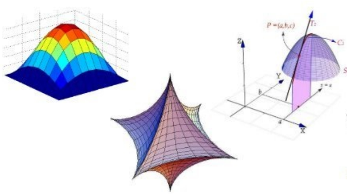
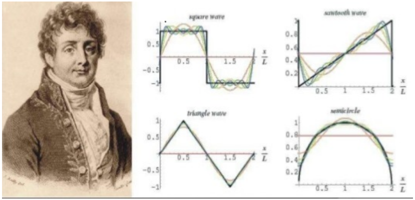
Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales y Series de Fourier

Unidad 2 (clase 4)

Prof. Carolina Cárdenas





Contenido de la Clase

1. Series de Fourier
   - Funciones de periodo 2π
   - Serie de Fourier de funciones pares e impares

Funciones de periodo 2π

Definición

Si el periodo T de una función periódica $f(t)$ es 2π, entonces $w = 1$, y la serie de Fourier se expresa:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(nt) + b_n \operatorname{sen}(nt)\right] \tag{1}$$

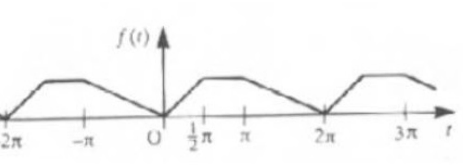
donde los coeficientes están dados por la fórmula de Euler

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_d^{d+2\pi} f(t)dt\,, \quad a_n = \frac{2}{T}\int_d^{d+2\pi} f(t)\cos(nt)\,dt \tag{2}$$

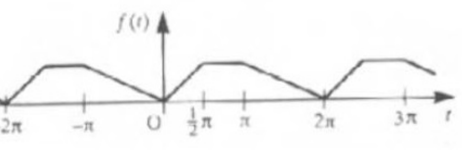
$$b_n = \frac{2}{T}\int_d^{d+2\pi} f(t)\operatorname{sen}(nt)\,dt \tag{3}$$

para $n = 1, 2, \cdots$,

EJEMPLO Dada la función periódica $f(t)$ de la figura 1, encuentre el desarrollo en serie de Fourier de $f(t)$ y estudie la convergencia.



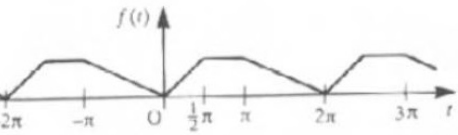
EJEMPLO Dada la función periódica $f(t)$ de la figura 1, encuentre el desarrollo en serie de Fourier de $f(t)$ y estudie la convergencia.



$$f(t) = \begin{cases} t & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}\pi \\ \frac{1}{2}\pi & \frac{1}{2}\pi \leq t \leq \pi \\ \pi - \frac{1}{2}t & \pi \leq t \leq 2\pi \end{cases}$$

$$f(t + 2\pi) = f(t) \,.$$

EJEMPLO Dada la función periódica $f(t)$ de la figura 1, encuentre el desarrollo en serie de Fourier de $f(t)$ y estudie la convergencia.



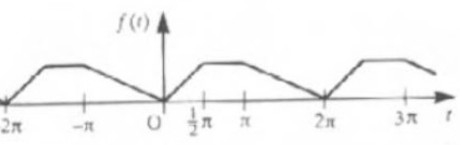
$$f(t) = \begin{cases} t & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}\pi \\ \frac{1}{2}\pi & \frac{1}{2}\pi \leq t \leq \pi \\ \pi - \frac{1}{2}t & \pi \leq t \leq 2\pi \end{cases}$$

$$f(t + 2\pi) = f(t).$$

Solución: Usando las ecuaciones de los coeficientes de Fourier tenemos:

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_d^{d+T} f(t)dt$$

EJEMPLO Dada la función periódica $f(t)$ de la figura 1, encuentre el desarrollo en serie de Fourier de $f(t)$ y estudie la convergencia.



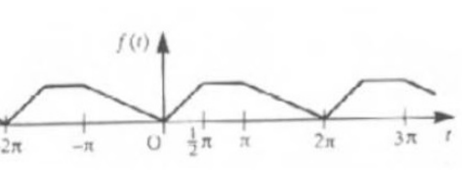
$$f(t) = \begin{cases} t & 0 \le t \le \frac{1}{2}\pi \\ \frac{1}{2}\pi & \frac{1}{2}\pi \le t \le \pi \\ \pi - \frac{1}{2}t & \pi \le t \le 2\pi \end{cases}$$

$$f(t + 2\pi) = f(t).$$

Solución: Usando las ecuaciones de los coeficientes de Fourier tenemos:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T}\int_d^{d+T} f(t)dt \\ &= \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)dt \end{aligned}$$

