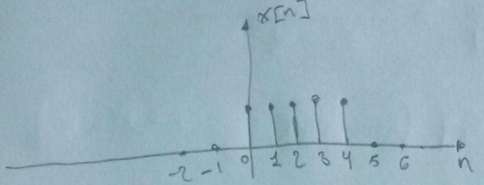
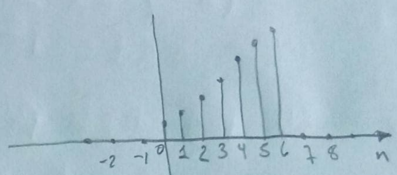
Ejercicio convolucion tiempo discreto y continuo

Ejemplo 2.4

Considere las dos secuencias

$$x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \le n \le 4 \\ 0, & \text{con otro valor} \end{cases} \qquad h[n] = \begin{cases} \alpha^n, & 0 \le n \le 6 \\ 0, & \text{con otro valor} \end{cases}$$





Para $\alpha > 1$

Para calcular la convolución de las señales, resulta conveniente considerar cinco intervalos separados para n.

Intervalo 1. Para $n < 0$, no hay traslape entre las porciones diferentes de cero de $x[k]$ y $h[n-k]$, y en consecuencia, $y[n] = 0$

Intervalo 2. Para $0 \le n \le 4$

$$x[k]h[n-k] = \begin{cases} \alpha^{n-k}, & 0 \le k \le n \\ 0, & \text{con otro valor} \end{cases}$$

Así, en este intervalo,

$$y[n] = \sum_{k=0}^{n} \alpha^{n-k}$$

Podemos evaluar esta suma mediante el uso de la formula de suma finita. Específicamente, cambiando la variable de la sumatoria de k a $r = n-k$

$$y[n] = \sum_{k=0}^{n} \alpha^{r} = \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}$$

Intervalo 3. Para $n > 4$ pero $n-6 \le 0$ (es decir, $4 < n \le 6$)

$$x[k]h[n-k] = \begin{cases} \alpha^{n-k}, & 0 \le k \le 4 \\ 0, & \text{con otro valor} \end{cases}$$

Así, en este intervalo,

$$y[n] = \sum_{k=0}^{4} \alpha^{n-k}$$

Ahora se puede usar la formula de suma geometrica para evaluar la ecuación. Especificamente separando el factor constante α^n de la sumatoria en la ecuación

$$y[n] = \alpha^n \sum_{k=0}^{4} (\alpha^{-1})^k = \alpha^n \frac{1-(\alpha^{-1})^5}{1-(\alpha^{-1})} = \frac{\alpha^{n-4} - \alpha^{n+1}}{1-\alpha}$$

Intervalo 4. para $n \geq 6$ pero $n-6 \leq 4$ (es decir, para $6 < n \leq 10$)

$$x[k]h[n-k] = \begin{cases} \alpha^{n-k}, & (n-6) \leq k \leq 4 \\ 0, & \text{con otro valor} \end{cases}$$

de manera que

$$y[n] = \sum_{k=n-6}^{4} \alpha^{n-k} \quad \text{haciendo } r = k-n+6 \Rightarrow k = r+n-6$$

$\Rightarrow 4 = n-6$ sumatoria

$\Rightarrow 10-n$

$$y[n] = \sum_{r=0}^{10-n} \alpha^{6-r} = \alpha^6 \sum_{r=0}^{10-n} (\alpha^{-1})^r$$

$$= \alpha^6 \frac{1-\alpha^{n-11}}{1-\alpha^{-1}} = \frac{\alpha^{n-4} - \alpha^7}{1-\alpha}$$

Intervalo 5. para $n-6 > 4$, o de manera equivalente, $n > 10$, no hay traslape entre las porciones diferentes de cero de $x[k]$ y $h[n-k]$, y por consiguiente $y[n] = 0$.

Resumiendo obtenemos

$$y[n] = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ \dfrac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha} & 0 \leq n \leq 4 \\ \dfrac{\alpha^{n-4} - \alpha^{n+1}}{1-\alpha} & 4 < n \leq 6 \\ \dfrac{\alpha^{n-4} - \alpha^7}{\alpha} & 6 < n \leq 10 \\ 0 & n > 10 \end{cases}$$

