1 Premier cours

1.1 Premiers modèles : Bachelier et Black-Scholes

1.1.1 Le début des mathématiques financières

Le premier modèle en mathématiques financières est très simple : le cours d'une action évolue suivant un mouvement brownien décrit par la formule ci dessous :

$$S_t = \sigma W_t + S_0 \tag{1}$$

Où S est le prix de l'action à l'instant t, W est un processus de Wiener et σ est la volatilité. Cependant, ce modèle ne reflète pas certains faits stylisés élémentaires comme le fait que le prix soit toujours positif ou nul.

1.1.2 Modèle de base : Black & Scholes

Ce modèle prend en compte le fait stylisé précédent : le prix doit être positif ou nul. Il repose sur un certain nombre d'hypothèses permettant de poser la formule suivante :

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \tag{2}$$

μ représente une dérive constante. Si on se place dans un cas ou le taux d'intérêt est nul et l'action du sous-jacent ne verse pas de dividendes, cette équation devient :

$$dS_t = \sigma S_t dW_t \tag{3}$$

qui s'intègre en :

$$S_t = S_0 e^{\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2} t} \tag{4}$$

Le point important de ce modèle est que seule W_t est stochastique, la volatilité σ est elle constante (ou tout du moins constante sur un intervalle de temps donné). Par ailleurs, en notant la valeur théorique du *payoff* $(S_T - K)^+$, d'espérance $C = \mathbb{E}[(S_T - K)^+]$, un calcul simple donne :

$$C(\sigma, T, K) = S_0 \mathcal{N}(d_+) - K\mathcal{N}(d_-) \tag{5}$$

où T est la maturité du sous-jacent, K est le prix d'exercice fixé par l'option, S_0 est le prix actuel du sous-jacent et $d_\pm$ est défini comme suit :

$$d_\pm = \frac{log(\frac{S_0}{K})}{\sigma\sqrt{T}} \pm \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T}$$

et

$$\mathcal{N}(x) = \mathbb{P}(\mathcal{N}(0,1) \leq x)$$

En observant $C^{market}(T,K)$, on peut donc calculer une valeur théorique de σ que l'on appellera *volatilité implicite* et l'on note alors :

$$C^{market}(T,K) = C^{BS}(\sigma(T,K),T,K) \tag{6}$$

avec $\sigma(T,K)$ la volatilité implicite.

Cependant, ce modèle ne correspond pas bien à la réalité : en effet, la volatilité n'est pas constante, et présente un effet de levier par rapport à K. Sous un certain seuil($\geq S_0$), lorsque K diminue, $\sigma(T,K)$ augmente. Nous allons donc chercher un nouveau modèle qui prend en compte ce phénomène en utilisant une volatilité stochastique.

1.2 Modèles à volatilité stochastique

Dans cette partie, nous étudierons différents modèles satisfaisant l'équation :

$$dS_t = S_t\sigma_t dW_t \tag{7}$$

Ces modèles définiront de plusieurs façons σ_t tout en respectant deux faits stylisés :

— σ est stochastique
— le modèle doit reproduire l'effet de levier, ie $(\Delta\sigma_+;\Delta S_t) \leq 0$

En première approche, on défini la volatilité par l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\sigma_t^2 = \nu_t$$
$$d\nu_t = \alpha_{S,t}dt + \beta_{S,t}dB_t \tag{8}$$

avec $\alpha_{S,t}$ et $\beta_{S,t}$ des fonctions de ν. Dans le cas de petites variations, on peut considérer que $\alpha_{S,t}dt$ est négligeable. On défini B par :

$$B_t = \rho W_t + \sqrt{1-\rho^2}W_t^{\perp}, \rho \in [-1;1] \tag{9}$$

avec W_t et $W_t^{\perp}$ deux brownien indépendants. On peut écrire de manière équivalente $cov(dB_t, dW_t) = \rho dt, \rho \leq 0$.

Il faut donc choisir la forme de $\beta_{S,t}dt$.

1.2.1 Modèle de base de volatilité stochastique : modèle de Heston

Dans son modèle, Heston fait l'hypothèse d'une volatilité brownienne définie comme suit :

$$d\nu_t = \lambda(\theta - v_s)ds + \xi\sqrt{v_t}dB_t \tag{10}$$

où θ est la valeur de convergence de ν, λ est la vitesse de retour de ν vers λ et ξ est la volatilité de la volatilité ('vol of vol').

Si ces paramètres satisfont la condition $2\lambda\theta > \xi^2$, alors le processus ν_t est strictement positif.

1.2.2 Rough Volatility

Dans le cas de la volatilité 'rough', B_t n'est plus un brownien mais un brownien fractionnaire B_t^H défini par :

$$B_t^H = \int_0^t (t-s)^{H-1/2}\mathrm{d}Bs, \;\; H < 1/2$$

Dans ce cadre là, on a :

$$\mathbb{E}[(B_{t+s}^H - B_s^H)^p] = s^{Hp}$$

et $(B_{t+s} - B_t)$ n'est plus indépendant du passé.

2 Deuxième cours

Le but du projet est de reproduire les faits stylisés macroscopiques (rough volatility, vol stochastique et leverage effect) en utilisant les modèles microscopiques sur un temps très long.

