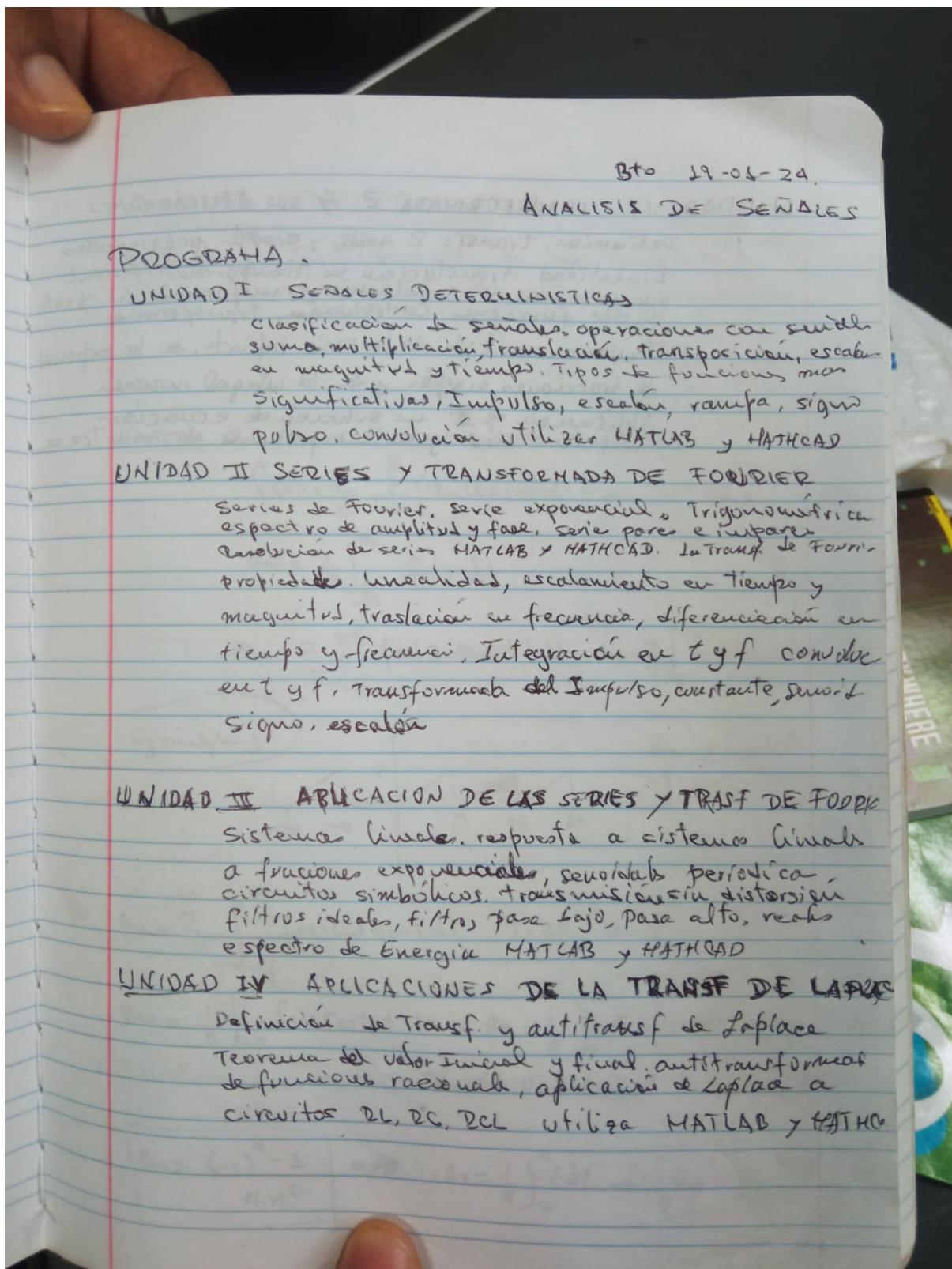


Prepas Analisis



Unidad 1 Señales Determinísticas

-Clasificacion de las señales

*operaciones con señales(suma,resta,multiplicacion, traslacion, transpucion,escalamiento en magnitud y tiempo)

