1 Premiers modèles : Bachelier et Black-Scholes

1.1 Le début des mathématiques financières

Le premier modèle en mathématiques financières est très simple. Il relie le *strike* évolue suivant un mouvement brownien, avec comme seule constante le *strike* initial. Ce modèle est décrit par la formule ci dessous.

$$S_t = \sigma W_t + S_0 \tag{1}$$

Où S est le prix du sous-jacent à l'instant t, W est un processus de Wiener et σ est la volatilité. Cependant, ce modèle ne reflète pas certains fait stylisés élémentaire comme le fait que le prix soit positif.

1.2 Modèle de base : Black & Scholes

Ce modèle prend en compte le fait stylisé précédent : le prix doit être positif ou nul. Il repose sur un certain nombre d'hypothèses permettant de poser la formule suivante :

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \tag{2}$$

μ représente une dérive constante. Si on se place dans un cas ou le taux d'intérêt est nul et l'action du sous-jacent ne verse pas de dividendes, cette équation devient :

$$dS_t = \sigma S_t dW_t \tag{3}$$

qui s'intègre en :

$$S_t = S_0 e^{\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2} t} \tag{4}$$

Ce qui est important dans ce modèle est que seule W_t est stochastique, la volatilité σ est elle constante (ou tout du moins constante sur un intervalle de temps donné). Cette modélisation permet de mettre en bijection la volatilité avec la valeur d'un *call*. On dit alors que la volatilité est *implicite*. Ceci permet d'écrire la formule suivante :

$$C(\sigma, T, K) = \mathbb{E}[(S_t - K)^+] \tag{5}$$

où T est la maturité du sous-jacent et K est le prix d'exercice fixé par l'option. En observant $C^{market}(T, K)$, on peut donc calculer la valeur implicite de σ en utilisant la formule :

$$C^{model}(\sigma, T, K) = S_0 N(d_+) - K N(d_-) \tag{6}$$

où

$$d_{\pm} = \frac{log(\frac{S}{K})}{\sigma\sqrt{T}} \pm \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T}$$

et

$$N(x) = \mathbb{P}(\mathcal{N}(0,1) \leq x)$$

Soit C_0 le prix d'un *call*, il existe alors $\sigma_0(C_0)$ tel que le prix déterminé par la formule de Black & Scholes est le même que celui donné par le marché. On a alors l'équation suivante :

$$C^{market}(T,K) = C^{BS}(\sigma(T,K),T,K) \tag{7}$$

$\sigma(T,K)$ est appelé volatilité implicite. Cependant, ce modèle ne correspond

pas bien à la réalité : en effet, la volatilité n'est pas constante, et présente un effet de levier par rapport à K. Sous un certain seuil($\geq S_0$), lorsque K diminue, $\sigma(T,K)$ augmente. Nous allons donc chercher un nouveau modèle qui prend en compte ce phénomène en utilisant une volatilité stochastique.

2 Modèles à volatilité stochastique

Dans cette partie, nous étudierons différents modèles satisfaisant l'équation :

$$dS_t = S_t\sigma_t dW_t \tag{8}$$

Ces modèles définiront de plusieurs façons σ_t tout en respectant deux faits stylisés :

- σ est stochastique
- le modèle doit reproduire l'effet de levier, ie $(\Delta\sigma_+;\Delta S_t) \leq 0$

En première approche, on défini la volatilité par l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\sigma_t^2 = \nu_t$$

$$d\nu_t = \alpha_{S,t}dt + \beta_{S,t}dB_t \tag{9}$$

avec $\alpha_{S,t}$ et $\beta_{S,t}$ des fonctions de ν. Dans le cas de petites variations, on peut considérer que $\alpha_{S,t}dt$ est négligeable. On défini B par :

$$B_t = \rho W_t + \sqrt{1-\rho^2}W_t^{\perp}, \rho \in [-1;1] \tag{10}$$

avec W_t et $W_t^{\perp}$ deux brownien indépendants. On peut écrire de manière équivalente $cov(dB_t, dW_t) = \rho dt, \rho \leq 0$.

Il faut donc choisir la forme de $\beta_{S,t}dt$.

2.1 Modèle de base de volatilité stochastique : modèle de Heston

Dans son modèle, Heston fait l'hypothèse d'une volatilité brownienne définie comme suit :

$$d\nu_t = \lambda(\theta - v_s)ds + \xi\sqrt{v_t}dB_t \tag{11}$$

où θ est la valeur de convergence de ν, λ est la vitesse de retour de ν vers λ et ξ est la volatilité de la volatilité ('vol of vol').

Si ces paramètres satisfont la condition $2\lambda\theta > \xi^2$, alors le processus ν_t est strictement positif.

2.2 Rough Volatility

Dans le cas de la volatilité 'rough', B_t n'est plus un brownien mais un brownien fractionnaire B_t^H défini par :

$$B_t^H = \int_0^t (t-s)^{H-1/2} \mathrm{d}Bs, \;\; H < 1/2$$

Dans ce cadre là, on a :

$$\mathbb{E}[(B_{t+s}^H - B_s^H)^p] = s^{Hp}$$

et $(B_{t+s} - B_t)$ n'est plus indépendant du passé.