Parcial 4

6:59 PM | 11.8kB/s

50

).0 INTRODUCCIÓN

En el capítulo 9 desarrollamos la transformada de Laplace como una extensión de la transformada continua de Fourier. Esta extensión fue motivada en parte por el hecho de que se puede aplicar a una clase más amplia de señales que la transformada de Fourier, ya que hay muchas señales para las cuales la transformada de Fourier no converge pero la transformada de Laplace sí lo hace. La transformada de Laplace nos permitió, por ejemplo, realizar el análisis de transformada de sistemas inestables y desarrollar conocimientos y herramientas adicionales para el análisis de los sistemas LTI.

le $h[n]$.

La transformada z de una señal discreta general $x[n]$ se define como[1]

$$\boxed{X(z) \triangleq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n},}$$

londe z es una variable compleja. Por conveniencia, la transformada z de $x[n]$ se llgunas veces como $\mathcal{Z}\{x[n]\}$ y la relación entre $x[n]$ y su transformada z se indica c

$$x[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} X(z).$$

se indica en la figura 10.1. El círculo en el plano z se conoce como el *círculo unitario*, y en el análisis de la transformada z juega un papel similar al que desempeña el eje imaginario en el plano s para la transformada de Laplace.

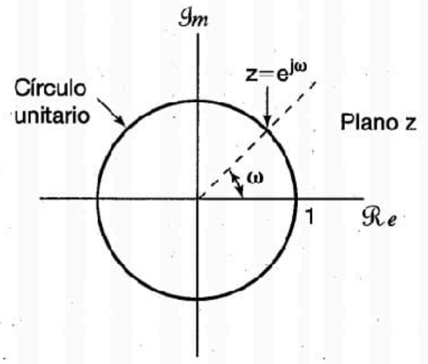

Figura 10.1 El plano z complejo. La transformada z se reduce a la transformada de Fourier para valores de z en el círculo unitario.

Laplace, este rango de valores se conoce como la *región de convergencia* (ROC). Si la ROC incluye el círculo unitario, entonces la transformada de Fourier también converge. Para ilustrar la transformada z y la región de convergencia asociada, examinemos varios ejemplos.

Ejemplo 10.1

Considere la señal $x[n] = a^n u[n]$. Después, a partir de la ecuación (10.3),

$$X(z) = \sum^{+\infty} a^n u[n] z^{-n} = \sum^{\infty} (az^{-1})^n.$$

Ejemplo 10.1

Considere la señal $x[n] = a^n u[n]$. Después, a partir de la ecuación (10.3),

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n.$$

Para la convergencia de $X(z)$ requerimos que $\sum_{n=0}^{\infty} |az^{-1}|^n < \infty$. En consecuencia, la región de convergencia es el rango de valores de z para el cual $|az^{-1}| < 1$ o, de manera

equivalente, $|z| > |a|$. Entonces,

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z-a}, \quad |z| > |a|. \tag{10.9}$$

De este modo, la transformada z para esta señal está bien definida para cualquier valor de a, con una ROC determinada por la magnitud de a de acuerdo con la ecuación (10.9). Por ejemplo, para $a = 1$, $x[n]$ es la secuencia de escalón unitario con transformada z

$$X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}, \quad |z| > 1.$$

Vemos que la transformada z en la ecuación (10.9) es una función racional. En consecuencia, al igual que con las transformadas racionales de Laplace, puede ser caracterizada por sus ceros (las raíces del polinomio del numerador) y sus polos (las raíces del polinomio del denominador). Para este ejemplo, hay un cero en $z = 0$ y un polo en $z = a$. El diagrama de polos y ceros y la región de convergencia del ejemplo 10.1 se muestran en la figura 10.2 para un valor de a entre 0 y 1. Para $|a| > 1$, la ROC no incluye el círculo unitario, lo cual concuerda con el hecho de que para estos valores de a, la transformada de Fourier de $a^n u[n]$ no converge.

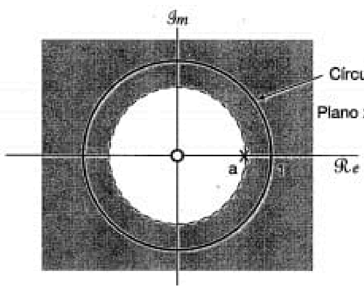

Figura 10.2 Diagrama de polos y ceros y región de convergencia en el ejemplo 10.1 para $0 < a < 1$.

Ejemplo 10.2

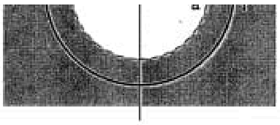

Figura 10.2 Diagrama de polos y ceros y región de convergencia en el ejemplo 10.1 para $0 < a < 1$.