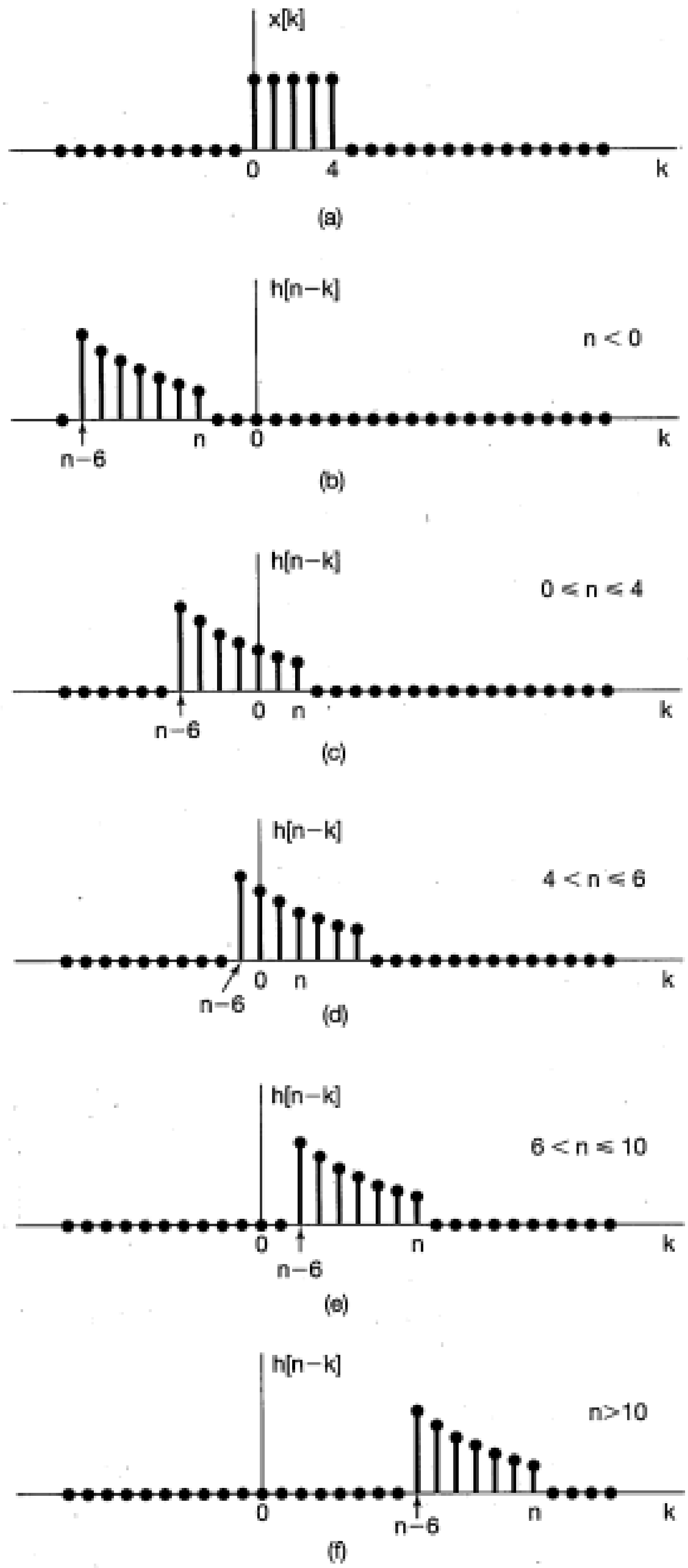


Figura 2.9 Interpretación gráfica de la convolución realizada en el ejemplo 2.4.

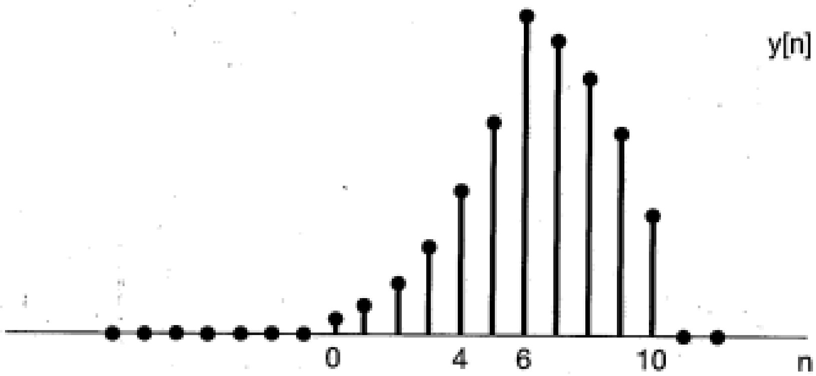


Figura 2.10 Resultado de llevar a cabo la convolución del ejemplo 2.4.

