

# Modélisation du cours d'un actif boursier: Du microscopique au macroscopique

Gabriel Misrachi & Alexis Rougé

MAP 571 École polytechnique

13 décembre 2017

- 1 Introduction
- 2 Modèle microscopique
- 3 Fait stylisé de la volatilité
- 4 Un dernier fait stylisé microscopique

# Plan

- 1 Introduction
- 2 Modèle microscopique
- 3 Fait stylisé de la volatilité
- 4 Un dernier fait stylisé microscopique

## Objectif

Dans cette courte présentation nous allons exposer la causalité entre faits stylisés microscopiques (e.g. absence d'arbitrage) et macroscopiques (e.g. effet de levier) par la convergence d'un modèle microscopique bien choisi.

# Plan

- 1 Introduction
- 2 **Modèle microscopique**
- 3 Fait stylisé de la volatilité
- 4 Un dernier fait stylisé microscopique

## Modélisation du prix

- Échelle de temps discontinu (ms)
- Évolution du prix par incrément (*ticks*)
- $P_t = N_t^+ - N_t^-$
- $N_t^\pm$  processus de Poisson de densité  $\lambda_t^\pm$
- La probabilité que  $N^+$  (resp.  $N^-$ ) s'incrémente de 1 entre  $t$  et  $t + dt$  est  $\lambda_t^+ dt$  (resp.  $\lambda_t^- dt$ )

## Processus de Hawkes

- $N = \begin{pmatrix} N^+ \\ N^- \end{pmatrix}$  processus de Poisson bidimensionnel de densité  
 $\lambda = \begin{pmatrix} \lambda^+ \\ \lambda^- \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} \lambda_t^+ \\ \lambda_t^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu^+ \\ \mu^- \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} \phi_1(t-s) & \phi_3(t-s) \\ \phi_2(t-s) & \phi_4(t-s) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dN_t^+ \\ dN_t^- \end{pmatrix}$
- $\mu^\pm$  sont des constantes positives, les  $\phi_i$  sont des fonctions positives localement intégrables

$$\begin{pmatrix} \lambda_t^+ \\ \lambda_t^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu^+ \\ \mu^- \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} \phi_1(t-s) & \phi_3(t-s) \\ \phi_2(t-s) & \phi_4(t-s) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dN_t^+ \\ dN_t^- \end{pmatrix}$$

## Interprétation du processus

- $\mu^+$  : partie poissonnienne du processus  $\lambda^+$ , probabilité que le prix augmente pour des raisons macroéconomiques
- $(\int_0^t \phi_1(t-s)dN_s^+)$  : probabilité que le prix augmente suite à des augmentations du prix dans le passé (variation endogène)
- $(\int_0^t \phi_3(t-s)dN_s^-)$  est la probabilité que le prix augmente suite à des diminutions du prix dans le passé



## Finance électronique à haute fréquence

### Faits stylisés

- 1 Pas d'arbitrage statistique
- 2 Asymétrie de liquidité entre *Bid* et *Ask*
- 3 Marché hautement endogène :  $E \approx 0.9999$

Absence d'arbitrage statistique :  $\mathbb{E}[P_t] = P_0$

## Encodage

- On souhaite reproduire :  $\mathbb{E}[N_t^+] = \mathbb{E}[N_t^-] \forall t > 0$   
or
- $\mathbb{E}[N_t^+] = \int_0^t \mathbb{E}[\lambda_s^+] ds$  et  $\mathbb{E}[N_t^-] = \int_0^t \mathbb{E}[\lambda_s^-] ds$   
donc
- $\mathbb{E}[\lambda_t^+] = \mathbb{E}[\lambda_t^-]$
- cela s'obtient par exemple avec :  $\mu^+ = \mu^- = \mu$  et  
 $\phi_1 + \phi_3 = \phi_2 + \phi_4$

Asymétrie Bid/Ask :  $\phi_2(x) < \phi_3(x)$  pour  $x$  proche de 0

## Encodage

- Une solution (restrictive) peut être :  $\phi_3 = \beta\phi_2$  avec  $\beta > 1$

- On obtient alors :  $\begin{pmatrix} \lambda_t^+ \\ \lambda_t^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu \\ \mu \end{pmatrix} +$

$$\int_0^t \begin{pmatrix} \phi_1(t-s) & \beta\phi_2(t-s) \\ \phi_2(t-s) & \phi_1(t-s) + (\beta-1)\phi_2(t-s) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dN_s^+ \\ dN_s^- \end{pmatrix}$$