EJEMPLO Dada la función periódica $f(t)$ de la figura 1, encuentre el desarrollo en serie de Fourier de $f(t)$ y estudie la convergencia.



$$f(t) = \begin{cases} t & 0 \le t \le \frac{1}{2}\pi \\ \frac{1}{2}\pi & \frac{1}{2}\pi \le t \le \pi \\ \pi - \frac{1}{2}t & \pi \le t \le 2\pi \end{cases}$$

$$f(t+2\pi) = f(t).$$

Solución: Usando las ecuaciones de los coeficientes de Fourier tenemos:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T}\int_d^{d+T} f(t)dt \\ &= \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)dt \\ &= \frac{1}{\pi}\Big[\int_0^{\frac{\pi}{2}} tdt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{2}\pi dt \\ &+ \int_{\pi}^{2\pi}\left(\pi - \frac{1}{2}tdt\right)dt\Big] = \frac{5}{8}\pi. \end{aligned}$$

Para $n = 1, 2, \cdots$,, tenemos:

$$a_n = \frac{2}{T}\int_d^{d+T} f(t)\cos(nwt)dt \;\Rightarrow$$

Para $n = 1, 2, \cdots$,, tenemos:

$$a_n = \frac{2}{T}\int_d^{d+T} f(t)\cos(nwt)dt \;\Rightarrow\; a_n = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos\left(n\frac{2\pi}{2\pi}t\right)dt$$

Para $n = 1, 2, \cdots$,, tenemos:

$$a_n = \frac{2}{T}\int_d^{d+T} f(t)\cos(nwt)dt \;\Rightarrow\; a_n = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos\left(n\frac{2\pi}{2\pi}t\right)dt$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos nt\,dt$$

Para $n = 1, 2, \cdots$,, tenemos:

$$a_n = \frac{2}{T}\int_d^{d+T} f(t)\cos(nwt)dt \;\Rightarrow\; a_n = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos\left(n\frac{2\pi}{2\pi}t\right)dt$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos nt\,dt \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos nt\,dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{2}\pi\cos nt\,dt + \int_{\pi}^{2\pi}\left(\pi - \frac{1}{2}t\right)\cos nt\,dt\right] \end{aligned}$$

Para $n = 1, 2, \cdots$,, tenemos:

$$a_n = \frac{2}{T}\int_d^{d+T} f(t)\cos(nwt)dt \;\Rightarrow\; a_n = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos\left(n\frac{2\pi}{2\pi}t\right)dt$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos nt\,dt \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos nt\,dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{2}\pi\cos nt\,dt + \int_{\pi}^{2\pi}\left(\pi - \frac{1}{2}t\right)\cos nt\,dt\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{t}{n}\operatorname{sen} nt + \frac{\cos nt}{n^2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[\frac{\pi}{2n}\operatorname{sen} nt\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + \left[\frac{2\pi - t}{2}\frac{\operatorname{sen} nt}{n} - \frac{\cos nt}{2n^2}\right]_{\pi}^{2\pi} \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{2n}\operatorname{sen}\frac{1}{2}n\pi + \frac{1}{n^2}\cos\frac{1}{2}n\pi - \frac{1}{n^2}\right] - \frac{\pi}{2n}\operatorname{sen}\frac{1}{2}n\pi - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{2n^2}\cos n\pi
\end{aligned}$$

Para $n = 1, 2, \cdots$,, tenemos:

$$a_n = \frac{2}{T}\int_d^{d+T} f(t)\cos(nwt)dt \;\Rightarrow\; a_n = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos\left(n\frac{2\pi}{2\pi}t\right)dt$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos nt\,dt \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos nt\,dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{1}{2}\pi\cos nt\,dt + \int_{\pi}^{2\pi}\left(\pi - \frac{1}{2}t\right)\cos nt\,dt\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{t}{n}\text{sen } nt + \frac{\cos nt}{n^2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[\frac{\pi}{2n}\text{sen } nt\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + \left[\frac{2\pi - t}{2}\frac{\text{sen } nt}{n} - \frac{\cos nt}{2n^2}\right]_{\pi}^{2\pi} \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{2n}\text{sen }\frac{1}{2}n\pi + \frac{1}{n^2}\cos\frac{1}{2}n\pi - \frac{1}{n^2}\right] - \frac{\pi}{2n}\text{sen }\frac{1}{2}n\pi - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{2n^2}\cos n\pi \\
&= \frac{1}{2\pi n^2}\left(2\cos\frac{1}{2}n\pi - 3 + \cos n\pi\right)
\end{aligned}$$