en tiempo continuo

Ejemplo 2.7

Considere la convolución de las siguientes dos señales:

$$x(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < T \\ 0, & \text{para otro valor} \end{cases},$$

$$h(t) = \begin{cases} t, & 0 < t < 2T \\ 0, & \text{para otro valor} \end{cases}.$$

Al igual que en el ejemplo 2.4 para la convolución discreta, es conveniente considerar la evaluación de $y(t)$ en intervalos separados. En la figura 2.19 hemos dibujado $x(\tau)$ e ilustrado $h(t - \tau)$ en cada uno de los intervalos de interés. Para $t < 0$ y para $t > 3T$, $x(\tau)h(t - \tau) = 0$ para todos los valores de τ, y en consecuencia, $y(t) = 0$. Para los otros intervalos, el producto $x(\tau)h(t - \tau)$ es como se indica en la figura 2.20. Así, para estos tres intervalos, la integración puede realizarse de forma gráfica con el siguiente resultado:

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{1}{2}t^2, & 0 < t < T \\ Tt - \frac{1}{2}T^2, & T < t < 2T \\ -\frac{1}{2}t^2 + Tt + \frac{3}{2}T^2, & 2T < t < 3T \\ 0, & 3T < t \end{cases},$$

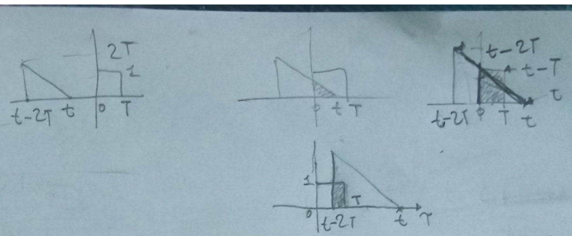
lo cual se muestra en la figura 2.21.

Intervalo 1. $t<0$

$$Y(t) = \int_0^T x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau = 0$$

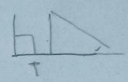
Intervalo 2. $0<t<T$

$$Y(t) = \int_0^t 1\,(\tau)\, d\tau = \left.\frac{\tau^2}{2}\right|_0^t = \frac{t^2}{2}$$



Intervalo 3. $T<t<2T$

$$Y(t) = \int_0^T (1)(t-\tau)\, d\tau = t\tau - \left.\frac{\tau^2}{2}\right|_0^T = tT - \frac{T^2}{2}$$



Intervalo 4. $2T<t<3T$

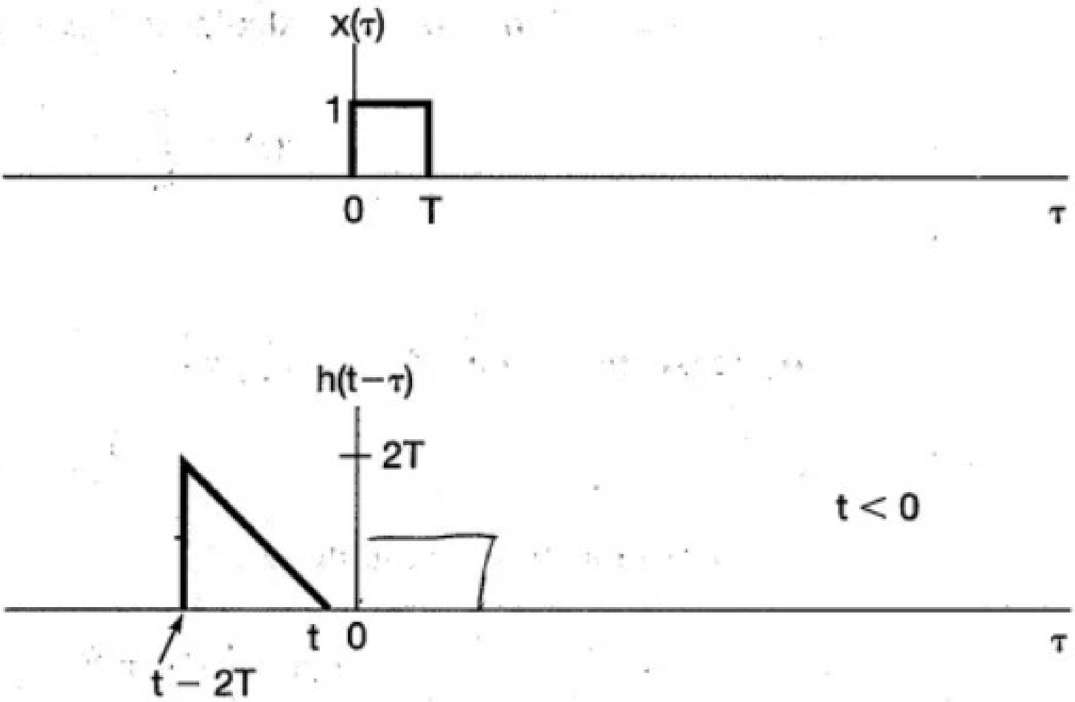
$$Y(t) = \int_{t-2T}^{T} (1)(t-\tau)\, d\tau = t\tau - \left.\frac{\tau^2}{2}\right|_{t-2T}^{T} = tT - \frac{T^2}{2} - t(t-2T) + \frac{(t-2T)^2}{2}$$

