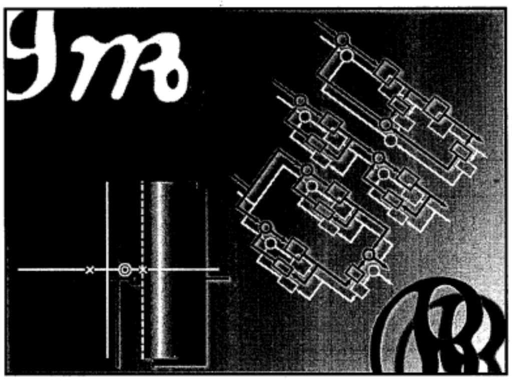
Parcial 3 Laplace

UNIDAD III APLICACION DE LAS SERIES Y TRASF DE FOURIER
Sistemas lineales. respuesta a sistemas lineales
a funciones exponenciales, senoidales periodica,
circuitos simbólicos. transmisión sin distorsión
filtros ideales, filtros pasa bajo, pasa alto, reales
espectro de Energía MATLAB y MATHCAD

UNIDAD IV APLICACIONES DE LA TRANSF DE LAPLACE
Definición de Transf. y antitransf de Laplace
Teorema del valor inicial y final. antitransformadas
de funciones racionales, aplicación de Laplace a
circuitos RL, RC, RCL utiliza MATLAB y MATHCAD

9

LA TRANSFORMADA DE LAPLACE



9.0 INTRODUCCIÓN

En los capítulos precedentes hemos visto que las herramientas del análisis de Fourier son en extremo útiles para el estudio de muchos problemas de importancia práctica que involucran señales y sistemas LTI. Esto se debe en gran parte al hecho de que una amplia clase de señales se puede representar mediante una combinación lineal de exponenciales complejas, y éstas son funciones propias de los sistemas LTI. La transformada continua de Fourier proporciona una representación para señales como combinaciones lineales de exponenciales complejas de la forma e^{st} con $s = j\omega$. Sin embargo, la propiedad de las funciones propias presentada en la sección 3.2, así como muchas de sus consecuencias, continúan siendo aplicables a valores arbitrarios de s y no sólo a valores que son puramente imaginarios. Esta observación conduce a una generalización de la transformada continua de Fourier, conocida como la transformada de Laplace, la cual desarrollamos en este capítulo. En el siguiente capítulo desarrollaremos la generalización correspondiente discreta conocida como la transformada z.

Como veremos más adelante, las transformadas de Laplace y z poseen muchas de

puede usar las transformadas de Fourier. Por ejemplo, las transformadas de Laplace y z se pueden aplicar al análisis de muchos sistemas inestables y en consecuencia juegan un papel importante en la investigación de la estabilidad e inestabilidad de sistemas. Este hecho, junto con las propiedades algebraicas que las transformadas de Laplace y z com-

9.1 LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

En el capítulo 3 vimos que la respuesta de un sistema lineal invariante en el tiempo con respuesta al impulso $h(t)$ a una exponencial compleja con forma e^{st} es

$$y(t) = H(s)e^{st}, \tag{9.1}$$

donde

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-st}\,dt. \tag{9.2}$$

Para una s imaginaria (es decir, $s = j\omega$), la integral en la ecuación (9.2) corresponde a la transformada de Fourier de $h(t)$. Con valores generales de la variable compleja s, se le conoce como la *transformada de Laplace* de la respuesta el impulso $h(t)$.

La transformada de Laplace de una señal general $x(t)$ se define como[1]

$$\boxed{X(s) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st}\,dt,} \tag{9.3}$$

y podemos observar que, en particular, es una función de la variable independiente s, la cual corresponde a la variable compleja en el exponente de e^{-st}. La variable compleja s puede escribirse como $s = \sigma + j\omega$, siendo σ y ω las partes real e imaginaria, respectivamente. Para nuestra comodidad, algunas veces denotaremos la transformada de Laplace en forma de operador como $\mathfrak{L}\{x(t)\}$ y denotaremos la relación de transformación entre $x(t)$ y $X(s)$ como

$$x(t) \overset{\mathfrak{L}}{\longleftrightarrow} X(s). \tag{9.4}$$

La transformada de Laplace también conlleva una relación directa con la transformada de Fourier cuando la variable compleja s no es puramente imaginaria. Para ver esta relación, considere una $X(s)$ tal como se especifica en la ecuación (9.3), con s expresada como $s = \sigma + j\omega$, de manera que

$$X(\sigma + j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-(\sigma + j\omega)t}\,dt, \tag{9.7}$$

o

$$X(\sigma + j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x(t)e^{-\sigma t}]\, e^{-j\omega t}\, dt. \tag{9.8}$$

Reconocemos el miembro derecho de la ecuación (9.8) como la transformada de Fourier

Ejemplo 9.1

Considere la señal $x(t) = e^{-at}u(t)$. Gracias al ejemplo 4.1 sabemos que la transformada de Fourier $X(j\omega)$ converge para $a > 0$ y está dada por

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at}u(t)e^{-j\omega t}\, dt = \int_{0}^{\infty} e^{-at}e^{-j\omega t}\, dt = \frac{1}{j\omega + a}, \quad a > 0. \tag{9.9}$$

La ecuación (9.3) muestra que la transformada de Laplace es

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}u(t)e^{st}\, dt = \int_{0}^{\infty} e^{(-s+a)t}\, dt, \tag{9.10}$$

o, con $s = \sigma + j\omega$,

$$X(\sigma + j\omega) = \int_{0}^{\infty} e^{-(\sigma+a)t}e^{-j\omega t}\, dt. \tag{9.11}$$