Ejemplo 10.2

Ahora sea $x[n] = -a^n u[-n-1]$. Entonces,

$$\begin{aligned} X(z) &= -\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u[-n-1] z^{-n} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n} \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} a^{-n} z^n = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} (a^{-1}z)^n. \end{aligned} \tag{10.10}$$

Si $|a^{-1}z| < 1$ o, de forma equivalente, $|z| < |a|$, la suma en la ecuación (10.10) converge y

$$X(z) = 1 - \frac{1}{1 - a^{-1}z} = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a}, \quad |z| < |a|. \tag{10.11}$$

El diagrama de polos y ceros y la región de convergencia para este ejemplo se muestran en la figura 10.3 para valores de a entre 0 y 1.

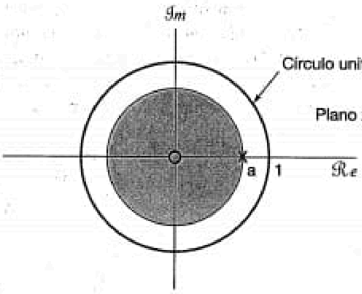

Figura 10.3 Diagrama de polos y ceros y región de convergencia en el ejemplo 10.2 para $0 < a < 1$.

Comparando las ecuaciones (10.9) y (10.11), así como las figuras 10.2 y 10.3, vemos : la expresión algebraica de $X(z)$ y el diagrama de polos y ceros correspondiente son nticos en los ejemplos 10.1 y 10.2, y la transformada z difiere sólo en sus regiones de vergencia. Por lo tanto, al igual que con la transformada de Laplace, la especificación a transformada z requiere tanto de la expresión algebraica como de la región de convergencia. Asimismo, en ambos ejemplos las secuencias fueron exponenciales y las transnadas z resultantes fueron racionales. De hecho, como sugiere el próximo ejemplo, :) será racional siempre que $x[n]$ sea una combinación lineal de exponenciales reales omplejas:

Ejemplo 10.3

Considere una señal que es la suma de dos exponenciales reales:

$$x[n] = 7\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] - 6\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]. \tag{10.12}$$

La transformada z es entonces

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ 7\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] - 6\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \right\} z^{-n}$$

Ejemplo 10.4

Considere la señal

$$x[n] = (\tfrac{1}{3})^n \operatorname{sen}(\tfrac{\pi}{4}n)u[n]$$
$$= \tfrac{1}{2j}(\tfrac{1}{3}e^{j\pi/4})^n u[n] - \tfrac{1}{2j}(\tfrac{1}{3}e^{-j\pi/4})^n u[n].$$

La transformada z de esta señal es

$$\begin{aligned}
X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{3}e^{j\pi/4}\right)^n u[n] - \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{3}e^{-j\pi/4}\right)^n u[n] \right\} z^{-n} \\
&= \frac{1}{2j}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}e^{j\pi/4}z^{-1}\right)^n - \frac{1}{2j}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}e^{-j\pi/4}z^{-1}\right)^n \qquad (10.19)\\
&= \frac{1}{2j}\frac{1}{1-\frac{1}{3}e^{j\pi/4}z^{-1}} - \frac{1}{2j}\frac{1}{1-\frac{1}{3}e^{-j\pi/4}z^{-1}}
\end{aligned}$$

o, de manera equivalente,

$$X(z) = \frac{\frac{1}{3\sqrt{2}}z}{(z-\frac{1}{3}e^{j\pi/4})(z-\frac{1}{3}e^{-j\pi/4})} \qquad (10.20)$$

Para la convergencia de $X(z)$, ambas sumas en la ecuación (10.19) deben converger, lo cual requiere que $|(1/3)e^{j\pi/4}z^{-1}| < 1$ y $|(1/3)e^{-j\pi/4}z^{-1}| < 1$ o, de manera equivalente, $|z| > 1/3$. El diagrama de polos y ceros y la ROC para este ejemplo se muestran en la figura 10.5.

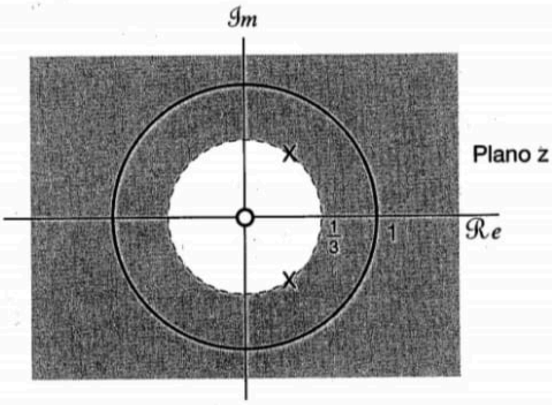

Figura 10.5 Diagrama de polos y ceros y ROC para la transformada z en el ejemplo 10.4.