Para $n = 1, 2, \cdots$,, tenemos:

$$a_n = \frac{2}{T}\int_d^{d+T} f(t)\cos(nwt)dt \;\Rightarrow\; a_n = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos\left(n\frac{2\pi}{2\pi}t\right)dt$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos nt\,dt \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos nt\,dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{2}\pi\cos nt\,dt + \int_{\pi}^{2\pi}\left(\pi - \frac{1}{2}t\right)\cos nt\,dt\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{t}{n}\,\text{sen}\,nt + \frac{\cos nt}{n^2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[\frac{\pi}{2n}\,\text{sen}\,nt\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + \left[\frac{2\pi - t}{2}\frac{\text{sen}\,nt}{n} - \frac{\cos nt}{2n^2}\right]_{\pi}^{2\pi} \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{2n}\,\text{sen}\,\frac{1}{2}n\pi + \frac{1}{n^2}\cos\frac{1}{2}n\pi - \frac{1}{n^2}\right] - \frac{\pi}{2n}\,\text{sen}\,\frac{1}{2}n\pi - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{2n^2}\cos n\pi \\
&= \frac{1}{2\pi n^2}\left(2\cos\frac{1}{2}n\pi - 3 + \cos n\pi\right)
\end{aligned}$$

Note que para $n = 2k(par)$, con $k = 1, 2, \cdots$, tenemos que
$\cos\frac{1}{2}n\pi = \cos\frac{1}{2}2k\pi = \cos k\pi = (-1)^k$, con $k = 1, 2, \cdots$.

Así que $\cos \frac{1}{2} n\pi = (-1)^{\frac{n}{2}}$, $k = \frac{n}{2}$.

Así que $\cos\frac{1}{2}n\pi = (-1)^{\frac{n}{2}}$, $k = \frac{n}{2}$.
Ahora si $n = 2k+1$(*impar*) , con $k = 1, 2, \cdots$, tenemos que

$$\cos\frac{1}{2}n\pi = \cos\frac{1}{2}(2k+1)\pi = 0$$

con $k = 1, 2, \cdots$, y $\cos n\pi = \cos(2k+1)\pi = -1$, con $k = 1, 2, \cdots$.

Así que $\cos\frac{1}{2}n\pi = (-1)^{\frac{n}{2}}$, $k = \frac{n}{2}$.
Ahora si $n = 2k+1$(*impar*) , con $k = 1, 2, \cdots$, tenemos que

$$\cos\frac{1}{2}n\pi = \cos\frac{1}{2}(2k+1)\pi = 0$$

con $k = 1, 2, \cdots$, y $\cos n\pi = \cos(2k+1)\pi = -1$, con $k = 1, 2, \cdots$.
Luego,

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n^2\pi}[(-1)^{\frac{n}{2}} - 1] & (n \text{ par}) \\ -\frac{2}{n^2\pi} & (n \text{ impar}) \end{cases}$$

Así que $\cos \frac{1}{2} n\pi = (-1)^{\frac{n}{2}}$, $k = \frac{n}{2}$.
Ahora si $n = 2k + 1 (impar)$, con $k = 1, 2, \cdots$, tenemos que

$$\cos \frac{1}{2} n\pi = \cos \frac{1}{2}(2k+1)\pi = 0$$

con $k = 1, 2, \cdots$, y $\cos n\pi = \cos(2k+1)\pi = -1$, con $k = 1, 2, \cdots$.
Luego,

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n^2\pi}[(-1)^{\frac{n}{2}} - 1] & (n \text{ par}) \\ -\frac{2}{n^2\pi} & (n \text{ impar}) \end{cases}$$

Ahora calculemos b_n, similarmente

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T}\int_d^{d+T} f(t) sen\,(nwt)\,dt = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,\text{sen}\left(n\frac{2\pi}{2\pi}t\right) dt \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,\text{sen}\,(nt)\,dt \end{aligned}$$

Así que $\cos \frac{1}{2}n\pi = (-1)^{\frac{n}{2}}$, $k = \frac{n}{2}$.
Ahora si $n = 2k + 1 (impar)$, con $k = 1, 2, \cdots$, tenemos que

$$\cos \frac{1}{2}n\pi = \cos \frac{1}{2}(2k+1)\pi = 0$$

con $k = 1, 2, \cdots$, y $\cos n\pi = \cos(2k+1)\pi = -1$, con $k = 1, 2, \cdots$.
Luego,

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n^2\pi}[(-1)^{\frac{n}{2}} - 1] & (n \text{ par}) \\ -\frac{2}{n^2\pi} & (n \text{ impar}) \end{cases}$$