-Tipos de funciones mas significativas:

*impulso

*escalon

*rampa

*sigma pulso

-Convolucion

-Usar Matlab y Hathcad

1 SEÑALES Y SISTEMAS 1

1.0 Introducción 1

1.1 Señales continuas y discretas 1

- 1.1.1 Ejemplos y representación matemática 1
- 1.1.2 Señales de energía y de potencia 5

1.2 Transformaciones de la variable independiente 7

- 1.2.1 Ejemplos de transformaciones de la variable independiente 8
- 1.2.2 Señales periódicas 11
- 1.2.3 Señales par e impar 13

1.3 Señales exponenciales y senoidales 14

- 1.3.1 Señales continuas exponencial compleja y senoidal 15
- 1.3.2 Señales discretas exponencial compleja y senoidal 21
- 1.3.3 Propiedades de periodicidad de exponenciales discretas 25

1.4 Las funciones impulso unitario y escalón unitario 30

- 1.4.1 Las secuencias discretas impulso unitario y escalón unitario 30
- 1.4.2 Las funciones continuas escalón unitario e impulso unitario 32

1.5 Sistemas continuos y discretos 38

- 1.5.1 Ejemplos sencillos de sistemas 39
- 1.5.2 Interconexiones de sistemas 41

1.6 Propiedades básicas de los sistemas 44

- 1.6.1 Sistemas con y sin memoria 44
- 1.6.2 Invertibilidad y sistemas inversos 45
- 1.6.3 Causalidad 46
- 1.6.4 Estabilidad 48
- 1.6.5 Invariancia en el tiempo 50
- 1.6.6 Linealidad 53

1.7 Resumen 56

Problemas 57

Introducción:

Lo que aprenderemos en esta materia es el lenguaje por así decirlo para describir señales y sistemas y un conjunto de herramientas para analizarlos.

Una señal es una función que representan una variable o cantidad física.

1.1 Señales continuas y discretas

Una señal es una función que representan una variable o cantidad física.

Las señales pueden describir una amplia variedad de fenómenos físicos.

Algunos ejemplos podrían ser

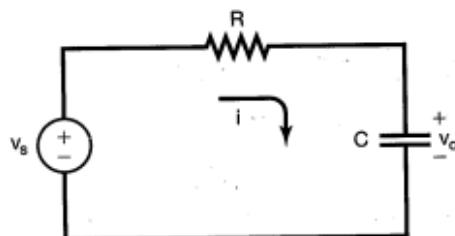


Figura 1.1 Un circuito RC sencillo con voltaje de la fuente v_s y voltaje del capacitor v_c .

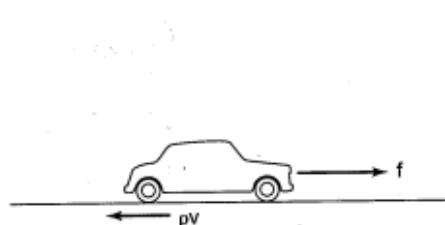


Figura 1.2 Un automóvil responde a una fuerza aplicada f del motor y a una fuerza friccional de retardo pv proporcional a la velocidad v del automóvil.

