \frac{\log(\frac{S_0}{K})}{\sigma\sqrt{T}} \pm \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T}$$

et

$$\mathcal{N}(x) = \mathbb{P}(\mathcal{N}(0, 1) \leq x)$$

Un des faits notoires de cette approche est que la volatilité est modélisée par une constante. On peut donc, en observant  $C^{market}(T, K)$ , calculer une valeur théorique de  $\sigma$ . Cette quantité est appelée la *volatilité implicite*. Tout ceci se résume dans la formule suivante :

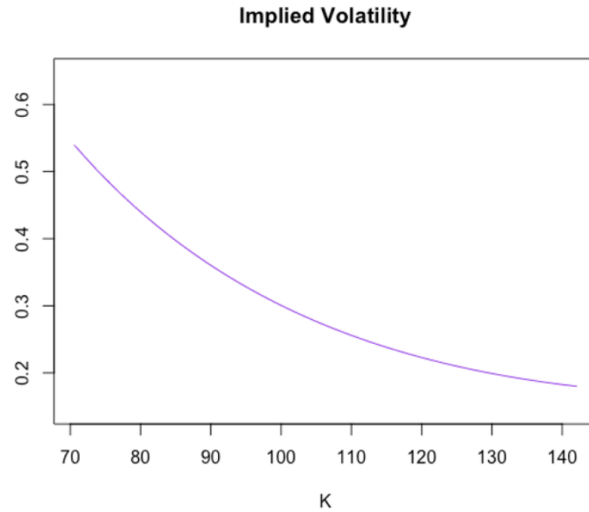
$$C^{market}(T, K) = C^{BS}(\sigma(T, K), T, K) \quad (6)$$

avec  $\sigma(T, K)$  la volatilité implicite.

En réalité, ce modèle ne permet pas d'expliquer un autre fait stylisé macroscopique : l'effet de levier. En pratique, pour une action donnée, la volatilité implicite n'est pas constante, et présente un effet de levier par rapport au prix. Mathématiquement, ce phénomène se représente par une corrélation négative entre la volatilité et le prix.

## 1.2 Modèles à volatilité variable

Pour illustrer l'effet dit de levier, voici un exemple : sur un marché equity, si l'on trace la volatilité implicite d'options de même maturité en fonction de leur strike, on observe généralement ceci :



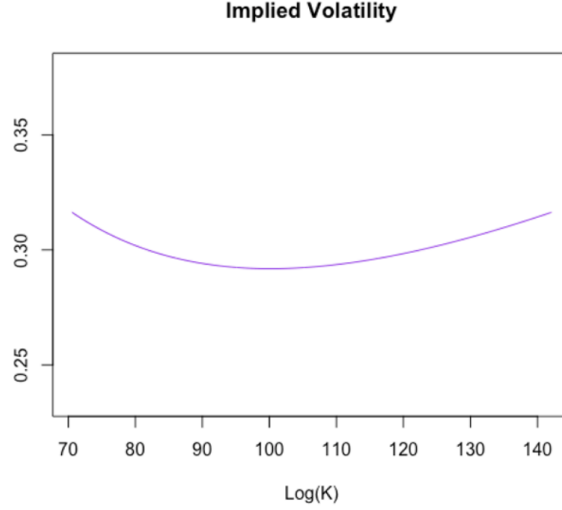
Cet effet d'asymétrie ou, plus communément, de skew est un des symptômes attribué à un effet de levier.

### 1.2.1 Modèles à volatilité locale :

Adaptée du modèle de Black-Scholes, la classe de modèles dits de volatilité locale sont une première approche pour faire varier la volatilité. Au lieu d'être constante, celle-ci est modélisée par une fonction déterministe du temps  $t$  et du prix de l'actif sous-jacent  $S_t$  :

$$\sigma_t = \sigma(t, S_t) \quad (7)$$

Cette approche s'est révélée très satisfaisante grâce à la contribution de Bruno Dupire. Celui-ci en a déduit des équations qui permettent de calibrer un modèle de volatilité locale de façon cohérente avec une surface de volatilité observée à une date donnée. Un tel modèle est donc capable d'expliquer à une date donnée, les symptômes de l'effet de levier tels que le skew montré plus haut et le smile représenté ci-dessous. Cette prouesse technique a permis de grandes avancées dans la valorisation des produits dérivés et fait du modèle de volatilité locale un outil de choix pour les ingénieurs financiers.



### 1.2.2 Modèle de base à volatilité stochastique : modèle de Heston

Cette fois-ci  $\sigma_t$  n'est plus déterministe, elle est stochastique. On ouvre ainsi une nouvelle classe de modèles dits à volatilité stochastique. Ici, nous décrivons une sous-classe de ces modèles satisfaisant l'équation :

$$dS_t = S_t \sigma_t dW_t \quad (8)$$

Les modèles de cette sous-classe définiront de plusieurs façons  $\sigma_t$  tout en respectant deux faits stylisés :

- $\sigma$  est stochastique
- le modèle doit reproduire l'effet de levier, i.e  $(\Delta\sigma_+; \Delta S_t) \leq 0$

En première approche, on définit la volatilité par l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\begin{aligned} \sigma_t^2 &= \nu_t \\ d\nu_t &= \alpha_{S,t} dt + \beta_{S,t} dB_t \end{aligned} \quad (9)$$

avec  $\alpha_{S,t}$  et  $\beta_{S,t}$  des fonctions de  $\nu$ . Dans le cas de petites variations, on peut considérer que  $\alpha_{S,t} dt$  est négligeable. On définit  $B$  par :

$$B_t = \rho W_t + \sqrt{1 - \rho^2} W_t^\perp, \rho \in [-1; 1] \quad (10)$$

avec  $W_t$  et  $W_t^\perp$  deux browniens indépendants. On peut écrire de manière équivalente  $\text{cov}(dB_t, dW_t) = \rho dt, \rho \leq 0$ .

Il faut donc choisir la forme de  $\beta_{S,t}dt$ . Dans son modèle, Heston fait l'hypothèse d'une volatilité brownienne définie comme suit :

$$d\nu_t = \lambda(\theta - \nu_t)dt + \xi\sqrt{\nu_t}dB_t \quad (11)$$

où  $\theta$  est la valeur de convergence de  $\nu$ ,  $\lambda$  est la vitesse de retour de  $\nu$  vers  $\lambda$  et  $\xi$  est la volatilité de la volatilité ('vol of vol').