Ahora calculemos b_n, similarmente

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T}\int_d^{d+T} f(t) sen(nwt)\,dt = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,\text{sen}\left(n\frac{2\pi}{2\pi}t\right) dt \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,\text{sen}\,(nt)\,dt \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\,\text{sen}\,nt\,dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{2}\pi\,\text{sen}\,nt\,dt + \int_{\pi}^{2\pi} \left[\pi - \frac{1}{2}t\right] \text{sen}\,nt\,dt\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\Big(\Big[-\frac{t}{n}\cos nt+\frac{1}{n^2}\,\mathrm{sen}\,nt\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}+\Big[-\frac{\pi}{2n}\cos nt\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \\ &\quad+\Big[\frac{t-2\pi}{2n}\cos nt-\frac{1}{2n^2}\,\mathrm{sen}\,nt\Big]_{\pi}^{2\pi}\Big) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\Big(\Big[-\frac{t}{n}\cos nt+\frac{1}{n^2}\operatorname{sen} nt\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}+\Big[-\frac{\pi}{2n}\cos nt\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \\ &\quad +\Big[\frac{t-2\pi}{2n}\cos nt-\frac{1}{2n^2}\operatorname{sen} nt\Big]_{\pi}^{2\pi}\Big) \\ &= \frac{1}{\pi}-\frac{\pi}{2n}\cos\frac{1}{2}n\pi+\frac{1}{n^2}\operatorname{sen}\frac{1}{2}n\pi-\frac{\pi}{2n}\cos n\pi+\frac{\pi}{2n}\cos\frac{1}{2}n\pi+\frac{\pi}{2n}\cos n\pi \\ &= \frac{1}{\pi n^2}\operatorname{sen}\frac{1}{2}n\pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\Bigg(\Big[-\frac{t}{n}\cos nt+\frac{1}{n^2}\operatorname{sen} nt\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}+\Big[-\frac{\pi}{2n}\cos nt\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \\ &\quad +\Big[\frac{t-2\pi}{2n}\cos nt-\frac{1}{2n^2}\operatorname{sen} nt\Big]_{\pi}^{2\pi}\Bigg) \\ &= \frac{1}{\pi}-\frac{\pi}{2n}\cos\frac{1}{2}n\pi+\frac{1}{n^2}\operatorname{sen}\frac{1}{2}n\pi-\frac{\pi}{2n}\cos n\pi+\frac{\pi}{2n}\cos\frac{1}{2}n\pi+\frac{\pi}{2n}\cos n\pi \\ &= \frac{1}{\pi n^2}\operatorname{sen}\frac{1}{2}n\pi \end{aligned}$$

Note que para $n = 2k(par)$, con $k = 1, 2, \cdots$, tenemos que $\operatorname{sen}\frac{1}{2}n\pi = \operatorname{sen}\frac{1}{2}2k\pi = \operatorname{sen} k\pi = 0$, para $k = 1, 2, \cdots$. Ahora si $n = 2k + 1(impar)$, con $k = 1, 2, \cdots$, tenemos que

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\Big(\Big[-\frac{t}{n}\cos nt+\frac{1}{n^2}\operatorname{sen} nt\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}+\Big[-\frac{\pi}{2n}\cos nt\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \\
&\quad +\Big[\frac{t-2\pi}{2n}\cos nt-\frac{1}{2n^2}\operatorname{sen} nt\Big]_{\pi}^{2\pi}\Big) \\
&= \frac{1}{\pi}-\frac{\pi}{2n}\cos\frac{1}{2}n\pi+\frac{1}{n^2}\operatorname{sen}\frac{1}{2}n\pi-\frac{\pi}{2n}\cos n\pi+\frac{\pi}{2n}\cos\frac{1}{2}n\pi+\frac{\pi}{2n}\cos n\pi \\
&= \frac{1}{\pi n^2}\operatorname{sen}\frac{1}{2}n\pi
\end{aligned}
$$

Note que para $n=2k(par)$, con $k=1,2,\cdots$, tenemos que $\operatorname{sen}\frac{1}{2}n\pi = \operatorname{sen}\frac{1}{2}2k\pi = \operatorname{sen} k\pi = 0$, para $k=1,2,\cdots$. Ahora si $n=2k+1(impar)$, con $k=1,2,\cdots$, tenemos que

$$
\operatorname{sen}\frac{1}{2}n\pi = \operatorname{sen}\frac{1}{2}(2k+1)\pi = \operatorname{sen}(k\pi+\frac{\pi}{2}) = \cos k\pi = (-1)^k
$$

con $k=1,2,\cdots$, $(n=2k+1 \Rightarrow k=\frac{n-1}{2})$.

