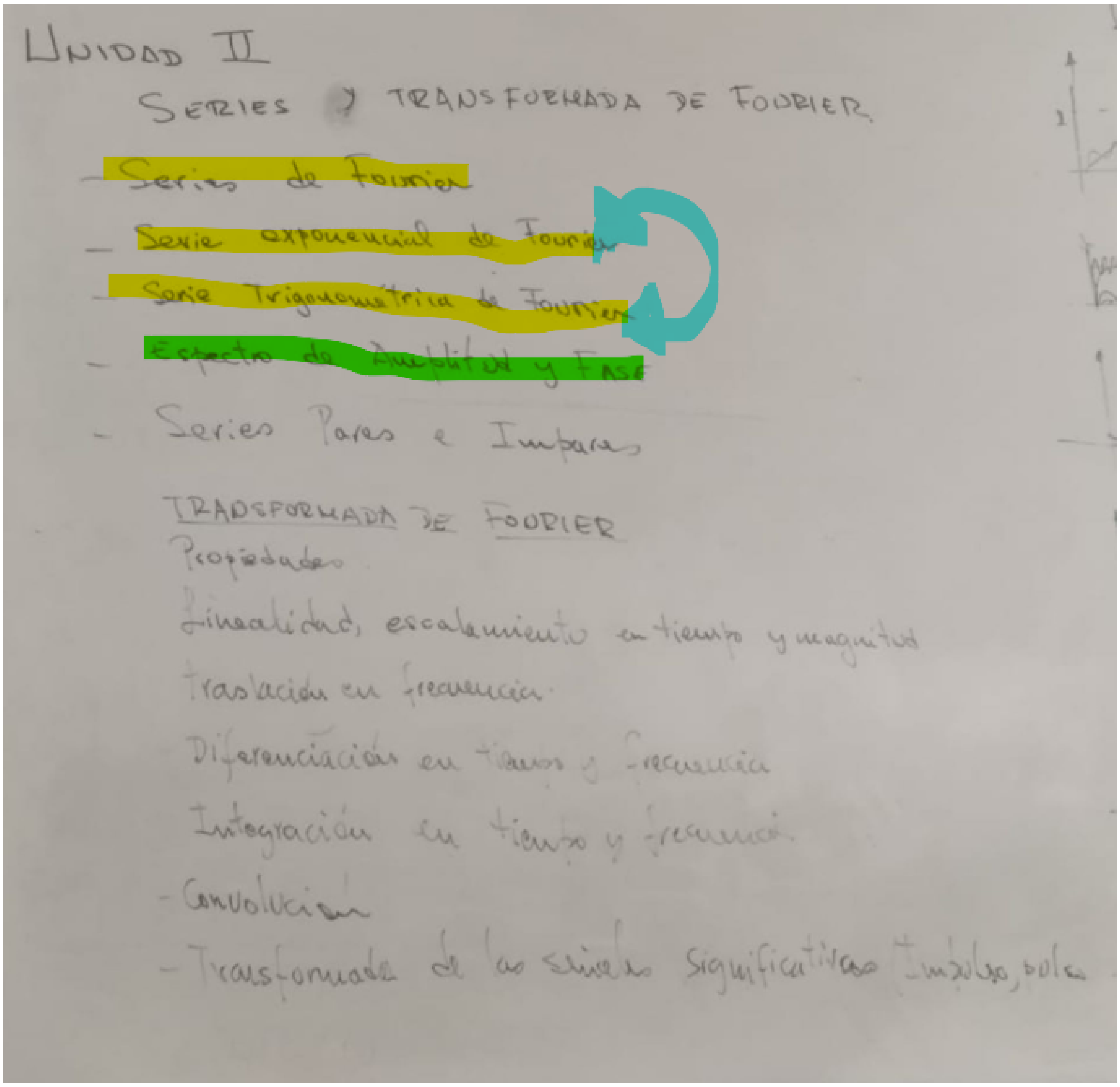
cuarta clase



UNIDAD II

SERIES Y TRANSFORMADA DE FOURIER

- Series de Fourier
- Serie exponencial de Fourier
- Serie Trigonométrica de Fourier
- Espectro de Amplitud y Fase
- Series Pares e Impares

TRANSFORMADA DE FOURIER

Propiedades

Linealidad, escalamiento en tiempo y magnitud

Traslación en frecuencia

Diferenciación en tiempo y frecuencia

Integración en tiempo y frecuencia

- Convolución
- Transformada de las señales significativas (impulso, pulso

Serie de fourier trigonometrica y exponencial. clases anteriores

Ejemplo 3.1

Como una ilustración de las ecuaciones (3.5) y (3.6), considere un sistema LTI para el cual la entrada $x(t)$ y la salida $y(t)$ están relacionadas por un desplazamiento en el tiempo de 3, es decir,

$$y(t) = x(t-3). \tag{3.17}$$

Si la entrada a este sistema es la señal exponencial compleja $x(t) = e^{j2t}$, entonces, de la ecuación (3.17)

$$y(t) = e^{j2(t-3)} = e^{-j6}e^{j2t}. \tag{3.18}$$

La ecuación (3.18) tiene la forma de la ecuación (3.5), como podríamos esperar, puesto que e^{j2t} es una función propia. El valor propio asociado es $H(j2) = e^{-j6}$. Es fácil confirmar la ecuación (3.6) para este ejemplo. De manera específica, de la ecuación (3.17), la respuesta al impulso del sistema es $h(t) = \delta(t-3)$. Sustituyéndola en la ecuación (3.6) obtenemos

$$H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau - 3)e^{-s\tau}d\tau = e^{-3s},$$

de manera que $H(j2) = e^{-j6}$.