Marché hautement endogène, processus de population

## Encodage

- Processus à 1 dimension :  $E = \|\Phi\|_1$
- Processus à 2 dimension :  $E = \rho(\int_0^\infty \Phi) = \|\phi_1\|_1 + \beta\|\phi_2\|_1$
- On cherche E le plus proche de 1

## Suite de processus de Hawkes

- Suite d'espace de probabilité indexés par  $T$
- Processus défini sur  $[0, T]$
- $\lambda_t^T = \mu^T + \int_0^t \Phi^T(t-s).dN_s^T$  avec  $\mu_T = \mu$ ,  $\Phi^T = a_T \Phi$  et  $a_T$  suite croissante positive de limite 1

## Simulation numérique

- $\mu = 0.53$
- $\beta = 1.07$
- $a_T = 1 - 1/T$
- $\phi_1(t) = e^{-2.2222t}$  et  $\phi_2(t) = e^{-2t}$

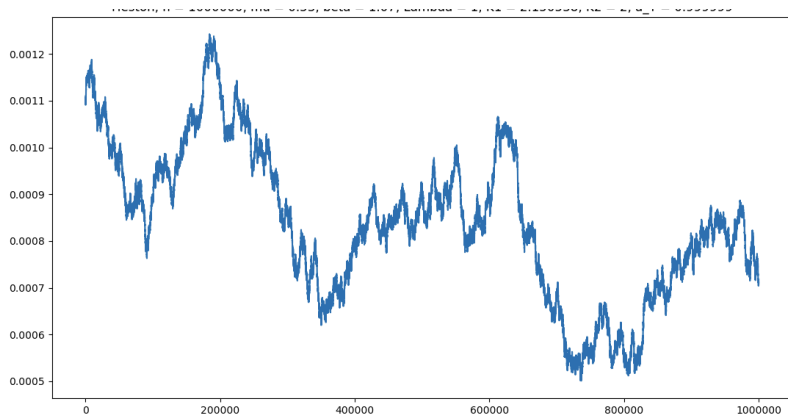


Figure – Simulation d'un processus de Hawkes avec  $T = 10^6$

## Convergence du modèle

Convergence théorique du modèle rescalé vers un processus de Heston défini par :

$$\frac{1}{T}P_{tT}^T \rightarrow \frac{1}{1 - (\|\phi_1\|_1 - \|\phi_2\|_1)} \int_0^t \sqrt{X_s} dW_s$$

où

$$dX_t = \frac{\lambda}{m} \left( \frac{2\mu}{\lambda} - X_t \right) dt + \frac{1}{m} \sqrt{X_t} dB_t \quad X_0 = 0$$

avec  $B$  et  $W$  deux browniens indépendants



# Plan

- 1 Introduction
- 2 Modèle microscopique
- 3 Fait stylisé de la volatilité**
- 4 Un dernier fait stylisé microscopique

# Conséquences du modèle de Heston classique

## Avantages

- Volatilité stochastique
- Reproduit l'effet de levier
- Surface de volatilité

## Inconvénients majeur

- La volatilité à un comportement Brownien

# Régularité de la volatilité

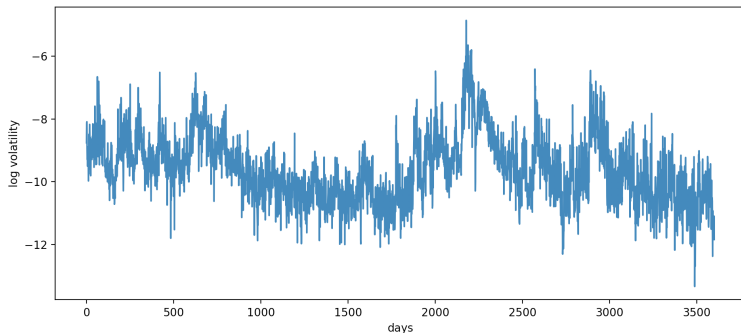


Figure – Oxford-Mann Institute data,  $\log(\sigma_t)$ , S&P

# Mouvement Brownien Fractionnaire $B^H$

## Définition

- $B^H$  peut être défini comme étant le processus Gaussien ayant pour fonction de covariance :

$$\mathbb{E}[B_t^H B_s^H] = \frac{1}{2}(t^{2H} + s^{2H} - |t - s|^{2H})$$

- L'exposant de Hurst  $H$  est le paramètre crucial de ce processus.
- $H = \frac{1}{2}$ ,  $B^H$  se réduit au mouvement Brownien.