Luego,

$$b_n = \begin{cases} 0 & (n \text{ par}) \\ \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^2\pi} & (n \text{ impar}) \end{cases}$$

Luego,

$$b_n = \begin{cases} 0 & (n \text{ par}) \\ \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^2\pi} & (n \text{ impar}) \end{cases}$$

Ahora la expansión en serie de Fourier de $f(t)$ es:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nt) + b_n \operatorname{sen}(nt)]$$

Luego,

$$b_n = \begin{cases} 0 & (n \text{ par}) \\ \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^2\pi} & (n \text{ impar}) \end{cases}$$

Ahora la expansión en serie de Fourier de $f(t)$ es:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nt) + b_n \operatorname{sen}(nt)] \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n\ par} a_n \cos nt + \sum_{n\ impar} a_n \cos nt + \sum_{n\ par} b_n \operatorname{sen} nt + \sum_{n\ impar} b_n \operatorname{sen} nt \end{aligned}$$

Luego,

$$b_n = \begin{cases} 0 & (n \text{ par}) \\ \dfrac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^2\pi} & (n \text{ impar}) \end{cases}$$

Ahora la expansión en serie de Fourier de $f(t)$ es:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(nt) + b_n \operatorname{sen}(nt)\right] \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n \text{ par}} a_n \cos nt + \sum_{n \text{ impar}} a_n \cos nt + \sum_{n \text{ par}} b_n \operatorname{sen} nt + \sum_{n \text{ impar}} b_n \operatorname{sen} nt \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n \text{ par}} a_n \cos nt + \sum_{n \text{ impar}} a_n \cos nt + \sum_{n \text{ impar}} b_n \operatorname{sen} nt \end{aligned}$$

Luego,

$$b_n = \begin{cases} 0 & (n \text{ par}) \\ \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^2\pi} & (n \text{ impar}) \end{cases}$$

Ahora la expansión en serie de Fourier de $f(t)$ es:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nt) + b_n \operatorname{sen}(nt)] \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n \text{ par}} a_n \cos nt + \sum_{n \text{ impar}} a_n \cos nt + \sum_{n \text{ par}} b_n \operatorname{sen} nt + \sum_{n \text{ impar}} b_n \operatorname{sen} nt \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n \text{ par}} a_n \cos nt + \sum_{n \text{ impar}} a_n \cos nt + \sum_{n \text{ impar}} b_n \operatorname{sen} nt \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n \text{ par}} \frac{1}{n^2\pi} [(-1)^{\frac{n}{2}} - 1] \cos nt + \sum_{n \text{ impar}} \frac{-2}{n^2\pi} \cos nt + \sum_{n \text{ impar}} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^2\pi} \operatorname{sen} nt \end{aligned}$$

Luego,

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n\ par} \frac{1}{n^2\pi}\left[(-1)^{\frac{n}{2}} - 1\right]\cos nt + \sum_{n\ impar} \frac{-2}{n^2\pi}\cos nt + \sum_{n\ impar} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^2\pi}\,\mathrm{sen}\, nt$$

Luego,

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n\ par} \frac{1}{n^2\pi}[(-1)^{\frac{n}{2}} - 1]\cos nt + \sum_{n\ impar} \frac{-2}{n^2\pi}\cos nt + \sum_{n\ impar} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^2\pi}\operatorname{sen} nt$$

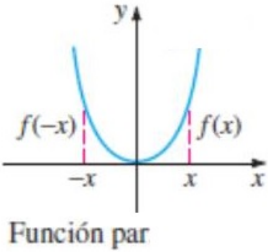
$$= \frac{5}{16}\pi - \frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos 2t}{2^2} + \frac{\cos 6t}{6^2} + \frac{\cos 10t}{10^2} + \cdots\right)$$

$$- \frac{2}{\pi}\left(\cos t - \frac{\cos 3t}{3^2} + \frac{\cos 3t}{3^2} + \cdots\right)$$

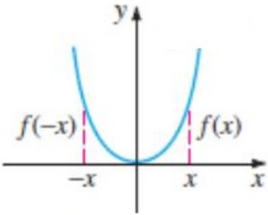
$$+ \frac{1}{\pi}\operatorname{sen} t - \frac{\operatorname{sen} 3t}{3^2} + \frac{\operatorname{sen} 5t}{5^2} - \frac{\operatorname{sen} 7t}{7^2} + \cdots$$

EJERCICIO: Expresar el resultado en términos de k.

Funciones Pares e Impares



Funciones Pares e Impares



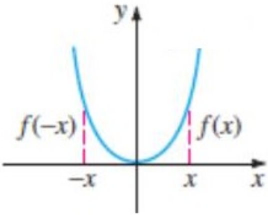
Función par

$$f(-t) = f(t)$$

Una función par verifica:

- Su gráfica es simétrica respecto al eje Y.