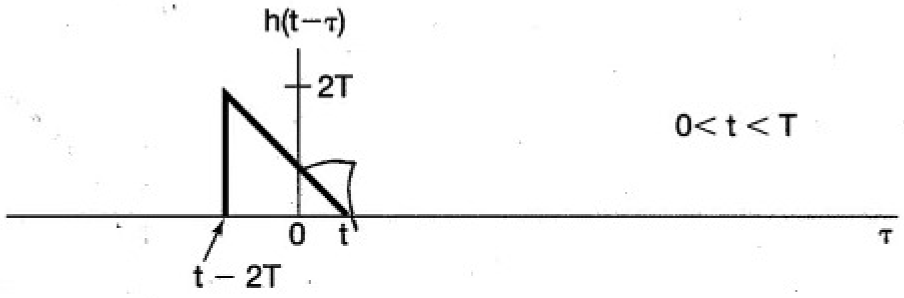
$$= tT - \frac{T^2}{2} - t^2 + \cancel{2tT} + \frac{t^2}{2} - \cancel{2tT} + 2T^2$$

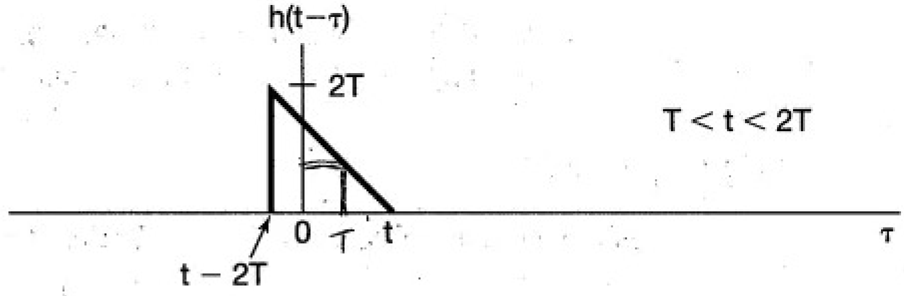
$$= \frac{3}{2}T^2 - \frac{t^2}{2} + tT$$

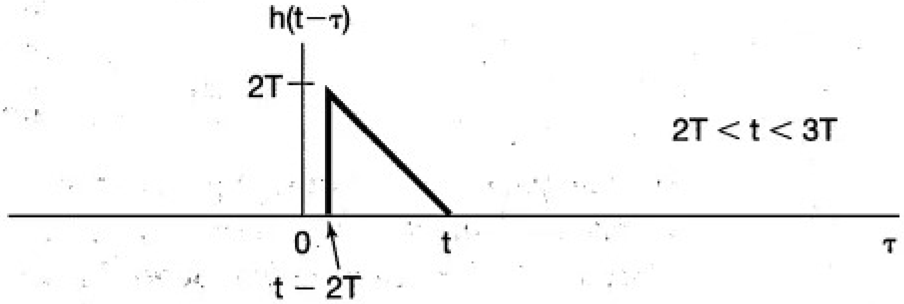
Intervalo 5 $t>3T$

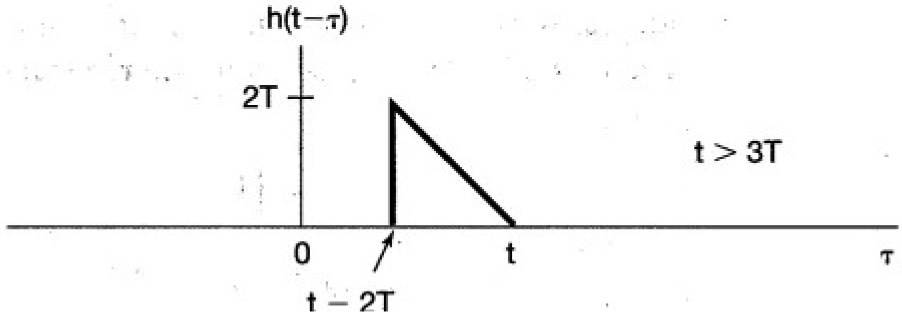
$$Y(t) = \int_0^T x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau = 0$$