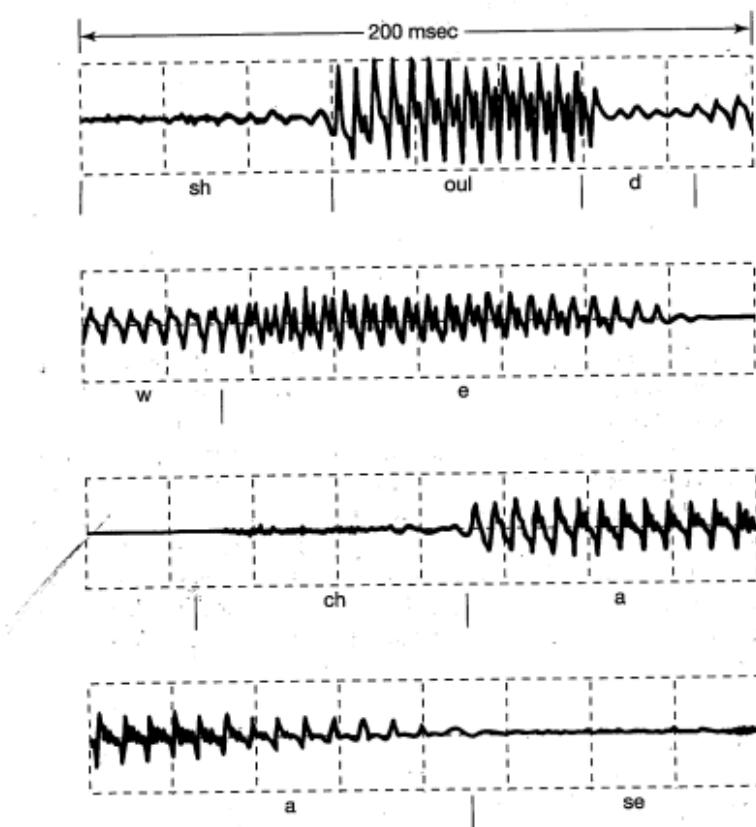


Figura 1.3 Ejemplo de un registro de voz. [Adaptado de *Applications of Digital Signal Processing*, A.V. Oppenheim, comp. (Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, Inc., 1978), p. 121.] La señal representa las variaciones de presión acústica como función del tiempo para las palabras habladas "should we chase". La línea superior de la figura corresponde a la palabra "should", la segunda línea a la palabra "we" y las dos últimas líneas a la palabra "chase". (Hemos indicado el inicio y terminación aproximados de cada sonido sucesivo en cada palabra.)

Señal continua: Usa la variable $x(t)$, $f(t)$, $y(t)$ CUALQUIER NUMERO REAL

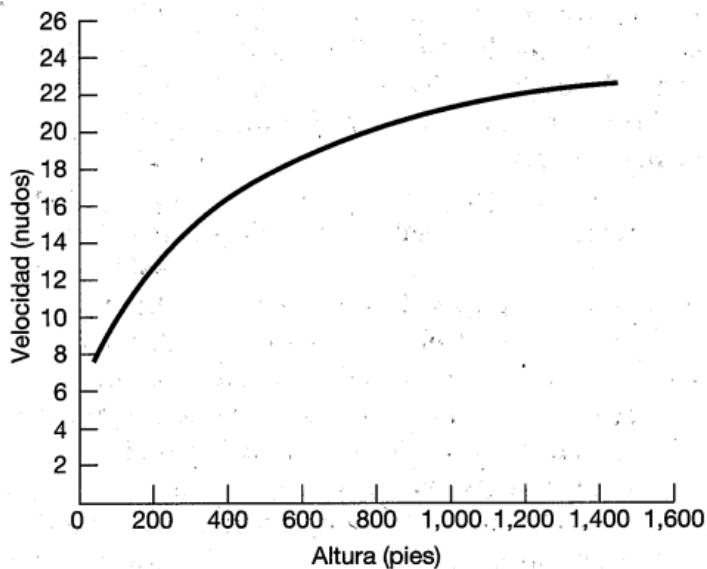


Figura 1.5 Un perfil típico vertical anual del viento. (Adaptado de Crawford y Hudson, National Severe Storms Laboratory Report, ESSA ERLTM-NSSL 48, agosto de 1970.)