Si la comparamos con la ecuación (9.9), reconoceremos en la ecuación (9.11) a la transformada de Fourier de $e^{-(\sigma+a)t}u(t)$ y, por lo tanto,

$$X(\sigma + j\omega) = \frac{1}{(\sigma + a) + j\omega}, \quad \sigma + a > 0, \tag{9.12}$$

o, de manera equivalente, puesto que $s = \sigma + j\omega$ y $\sigma = \mathcal{R}e\{s\}$,

$$X(s) = \frac{1}{s + a}, \mathcal{R}e\{s\} > -a. \tag{9.13}$$

Esto es,

$$e^{at}u(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s + a}, \quad \mathcal{R}e\{s\} > -a. \tag{9.14}$$

Por ejemplo, para $a = 0$, $x(t)$ es el escalón unitario con transformada de Laplace $X(s) = 1/s$, $\mathcal{R}e\{s\} > 0$.

obtener

$$X(0 + j\omega) = \frac{1}{j\omega + a}. \tag{9.15}$$

Como se indica en la ecuación (9.6), para $\sigma = 0$ la transformada de Laplace es igual a la transformada de Fourier, lo cual resulta evidente en el ejemplo anterior si comparamos las ecuaciones (9.9) y (9.15). Si a es negativa o es cero, la transformada de Laplace aún existe pero no así la transformada de Fourier.

Ejemplo 9.2

Como comparación con el ejemplo 9.1, consideremos como un segundo ejemplo la señal

$$x(t) = -e^{-at}u(-t). \tag{9.16}$$

Entonces

$$\begin{aligned} X(s) &= -\int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}e^{-st}u(-t)dt \\ &= -\int_{-\infty}^{0} e^{-(s+a)t}\,dt, \end{aligned} \tag{9.17}$$

o

$$X(s) = \frac{1}{s + a}. \tag{9.18}$$

Para convergencia en este ejemplo, necesitamos que $\mathcal{Re}\{s + a\} < 0$, o $\mathcal{Re}\{s\} < -a$; esto es,

$$-e^{-at}u(-t) \stackrel{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s + a}, \qquad \mathcal{Re}\{s\} < -a. \tag{9.19}$$

requiere tanto la expresión algebraica como el intervalo de valores de s para el cual esta expresión es válida. En general, el intervalo de valores de s para el cual la integral en la ecuación (9.3) converge se conoce como la *región de convergencia* (que abreviaremos como ROC, por sus siglas en inglés) de la transformada de Laplace. Es decir, la ROC consiste en aquellos valores de $s = \sigma + j\omega$ para los cuales la transformada de Fourier de $x(t)e^{-\sigma t}$ converge. Tendremos bastante más que decir acerca de la ROC conforme vayamos desarrollando algunas ideas sobre las propiedades de la transformada de Laplace.

Una forma muy conveniente de representar la ROC se muestra en la figura 9.1. La

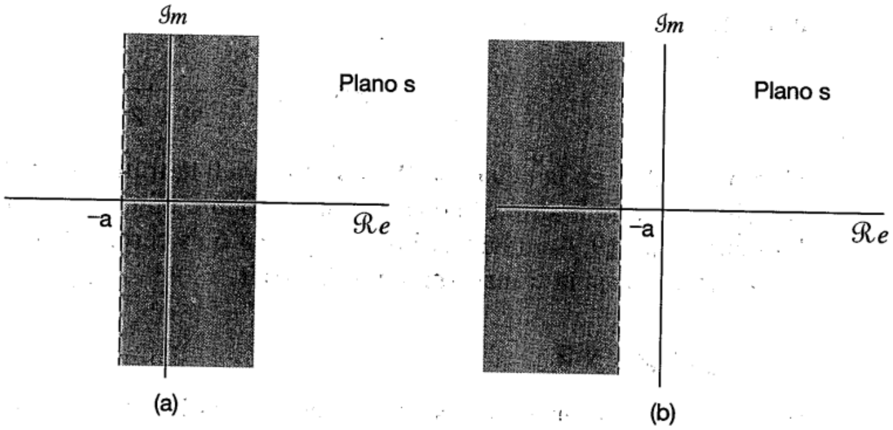


Figura 9.1 (a) ROC del ejemplo 9.1; (b) ROC del ejemplo 9.2.

Ejemplo 9.3

En este ejemplo examinamos una señal que es la suma de dos exponenciales reales:

$$x(t) = 3e^{-2t}u(t) - 2e^{-t}u(t). \tag{9.20}$$

La expresión algebraica para la transformada de Laplace es entonces

$$\begin{aligned} X(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[3e^{-2t}u(t) - 2e^{-t}u(t)\right] e^{-st}\, dt \\ &= 3\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2t}e^{-st}u(t)dt - 2\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t}e^{-st}u(t)dt. \end{aligned} \tag{9.21}$$

Cada una de las integrales en la ecuación (9.21) tiene la misma forma que la integral en la ecuación (9.10) y, en consecuencia, podemos usar el resultado del ejemplo 9.1 para obtener

$$X(s) = \frac{3}{s+2} - \frac{2}{s+1}. \tag{9.22}$$

Para determinar la ROC debemos observar que $x(t)$ es la suma de dos exponen-

Para determinar la ROC debemos observar que $x(t)$ es la suma de dos exponenciales reales, y de la ecuación (9.21) se desprende que $X(s)$ es la suma de las transformadas de Laplace de cada uno de los términos individuales. El primer término es la transformada de Laplace de $3e^{-2t}u(t)$ y el segundo término es la transformada de Laplace de $-2e^{-t}u(t)$. A partir del ejemplo 9.1 sabemos que

$$e^{-t}u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s+1}, \qquad \Re e\{s\} > -1,$$

$$e^{-2t}u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s+2}, \qquad \Re e\{s\} > -2.$$

El conjunto de valores de $\Re e\{s\}$ para el cual las transformadas de Laplace de ambos términos convergen es $\Re e\{s\} > -1$ y, por lo tanto, combinando los dos términos del miembro derecho de la ecuación (9.22), obtenemos

$$3e^{-2t}u(t) - 2e^{-t}u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{s-1}{s^2+3s+2}, \qquad \Re e\{s\} > -1. \tag{9.23}$$