Como un segundo ejemplo, en este caso para ilustrar las ecuaciones (3.11) y (3.12), considere la entrada $x(t) = \cos(4t) + \cos(7t)$. De la ecuación (3.17), $y(t)$ será de hecho

$$y(t) = \cos(4(t-3)) + \cos(7(t-3)). \tag{3.19}$$

Para comprobar que esto también será resultado de la ecuación (3.12), desarrollamos primero $x(t)$ usando la relación de Euler:

$$x(t) = \tfrac{1}{2}e^{j4t} + \tfrac{1}{2}e^{-j4t} + \tfrac{1}{2}e^{j7t} + \tfrac{1}{2}^{-j7t}. \tag{3.20}$$

A partir de las ecuaciones (3.11) y (3.12),

$$y(t) = \tfrac{1}{2}e^{-j12}e^{j4t} + \tfrac{1}{2}e^{j12}e^{-j4t} + \tfrac{1}{2}e^{-j21}e^{j7t} + \tfrac{1}{2}e^{j21}e^{-j7t},$$

Definición

Si $f(t)$ es una función periódica de periodo $T = \frac{2\pi}{w}$, que puede expresarse como una serie de Fourier, entonces esa serie está dada por:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos(nwt) + b_n \operatorname{sen}(nwt)\right] \tag{1}$$

donde los coeficientes están dados por la fórmula de Euler

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_d^{d+T} f(t)dt \tag{2}$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_d^{d+T} f(t)\cos(nwt)\,dt \tag{3}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_d^{d+T} f(t)\operatorname{sen}(nwt)\,dt \tag{4}$$

para $n = 1, 2, \cdots$,

Señales periodicas hubo una introduccion chill

3.3 REPRESENTACIÓN EN SERIES DE FOURIER DE SEÑALES PERIÓDICAS CONTINUAS

3.3.1 Combinaciones lineales de exponenciales complejas relacionadas armónicamente

Como se definió en el capítulo 1, una señal es periódica si, para algún valor positivo de T,

$$x(t) = x(t+T) \quad \text{para toda } t. \tag{3.21}$$

El periodo fundamental de $x(t)$ es el valor mínimo positivo de T diferente de cero para el cual la ecuación (3.21) se satisface, y el valor $\omega_0 = 2\pi/T$ se conoce como la frecuencia fundamental.

En el capítulo 1 también presentamos dos señales periódicas básicas, la señal senoidal

$$x(t) = \cos\omega_0 t \tag{3.22}$$

y la exponencial compleja periódica

$$x(t) = e^{j\omega_0 t}. \tag{3.23}$$

Estas dos señales son periódicas con frecuencia fundamental ω_0 y periodo fundamental $T = 2\pi/\omega_0$. Asociado con la señal en la ecuación (3.23) está el conjunto de exponenciales complejas *relacionadas armónicamente*

$$\phi_k(t) = e^{jk\omega_0 t} = e^{jk(2\pi/T)t}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{3.24}$$

Cada una de estas señales tiene una frecuencia fundamental que es un múltiplo de ω_0, y por tanto, cada una es periódica con periodo T (aunque para $|k| \geq 2$, el periodo fundamental de $\phi_k(t)$ es una fracción de T). De esta forma, una combinación lineal de exponenciales complejas relacionadas armónicamente de la forma

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk(2\pi/T)t} \tag{3.25}$$

también es periódica con periodo T. En la ecuación (3.25), el término para $k = 0$ es una constante. Los términos para $k = +1$ y $k = -1$ tienen una frecuencia fundamental igual a ω_0 y se conocen en conjunto como *componentes fundamentales* o *componentes de la primera armónica*. Los dos términos para $k = +2$ y $k = -2$ son periódicos con la mitad del periodo (o, de manera equivalente, al doble de la frecuencia) de la componente fundamental y se conocen como *componentes de la segunda armónica*. De manera más general, las componentes para $k = +N$ y $k = -N$ se conocen como las componentes de la Nésima (léase enésima) armónica.

La representación de una señal periódica en la forma de la ecuación (3.25) se conoce como la representación de la *serie de Fourier*. Antes de desarrollar las propiedades de esta representación, veamos un ejemplo.

$$i^2 = -1$$

z=a+bi

$$e^z = e^{a+bi} = e^a e^{bi}$$

$$\cos\alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2} \qquad \operatorname{sen}\alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}$$

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha$$

Los terminos k=+N y k=-N se conocen como las componentes de la eNesima armonica.

Ejemplo para demostrar que de la serie exponencial de fourier se puede llegar a la serie trignometrica de fourier, por la relacion de euler:

Ejemplo 3.2

Considere una señal periódica $x(t)$, con frecuencia fundamental 2π, que está expresada en la forma de la ecuación (3.25) como

$$x(t) = \sum_{k=-3}^{+3} a_k e^{jk2\pi t}, \tag{3.26}$$

donde

$$a_0 = 1,$$

$$a_1 = a_{-1} = \frac{1}{4},$$

$$a_2 = a_{-2} = \frac{1}{2},$$

$$a_3 = a_{-3} = \frac{1}{3}.$$

Rescribiendo la ecuación (3.26) y juntando cada una de las componentes armónicas que tienen la misma frecuencia fundamental, obtenemos

$$\begin{aligned} x(t) = 1 &+ \frac{1}{4}(e^{j2\pi t} + e^{-j2\pi t}) + \frac{1}{2}(e^{j4\pi t} + e^{-j4\pi t}) \\ &+ \frac{1}{3}(e^{j6\pi t} + e^{-j6\pi t}). \end{aligned} \tag{3.27}$$

De forma equivalente, usando la relación de Euler, podemos escribir $x(t)$ en la forma

$$x(t) = 1 + \frac{1}{2}\cos 2\pi t + \cos 4\pi t + \frac{2}{3}\cos 6\pi t. \tag{3.28}$$

En la figura 3.4 mostramos gráficamente la manera en que la señal $x(t)$ se construye a partir de sus componentes armónicas.