Ejemplo 10.3

Considere una señal que es la suma de dos exponenciales reales:

$$x[n] = 7\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] - 6\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]. \tag{10.12}$$

La transformada z es entonces

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left\{7\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] - 6\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]\right\} z^{-n} \\ &= 7\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]z^{-n} - 6\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]z^{-n} \\ &= 7\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}z^{-1}\right)^n - 6\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}z^{-1}\right)^n \qquad (10.13) \\ &= \frac{7}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} - \frac{6}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} = \frac{1-\frac{3}{2}z^{-1}}{(1-\frac{1}{3}z^{-1})(1-\frac{1}{2}z^{-1})} \qquad (10.14) \\ &= \frac{z(z-\frac{3}{2})}{(z-\frac{1}{3})(z-\frac{1}{2})}. \qquad (10.15) \end{aligned}$$

Para la convergencia de $X(z)$, ambas sumas en la ecuación (10.13) deben converger, lo cual requiere que tanto $|(1/3)z^{-1}| < 1$ como $|(1/2)z^{-1}| < 1$ o, de manera equivalente, $|z| > 1/3$ y $|z| > 1/2$. Por lo tanto, la región de convergencia es $|z| > 1/2$.

La transformada z para este ejemplo puede también obtenerse usando los resultados del ejemplo 10.1. Específicamente, a partir de la definición de la transformada z obtenida en la ecuación (10.3), vemos que la transformada z es lineal, es decir, que si $x[n]$ es la suma de dos términos, entonces $X(z)$ será la suma de las transformadas z de los términos individuales y convergerá cuando ambas transformadas z converjan. Del ejemplo 10.1

$$\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] \stackrel{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{3} \tag{10.16}$$

y

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \stackrel{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{2}, \tag{10.17}$$

y en consecuencia,

$$7\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] - 6\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \stackrel{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} \frac{7}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} - \frac{6}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{2}, \tag{10.18}$$

como determinamos anteriormente. El diagrama de polos y ceros y la ROC de la transformada z de cada uno de los términos individuales así como para la señal combinada se muestran en la figura 10.4.

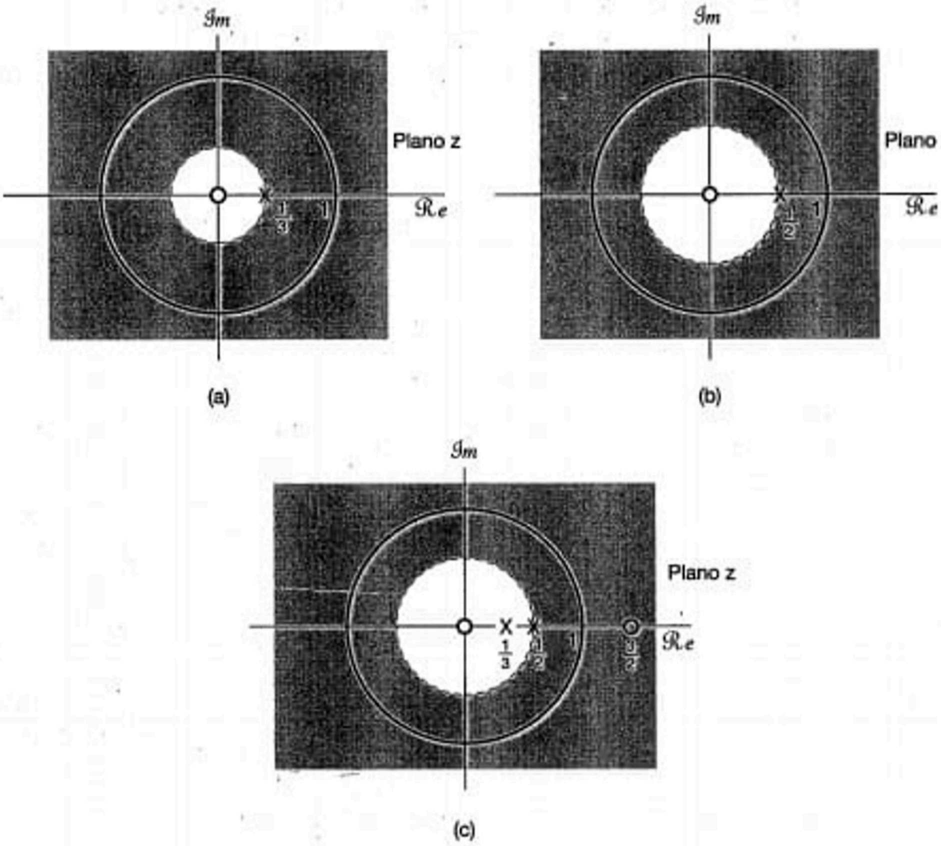

Figura 10.4 Diagrama de polos y ceros y región de convergencia para los términos individuales y la suma en el ejemplo 10.3: (a) $1/(1-\frac{1}{3}z^{-1})$, $|z| > \frac{1}{3}$; (b) $1/(1-\frac{1}{2}z^{-1})$, $|z| > \frac{1}{2}$; (c) $7/(1-\frac{1}{3}z^{-1}) - 6/(1-\frac{1}{2}z^{-1})$, $|z| > \frac{1}{2}$.