Ejemplo 9.4

En este ejemplo consideramos una señal que es la suma de una exponencial real y una compleja:

$$x(t) = e^{-2t}u(t) + e^{-t}(\cos 3t)u(t). \tag{9.24}$$

Haciendo uso de la relación de Euler, podemos escribir

$$x(t) = \left[e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-(1-3j)t} + \frac{1}{2}e^{-(1+3j)t}\right]u(t),$$

y por consiguiente, la transformada de Laplace de $x(t)$ puede expresarse como

$$\begin{aligned} X(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2t}u(t)e^{-st}\,dt \\ &+ \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(1-3j)t}u(t)e^{-st}\,dt \\ &+ \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(1+3j)t}u(t)e^{-st}\,dt. \end{aligned} \tag{9.25}$$

Cada una de las integrales de la ecuación (9.25) representa la transformada de Laplace del tipo que encontramos en el ejemplo 9.1. De ello se desprende que

$$e^{-2t}u(t) \overset{\mathfrak{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s+2}, \qquad \Re_e\{s\} > -2, \tag{9.26}$$

$$e^{-(1-3j)t}u(t) \overset{\mathfrak{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s+(1-3j)}, \qquad \Re_e\{s\} > -1, \tag{9.27}$$

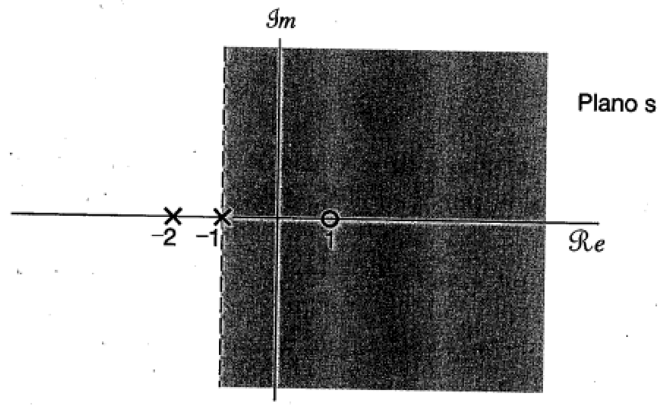
$$e^{-(1+3j)t}u(t) \overset{\mathfrak{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s+(1+3j)}, \qquad \Re_e\{s\} > -1. \tag{9.28}$$

Para que las tres transformadas de Laplace converjan de manera simultánea, debemos tener $\Re e\{s\} > -1$. En consecuencia, la transformada de Laplace de $x(t)$ es

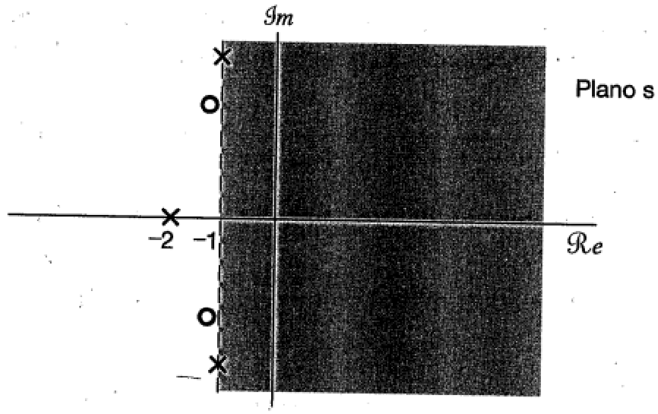
$$\frac{1}{s+2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s+(1-3j)}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s+(1+3j)}\right), \qquad \Re_e\{s\} > -1, \tag{9.29}$$

o, con los términos combinados dentro de un denominador común,

$$e^{-2t}u(t) + e^{-2t}(\cos 3t)u(t) \overset{\mathfrak{L}}{\longleftrightarrow} \frac{2s^2+5s+12}{(s^2+2s+10)(s+2)}, \quad \Re e\{s\} > -1. \tag{9.30}$$



(a)



(b)

Figura 9.2 Representación en el plano s de las transformadas de Laplace para (a) el ejemplo 9.3 y (b) el ejemplo 9.4. Cada "×" en estas figuras marca la ubicación de un polo de la transformada de Laplace correspondiente, es decir, la raíz del denominador. De manera similar, cada marca "o" indica un cero, una raíz del numerador. La región sombreada indica la ROC.

En cada uno de los cuatro ejemplos anteriores, la transformada de Laplace es racional, es decir, una relación de polinomios de la variable compleja s tal que

$$X(s) = \frac{N(s)}{D(s)}, \tag{9.31}$$

donde $N(s)$ y $D(s)$ son el polinomio del numerador y el polinomio del denominador, respectivamente. Como sugieren los ejemplos 9.3 y 9.4, $X(s)$ será racional siempre que $x(t)$ sea una combinación lineal de exponenciales reales o complejas. Como veremos en la sección 9.7, las transformadas racionales también surgen cuando examinamos los sistemas LTI especificados en términos de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes

proporciona una forma gráfica conveniente para describir la transformada de Laplace. Por ejemplo, en la figura 9.2(a) mostramos la representación en el plano s de la transformada de Laplace del ejemplo 9.3, señalando con una "×" la localización de cada raíz del polinomio del denominador de la ecuación (9.23) y con una "o" la localización de la raíz del polinomio del numerador en la ecuación (9.23). La gráfica que corresponde a las raíces de los polinomios del numerador y denominador para la transformada de Laplace

Para las transformadas racionales de Laplace, las raíces del polinomio del numerador son comúnmente conocidas como *ceros* de $X(s)$, ya que para esos valores de s, $X(s) = 0$. Las raíces del polinomio del denominador son conocidas como los *polos* de $X(s)$, y para esos valores de s, $X(s)$ tiende a ser infinita. Los polos y ceros de $X(s)$ en el plano s finito caracterizan por completo la expresión algebraica para $X(s)$ dentro de un factor de escala. La representación de $X(s)$ mediante sus polos y ceros en el plano s se conoce