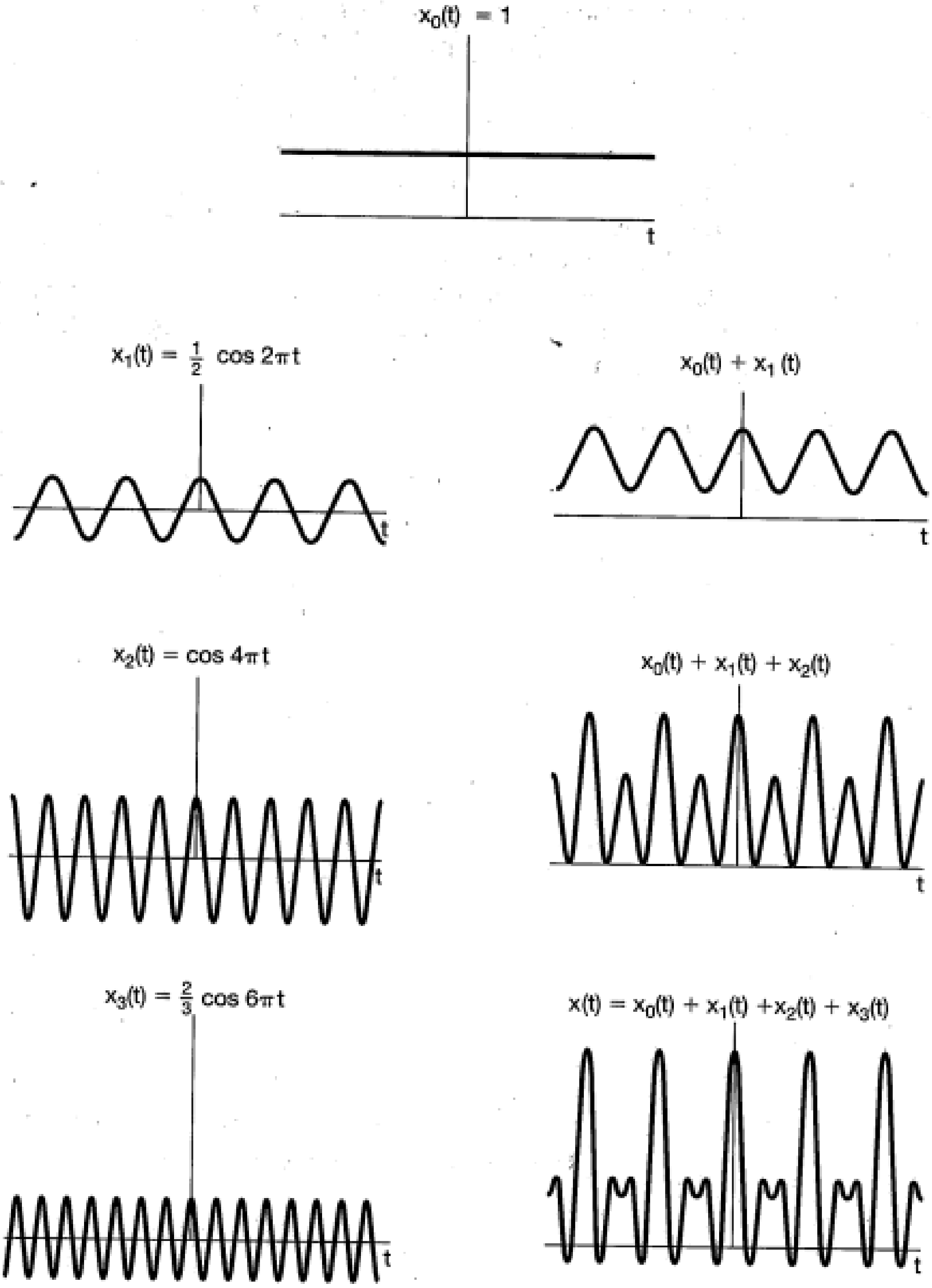


Figura 3.4 Construcción de una señal $x(t)$ en el ejemplo 3.2 como una combinación lineal de señales senoidales relacionadas armónicamente.

La ecuación (3.28) es un ejemplo de una forma alternativa para la serie de Fourier de señales periódicas reales. Específicamente, suponga que $x(t)$ es real y se puede representar en la forma de la ecuación (3.25). Entonces, puesto que $x^*(t) = x(t)$, obtenemos

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k^* e^{-jk\omega_0 t}.$$

Reemplazando k por $-k$ en la sumatoria, tenemos

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_{-k}^* e^{jk\omega_0 t},$$

la cual, al compararla con la ecuación (3.25), requiere que $a_k = a_{-k}^*$, o de forma equivalente, que

$$a_k^* = a_{-k}. \tag{3.29}$$

Observe que éste es el caso en el ejemplo 3.2, donde las a_k son, de hecho, reales, y $a_k = a_{-k}$.