Si ces paramètres satisfont la condition  $2\lambda\theta > \xi^2$ , alors le processus  $\nu_t$  est strictement positif.

Si l'on retire les dépendances temporelles des paramètres, ce modèle, introduit par le mathématicien Steven Heston, est trop rigide pour expliquer les surfaces de volatilité observées. Elles sont donc souvent nécessaires et d'autres degrés de liberté peuvent y être ajoutés à l'image du modèle de Chen, par exemple.

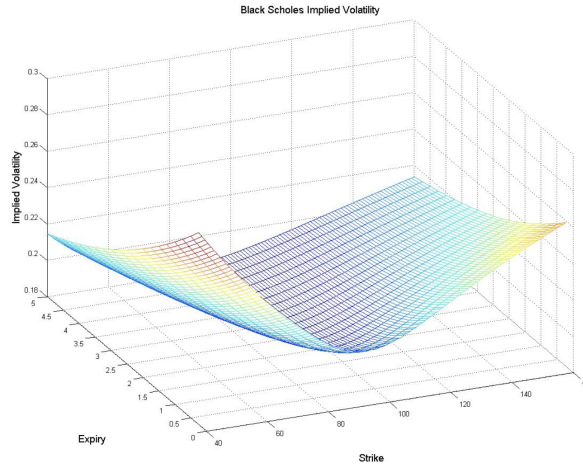
## 2 Modélisation de la volatilité

### 2.1 Faits stylisés du processus de volatilité

#### 2.1.1 Homogénéité dans le temps

La formule de Black&Scholes, pour un sous-jacent, un strike et une maturité donnés, associe de façon bijective une volatilité  $\sigma$  et le prix d'un Call  $C(T, K)$ . En inversant cette association on peut obtenir une volatilité à partir du prix d'une option. Celle-ci est alors appelée volatilité implicite. C'est un paramètre d'une importance capitale pour les métiers de la finance de marché car il permet de donner une échelle pour comparer différents marchés d'options.

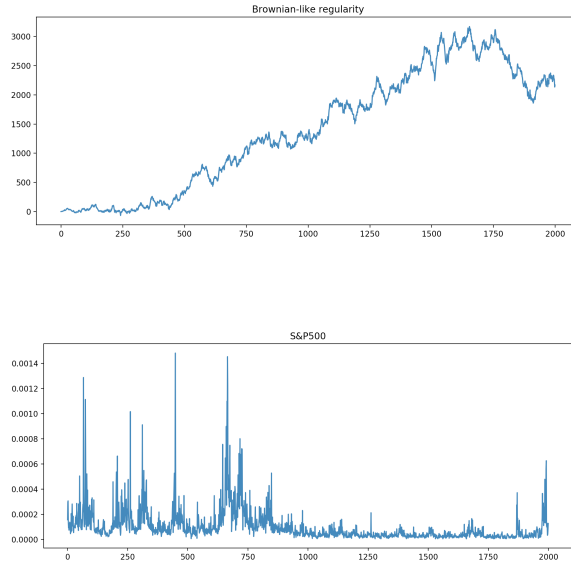
Comme nous l'expliquions précédemment, la volatilité n'est en réalité pas constante. La volatilité implicite ne l'est donc pas non plus. Sur un marché d'option donné, celle-ci, lorsqu'on en fait une fonction de la maturité et du strike, forme ce que l'on appelle la surface de volatilité.



Une propriété remarquable de cette surface, du moins sur les marchés equity (action), c'est que sa forme globale ne varie pas dans le temps. Certes, des paramètres comme la pente du skew et du smile varient mais en première approximation la forme reste la même. Ce fait stylisé encourage vivement à modéliser la volatilité comme un processus homogène dans le temps. C'est à dire un processus qui présente une forme d'invariance au cours du temps.

### 2.1.2 Régularité

Dans les modèles présentés succinctement ci-dessus, la question de la modélisation de la volatilité est envisagée de différentes façons. Pour les modèles à volatilité constante, ou plus généralement, tous les modèles de type Black&Scholes, on dérive ou impose des fonctions de volatilité extrêmement régulières. Les modèles à volatilité variable, qu'elle soit locale ou stochastique impliquent, quant à eux, des régularités assimilables à celle d'un mouvement Brownien. C'est à dire que les trajectoires issues de processus qu'ils modélisent sont  $\alpha$ -Hölderienne pour tout  $\alpha < 1/2$ . On juxtapose ci-dessous deux trajectoires. La première à une régularité similaire à celle d'un mouvement brownien, elle est issue d'une simulation de celui-ci. La seconde correspond à la trajectoire d'un proxy du processus de variance de l'indice S&P500, la variance réalisée journalière. Les deux sont mesurés sur environ 2000 jours.



Il ne s'agit pas d'un constat rigoureux mais on a l'impression d'observer sur l'indice S&P500 une régularité bien moins contraignante que celle qu'on peut observer sur un brownien. Cela motive l'étude de modèles moins réguliers.



## 2.2 Étude empirique : S&P500

Afin de poursuivre cette intuition toute relative, il convient de chercher des preuves empiriques de la faible régularité du processus de volatilité. Le processus en lui-même n'est pas observable. Toutefois il est possible d'en trouver des représentants, ou proxy. Ces quantités lui sont suffisamment corrélées pour en être une mesure relativement fiable. C'est le cas par exemple avec la variance réalisée.

La variance réalisée est la somme des carrés des log-rendements du prix de l'actif sous-jacent. Elle est souvent calculée intraday et permet une représentation biaisée de la volatilité. Il est aisé de se procurer de telles données sur l'indice S&P 500 grâce à la base de données de l'Institut Oxford-Man. On y trouve par exemple des données de variance réalisée intraday calculées sur un intervalle de temps de 5 minutes et ce sur plusieurs années. Ainsi, se pose la question de savoir quelle quantité calculer pour estimer la régularité d'une trajectoire. Une fonction  $f$  vérifie la condition de Hölder pour un certain exposant  $\alpha$  si

$$\exists C > 0, |f(x) - f(y)| \leq C \|x - y\|^\alpha$$

Pour  $\alpha = 1$  on reconnaît les fonctions lipschitziennes. Cette propriété est un indicateur de la régularité en norme  $l_\alpha$  d'une trajectoire et est très utilisée dans le cadre des processus liés au mouvement Brownien. De plus, elle peut être envisagée comme une conséquence d'un cadre plus global appelés les espaces de régularité de Besov. En effet, un processus appartenant à l'espace de Besov  $\mathbb{B}_{q,\infty}^s$  vérifie, pour tout  $q > 0$ , la condition de Hölder d'exposant  $h$  pour tout  $h < s$ .