Ejemplo 9.5

Sea

$$x(t) = \delta(t) - \frac{4}{3}e^{-t}u(t) + \frac{1}{3}e^{2t}u(t). \tag{9.32}$$

La transformada de Laplace del segundo y el tercer términos del miembro derecho de la ecuación (9.32) se pueden evaluar a partir del ejemplo 9.1. La transformada de Laplace del impulso unitario se determina directamente como

$$\mathfrak{L}\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)e^{-st}\,dt = 1, \tag{9.33}$$

la cual es válida para cualquier valor de s. Esto es, la ROC de $\mathfrak{L}\{\delta(t)\}$ es el plano completo de s. Usando este resultado, junto con las transformadas de Laplace de los otros dos términos en la ecuación (9.32) obtenemos

$$X(s) = 1 - \frac{4}{3}\frac{1}{s+1} + \frac{1}{3}\frac{1}{s-2}, \qquad \mathcal{Re}\{s\} > 2, \tag{9.34}$$

o

$$X(s) = \frac{(s-1)^2}{(s+1)(s-2)}, \qquad \mathcal{Re}\{s\} > 2, \tag{9.35}$$

donde la ROC es el conjunto de valores de s para el cual convergen los tres términos en las transformadas de Laplace de $x(t)$. El diagrama de polos y ceros para este ejemplo se muestra en la figura 9.3 junto con la ROC. También, puesto que los grados del numerador y del denominador de $X(s)$ son iguales, $X(s)$ no tiene polos ni ceros en el infinito.

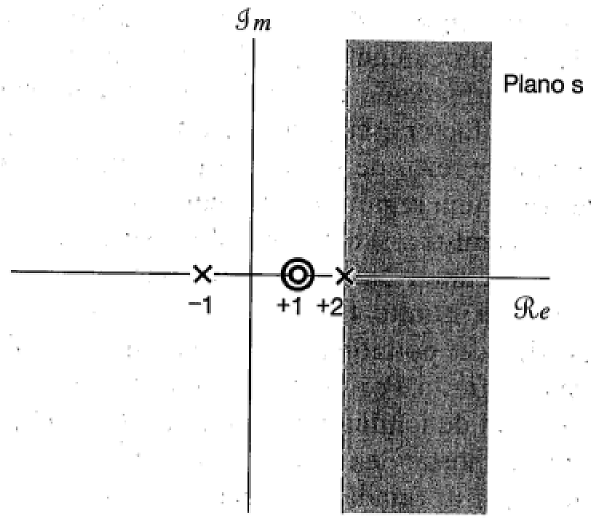


Figura 9.3 Diagrama de polos y ceros y ROC del ejemplo 9.5.

sección exploraremos algunas de estas restricciones y propiedades.

9.2 LA REGIÓN DE CONVERGENCIA PARA LAS TRANSFORMADAS DE LAPLACE

En la sección anterior vimos que una especificación completa de la transformada de Laplace requiere no sólo de la expresión algebraica de $X(s)$, sino también de la región de convergencia asociada. Como es evidente por los ejemplos 9.1 y 9.2, dos señales muy diferentes pueden tener idénticas expresiones algebraicas para $X(s)$, de manera que sus transformadas de Laplace se podrían distinguir *únicamente* por la región de convergencia. En esta sección exploramos algunas restricciones específicas de la ROC para varias clases de señales. Como veremos más adelante, la comprensión de estas restricciones a menudo nos permite especificar de manera implícita o reconstruir la ROC únicamente a partir del conocimiento de la expresión algebraica $X(s)$ y de ciertas características generales de $x(t)$ en el dominio del tiempo.

Propiedad 1: La ROC de $X(s)$ consiste en bandas paralelas al eje $j\omega$ en el plano s.

La validez de esta propiedad radica en el hecho de que la ROC de $X(s)$ consiste de aquellos valores de $s = \sigma + j\omega$ para los cuales la transformada de Fourier de $x(t)e^{-\sigma t}$ converge. Esto es, la ROC de la transformada de Laplace de $x(t)$ consiste de aquellos valores de s para los cuales $x(t)e^{-\sigma t}$ es absolutamente integrable:[2]

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|e^{-\sigma t}\, dt < \infty. \tag{9.36}$$

Y de ello se deriva la propiedad 1, ya que esta condición depende sólo de σ, la parte real de s.

Propiedad 2: Para transformadas racionales de Laplace, la ROC no contiene ningún polo.

Esta propiedad se observa fácilmente en todos los ejemplos estudiados hasta ahora. Puesto que $X(s)$ es infinita en un polo, la integral en la ecuación (9.3) claramente no converge a un polo y, por lo tanto, la ROC no puede contener valores de s en esos polos.

Propiedad 3: Si $x(t)$ es de duración finita y es absolutamente integrable, entonces la ROC es el plano s completo.

La intuición de este resultado se sugiere en las figuras 9.4 y 9.5. Específicamente, una señal de duración finita tiene la propiedad de ser cero fuera de un intervalo de duración finita, tal como se ilustra en la figura 9.4. En la 9.5(a) mostramos la $x(t)$ de la figura 9.4 multiplicada por una exponencial decreciente y en la 9.5(b) la misma señal multiplicada por una exponencial creciente. Puesto que el intervalo sobre el cual $x(t)$ es diferente de

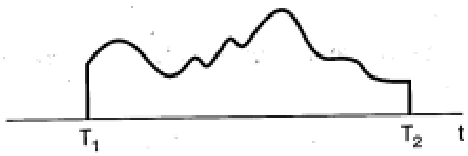


Figura 9.4 Señal de duración finita.