Para deducir las formas alternativas de la serie de Fourier, primero reacomodamos la sumatoria en la ecuación (3.25) como

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k e^{jk\omega_0 t} + a_{-k} e^{-jk\omega_0 t}].$$

Sustituyendo a_k^* por el a_{-k} de la ecuación (3.29), obtenemos

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k e^{jk\omega_0 t} + a_k^* e^{-jk\omega_0 t}].$$

Gracias a que los dos términos dentro de la sumatoria son complejos conjugados uno del otro, esto se puede expresar como

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2\mathcal{R}e\{a_k e^{jk\omega_0 t}\}. \tag{3.30}$$

Si a_k se expresa en forma polar como

$$a_k = A_k e^{j\theta_k},$$

entonces la ecuación (3.30) se convierte en

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2\mathcal{R}e\{A_k e^{j(k\omega_0 t + \theta_k)}\}.$$

Esto es,

$$x(t) = a_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_0 t + \theta_k). \tag{3.31}$$

La ecuación (3.31) es una de las formas más comúnmente encontradas de la serie de Fourier de señales periódicas reales continuas. Otra forma se obtiene escribiendo a_k de forma rectangular como

$$a_k = B_k + jC_k,$$

donde B_k y C_k son reales. Con esta expresión para a_k, la ecuación (3.30) adopta la forma

$$x(t) = a_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} [B_k \cos k\omega_0 t - C_k \operatorname{sen} k\omega_0 t]. \tag{3.32}$$

En el ejemplo 3.2 las a_k son reales, de manera que $a_k = A_k = B_k$ y, por tanto, ambas representaciones, las ecuaciones (3.31) y (3.32), se reducen a la misma forma, la ecuación (3.28).

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nwt) + b_n \operatorname{sen}(nwt)]$$

3.3.2 Determinación de la representación en series de Fourier de una señal periódica continua

Para resumir, si $x(t)$ tiene una representación en serie de Fourier [es decir, si se puede expresar como una combinación lineal de exponenciales complejas armónicamente relacionadas en la forma de la ecuación (3.25)], entonces los coeficientes están dados por la ecuación (3.37). Entonces, este par de ecuaciones define la serie de Fourier de una señal periódica continua:

$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk(2\pi/T)t}, \qquad (3.38) \\ a_k &= \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\omega_0 t}\,dt = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk(2\pi/T)t}\,dt. \qquad (3.39) \end{aligned}}$$

3.38 ecuacion de sintesis

3.39 ecuacion de analisis

Ejemplo 3.3

Considere la señal

$$x(t) = \text{sen}\,\omega_0 t,$$

cuya frecuencia fundamental es ω_0. Un camino para determinar los coeficientes de la serie de Fourier para esta señal consiste en aplicar la ecuación (3.39). Para este sencillo caso, sin embargo, es más fácil expandir la señal senoidal como una combinación lineal de exponenciales complejas e identificar por inspección los coeficientes de la serie de Fourier. De manera específica, podemos expresar $\text{sen}\,\omega_0 t$ como

$$\text{sen}\ \omega_0 t = \frac{1}{2j}e^{j\omega_0 t} - \frac{1}{2j}e^{-j\omega_0 t}.$$

Al comparar el miembro derecho de esta ecuación con la ecuación (3.38), obtenemos

$$a_1 = \frac{1}{2j}, \qquad a_{-1} = -\frac{1}{2j},$$

$$a_k = 0, \qquad k \neq +1 \text{ o } -1.$$

Ejemplo 3.4

Sea

$$x(t) = 1 + \operatorname{sen}\omega_0 t + 2\cos\omega_0 t + \cos\left(2\omega_0 t + \frac{\pi}{4}\right),$$

la cual tiene frecuencia fundamental ω_0. Al igual que en el ejemplo 3.3, de nuevo podemos expandir $x(t)$ directamente en términos de exponenciales complejas de tal modo que

$$x(t) = 1 + \frac{1}{2j}[e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}] + [e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}] + \frac{1}{2}[e^{j(2\omega_0 t + \pi/4)} + e^{-j(2\omega_0 t + \pi/4)}].$$

Agrupando términos obtenemos

$$x(t) = 1 + \left(1 + \frac{1}{2j}\right)e^{j\omega_0 t} + \left(1 - \frac{1}{2j}\right)e^{-j\omega_0 t} + \left(\frac{1}{2}e^{j(\pi/4)}\right)e^{j2\omega_0 t} + \left(\frac{1}{2}e^{-j(\pi/4)}\right)e^{-j2\omega_0 t}.$$

Por consiguiente, los coeficientes de la serie de Fourier para este ejemplo son

$$a_0 = 1,$$

$$a_1 = \left(1 + \frac{1}{2j}\right) = 1 - \frac{1}{2}j,$$

$$a_{-1} = \left(1 - \frac{1}{2j}\right) = 1 + \frac{1}{2}j,$$

$$a_2 = \frac{1}{2}e^{j(\pi/4)} = \frac{\sqrt{2}}{4}(1 + j),$$

$$a_{-2} = \frac{1}{2} e^{-j(\pi/4)} = \frac{\sqrt{2}}{4}(1 - j),$$
$$a_k = 0, |k| > 2.$$

En la figura 3.5 mostramos una gráfica de barras de la magnitud y la fase de a_k.