Cette généralisation remarquable fait apparaître une motivation pour classer les observations du S&P500 en terme de leur régularité de Besov. Avec des hypothèses techniques approfondies, cela est possible en étudiant la quantité suivante :

Étant donné une partition  $(\Delta_i)_{i \in [1,N]}$  de  $[0, T]$ ,

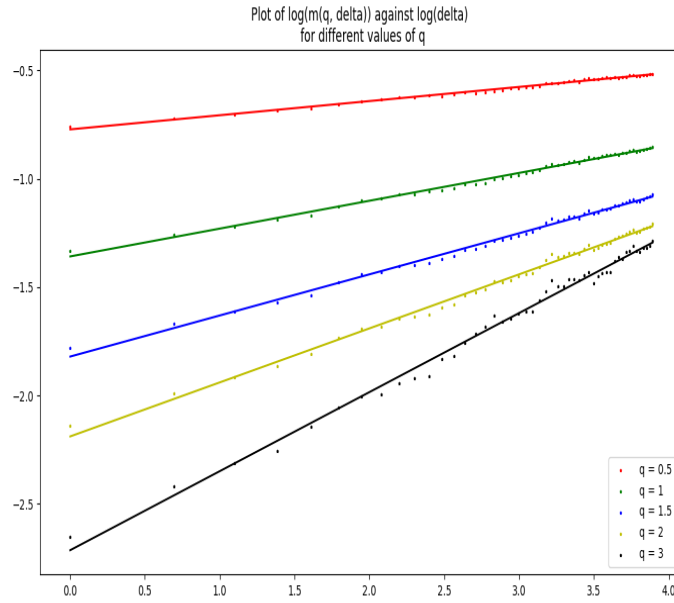
$$m(q, \Delta) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N |\log(\sigma_{\Delta_k}) - \log(\sigma_{\Delta_{k-1}})|^q$$

Si nous pouvons montrer que pour un certain  $s_q > 0$  et  $b_q > 0$ , lorsque  $\Delta$  tend vers zéro,

$$N^{qs_q} m(q, \Delta) \rightarrow b_q.$$

Alors, nous saurions dire à partir de quelle indice  $s_q$  la trajectoire n'appartient plus à l'espace de régularité de Besov correspondant. Faisons, l'hypothèse que nous avons cette convergence. Il s'agit alors d'estimer ce paramètre de régularité  $s_q$ .

Pour ce faire, il est judicieux de calculer  $m(q, \Delta)$  pour différentes valeurs de  $\Delta$  et d'en faire la régression linéaire vis à vis de la variable  $\log(\Delta)$ . Ces calculs, fondés sur les données de variance réalisée de l'indice S&P500 et réalisés pour différentes valeurs de  $q$  sont représentés ci-dessous.



Ces résultats indiquent que les deux quantités sont proportionnelles. En supposant, de plus, la stationnarité des incréments du processus de volatilité, qui permet d'interpréter  $m(q, \Delta)$  comme un estimateur de  $\mathbb{E}[|\log(\sigma_\Delta) - \log(\sigma_0|^q)]$ . On déduit de ce résultat une relation de la forme

$$\mathbb{E}[|\log(\sigma_\Delta) - \log(\sigma_0|^q)] = K_q \Delta^{\eta_q}.$$

Où  $\eta_q$  est la pente obtenue par la régression sur  $\log(\Delta)$ . On peut finalement obtenir  $s_q$  en traçant  $\eta_q$  en fonction de  $q$ . On obtient une relation de proportionnalité et on en déduit des valeurs pour  $s_q$  autour de 0.1. A suivre.

## 2.3 Le mouvement Brownien fractionnaire

Rappelons la forme de l'équation gouvernant le processus de volatilité dans un modèle où celle-ci est stochastique :

$$\sigma_t^2 = \nu_t$$

$$d\nu_t = \alpha_{S,t}dt + \beta_{S,t}dB_t$$

Sachant que lorsque  $B_t$  est brownien nous n'obtenons pas la régularité observée. Il nous faut donc une alternative, ou plutôt, dans ce cas ci, une généralisation. Cette généralisation s'appelle le *mouvement brownien fractionnaire* (mBf) et depuis son étude par Mandelbrot et Van Ness en 1968, celui-ci à généré une riche littérature, notamment en modélisation financière.

Parmi les façons de le définir, il en existe une, implicite, fondée sur les deux propriétés suivantes :

- La stationnarité des accroissements : cette propriété décrit les processus  $X_t$  dont la loi des incréments  $X_{t_i} - X_{t_j}$  ne varie pas dans le temps, c'est à dire :

$$\forall s \in \mathbb{R}, \{X_{t+s} - X_s\}_{t \in \mathbb{R}} \stackrel{loi}{=} \{X_t - X_0\}_{t \in \mathbb{R}}.$$

- L'  $\alpha$ -auto-similarité : cette propriété concerne les processus invariants par contraction/dilatation dans le temps, moyennant une transformation similaire en espace. Plus précisément, un processus  $X_t$  présente cette propriété si :

$$\forall a > 0, \{X_{at}\}_{t \in \mathbb{R}} \stackrel{loi}{=} \{a^\alpha X_t\}_{t \in \mathbb{R}}.$$

Cette propriété est particulièrement intéressante pour modéliser des processus homogène dans le temps, comme nous le suggérait l'invariance de la surface de volatilité.