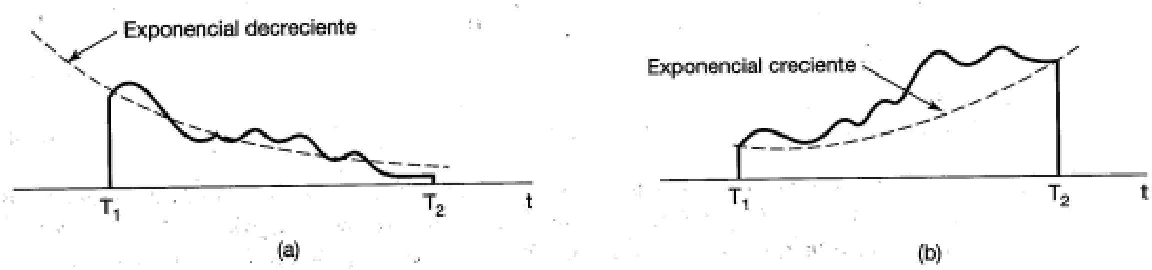


Figura 9.5 (a) Señal de duración finita de la figura 9.4 multiplicada por una exponencial decreciente; (b) señal de duración finita de la figura 9.4 multiplicada por una exponencial creciente.

del tiempo.

> **Propiedad 4:** Si $x(t)$ está en el miembro derecho y si la línea $\Re e\{s\} = \sigma_0$ está en la ROC, entonces todos los valores de s para los cuales $\Re e\{s\} > \sigma_0$ también estarán en la ROC.

Una *señal del lado derecho* o simplemente *derecha* es aquella para la cual $x(t) = 0$ antes de algún tiempo finito T_1, como se ilustra en la figura 9.6. Es posible que para tal señal no haya un valor de s en el que la transformada de Laplace converja. Un ejemplo es la señal $x(t)= e^{t^2} u(t)$. Sin embargo, suponga que la transformada de Laplace converge para algún valor de σ, el cual señalamos como σ_0. Entonces

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|e^{-\sigma_0 t}\, dt < \infty, \tag{9.44}$$

o, de forma equivalente, ya que $x(t)$ es derecha,

$$\int_{T_1}^{+\infty} |x(t)|e^{-\sigma_0 t}\, dt < \infty. \tag{9.45}$$

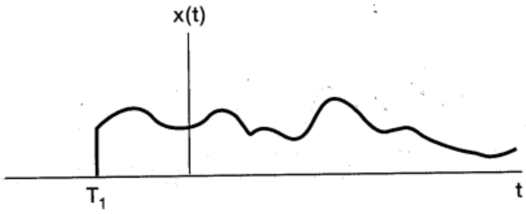


Figura 9.6 Señal derecha.

... todos los puntos con partes reales más grandes, están en la ROC. Por esta razón, la ROC en el presente caso se conoce comúnmente como *semiplano derecho*.

> **Propiedad 5:** Si $x(t)$ es izquierda y si la línea $\Re e\{s\} = \sigma_0$ está en la ROC, entonces todos los valores de s para los cuales $\Re e\{s\} < \sigma_0$ también estarán en la ROC.

Una señal *del lado izquierdo* o simplemente *izquierda* es aquella en la cual $x(t) = 0$ después de algún tiempo finito T_2, como se ilustra en la figura 9.8. El argumento y la intuición que sustentan esta propiedad son exactamente análogos a los de la propiedad 4. Asimismo, para una señal izquierda, la ROC se conoce por lo general como *semiplano izquierdo*, ya que si un punto s está en la ROC, todos los puntos a la izquierda de s estarán en la ROC.

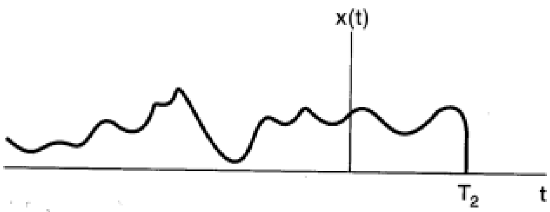


Figura 9.8 Señal izquierda.

Propiedad 6: Si $x(t)$ es bilateral y si la línea $\mathcal{R}e\{s\} = \sigma_0$ está en la ROC, entonces la ROC consistirá de una banda en el plano s que incluya la línea $\mathcal{R}e\{s\} = \sigma_0$.

Una *señal bilateral* es aquella que tiene extensión infinita tanto para $t > 0$ como para $t < 0$, tal como se ilustra en la figura 9.9(a). Para tales señales, la ROC puede examinarse escogiendo un tiempo arbitrario T_0 y dividiendo $x(t)$ en la suma de una señal derecha $x_R(t)$ y una señal izquierda $x_L(t)$ como se indica en las figuras 9.9(b) y (c). La transformada de Laplace de $x(t)$ converge para valores de s en los cuales las transformadas de *ambas* señales [$x_R(t)$ y $x_L(t)$] convergen. De acuerdo con la propiedad 4, la ROC de $\mathfrak{L}\{x_R(t)\}$ consiste en un semiplano definido por $\mathcal{R}e\{s\} > \sigma_R$ para algún valor de σ_R, de acuerdo con la propiedad 5 la ROC de $\mathfrak{L}\{x_L(t)\}$ consiste en un semiplano definido por $\mathcal{R}e\{s\} < \sigma_L$ para algún valor de σ_L. La ROC de $\mathfrak{L}\{x(t)\}$ es entonces la superposición de estos dos semiplanos, como se indica en la figura 9.10. Con lo anterior se da por hecho que $\sigma_R < \sigma_L$, de manera que hay algo de traslape. Si éste no es el caso, entonces no existirá la transformada de Laplace de $x(t)$, aun cuando las transformadas de Laplace de $x_R(t)$ y $x_L(t)$ existan en forma individual.