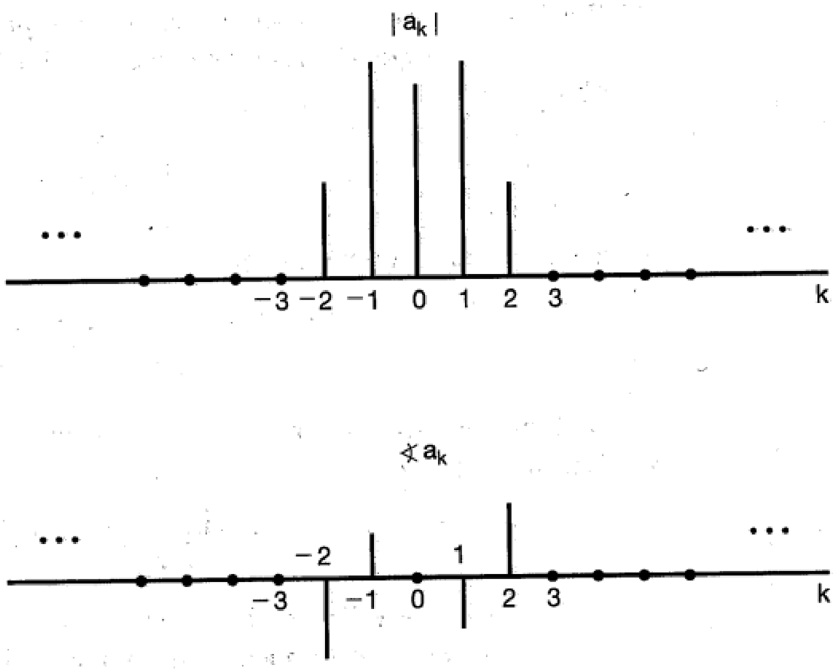


Figura 3.5 Gráficas de la magnitud y de la fase de los coeficientes de Fourier de la señal analizada en el ejemplo 3.4.

El profe dice que usen geogebra para graficar la magnitud y la fase de la serie de fourier