2.1 Faits Macroscopiques

Dans les modèles macroscopique, le prix d'un produit est évalué sur une période relativement longue (une heure, une journée..) en faisant un moyenne sur les valeurs du prix pendant cette période, in en résulte que le prix est macroscopiquement perçu comme une grandeur continue et on peut lui appliquer les modèles que l'on a vu précédemment de la forme :

$$dS_t = S_t \sigma_t dW_t$$

où l'on défini les différents paramètres du modèle. Ces modèles tentent de reproduire les trois faits stylisés vu précédemment : la volatilité est rough, le volatilité est stochastique, il existe un effet de levier (relation négative entre la variation du prix et la variation de la volatilité).

Nous allons essayer à présent de reproduire ces faits stylisés macroscopique en analysant et en reproduisant le comportement microscopique du prix.

2.2 Faits Microscopiques

Le prix microscopique est observé à une échelle de temps beaucoup plus réduite (de l'ordre de la ms). De part cette échelle de temps et la structure de la monnaie (non divisible), on observe donc un prix discontinu, qui progresse par incréments (ou *tick*). Ainsi, lorsqu'on observe le prix P_t d'un produit à l'instant t, on note $P_t = N_t^+ - N_t^-$ avec N_t^+ le nombre d'incréments positifs de O à t et N_t^- le nombre d'incréments négatifs de 0 à t.

V^+ et V^- sont des variables aléatoires qui sont défini par une densité λ avec $\lambda_t^+ dt$ la probabilité que le prix soit incrémenté de 1 entre t et $t + dt$. On défini enfin la martingale $M_t^+ = N_t^+ - \int_0^t \lambda_s^+ \mathrm{d}s$. Comment alors choisir λ ?

Un premier choix simple est $\lambda^+ = \lambda^- = \lambda$ qui définissent N^+ et N^- comme des processus de Poisson que l'on considérera alors comme indépendant.

Introduisons maintenant les faits stylisés macroscopiques sur lesquels nous baserons nos analyses :

— **Premier fait stylisé :** on suppose l'absence d'arbitrage statistique, i.e. on considère que l'espérance P_t vaut P_0 en moyenne, ce qui revient à écrire que $\mathbb{E}[\lambda^+] = \mathbb{E}[\lambda^-]$

— **Deuxième fait stylisé :** on suppose que le marché est très endogène. On appelle endogénéité du marché la grandeur $E = \frac{N_{endogene}}{N_{total}}$ où $N_{endogene}$ est le nombre d'ordres passés en réaction à des ordres précédents et N_{total} est le nombre total d'ordres passé sur le marché. Des calculs montrent que $N \approx 0,9999$.

Attardons nous sur l'endogénéité. Comme on l'a vu plus haut, on modélise P_t par la formule $P_t = N_t^+ - N_t^-$ avec N de densité λ. Travaillons d'abord dans une espace à une dimension. On pause :

$$\lambda_t = \mu + \sum_{t_j < t} \Phi(t - t_j) \tag{11}$$

où les t_j sont les instants où P_t augmente. On peut alors interpréter N comme un processus de population, où un nouvelle individus arrive à l'instant μ et se reproduit à chaque instant $t - t_j$ avec la probabilité Φ. Ainsi, en moyenne, chaque individus arrivant va créer $\int_0^\infty \Phi(s) \mathrm{d}s = \|\Phi\|_1$ enfants. Chaque enfant se reproduira de même, ce qui donnera comme population totale (à un horizon de temps infini) $\|\Phi\|_1 + \|\Phi\|_1^2 + ... = \sum_1^\infty \|\Phi\|_1$. Cette population n'explose pas pour $\|\Phi\|_1 < 1$ ce qui donne une population de $\frac{\|\Phi\|_1}{1 - \|\Phi\|_1}$.

En terme d'endogénéité, on peut interpréter cela de la sorte : pour un ordre passé pour des raisons économiques, on compte $\frac{\|\Phi\|_1}{1 - \|\Phi\|_1}$ ordres endogènes, ce qui donne donc :

$$E = \frac{\frac{\|\Phi\|_1}{1 - \|\Phi\|_1}}{\frac{\|\Phi\|_1}{1 - \|\Phi\|_1} + 1} = \|\Phi\|_1 \tag{12}$$

En travaillant maintenant en deux dimensions, on écrit :

$$\lambda_t^+ = \mu_+ + \sum_{t_j^+ < t} \Phi_{++}(t - t_j^+) + \sum_{t_j^- < t} \Phi_{+-}(t - t_j^-) \tag{13}$$

et

$$\lambda_t^- = \mu_- + \sum_{t_j^+ < t} \Phi_{-+}(t - t_j^+) + \sum_{t_j^- < t} \Phi_{--}(t - t_j^-) \tag{14}$$

ce qui peut s'écrire :

$$\begin{pmatrix} \lambda^+ \\ \lambda^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_+ \\ \mu_- \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} \Phi_{++}(t-s) & \Phi_{+-}(t-s) \\ \Phi_{-+}(t-s) & \Phi_{--}(t-s) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{d}N_s^+ \\ \mathrm{d}N_s^- \end{pmatrix} \tag{15}$$

avec $\rho(\int_0^\infty \Phi) \to 1$

Nous introduisons encore deux faits stylisés :

- Il existe une asymétrie de liquidité entre *Ask* et *Bid*, i.e. les *market maker* ont une tendance plus forte à baisser les prix quand on souhaite leur vendre des produits que celle à augmenter les prix à l'achat.
- Métaorders