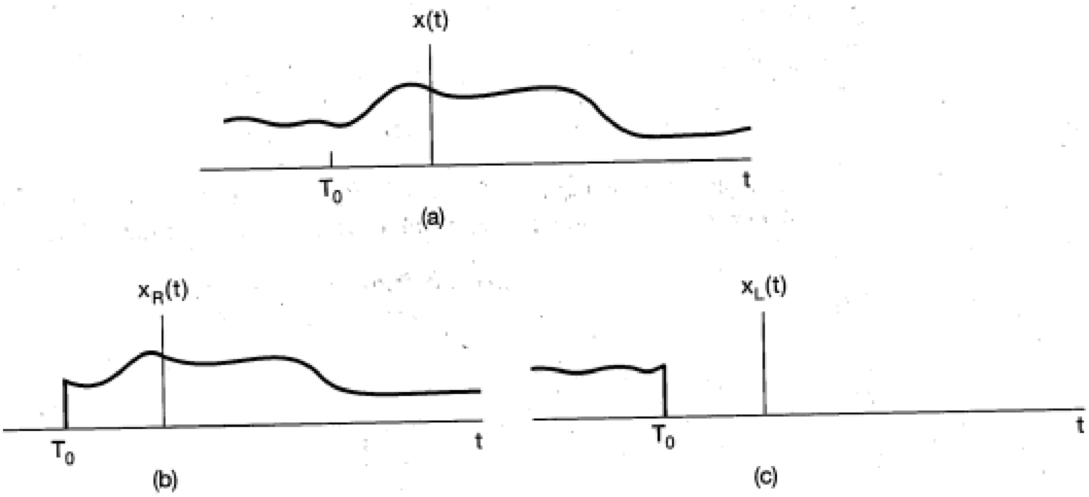


Figura 9.9 Señal bilateral dividida en la suma de una señal derecha y una izquierda: (a) señal bilateral $x(t)$; (b) la señal derecha igual a $x(t)$ para $t > T_0$ e igual a 0 para $t < T_0$; (c) la señal izquierda igual a $x(t)$ para $t < T_0$ e igual a 0 para $t > T_0$.

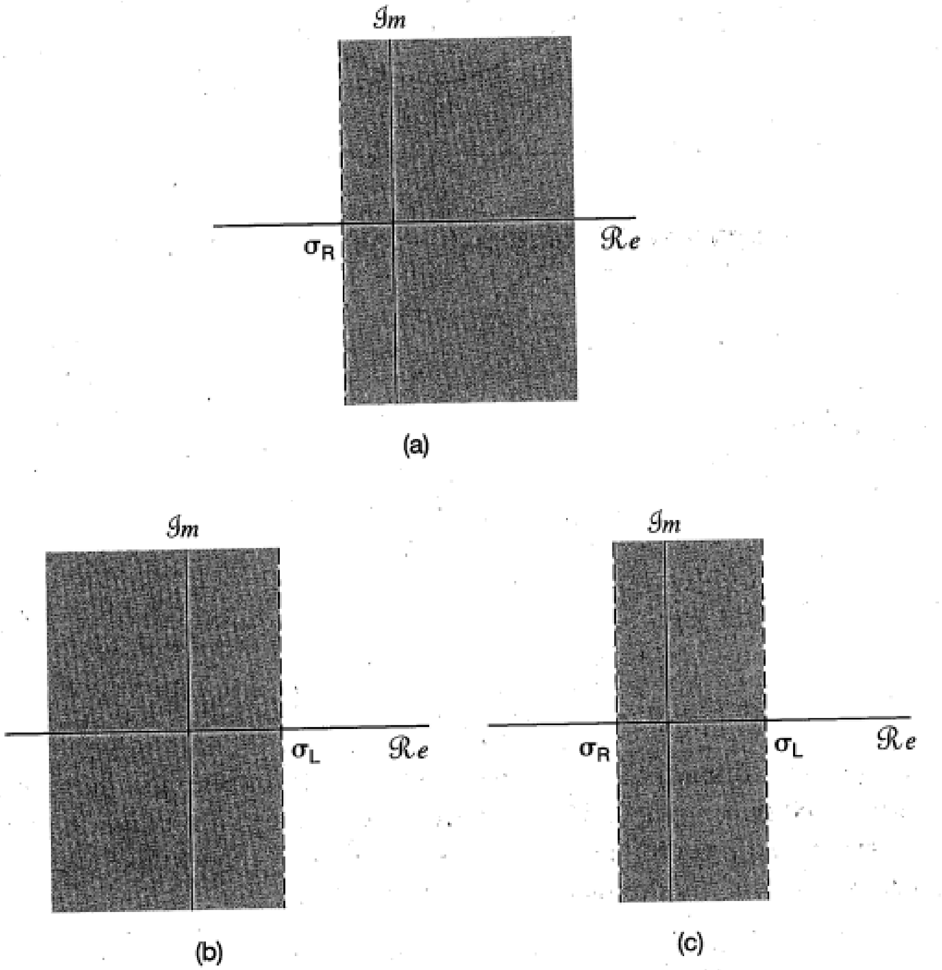


Figura 9.10 (a) ROC de $x_R(t)$ en la figura 9.9; (b) la ROC de $x_L(t)$ en la figura 9.9; (c) ROC de $x(t) = x_R(t) + x_L(t)$, suponiendo que las ROC en (a) y (b) se traslapan.

Ejemplo 9.7

Sea

$$x(t) = e^{-b|t|}, \tag{9.47}$$

como se ilustra en la figura 9.11 para $b > 0$ y $b < 0$. Ya que ésta es una señal bilateral, la dividiremos en la suma de una señal derecha y una izquierda; esto es,

$$x(t) = e^{-bt}u(t) + e^{+bt}u(-t). \tag{9.48}$$

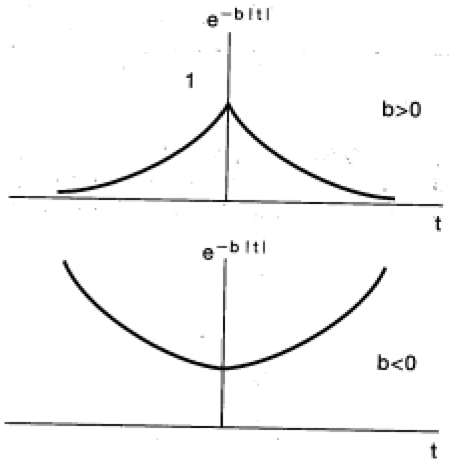


Figura 9.11 La señal $x(t) = e^{-b|t|}$ para $b > 0$ y $b < 0$.