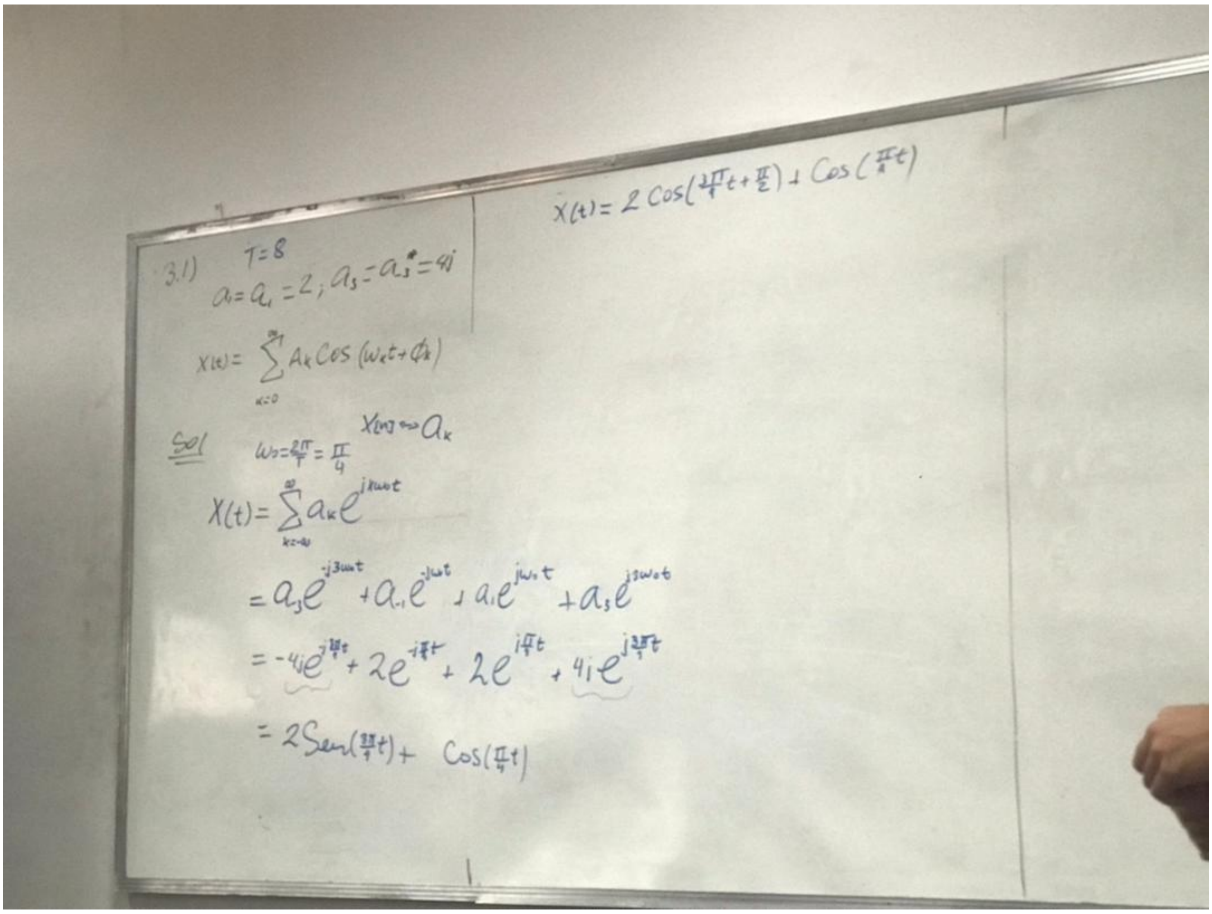
PROBLEMAS BÁSICOS CON RESPUESTAS

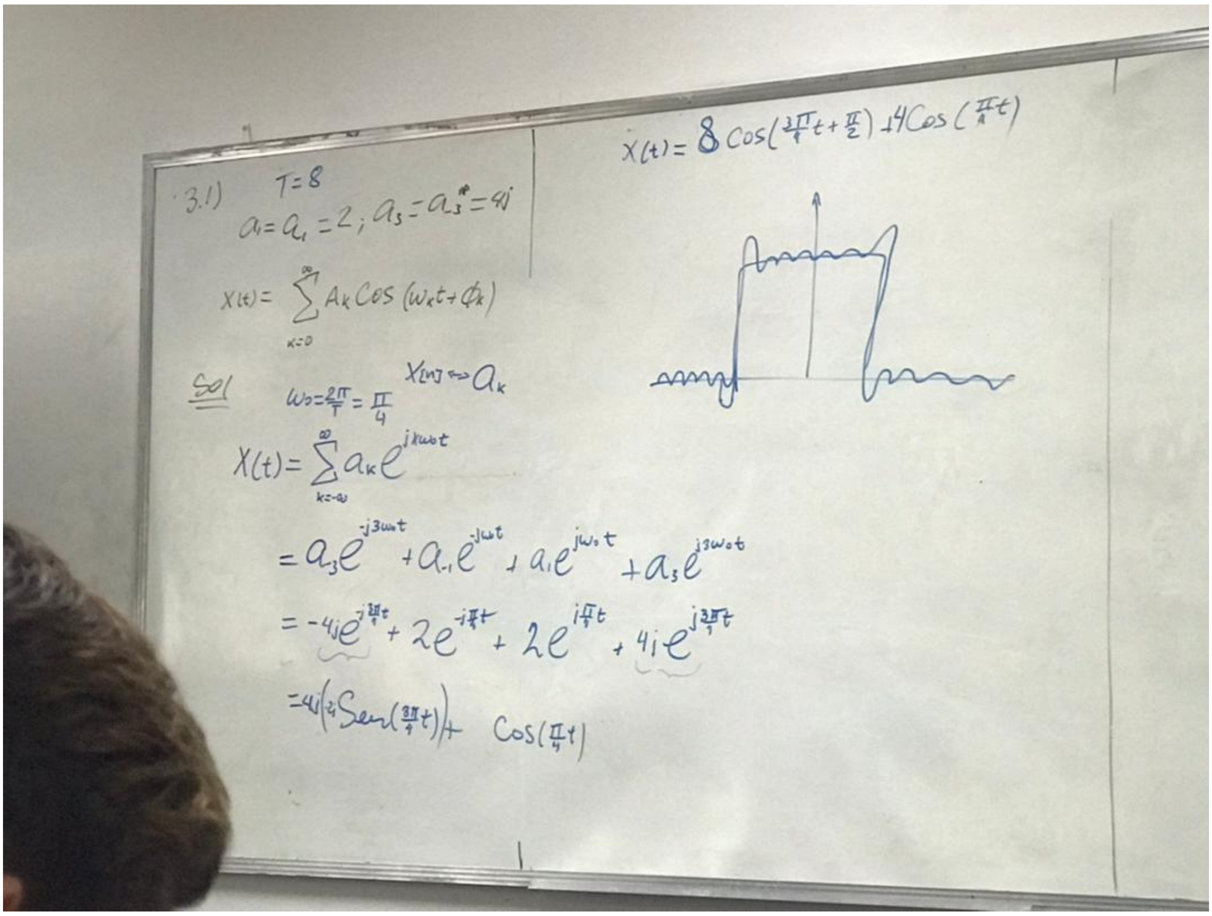
3.1. Una señal periódica continua $x(t)$ es de valor real y tiene un periodo fundamental de $T = 8$. Los coeficientes de la serie de Fourier diferentes de cero para $x(t)$ son

$$a_1 = a_{-1} = 2, a_3 = a^*_{-3} = 4j.$$

Exprese $x(t)$ en la forma

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos(\omega_k t + \phi_k).$$


$x(t) = 2\cos(\frac{3\pi}{4}t + \frac{\pi}{2}) + \cos(\frac{\pi}{4}t)$
3.1) $T=8$
$a_1 = a_{-1} = 2;\ a_3 = a_3^* = 4i$
$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos(w_k t + \phi_k)$
Sol
$x[n] \leftrightarrow a_k$
$w_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{4}$
$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jkw_0 t}$
$= a_3 e^{-j3w_0 t} + a_{-1} e^{-jw_0 t} + a_1 e^{jw_0 t} + a_3 e^{j3w_0 t}$
$= -4i e^{-j\frac{3\pi}{4}t} + 2e^{-j\frac{\pi}{4}t} + 2e^{j\frac{\pi}{4}t} + 4i e^{j\frac{3\pi}{4}t}$
$= 2\,\mathrm{Sen}(\frac{3\pi}{4}t) + \cos(\frac{\pi}{4}t)$


$x(t) = 8\cos(\frac{3\pi}{4}t + \frac{\pi}{2}) + 4\cos(\frac{\pi}{4}t)$
3.1) $T=8$
$a_1 = a_{-1} = 2;\ a_3 = a_3^* = 4i$
$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos(w_k t + \phi_k)$
Sol
$x[n] \leftrightarrow a_k$
$w_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{4}$
$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jkw_0 t}$
$= a_3 e^{-j3w_0 t} + a_{-1} e^{-jw_0 t} + a_1 e^{jw_0 t} + a_3 e^{j3w_0 t}$
$= -4i e^{-j\frac{3\pi}{4}t} + 2e^{-j\frac{\pi}{4}t} + 2e^{j\frac{\pi}{4}t} + 4i e^{j\frac{3\pi}{4}t}$
$= 4i(\frac{1}{i}\,\mathrm{Sen}(\frac{3\pi}{4}t)) + \cos(\frac{\pi}{4}t)$

3.3. Para la señal periódica continua

$$x(t) = 2 + \cos\left(\frac{2\pi}{3}t\right) + 4\,\text{sen}\left(\frac{5\pi}{3}t\right),$$

determine la frecuencia fundamental ω_0 y los coeficientes de la serie de Fourier a_k tales que