t E REALES

Señal discreta: Usa la variable $x[n], y[n]$ SOLAMENTE NUMEROS ENTEROS

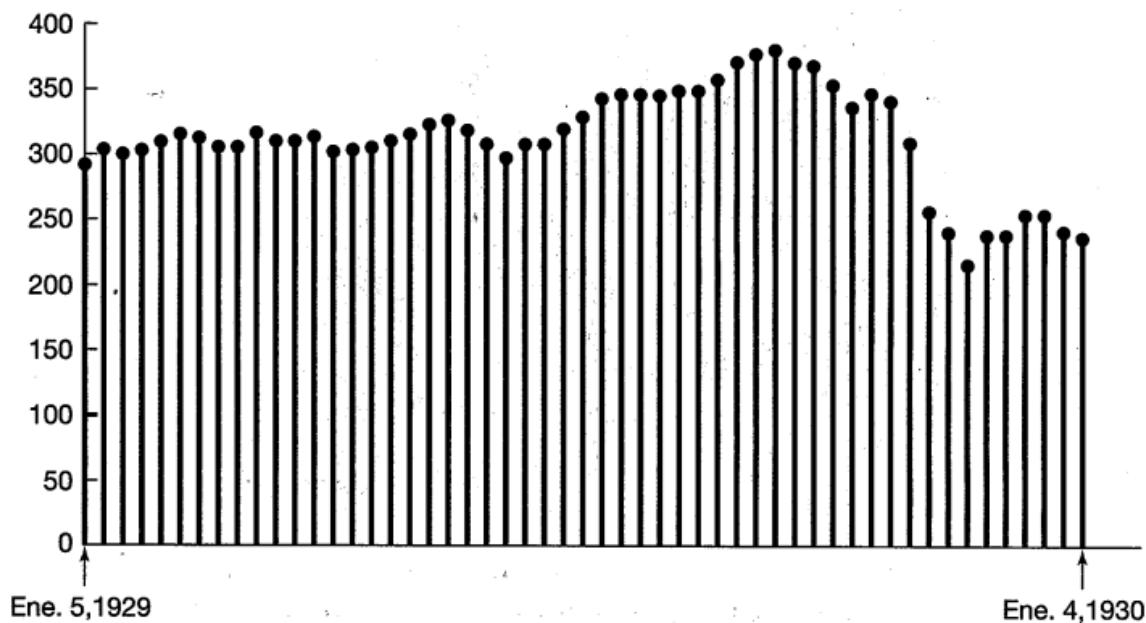
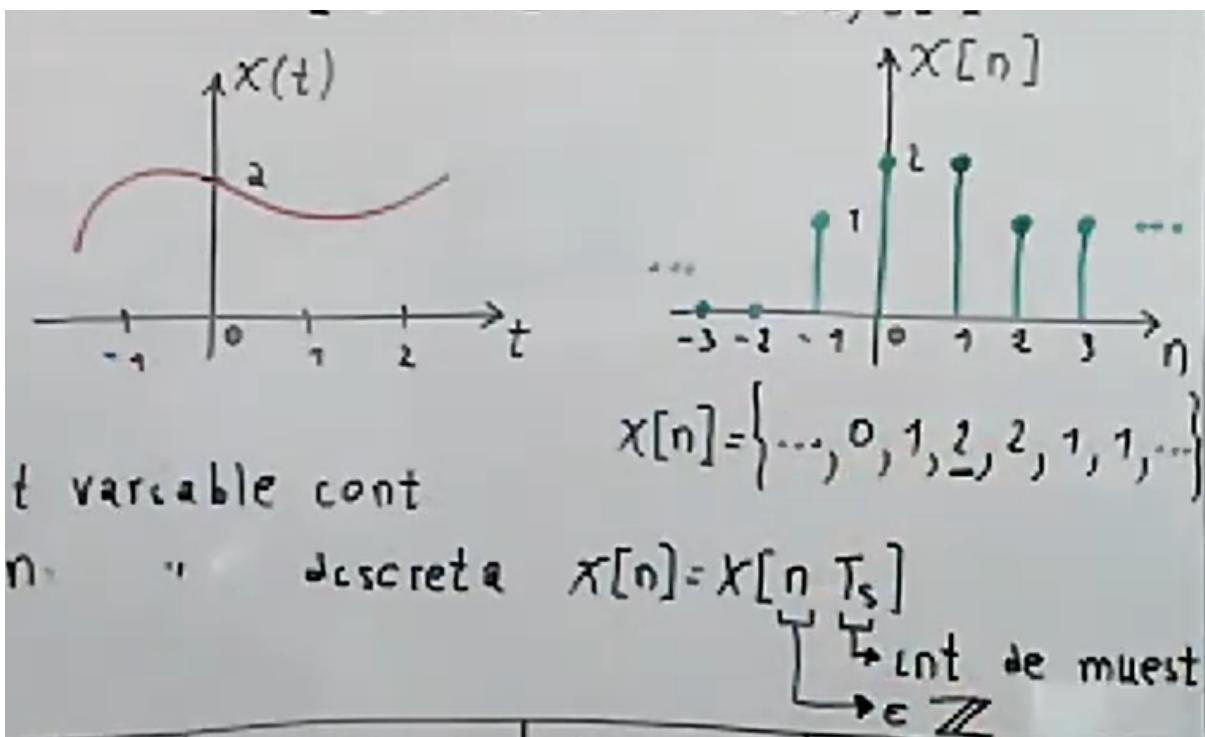