Del ejemplo 9.1,

$$e^{-bt}u(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s+b}, \qquad \mathcal{R}e\{s\} > -b, \tag{9.49}$$

y del ejemplo 9.2,

$$e^{+bt}u(-t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{-1}{s-b}, \qquad \mathcal{R}e\{s\} < +b. \tag{9.50}$$

Aunque las transformadas de Laplace de cada uno de los términos individuales en la ecuación (9.48) tienen una región de convergencia, no hay una región *común* de convergencia si $b \leq 0$ y, por lo tanto, para esos valores de b, $x(t)$ no tiene transformada de Laplace. Si $b > 0$, la transformada de Laplace de $x(t)$ es

$$e^{-b|t|} \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s+b} - \frac{1}{s-b} = \frac{-2b}{s^2 - b^2}, \qquad -b < \mathcal{R}e\{s\} < +b. \tag{9.51}$$

El diagrama de polos y ceros correspondiente se muestra en la figura 9.12, con cuya área sombreada se indica la ROC.

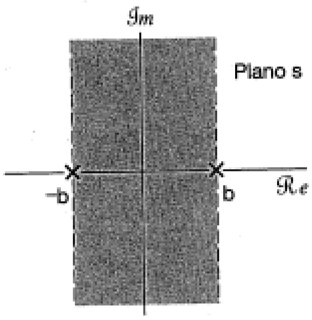


Figura 9.12 Diagrama de polos y ceros y ROC para el ejemplo 9.7.

racionales de Laplace.

> **Propiedad 7:** Si la transformada de Laplace $X(s)$ de $x(t)$ es racional, entonces su ROC está limitada por los polos o se extiende al infinito. Además, ningún polo de $X(s)$ está contenido en la ROC.

Una argumentación formal para esta propiedad resulta un tanto tediosa, pero su validez es esencialmente una consecuencia del hecho de que una señal con una transformada racional de Laplace consiste de una combinación lineal de exponenciales y, a partir de los ejemplos 9.1 y 9.2, del hecho de que la ROC de la transformada de los términos individuales en esta combinación lineal debe tener esta propiedad. Como consecuencia de la propiedad 7, junto con las propiedades 4 y 5, tenemos la

> **Propiedad 8:** Si la transformada de Laplace $X(s)$ de $x(t)$ es racional, entonces si $x(t)$ es derecha, la ROC será la región en el plano s que se encuentra a la derecha del polo localizado más hacia la derecha. Para una señal $x(t)$ izquierda, la ROC será la región en el plano s que se encuentra a la izquierda del polo localizado más hacia la izquierda.

Ejemplo 9.8

Sea

$$X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}, \tag{9.52}$$

con el patrón de polos y ceros asociado mostrado en la figura 9.13(a). Como indican las figuras 9.13(b) a (d), hay tres posibles ROC que pueden estar asociadas con esta expre-

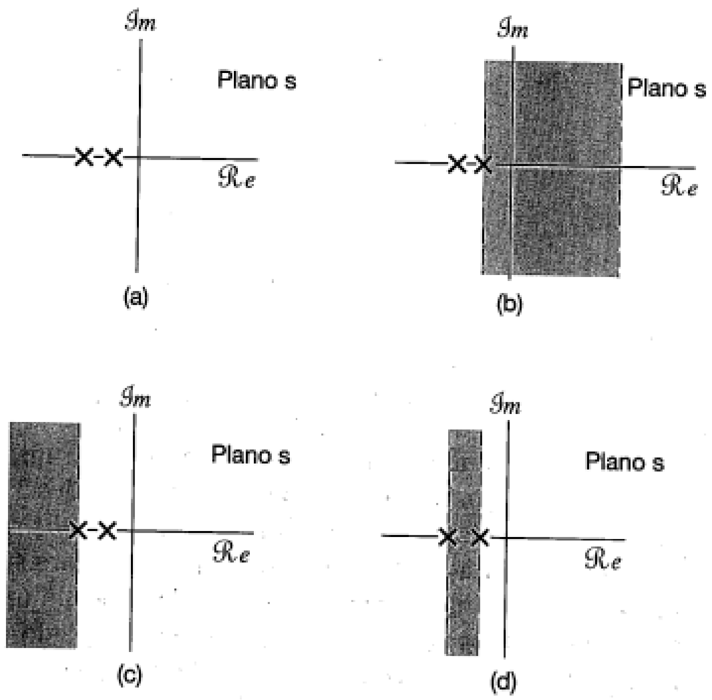


Figura 9.13 (a) Patrón de polos y ceros del ejemplo 9.8; (b) ROC correspondiente a una secuencia derecha; (c) ROC correspondiente a una secuencia izquierda; (d) ROC correspondiente a una secuencia bilateral.