Pour en revenir à notre brownien fractionnaire d'exposant de Hurst  $H$ , il peut se définir comme étant l'unique processus Gaussien stationnaire et  $H$ -auto-similaire. En tant que processus Gaussien, il est suffisant, pour le définir explicitement, de donner sa fonction de covariance. La voici :

$$\mathbb{E}[B_t^H B_s^H] = \frac{1}{2}(t^{2H} + s^{2H} - |t - s|^{2H})$$

Où  $s$  et  $t$  sont des temps du processus et l'unique paramètre  $H$  est appelé exposant de Hurst. On reconnaît dans le cas où  $H = \frac{1}{2}$  la fonction de covariance du mouvement brownien :

$$\mathbb{E}[B_s B_t] = \min(s, t).$$

Une autre propriété remarquable du mBf concerne les corrélations de ses incréments. Considérons leur covariance, celle-ci s'écrit comme suit :

$$\mathbb{E}[(B_{t_1}^H - B_{s_1}^H)(B_{t_2}^H - B_{s_2}^H)] = 2|t_1 - s_2|^{2H} + |t_2 - s_1|^{2H} - |t_2 - t_1|^{2H} - |s_2 - s_1|^{2H}.$$

Supposons que  $s_1 < t_1 < s_2 < t_2$  de sorte que  $[s_1, t_1]$  et  $[s_2, t_2]$  ne s'intersectent pas. On peut réécrire la gauche de l'égalité en  $\frac{1}{2}(f(a_1) - f(a_2) - f(b_1) - f(b_2))$  où les valeurs  $a_{1,2}$  et  $b_{1,2}$  sont évidentes et où  $f(x) = x^{2H}$ . On en déduit deux conclusions différentes en fonction de la valeur de  $H$  :

— Si  $H < \frac{1}{2}$  alors  $f$  est concave et on a :

$$\mathbb{E}[(B_{t_1}^H - B_{s_1}^H)(B_{t_2}^H - B_{s_2}^H)] < 0.$$

Ce qui se traduit par des accroissements négativement corrélés.

— Si  $H > \frac{1}{2}$  alors  $f$  est convexe et on a :

$$\mathbb{E}[(B_{t_1}^H - B_{s_1}^H)(B_{t_2}^H - B_{s_2}^H)] > 0.$$

Ce qui se traduit par la conclusion inverse.

On perd ainsi l'indépendance des incréments, caractéristique du mouvement brownien, au profit d'une tendance à des changements de monotonie pour  $H < \frac{1}{2}$  ou d'une plus grande régularité pour  $H > \frac{1}{2}$ .

## 2.4 Roughness

Fort de ces constats empiriques, certes de différents niveaux de rigueur, il est logiquement intéressant de considérer le cas  $H < \frac{1}{2}$ . Pour être plus précis en terme de régularité Holdérienne il est intéressant de définir l'exposant de Hölder uniforme. Soient  $\{Y(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$  un processus stochastique possédant des

trajectoires continues, nulle-part dérivables et  $[a, b]$  un intervalle compact de  $\mathbb{R}$ . On définit l'exposant de Hölder uniforme de  $Y$  sur  $[a, b]$ , noté (EHU), par

$$h_Y([a, b]) = \sup \left\{ h \geq 0 : \sup_{x_1, x_2 \in [a, b]} \frac{|Y(x_1) - Y(x_2)|}{|x_1 - x_2|^h} < +\infty \right\}.$$

Cet exposant vérifie la propriété suivante : sur tout intervalle compact  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ , avec probabilité 1,  $0 \leq h_Y([a, b]) \leq 1$ . Il s'interprète de la façon suivante, plus  $h_Y([a, b])$ , est proche de 1, plus le processus est régulier sur le segment  $[a, b]$ . Dans le cas du mBf,  $B^H$ , l'exposant de Hölder uniforme  $h_{B^H}$  vérifie, avec probabilité 1, pour tout  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ,

$$h_{B^H}([a, b]) = H.$$

Pour un mBf avec un exposant de Hurst inférieur à  $\frac{1}{2}$ , la faible régularité engendrée sur les trajectoires lui donne un aspect rough qui correspond à ce que l'on observe lorsqu'on estime la régularité des processus de volatilité observés dans le marché.

En particulier, si nous reprenons nos démarches d'estimation de la régularité du processus de volatilité de l'indice S&P500 en supposant, cette fois-ci, que son logarithme suit un mBf. Alors, en gardant les même notations, on peut déduire qu'avec probabilité 1,  $s_q = H$ . On obtiendrait alors des valeurs autour de 0.1 pour  $H$  ce qui tend à prouver le caractère rough du processus de volatilité.

Afin d'illustrer les différentes régularités du mBf nous vous proposons en annexe quelques simulations obtenues en utilisant la méthode circulante de Dietrich&Newsam(1997).

### 3 Modélisation Microscopique

Dans cette partie, nous présenterons les faits stylisés microscopiques de la finance à haute fréquence et nous verrons comment il est possible de les reproduire dans par un processus de Hawkes qui pour  $T$  tendant vers l'infini converge vers un modèle rough Heston.

#### 3.1 Faits Stylisés Microscopiques

Dans la finance à très haute fréquence, on observe les variations des prix sur une échelle de temps discontinue (prix microscopique), ce qui conduit à définir un modèle discontinu, où le prix progresse par incréments (ou *tick*). Ainsi, on note le prix  $P_t$  d'un produit à l'instant  $t$ , défini par  $P_t = N_t^+ - N_t^-$  avec  $N_t^+$  le nombre d'incrément positifs de 0 à  $t$  et  $N_t^-$  le nombre d'incrément négatifs de 0 à  $t$ .