Funciones Pares e Impares



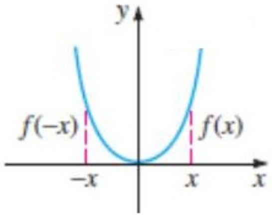
Función par

$$f(-t) = f(t)$$

Una función par verifica:

- Su gráfica es simétrica respecto al eje Y.
- $\int_{-a}^{a} f(t)dt =$

Funciones Pares e Impares



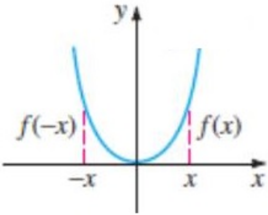
Función par

$$f(-t) = f(t)$$

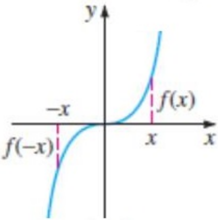
Una función par verifica:

- Su gráfica es simétrica respecto al eje Y.
- $\int_{-a}^{a} f(t)dt = 2\int_{0}^{a} f(t)dt$

Funciones Pares e Impares



Función par



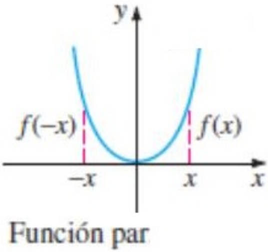
Función impar

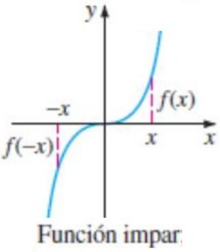
$$f(-t) = f(t)$$

Una función par verifica:

- Su gráfica es simétrica respecto al eje Y.
- $\int_{-a}^{a} f(t)dt = 2\int_{0}^{a} f(t)dt$

Funciones Pares e Impares





$$f(-t) = f(t)$$

Una función par verifica:

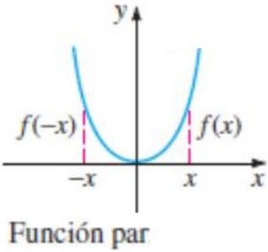
- Su gráfica es simétrica respecto al eje Y.
- $\int_{-a}^{a} f(t)dt = 2\int_{0}^{a} f(t)dt$

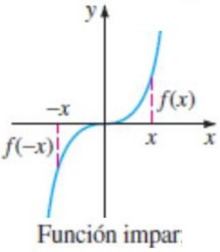
$$f(-t) = -f(t)$$

Una función impar verifica:

- Su gráfica es simétrica respecto al origen.

Funciones Pares e Impares





$$f(-t) = f(t)$$

Una función par verifica:

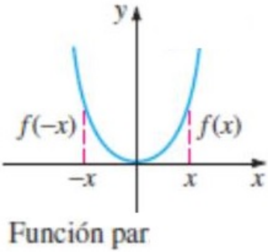
- Su gráfica es simétrica respecto al eje Y.
- $\int_{-a}^{a} f(t)dt = 2\int_{0}^{a} f(t)dt$

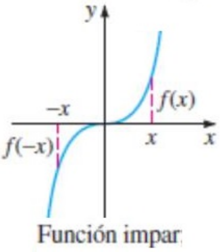
$$f(-t) = -f(t)$$

Una función impar verifica:

- Su gráfica es simétrica respecto al origen.
- $\int_{-a}^{a} f(t)dt =$

Funciones Pares e Impares





$$f(-t) = f(t)$$

Una función par verifica:

- Su gráfica es simétrica respecto al eje Y.
- $\int_{-a}^{a} f(t)dt = 2\int_{0}^{a} f(t)dt$

$$f(-t) = -f(t)$$

Una función impar verifica:

- Su gráfica es simétrica respecto al origen.
- $\int_{-a}^{a} f(t)dt = 0$

Observaciones

1. Las siguientes propiedades de las funciones pares e impares son útiles para nuestros propósitos.

Observaciones

1. Las siguientes propiedades de las funciones pares e impares son útiles para nuestros propósitos.
   - Si f es par y g es par entonces fg

Observaciones

1. Las siguientes propiedades de las funciones pares e impares son útiles para nuestros propósitos.
   - Si f es par y g es par entonces fg es par.

Observaciones

1. Las siguientes propiedades de las funciones pares e impares son útiles para nuestros propósitos.
   - Si f es par y g es par entonces fg es par.
   - Si f es impar y g es impar entonces fg

Observaciones

1. Las siguientes propiedades de las funciones pares e impares son útiles para nuestros propósitos.
    - Si f es par y g es par entonces fg es par.
    - Si f es impar y g es impar entonces fg es par.

Observaciones

1. Las siguientes propiedades de las funciones pares e impares son útiles para nuestros propósitos.
   - Si f es par y g es par entonces fg es par.
   - Si f es impar y g es impar entonces fg es par.
   - Si f es impar y g es par entonces fg

Observaciones

1. Las siguientes propiedades de las funciones pares e impares son útiles para nuestros propósitos.
   - Si f es par y g es par entonces fg es par.
   - Si f es impar y g es impar entonces fg es par.
   - Si f es impar y g es par entonces fg es impar.