# Propriétés de $B^H$ (I)

## Stationnarité

Stabilité par translation dans le temps :

$$\forall s \in \mathbb{R}, \{B_{t+s}^H - B_s^H\}_{t \in \mathbb{R}} \stackrel{\text{loi}}{=} \{B_t^H - B_0^H\}_{t \in \mathbb{R}}.$$

## H-Autosimilarité

Stabilité par changement d'échelle :

$$\forall a > 0, \{B_{at}^H\}_{t \in \mathbb{R}} \stackrel{\text{loi}}{=} \{a^\alpha B_t^H\}_{t \in \mathbb{R}}.$$

## Propriétés de $B^H$ (II)

### Corrélation des incréments

- Si  $H < \frac{1}{2}$ ,  $\mathbb{E}[(B_{t_1}^H - B_{s_1}^H)(B_{t_2}^H - B_{s_2}^H)] < 0$ .
- Si  $H > \frac{1}{2}$ ,  $\mathbb{E}[(B_{t_1}^H - B_{s_1}^H)(B_{t_2}^H - B_{s_2}^H)] > 0$ .

### Représentation intégrale

$$B_\alpha(t) := \int_{\mathbb{R}} \left[ (t-s)_+^{\alpha-1/2} - (-s)_+^{\alpha-1/2} \right] dB(s).$$

## Régularité de $B^H$ (II)

### Régularité Hölderienne

(Définition) Exposant de Hölder uniforme ( $EHU$ ) :

$$h_Y([a, b]) = \sup \left\{ h \geq 0 : \sup_{x_1, x_2 \in [a, b]} \frac{|Y(x_1) - Y(x_2)|}{|x_1 - x_2|^h} < +\infty \right\}.$$

Dans le cas du mBf :  $EHU = H$

### Moments absolus

On a l'égalité suivante :

$$\mathbb{E}[|B_{t+\Delta}^H - B_t^H|^q] = K_q \Delta^{Hq}$$

# Illustrations pour différents $H$

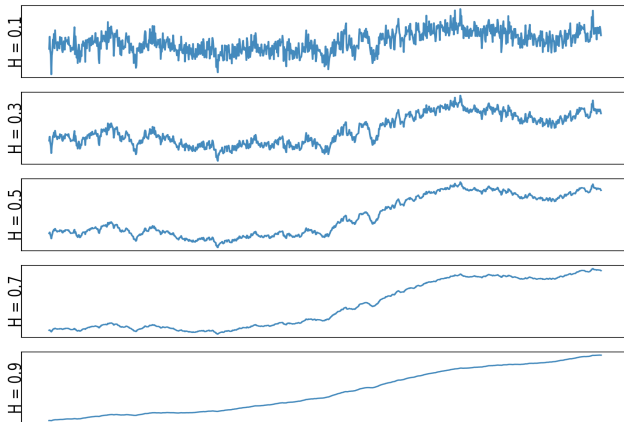


Figure – Régularité de  $B^H$  pour différents  $H$



# Volatilité et mBf

## Etat de l'art

D'après Gatheral, Rosenbaum et Jaisson la volatilité peut être modélisée par un mBf avec  $H < \frac{1}{2}$ . La régularité qui en découle conduit à la conclusion : "Volatility is Rough".

## Roughness : preuves empiriques

### Procédé

- On proxy la volatilité en utilisant la variance réalisée du S&P fournie par l'Institut Oxford-Mann.
- On étudie un estimateurs des moments absolus :

$$m(q, \Delta) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N |\log(\sigma_{\Delta k}) - \log(\sigma_{\Delta(k-1)})|^q$$

- (Rappel) Supposant un mBf pour la volatilité, on a :