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}.$$

3.3. The given signal is

$$\begin{aligned} x(t) &= 2+\frac{1}{2}e^{j(2\pi/3)t}+\frac{1}{2}e^{-j(2\pi/3)t}-2je^{j(5\pi/3)t}+2je^{-j(5\pi/3)t} \\ &= 2+\frac{1}{2}e^{j2(2\pi/6)t}+\frac{1}{2}e^{-j2(2\pi/6)t}-2je^{j5(2\pi/6)t}+2je^{-j5(2\pi/6)t} \end{aligned}$$

From this, we may conclude that the fundamental frequency of $x(t)$ is $2\pi/6 = \pi/3$. The non-zero Fourier series coefficients of $x(t)$ are:

$$a_0 = 2, \qquad a_2 = a_{-2} = \frac{1}{2}, \qquad a_5 = a^*_{-5} = -2j$$

$$\boxed{i^2 = -1}$$

z=a+bi

$$e^z = e^{a+bi} = e^a e^{bi}$$

$$\cos\alpha = \frac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2}$$

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i}$$

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha$$

Ejemplo 3.5

La onda periódica cuadrada, dibujada en la figura 3.6 y definida sobre un periodo como

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T_1 \\ 0, & T_1 < |t| < T/2 \end{cases}, \tag{3.41}$$

es una señal que encontraremos en varias ocasiones a lo largo de este libro. Esta señal es periódica con periodo fundamental T y con frecuencia fundamental $\omega_0 = 2\pi/T$.

Para determinar los coeficientes de la serie de Fourier de $x(t)$, usaremos la ecuación (3.39). Debido a la simetría de $x(t)$ con respecto a $t = 0$, resulta más conveniente escoger $-T/2 \leq t < T/2$ como el intervalo sobre el cual se efectuará la integración,

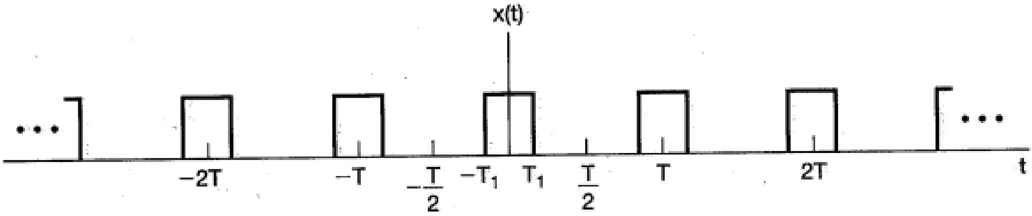


Figura 3.6 Onda cuadrada periódica.

aunque cualquier intervalo de longitud T es igualmente válido y por consiguiente conducirá al mismo resultado. Usando estos límites de integración y sustituyendo en la ecuación (3.41), tenemos primero, para $k = 0$, que

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T_1}^{T_1} dt = \frac{2T_1}{T}. \tag{3.42}$$

Como mencionamos anteriormente, a_0 se interpreta como el valor promedio de $x(t)$, que en este caso es igual a la fracción de cada periodo durante el cual $x(t) = 1$. Para $k \neq 0$ obtenemos

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-T_1}^{T_1} e^{-jk\omega_0 t}\, dt = -\frac{1}{jk\omega_0 T} e^{-jk\omega_0 t}\Big|_{-T_1}^{T_1},$$

la cual podemos rescribir como

$$a_k = \frac{2}{k\omega_0 T}\left[\frac{e^{jk\omega_0 T_1} - e^{-jk\omega_0 T_1}}{2j}\right]. \tag{3.43}$$

Si observamos que el término entre corchetes es sen $k\omega_0 T_1$, podemos expresar los coeficientes a_k como

$$a_k = \frac{2\,\text{sen}(k\omega_0 T_1)}{k\omega_0 T} = \frac{\text{sen}(k\omega_0 T_1)}{k\pi}, \quad k \neq 0, \tag{3.44}$$

donde nos hemos valido del hecho de que $\omega_0 T = 2\pi$.

La figura 3.7 corresponde a una gráfica de barras de los coeficientes de la serie de Fourier para este ejemplo. En particular, los coeficientes están dibujados para un valor fijo de T_1 y para diversos valores de T. Para este ejemplo específico, los coeficientes de Fourier son reales y, en consecuencia, pueden representarse con sólo una gráfica. De manera más general, por supuesto, los coeficientes de Fourier son complejos, por lo que requerirán de dos gráficas, una correspondiente a la parte real y la otra a la parte imaginaria, o magnitud y fase, de cada coeficiente. Para $T = 4T_1$, $x(t)$ es una onda cuadrada que tiene valor unitario para medio periodo y valor cero para el otro medio periodo. En este caso, $\omega_0 T_1 = \pi/2$, y a partir de la ecuación (3.44),

$$a_k = \frac{\text{sen}(\pi k/2)}{k\pi}, \quad k \neq 0, \tag{3.45}$$

mientras que

$$a_0 = \frac{1}{2}. \tag{3.46}$$

De la ecuación (3.45), $a_k = 0$ para k par y diferente de cero. También sen$(\pi k/2)$ se alterna entre ± 1 para valores impares sucesivos de k. Por tanto,

$$\begin{aligned} a_1 &= a_{-1} = \frac{1}{\pi}, \\ a_3 &= a_{-3} = -\frac{1}{3\pi}, \\ a_5 &= a_{-5} = \frac{1}{5\pi}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