   Veamos que ocurre con los coeficientes de Fourier para funciones pares e impares.
2. Si $f(t)$ es una función periódica par de periodo T entonces

$$a_n = \frac{2}{T}\int_d^{d+T} f(t)\cos nwt\, dt \Rightarrow a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos nwt\, dt$$

usando que $f(t)\cos nwt$ es una función par, por propiedad de simetría, tenemos

$$a_n = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\cos nwt\, dt$$

Ahora veamos que ocurre con b_n, con $n = 1, 2, \cdots$.

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{d}^{d+T} f(t)\,\mathrm{sen}\, nwt\, dt \Rightarrow b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,\mathrm{sen}\, nwt\, dt$$

Ahora veamos que ocurre con b_n, con $n = 1, 2, \cdots$.

$$b_n = \frac{2}{T}\int_d^{d+T} f(t)\,\text{sen}\, nwt\, dt \Rightarrow b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,\text{sen}\, nwt\, dt = 0$$

ya que $f(t)\,\text{sen}\, nwt$ es una función impar.

Así la expansión en serie de Fourier de una función periódica par $f(t)$ con periodo T consiste de términos con cosenos solamente y está dada por

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nwt$$

con

$$a_n = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\cos nwt\, dt\,, \quad (n = 0, 1, 2, \cdots).$$

- Si $f(t)$ es una función periódica impar de periodo T entonces

$$b_n = \frac{2}{T}\int_d^{d+T} f(t)\,\mathrm{sen}\,nwt\,dt \Rightarrow b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,\mathrm{sen}\,nwt\,dt$$

usando que $f(t)\,\mathrm{sen}\,nwt$ es una función par, por propiedad de simetría, tenemos

$$b_n = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\,\mathrm{sen}\,nwt\,dt$$

Ahora veamos que ocurre con a_n, con $n = 0, 1, 2, \cdots$.

$$a_n = \frac{2}{T}\int_d^{d+T} f(t)\cos nwt\,dt \Rightarrow a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos nwt\,dt$$

- Si $f(t)$ es una función periódica impar de periodo T entonces

$$b_n = \frac{2}{T}\int_d^{d+T} f(t)\,\mathrm{sen}\, nwt\, dt \Rightarrow b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,\mathrm{sen}\, nwt\, dt$$

usando que $f(t)\,\mathrm{sen}\, nwt$ es una función par, por propiedad de simetría, tenemos

$$b_n = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\,\mathrm{sen}\, nwt\, dt$$

Ahora veamos que ocurre con a_n, con $n = 0, 1, 2, \cdots$.

$$a_n = \frac{2}{T}\int_d^{d+T} f(t)\cos nwt\, dt \Rightarrow a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos nwt\, dt = 0$$

ya que $f(t)\cos nwt$ es una función impar.

Así la expansión en serie de Fourier de una función periódica impar $f(t)$ con periodo T consiste de términos con senos solamente y está dada por

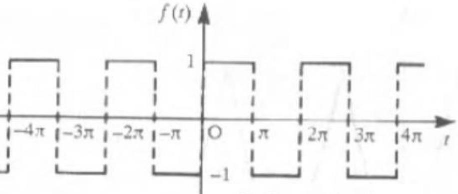
$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} nwt$$

con

$$b_n = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \operatorname{sen} nwt \, dt \,, \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

Ejemplo

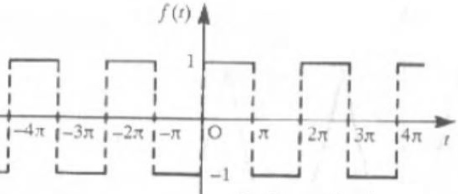
Encuentre la expansiónen serie de Fourier de la siguiente función



Onda cuadrada

Ejemplo

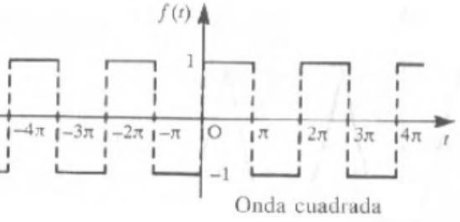
Encuentre la expansiónen serie de Fourier de la siguiente función



