1 ejercicio serie de fourier

Definición

Si $f(t)$ es una función periódica de periodo $T = \frac{2\pi}{w}$, que puede expresarse como una serie de Fourier, entonces esa serie está dada por:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nwt) + b_n \operatorname{sen}(nwt)] \tag{1}$$

donde los coeficientes están dados por la fórmula de Euler

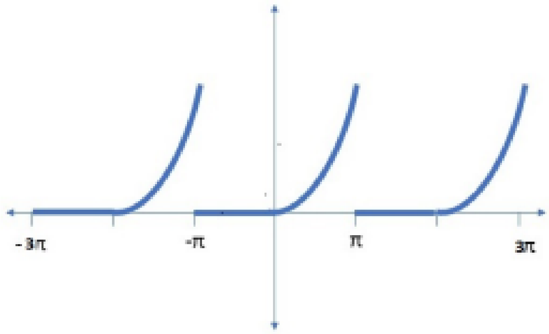
$$a_0 = \frac{2}{T} \int_d^{d+T} f(t)dt \tag{2}$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_d^{d+T} f(t) cos(nwt)\, dt \tag{3}$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_d^{d+T} f(t) sen(nwt)\, dt \tag{4}$$

para $n = 1, 2, \cdots,$

EJEMPLO Obtener el desarrollo en serie de Fourier de la siguiente función periódica.



$$f(t) = \begin{cases} 0 & -\pi < t < 0 \\ t^2 & 0 \leq t < \pi \end{cases}$$

$$f(t+T) = f(t), \quad T = 2\pi.$$

Solución: Usando las ecuaciones (2), (3) y (4) tenemos que:

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_d^{d+T} f(t)dt$$

$$= \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = \frac{\pi^2}{3}$$

Para $n = 1, 2, \cdots$,, tenemos:

$$a_n = \frac{2}{T}\int_d^{d+T} f(t)\cos(nwt)dt \Rightarrow a_n = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos\left(n\frac{2\pi}{2\pi}t\right) dt$$

sustituyendo $f(t)$ y usando integración por partes, tenemos

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} t^2\cos nt\,dt = \frac{1}{\pi}\frac{1}{n^3}\left[n^2t^2\operatorname{sen} nt - 2\operatorname{sen} nt + 2nt\cos nt\Big|_0^{\pi}\right] \\ &= \frac{1}{\pi}\frac{1}{n^3}\left[n^2\pi^2\operatorname{sen} n\pi - 2\operatorname{sen} n\pi + 2n\pi\cos n\pi - 0\right] \\ &= \frac{1}{\pi}\frac{1}{n^3}2n\pi\cos n\pi = 2\frac{(-1)^n}{n^2}, \quad \operatorname{sen} n\pi = 0, \quad n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Metodo de tabulacion

Derivadas	signo	Integraciones	Términos
		e^{2x}	
x^2	$+$	$\frac{1}{2}e^{2x}$	$+\left(x^2\right)\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)$
$2x$	$-$	$\frac{1}{4}e^{2x}$	$-\left(2x\right)\left(\frac{1}{4}e^{2x}\right)$
2	$+$	$\frac{1}{8}e^{2x}$	$+\left(2\right)\left(\frac{1}{8}e^{2x}\right)$
0	$-$		

$$\int x^2e^{2x}dx = \frac{1}{2}x^2e^{2x} - \frac{1}{2}xe^{2x} + \frac{1}{4}e^{2x}$$

Ahora calculemos b_n, similarmente

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T}\int_d^{d+T} f(t)sen(nwt)\,dt = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\operatorname{sen}\left(n\frac{2\pi}{2\pi}t\right) dt \\ &= \frac{2}{2\pi}\int_0^{\pi} t^2\operatorname{sen}\left(n\frac{2\pi}{2\pi}t\right) dt \end{aligned}$$

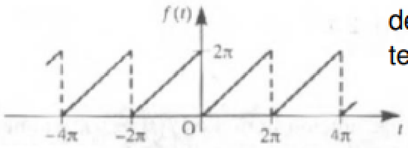
$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\frac{1}{n^3}\Big[-n^2t^2\cos nt + 2(\cos nt + nt\operatorname{sen} nt)\Big|_0^{\pi}\Big] \\
&= \frac{1}{\pi}\frac{1}{n^3}[-n^2\pi^2\cos n\pi + 2\cos n\pi - 2] \\
&= \frac{(-1)^{n+1}\pi}{n} + \frac{2}{\pi n^3}((-1)^n - 1)
\end{aligned}
$$

Así $f(t)$ se representa como una serie de Fourier como:

$$
f(t) = \frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2(-1)^n}{n^2}\cos(nt) + \left(\frac{(-1)^{n+1}\pi}{n} + \frac{2}{\pi n^3}((-1)^n - 1)\right)\operatorname{sen}(nt)\right]
$$

Otro ejemplo:

EJEMPLO Obtener el desarrollo en serie de Fourier de la siguiente función periódica.



Onda diente de sierra

$f(t) = t\,,\ f(t + 2\pi) = f(t).$

Solución: Usando las ecuaciones de los coeficientes de Fourier, tenemos que:

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{T}\int_d^{d+T} f(t)dt \\
&= \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)dt = 2\pi
\end{aligned}
$$

Para $n = 1, 2, \cdots$,, tenemos:

$$
a_n = \frac{2}{T}\int_d^{d+T} f(t)\cos(nwt)dt \ \Rightarrow\ a_n = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos\left(n\frac{2\pi}{2\pi}t\right)dt
$$

sustituyendo $f(t)$ y usando integración por partes, tenemos

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} t\cos nt\,dt = \frac{1}{\pi}\left[\frac{t\operatorname{sen} nt}{n} + \frac{\cos nt}{n^2}\Big|_0^{2\pi}\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{2\pi}{n}\operatorname{sen} 2n\pi + \frac{1}{n^2}\cos 2n\pi - \frac{\cos 0}{n^2}\right] = 0
\end{aligned}
$$

ya que $\operatorname{sen} 2n\pi = 0$ y $\cos 2n\pi = \cos 0 = 1$. Observe, en este caso la necesidad de resolver a_0 por separado, ya que para $n = 0$ el término a_n anterior no está definido. Ahora calculemos b_n, similarmente

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{T}\int_d^{d+T} f(t)sen(nwt)\,dt = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\operatorname{sen}\left(n\frac{2\pi}{2\pi}t\right)dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} t\operatorname{sen}(nt)\,dt
\end{aligned}
$$

integrando por partes resulta

$$\begin{aligned} b_n &= = \frac{1}{\pi}\Big[-\frac{t}{n}\cos nt + \frac{\operatorname{sen} nt}{n}\Big]\Big|_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{\pi}\Big[-\frac{2\pi}{n}\cos 2n\pi\Big] \\ &= -\frac{2}{n}, \quad (\cos 2n\pi = 1). \end{aligned}$$

Así $f(t)$ se representa como una serie de Fourier como:

$$f(t) = \frac{2\pi}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} \operatorname{sen} nt$$

o, en forma explicita

$$f(t) = \pi - 2\Big(\operatorname{sen} t + \frac{sen2t}{2} + \frac{sen3t}{3} + \cdots + \frac{sennt}{n} + \cdots\Big).$$