h(t−τ)
2T
0< t < T
0
t
τ
t − 2T


h(t−τ)
2T
T < t < 2T
0
τ
t
τ
t − 2T


h(t−τ)
2T
2T < t < 3T
0
t
τ
t − 2T


h(t−τ)
2T
t > 3T
0
t
τ
t − 2T

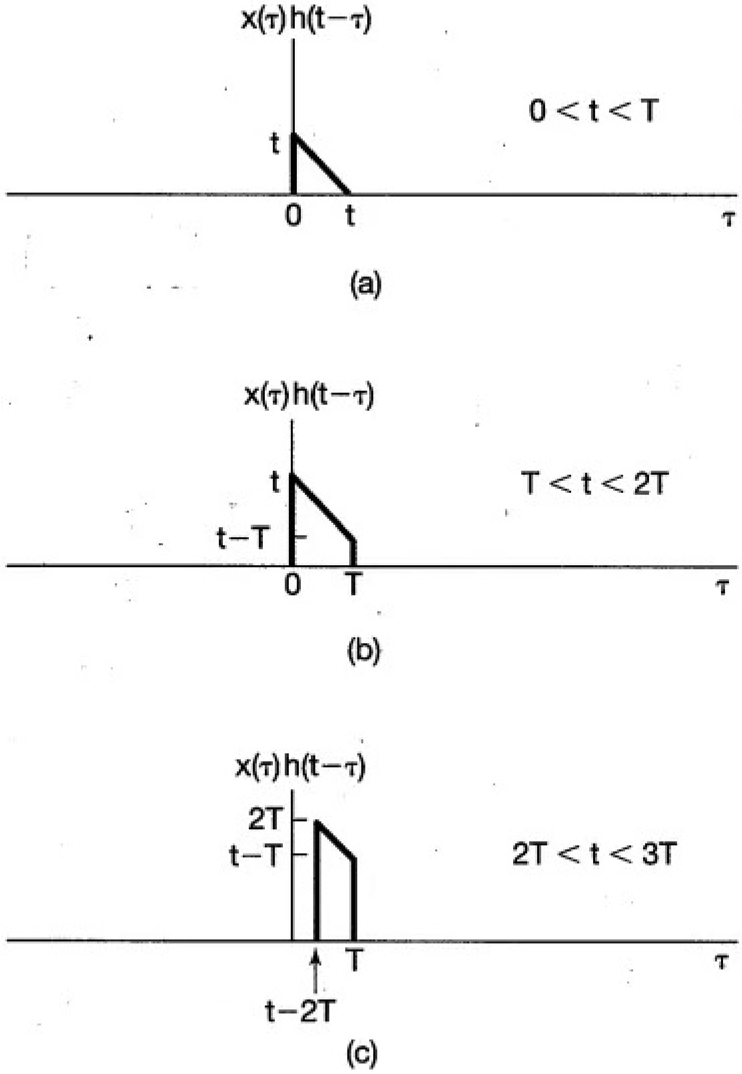


Figura 2.20 Producto $x(\tau)h(t-\tau)$ del ejemplo 2.7 para los tres intervalos de valores de t en los cuales el producto no es idéntico a cero. (Vea la figura 2.19.)

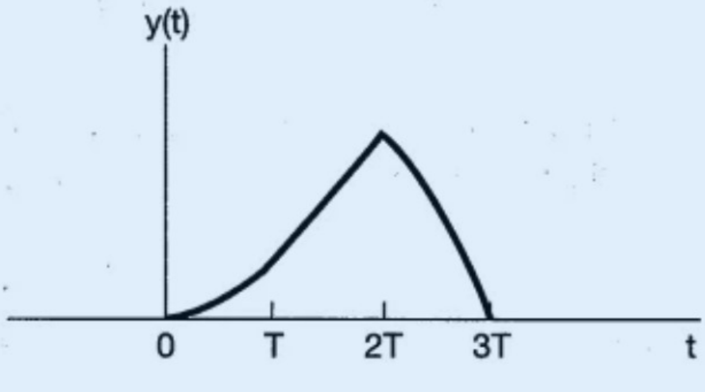


Figura 2.21 Señal $y(t) = x(t) * h(t)$ para el ejemplo 2.7.