Onda cuadrada

Ejemplo

Encuentre la expansiónen serie de Fourier de la siguiente función

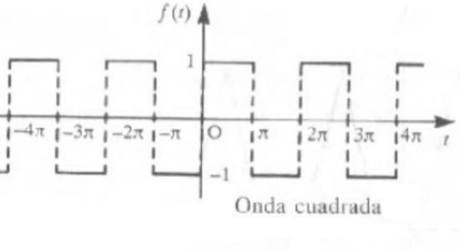


$$f(t) = \begin{cases} -1 & -\pi \leq t < 0 \\ 1 & 0 \leq t < \pi \end{cases}$$

$$f(t + 2\pi) = f(t)$$

Ejemplo

Encuentre la expansiónen serie de Fourier de la siguiente función



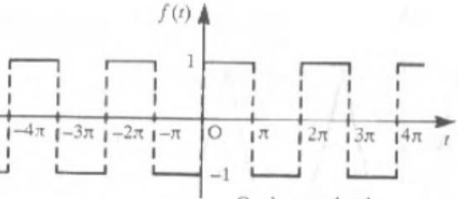
$$f(t) = \begin{cases} -1 & -\pi \leq t < 0 \\ 1 & 0 \leq t < \pi \end{cases}$$

$$f(t + 2\pi) = f(t)$$

Por ser $f(t)$ una función impar, se tiene que la expansión en serie de Fourier de $f(t)$ con periodo 2π está dada por

Ejemplo

Encuentre la expansiónen serie de Fourier de la siguiente función



Onda cuadrada

$$f(t) = \begin{cases} -1 & -\pi \leq t < 0 \\ 1 & 0 \leq t < \pi \end{cases}$$

$$f(t + 2\pi) = f(t)$$

Por ser $f(t)$ una función impar, se tiene que la expansión en serie de Fourier de $f(t)$ con periodo 2π está dada por

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} nwt\,, \quad b_n = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \operatorname{sen} nwt\, dt$$

con $(n = 1, 2, \cdots)$.

Note que como $T = 2\pi$, tenemos que $w = 1$, y

$$b_n = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\,\text{sen}\, nwt\, dt \Rightarrow$$

Note que como $T = 2\pi$, tenemos que $w = 1$, y

$$b_n = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\,\text{sen}\,nwt\,dt \Rightarrow b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\,\text{sen}\,nt\,dt \;\; (n = 1, 2, \cdots)$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 1\,\text{sen}\,nt\,dt$$

Note que como $T = 2\pi$, tenemos que $w = 1$, y

$$b_n = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\,\text{sen}\, nwt\, dt \Rightarrow b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\,\text{sen}\, nt\, dt \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 1\,\text{sen}\, nt\, dt = \frac{2}{\pi}\Big[-\frac{1}{n}\cos nt\Big]_0^{\pi}$$

Note que como $T = 2\pi$, tenemos que $w = 1$, y

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\,\text{sen}\,nwt\,dt \Rightarrow b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\,\text{sen}\,nt\,dt \;\; (n = 1, 2, \cdots) \\
b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 1\,\text{sen}\,nt\,dt = \frac{2}{\pi}\Big[-\frac{1}{n}\cos nt\Big]_0^{\pi} \\
&= \frac{2}{n\pi}(1 - \cos n\pi) = \frac{2}{n\pi}[1 - (-1)^n]
\end{aligned}
$$

Note que como $T = 2\pi$, tenemos que $w = 1$, y

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\,\mathrm{sen}\, nwt\, dt \Rightarrow b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\,\mathrm{sen}\, nt\, dt \;\; (n = 1, 2, \cdots) \\
b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 1\,\mathrm{sen}\, nt\, dt = \frac{2}{\pi}\Big[-\frac{1}{n}\cos nt\Big]_0^{\pi} \\
&= \frac{2}{n\pi}(1-\cos n\pi) = \frac{2}{n\pi}[1-(-1)^n] \\
&= \begin{cases} \frac{4}{n\pi}, & (n\ impar) \\ 0, & (n\ par) \end{cases}
\end{aligned}
$$

Así la expansión en serie de Fourier de $f(t)$ es

$$
f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\,\mathrm{sen}\, nt
$$

Note que como $T = 2\pi$, tenemos que $w = 1$, y

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\,\text{sen}\,nwt\,dt \Rightarrow b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\,\text{sen}\,nt\,dt \;\; (n = 1, 2, \cdots) \\
b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 1\,\text{sen}\,nt\,dt = \frac{2}{\pi}\Big[-\frac{1}{n}\cos nt\Big]_0^{\pi} \\
&= \frac{2}{n\pi}(1-\cos n\pi) = \frac{2}{n\pi}[1-(-1)^n] \\
&= \begin{cases} \frac{4}{n\pi}, & (n\ impar) \\ 0, & (n\ par) \end{cases}
\end{aligned}
$$

Así la expansión en serie de Fourier de $f(t)$ es

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n\,\text{sen}\,nt = \sum_{n\ par} b_n\,\text{sen}\,nt + \sum_{n\ impar} b_n\,\text{sen}\,nt \\
&= \frac{4}{\pi}\sum_{n\ impar}\frac{1}{n}\,\text{sen}\,nt = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k-1}\,\text{sen}(2k-1)t
\end{aligned}
$$

Estudiar convergencia de la serie general