$N^+$  et  $N^-$  sont des variables aléatoires définies par une densité  $\lambda$  telle que  $\lambda_t^+ dt$  la probabilité que le prix soit incrémenté de 1 entre  $t$  et  $t + dt$ . Il est intéressant dans ce cas de définir  $(N^+, N^-)$  comme un processus de Hawkes bidimensionnel, c'est à dire un processus défini point par point, à valeur dans  $\mathbb{R}^2$  et d'intensité  $(\lambda^+, \lambda^-)$  de la forme :

$$\begin{pmatrix} \lambda_t^+ \\ \lambda_t^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu^+ \\ \mu^- \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} \phi_1(t-s) & \phi_3(t-s) \\ \phi_2(t-s) & \phi_4(t-s) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dN_s^+ \\ dN_s^- \end{pmatrix} \quad (12)$$

Introduisons maintenant les faits stylisés microscopiques à partir desquels nous encoderons le processus de Hawkes :

1. Le marché est très endogène. On appelle endogénéité du marché la grandeur  $E = \frac{N_{endogene}}{N_{total}}$  où  $N_{endogene}$  est le nombre d'ordres passés en réaction à des ordres précédents (par opposition aux ordres exogènes passés pour des raisons macroéconomiques) et  $N_{total}$  est le nombre total d'ordres passé sur le marché. Des calculs montrent que  $N \approx 0,9999$ .
2. Les mécanismes du marché supprime la possibilité d'arbitrage statistique, i.e. on considère que l'espérance  $P_t$  vaut  $P_0$ .
3. Il y a une asymétrie de liquidité entre les ordre *Ask* et les ordre *Bid*. En effet, acheter et vendre ne sont pas des actions équivalentes du

point de vu du marché. Par exemple, un market maker aura tendance à augmenter les prix de moins après un ordre d'achat qu'il ne les diminuera après un ordre de vente de la même taille, ce qui peut s'expliquer par le fait que le market maker cherche à avoir un portefeuille le plus réduit possible.

4. Une grande proportion des ordres passés sont en fait des sous-parties de metaorders qui sont divisés en plusieurs morceaux par des algorithmes.

A partir de ces faits stylisés, interprétons la formule de Hawkes donnée plus haut :

$$\begin{pmatrix} \lambda_t^+ \\ \lambda_t^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu^+ \\ \mu^- \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} \phi_1(t-s) & \phi_3(t-s) \\ \phi_2(t-s) & \phi_4(t-s) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dN_s^+ \\ dN_s^- \end{pmatrix}$$

Ici,  $\mu^+$  et  $\mu^-$  sont des constantes positives, et les  $\phi_i$  sont des fonctions positives localement intégrables.

La probabilité d'un tick positif, ie d'une variation de  $N_t^+$  entre  $t$  et  $t + dt$  est  $\lambda_t^+ dt$  qui peut être interprété comme suit :

- $\mu^+ dt$  correspond à un processus de Poisson d'intensité  $\mu^+$  et représente la probabilité que le prix augmente pour une raison macroéconomique.
- $(\int_0^t \phi_1(t-s) dN_s^+)$  est la probabilité que le prix augmente suite à des augmentations du prix dans le passé (variation endogène).
- $(\int_0^t \phi_3(t-s) dN_s^-)$  est la probabilité que le prix augmente suite à des diminutions du prix dans le passé (variation endogène).

Dans les prochaines sous-parties, nous détaillerons les quatre faits stylisés et leur implémentation.

### 3.2 Absence d'arbitrage statistique et asymétrie *Bid/Ask*

Comme nous l'avons expliqué plus haut, on suppose que le fonctionnement du marché ne permet pas de construire des stratégies permettant de gagner à coup sûr. Dans notre modèle, cela se traduit par le fait qu'en moyenne, il y a autant de *ticks* vers le haut que vers le bas. Cela se traduit par :

$$\mathbb{E}[N_t^+] = \mathbb{E}[N_t^-]$$

or

$$\mathbb{E}[N_t^+] = \int_0^t \mathbb{E}[\lambda_s^+] ds, \quad \mathbb{E}[N_t^-] = \int_0^t \mathbb{E}[\lambda_s^-] ds$$

d'où

$$\mathbb{E}[\lambda_t^+] = \mathbb{E}[\lambda_t^-]$$

et avec

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\lambda_t^+] &= \mu^+ + \int_0^t \phi_1(t-s) \mathbb{E}[\lambda_s^+] ds + \int_0^t \phi_3(t-s) \mathbb{E}[\lambda_s^-] ds \\ \mathbb{E}[\lambda_t^-] &= \mu^- + \int_0^t \phi_2(t-s) \mathbb{E}[\lambda_s^+] ds + \int_0^t \phi_4(t-s) \mathbb{E}[\lambda_s^-] ds \end{aligned}$$

Une façon simple d'obtenir l'égalité des espérances est de poser :

$$\mu^+ = \mu^- = \mu, \quad \phi_1 + \phi_3 = \phi_2 + \phi_4 \quad (13)$$

L'asymétrie *Bid/Ask* peut se comprendre facilement dans ce modèle : une hausse du prix consécutive à une hausse est moins probable qu'une baisse consécutive à une baisse, ce qui se traduit par  $\phi_1(x) < \phi_4(x)$  ou de manière équivalente par  $\phi_2(x) < \phi_3(x)$  quand  $x$  est proche de 0. On peut modéliser cela simplement en posant  $\phi_3 = \beta \phi_2$  avec  $\beta$  une constante positive plus grande que 1. Le modèle devient alors :

$$\begin{pmatrix} \lambda_t^+ \\ \lambda_t^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu \\ \mu \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} \phi_1(t-s) & \beta \phi_2(t-s) \\ \phi_2(t-s) & \phi_1(t-s) + (\beta - 1) \phi_2(t-s) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dN_s^+ \\ dN_s^- \end{pmatrix} \quad (14)$$

### 3.3 Endogénéité du marché

Pour comprendre le phénomène d'endogénéité du marché, nous allons dans un premier temps travailler dans une espace à une dimension. On pose :

$$\lambda_t = \mu + \sum_{t_j < t} \Phi(t - t_j) \quad (15)$$

où les  $t_j$  sont les instants où  $P_t$  augmente. On peut alors interpréter  $N$  comme un processus de population, où des migrants arrivent selon un processus de Poisson d'intensité  $\mu$  et se reproduisent aux instants  $t - t_j$  avec la probabilité  $\Phi(t - t_j)$ . Ainsi, en moyenne, chaque individus arrivant aura  $\int_0^\infty \Phi(s) ds =$



$\|\Phi\|_1$  enfants. Chaque enfant se reproduira de même, ce qui donnera comme population totale (à un horizon de temps infini)  $\|\Phi\|_1 + \|\Phi\|_1^2 + \dots = \sum_1^\infty \|\Phi\|_1$ . Pour que cette population n'explose pas, on doit avoir  $\|\Phi\|_1 < 1$  ce qui donne une population de  $1 + \frac{\|\Phi\|_1}{1 - \|\Phi\|_1}$ .