$$\mathbb{E}[|B_{t+\Delta}^H - B_t^H|^q] = K_q \Delta^{Hq}$$

D'où

$$\log(m(q, \Delta)) \approx Hq \log(\Delta) + C$$

## Résultat de la régression

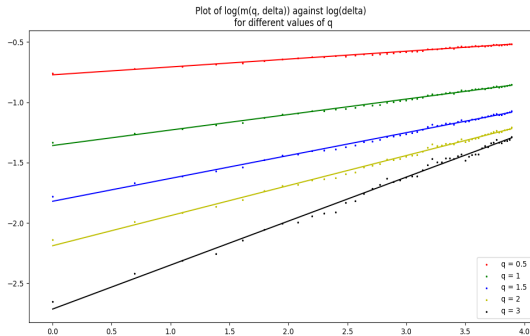


Figure – Tracé de  $\log(m(q, \Delta))$  en fonction de  $\log(\Delta)$

## Estimation de H

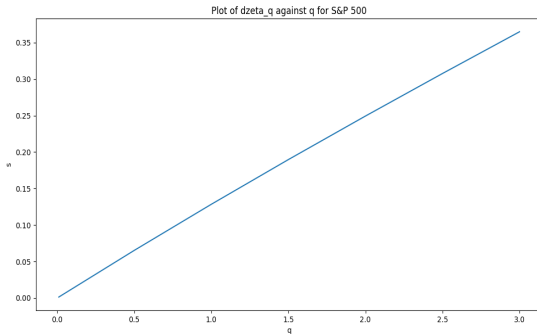


Figure – Tracé de  $\frac{\log(m(q,\Delta))}{\log(\Delta)}$  en fonction de q

# Résultat

## La volatilité est rough

- Le tracé de la pente de la régression en fonction de  $q$  est quasiment une droite, en réalité il est légèrement concave.
- Grâce à la formule explicite pour les moments absolus nous savons que la pente de la droite obtenue est égale à  $Hq$ .
- Ainsi, pour *S&P*, la volatilité est rough avec  $H$  proche de 0.1 . La même étude réalisée sur de nombreux autres indices procure le même ordre de grandeur pour  $H$ , avec, dans tous les cas  $H < \frac{1}{2}$ .

# Plan

- 1 Introduction
- 2 Modèle microscopique
- 3 Fait stylisé de la volatilité
- 4 Un dernier fait stylisé microscopique

## Un nouveau fait stylisé

- Une grande proportion des ordres passés sur le marché sont des sous ensemble de metaorders.

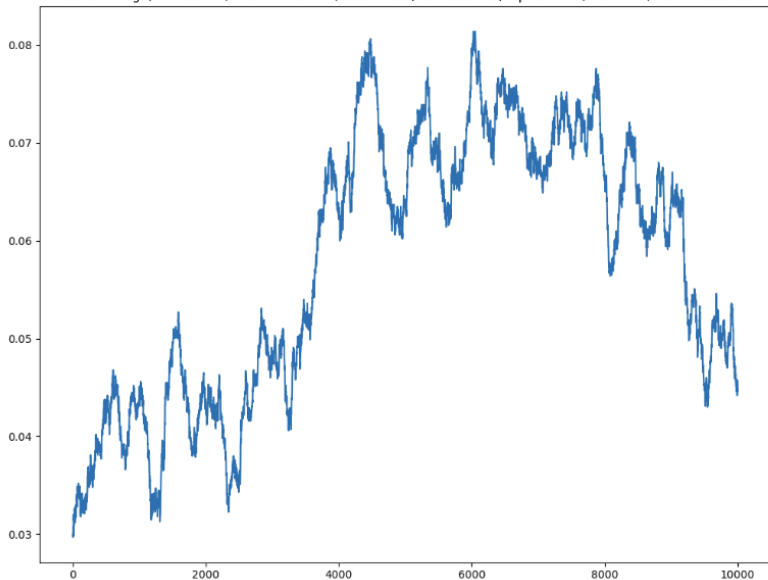
## Encodage

- $\Phi$  fonction *heavy tailed*

## Simulation numérique

- $\alpha = 0.6$
- $\mu = 0.23$  et  $\mu_T = \frac{\mu}{T^{1-\alpha}}$
- $\lambda^* = 1$
- $a_T = 1 - \frac{\lambda^*}{T^{1-\alpha}}$
- $\beta = 1.1$
- $\phi_1(t) = \frac{0.3}{1+T^{1+\alpha}}$  et  $\phi_2(t) = \frac{0.155}{1+T^{1+\alpha}}$





## Convergence du modèle

Convergence théorique du modèle rééchelonné vers un processus de Heston défini par :

$P_t = \frac{\sqrt{2}}{1 - (\|\phi_1\|_1 - \|\phi_2\|_1)} \int_0^t \sigma_s dW_s$  avec  $\sigma$  l'unique solution de :

$$\sigma_t^2 = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \lambda (1 - \sigma_s^2) ds +$$

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \lambda \sqrt{\frac{2(1+\beta^2)}{\lambda^* \mu (1+\beta)^2}} \sigma_s dB_s$$

où  $(B, W)$  est un Brownien bi-dimensionnel corrélé tel que :

$$d\langle W, B \rangle_t = \frac{1-\beta}{\sqrt{2(1+\beta^2)}} dt < 0$$

## Conclusion : Roughness

- On reconnaît le kernel fractionnaire en  $(t - s)^{\alpha-1}$  définissant le mBf.
- On peut montrer que la log-volatilité suit un mBf d'exposant de Hurst  $H = \alpha - \frac{1}{2}$ .
- Or  $\alpha < 1$ , ce qui nous permet d'obtenir le dernier fait stylisé macroscopique, une volatilité rough !

Merci pour votre écoute ! Des questions ?