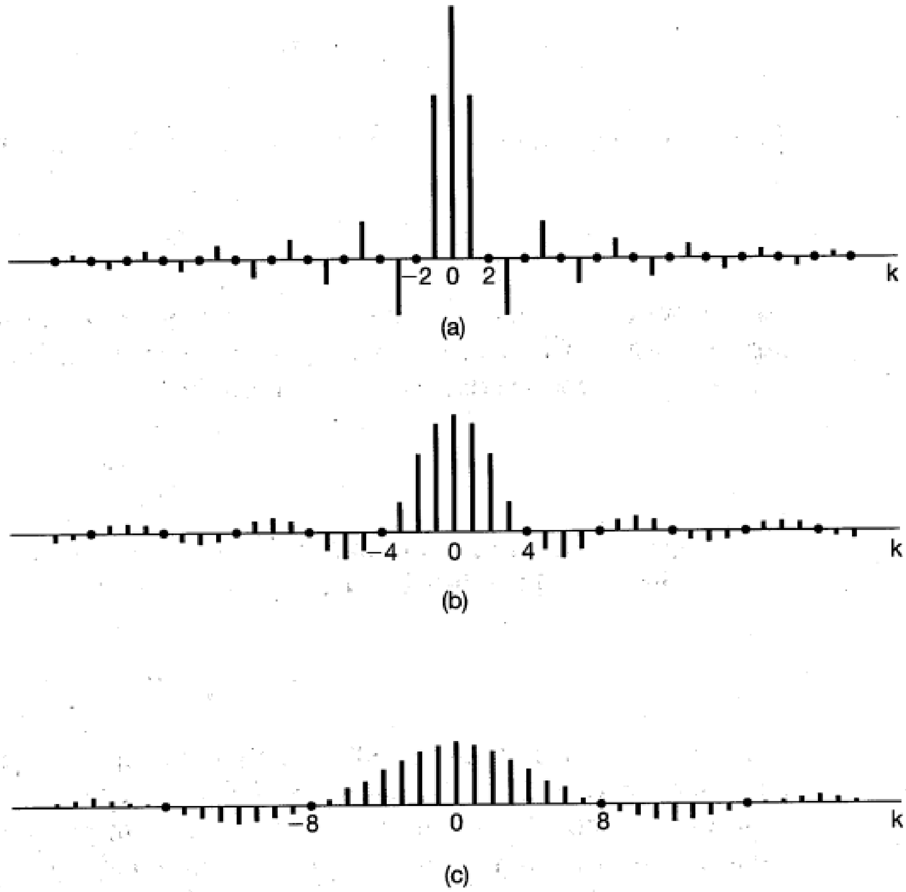


Figura 3.7 Gráfica de los coeficientes de la serie de Fourier Ta_k para la onda cuadrada periódica con T_1 fijo y varios valores de T: (a) $T = 4T_1$; (b) $T = 8T_1$; (c) $T = 16T_1$. Los coeficientes son muestras espaciadas en forma regular de la envolvente $(2 \text{ sen } \omega T_1)/\omega$, donde el espaciamiento entre muestras, $2\pi/T$ disminuye conforme T se incrementa.

TABLA 3.1 PROPIEDADES DE LA SERIE CONTINUA DE FOURIER

Propiedad	Sección	Señal periódica	Coeficientes de la serie de Fourier
		$\left.\begin{array}{l} x(t) \\ y(t) \end{array}\right\}$ Periódicas con periodo T y frecuencia fundamental $\omega_0 = 2\pi/T$	a_k b_k
Linealidad	3.5.1	$Ax(t) + By(t)$	$Aa_k + Bb_k$
Desplazamiento de tiempo	3.5.2	$x(t - t_0)$	$a_k e^{-jk\omega_0 t_0} = a_k e^{-jk(2\pi/T)t_0}$
Desplazamiento en frecuencia		$e^{jM\omega_0 t} = e^{jM(2\pi/T)t}x(t)$	a_{k-M}
Conjugación	3.5.6	$x^*(t)$	a^*_{-k}
Inversión de tiempo	3.5.3	$x(-t)$	a_{-k}
Escalamiento en tiempo	3.5.4	$x(\alpha t)$, $\alpha > 0$ (periódica con periodo T/α)	a_k
Convolución periódica		$\int_T x(\tau)y(t-\tau)d\tau$	$Ta_k b_k$
Multiplicación	3.5.5	$x(t)y(t)$	$\sum_{l=-\infty}^{+\infty} a_l b_{k-l}$
Diferenciación		$\frac{dx(t)}{dt}$	$jk\omega_0 a_k = jk\frac{2\pi}{T}a_k$
Integración		$\int_{-\infty}^{t} x(t)dt$ (de valor finito y periódica sólo si $a_0 = 0$)	$\left(\frac{1}{jk\omega_0}\right)a_k = \left(\frac{1}{jk(2\pi/T)}\right)a_k$
Simetría conjugada para señales reales	3.5.6	$x(t)$ real	$\begin{cases} a_k = a^*_{-k} \\ \mathcal{R}e\{a_k\} = \mathcal{R}e\{a_{-k}\} \\ \mathcal{I}m\{a_k\} = -\mathcal{I}m\{a_{-k}\} \\ \lvert a_k\rvert = \lvert a_{-k}\rvert \\ \sphericalangle a_k = -\sphericalangle a_{-k} \end{cases}$
Señales real y par	3.5.6	$x(t)$ real y par	a_k real y par
Señales real e impar	3.5.6	$x(t)$ real e impar	a_k sólo imaginaria e impar
Descomposición par e impar de señales reales		$\begin{cases} x_e(t) = \mathcal{E}v\{x(t)\} & [x(t) \text{ real}] \\ x_o(t) = \mathcal{O}d\{x(t)\} & [x(t) \text{ real}] \end{cases}$	$\mathcal{R}e\{a_k\}$ $j\mathcal{I}m\{a_k\}$

Relación de Parseval para señales periódicas

$$\frac{1}{T}\int_T |x(t)|^2\,dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k|^2$$