En terme d'endogénéité, on peut interpréter cela de la sorte : pour un ordre passé pour des raisons économiques, on compte  $\frac{\|\Phi\|_1}{1 - \|\Phi\|_1}$  ordres endogènes, ce qui donne donc :

$$E = \frac{\frac{\|\Phi\|_1}{1 - \|\Phi\|_1}}{\frac{\|\Phi\|_1}{1 - \|\Phi\|_1} + 1} = \|\Phi\|_1 \quad (16)$$

En travaillant maintenant en deux dimensions, pour que la population n'explose pas, on doit avoir avec  $\rho(\int_0^\infty \Phi) < 1$  où  $\rho$  désigne l'opérateur rayon spectral. Lorsque le rayon spectral est proche de 1, on parle de processus presque instable. Dans notre cas, on a donc  $\rho(\int_0^\infty \Phi) = \|\phi_1\|_1 + \beta\|\phi_2\|_1 < 1$ .

Ce rayon spectral représente par ailleurs l'endogénéité du marché, et nous souhaitons donc qu'elle soit le plus proche possible de 1. Pour cela, nous introduisons une suite d'espace de probabilité indexé par  $T$ . Sur chacun d'entre eux, nous introduisons le processus défini sur  $[0, T]$  par :

$$\lambda_t^T = \begin{pmatrix} \lambda_t^{T,+} \\ \lambda_t^{T,-} \end{pmatrix} = \mu_T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + a_T \int_0^t \begin{pmatrix} \phi_1(t-s) & \beta\phi_2(t-s) \\ \phi_2(t-s) & \phi_1(t-s) + (\beta-1)\phi_2(t-s) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dN_s^{T,+} \\ dN_s^{T,-} \end{pmatrix}$$

avec  $a_T$  une suite positive croissante tendant vers 1,  $\mu_T$  une constante positive et  $\phi_1$  et  $\phi_2$  deux fonctions positives intégrables telles que  $\rho(\int_0^\infty \Phi) = \|\phi_1\|_1 + \beta\|\phi_2\|_1 = 1$ .

On suppose par ailleurs qu'il existe une constante positive  $\lambda$  telle que  $a_T$  converge vers 1 à la vitesse  $\lambda/T$ .

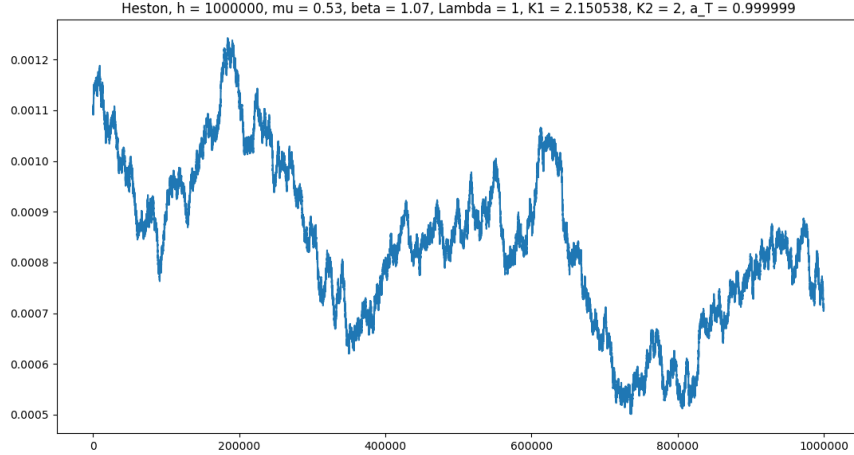
Avec cette construction et sous des hypothèses plus techniques, la théorie montre que ce modèle microscopique, respectant les trois premiers faits stylisés microscopiques (pas d'arbitrage statistique, asymétrie Ask/Bid et endogénéité du marché) converge après rescaling en espace et en temps vers un modèle de Heston.

### 3.4 Simulation des trois premiers faits stylisés

La simulation de ce processus de Hawkes se fait par un calcul récursif des valeurs de  $\lambda_t$ , de  $dN_t$  et de  $N_t$ . Pour cette simulation, les paramètres utilisés sont les suivants :

- $\mu = 0.53$
- $\beta = 1.07$
- $a_T = 1 - 1/T$
- $\phi_1(t) = e^{-2.2222t}$  et  $\phi_2(t) = e^{-2t}$

Une simulation avec les paramètres précédents et  $T = 10^6$  est reproduit dans la figure ci-dessous.



### 3.5 Un quatrième fait stylisé : la grande proportion de metaorders

Ce fait stylisé rend compte du fait qu'une proportion importante des ordres sur arrivant sur le marché sont en fait des sous-parties d'un ordre plus gros qui est splitté par un algorithme. On peut très bien représenter cela par la forme des fonctions  $\phi$ . En effet, les 'descendants' du migrant  $\mu$  arrivent non plus en une seule fois (valeur de  $\phi$  concentrée en 0) mais séparément, ce qui implique l'utilisation de fonction dite à *heavy tail*, c'est à dire à décroissance lente.

Du fait de leur faible vitesse de décroissance, certaines conditions de convergence de l'intégrale de  $\phi$  ne sont plus satisfaites et il faut donc adapter notre modèle. Nous faisons alors comme hypothèses que :

- Il existe  $\lambda^* > 0$  tel que  $T^\alpha(1 - a_T) \rightarrow \lambda^*$
- Il existe  $\mu > 0$  tel que  $T^{1-\alpha}\mu_T \rightarrow \mu$

avec  $\alpha$  une constante positive proche de  $1/2$ .