9.3 LA TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE

En la sección 9.1 analizamos la interpretación de la transformada de Laplace de una señal como la transformada de Fourier de una versión exponencialmente ponderada de la señal; esto es, cuando s se expresa como $s = \sigma + j\omega$, la transformada de Laplace de una señal $x(t)$ está dada por

$$X(\sigma + j\omega) = \mathfrak{F}\{x(t)e^{-\sigma t}\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-\sigma t}e^{-j\omega t}\,dt \tag{9.53}$$

para valores de $s = \sigma + j\omega$ en la ROC. Podemos invertir esta relación usando la transformada inversa de Fourier dada en la ecuación (4.9). Tenemos

$$x(t)e^{-\sigma t} = \mathfrak{F}^{-1}\{X(\sigma + j\omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\sigma + j\omega)e^{j\omega t}\,d\omega, \tag{9.54}$$

o, multiplicando ambos lados por $e^{\sigma t}$, obtenemos

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\sigma + j\omega)e^{(\sigma + j\omega)t}\,d\omega. \tag{9.55}$$

ma de recuperar $x(t)$ a partir de $X(s)$ si cambiamos la variable de integra-
ción (9.55), de ω a s, y nos valemos del hecho de que σ es constante, de modo que $ds = j\,d\omega$. El resultado es la ecuación básica de la transformada inversa de Laplace:

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} X(s)e^{st}\,ds.} \tag{9.56}$$

Ejemplo 9.9

Sea

$$X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}, \qquad \Re e\{s\} > -1. \tag{9.58}$$

Para obtener la transformada inversa de Laplace, primero realizamos una expansión en fracciones parciales para obtener

$$X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2}. \tag{9.59}$$

Como se analiza en el apéndice, podemos evaluar los coeficientes A y B multiplicando ambos miembros de la ecuación (9.59) por $(s + 1)(s + 2)$ y después igualando los coeficientes de igual potencia de s en ambos lados. De manera alterna, podemos usar la relación

$$A = [(s+1)X(s)]\big|_{s=-1} = 1, \tag{9.60}$$

$$B = [(s+2)X(s)]\big|_{s=-2} = -1. \tag{9.61}$$

Por lo tanto, la expansión en fracciones parciales de $X(s)$ es

Por lo tanto, la expansión en fracciones parciales de $X(s)$ es

$$X(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}. \tag{9.62}$$

A partir de los ejemplos 9.1 y 9.2 sabemos que hay dos posibles transformadas inversas para una transformada de la forma $1/(s + a)$, dependiendo de si la ROC está a la izquierda o a la derecha del polo. En consecuencia, necesitamos determinar la ROC asociada con cada uno de los términos individuales de primer orden de la ecuación (9.62). Esto se realiza haciendo referencia a las propiedades de la ROC desarrolladas en la sección 9.2. Puesto que la ROC para $X(s)$ es $\mathcal{R}e\{s\} > -1$, la ROC para los términos individuales de la expansión en fracciones parciales de la ecuación (9.62) incluye $\mathcal{R}e\{s\} > -1$. La ROC para cada término puede entonces extenderse a la izquierda o a la derecha (o a ambos lados) para quedar limitada por un polo o por el infinito. Esto se ilustra en la figura 9.14. La figura 9.14(a) muestra el diagrama de polos y ceros y la ROC para $X(s)$ especificada en la ecuación (9.58). Las figuras 9.14(b) y 9.14(c) representan los términos individuales de la expansión en fracciones parciales dada en la ecuación (9.62). La ROC de la suma está indicada con un sombreado. Para el término representado por la figura 9.14(c), la ROC para la suma puede extenderse hacia la izquierda como se muestra, de manera que está limitada por un polo.

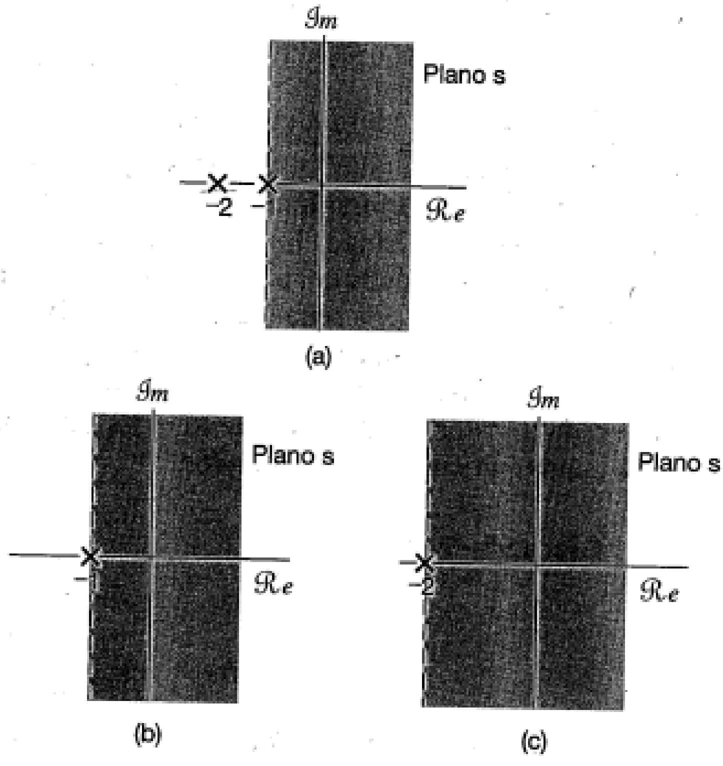


Figura 9.14 Construcción de la ROC para los términos individuales mediante expansión en fracciones parciales de $X(s)$ en el ejemplo 9.8; (a) diagrama de polos y ceros y ROC para $X(s)$; (b) polo en $s = -1$ y su ROC; (c) polo en $s = -2$ y su ROC.

Debido a que la ROC está a la derecha de ambos polos, lo mismo se cumple para cada uno de los términos individuales, como se puede ver en las figuras 9.14(b) y (c). En consecuencia, a partir de la propiedad 8 en la sección anterior, sabemos que cada uno de estos términos corresponde a una señal derecha. La transformada inversa de los términos individuales de la ecuación (9.62) se obtiene haciendo referencia al ejemplo 9.1:

$$e^{-t}u(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s+1}, \quad \mathcal{R}e\{s\} > -1, \tag{9.63}$$

$$e^{-2t}u(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s+2}, \quad \mathcal{R}e\{s\} > -2. \tag{9.64}$$

Así obtenemos

$$[e^{-t} - e^{-2t}]u(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{(s+1)(s+2)}, \quad \mathcal{R}e\{s\} > -1. \tag{9.65}$$