Sous ces conditions, le processus normalisé en espace et en temps :

$$\sqrt{\frac{1 - a_T}{\mu * T^\alpha}} P_{t*T}^T, t \in [0, 1]$$

converge vers le modèle rough Heston défini par :

$$P_t = \frac{1}{1 - (\|\phi_1\|_1 - \|\phi_2\|)} \sqrt{\frac{2}{\beta + 1}} \int_0^t \sqrt{Y_s} dW_s$$

avec  $Y$  l'unique solution de :

$$Y_t = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \lambda((1+\beta) - Y_s) ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \lambda \sqrt{\frac{1 + \beta^2}{\lambda^* \mu (1 + \beta)}} \sqrt{Y_s} dB_s$$

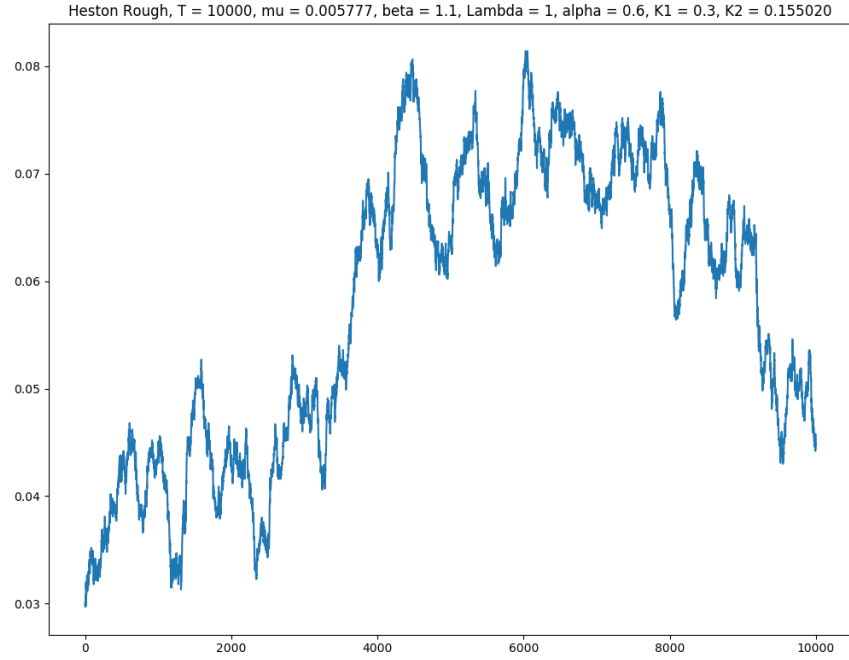
où  $(B, W)$  est un Brownien bi-dimensionnel corrélé tel que :

$$d\langle W, B \rangle_t = \frac{1 - \beta}{\sqrt{2(1 + \beta^2)}} dt < 0$$

### 3.6 Simulation du modèle complet

Pour simuler ce nouveau processus, le code a été adapté de manière à prendre en compte ce dernier fait stylisé. Il implémente les paramètres suivants :

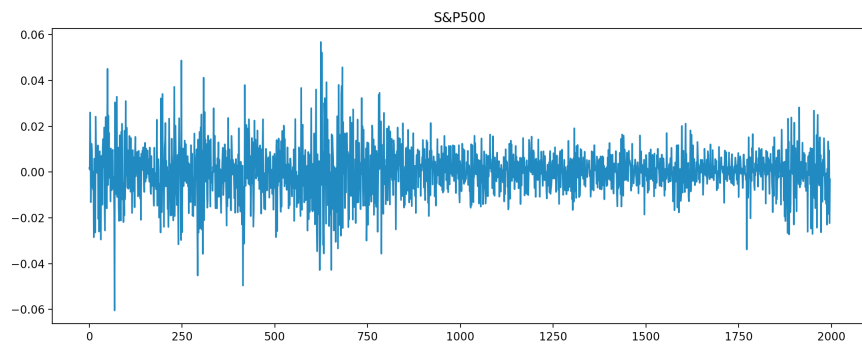
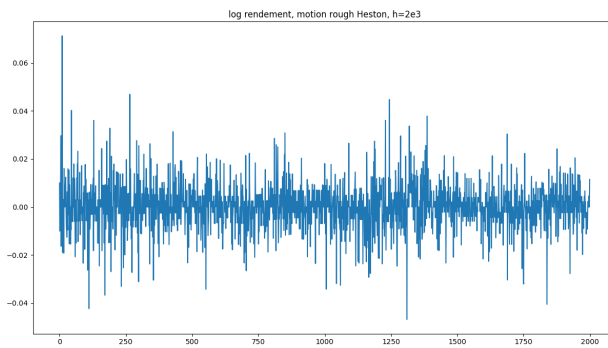
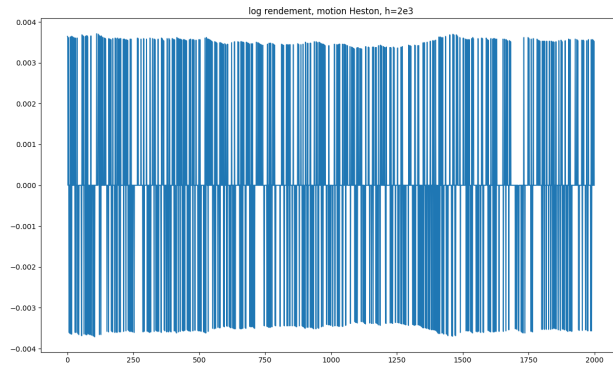
- $\alpha = 0.6$
- $\mu = 0.23$  et  $\mu_T = \frac{\mu}{T^{1-\alpha}}$
- $\lambda^* = 1$
- $a_T = 1 - \frac{\lambda^*}{T^{1-\alpha}}$
- $\beta = 1.1$
- $\phi_1(t) = \frac{0.3}{1+T^{1+\alpha}}$  et  $\phi_2(t) = \frac{0.155}{1+T^{1+\alpha}}$



Une simulation avec les paramètres précédents et  $T = 10^5$  est reproduit dans la figure ci-dessus.

Par ailleurs, à partir de ces données, nous pouvons calculer le log rendement des actifs et comparer leur forme avec le log rendement réel observé sur le marché. Les figures ci-dessous représentent le log rendement pour un processus tendant vers un processus de Heston, le log rendement pour un processus tendant vers un processus rough Heston et le log rendement observé sur le marché.

On constate que le log rendement d'un processus de Hawkes qui tend à l'infini vers un processus de Heston ne reproduit pas celui observé sur le marché alors qu'un processus de Hawkes tendant vers un rough Heston le reproduit bien, ce qui montre la pertinence de notre encodage des quatre faits stylisés microscopiques.



## 4 Conclusion : fait stylisés macroscopiques obtenus

Rappelons les faits stylisés macroscopiques à reproduire :

- La volatilité est rough
- La volatilité est stochastique
- La volatilité présente un effet de levier

Il est donc possible d'introduire une suite de processus de Hawkes, dont l'encodage et les paramètres permettent de reproduire les faits stylisés microscopiques (forte endogénéité du marché, absence d'arbitrage statistique, asymétrie Bid/Ask et metaorders). En posant certaines hypothèses, on peut montrer que cette suite de processus, normalisés en espace et en temps, converge vers le processus ci-dessous.

$$P_t = \frac{\sqrt{2}}{1 - (\|\phi_1\|_1 - \|\phi_2\|)} \int_0^t \sigma_s dW_s$$

avec  $\sigma$  l'unique solution de :

$$\sigma_t^2 = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \lambda (1-\sigma_s^2) ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \lambda \sqrt{\frac{2(1+\beta^2)}{\lambda^* \mu (1+\beta)^2}} \sigma_s dB_s$$

où  $(B, W)$  est un Brownien bi-dimensionnel corrélé tel que :

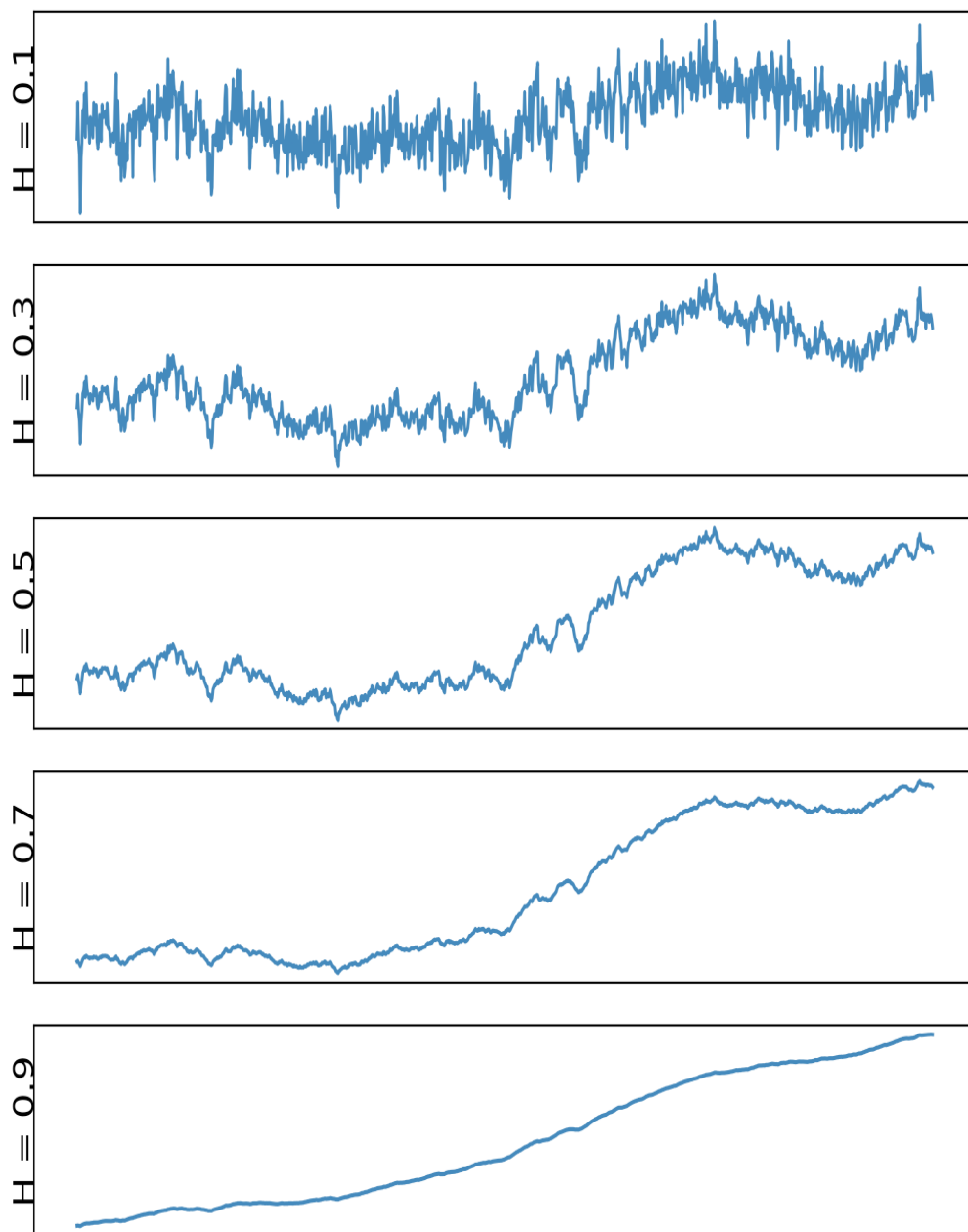
$$d\langle W, B \rangle_t = \frac{1-\beta}{\sqrt{2(1+\beta^2)}} dt < 0$$

Ce modèle reproduit bien les fait stylisés macroscopiques cités ci-dessus. La volatilité est stochastique et présente un effet de levier vis à vis du prix. En effet, le prix et la volatilité sont corrélés négativement par  $d\langle W, B \rangle_t < 0$ . Par ailleurs, ce résultat montre que la volatilité a un comportement très rough avec un paramètre de Hurst qui correspond à  $\alpha - 1/2$ .

Il est intéressant de constater ici qu'un certain nombre de fait stylisés microscopiques de la finance à haute fréquence permettent de reproduire des faits stylisés microscopiques et sont mêmes une des origines de certains phénomènes tels que le comportement rough de la volatilité.

## Références

- [1] C. Bayer, P. Friz, and J. Gatheral. Pricing under rough volatility.
- [2] O. E. Euch and M. Rosenbaum. The characteristic function of rough heston models.
- [3] O. E. Euch and M. Rosenbaum. Perfect hedging in rough heston models.
- [4] J. Gatheral, T. Jaisson, and M. Rosenbaum. Volatility is rough.
- [5] T. Jaisson and M. Rosenbaum. Rough fractional diffusions as scaling limits of nearly unstable heavy tailed hawkes processes.
- [6] G. Shevchenko. Fractional brownian motion in a nutshell.



Trajectoires d'un mBf pour différentes valeurs de  $H$