Figura 1.6 Ejemplo de una señal discreta: el índice semanal Dow-Jones del mercado de valores, del 5 de enero de 1929 al 4 de enero de 1930.

$x[n]=\{\dots, 0, \underline{1}, 2, 3, 4, \dots\}$ EL SUBRAYADO INDICA LA POSICION DEL ORIGEN y cada numero representa la imagen de la función



La señal de una voz como una función del tiempo y la presión atmosférica como una función de la altitud son ejemplos de señales continuas.

el índice de bolsa de valores o la gráfica del dólar es un ejemplo de una señal discreta, otro ejemplo podría ser cuando yo estoy viendo una película mientras cocino y mi atención se centra en rebanar lo que estoy cortando y otra parte en las veces que voy mirando el televisor, entonces cada vez que voy mirando el televisor voy armando una señal con los pedazitos de las escenas que logre ver.

3:34 PM | 8.9kB/s ☀️ 🎥



55

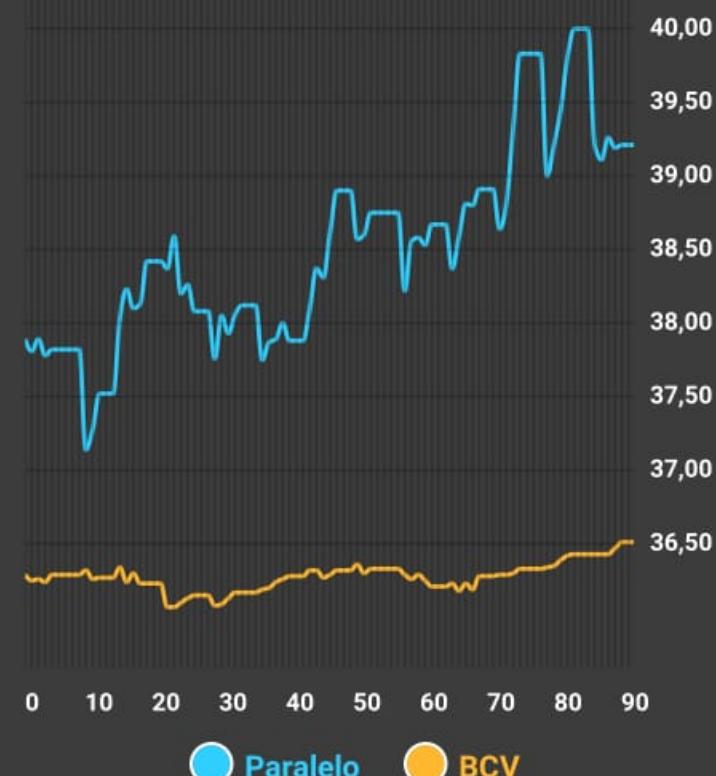


al cambio

Últimos 90 días



04/02/2024 - 05/05/2024



● Paralelo ● BCV



$$x[n] = x[n T_s]$$

↓
Int de muest
→ $\in \mathbb{Z}$

n Entero y T_s es el intervalo de muestreo, que no necesariamente tiene que ser un entero ejemplo intervalo de muestreo cada $X[n0.5]$ muestras

mas adelante ustedes van a trabajar en micro con los convertidores analogicos a digitales, eso lo que hacen es transformar una señal continua por ejemplo la temperatura, en una señal discreta una cantidad de bits que representan dicha temperatura



• $x(t) \in \mathbb{R} \Rightarrow$ S real

• $x(t) \in \mathbb{C}$ \Rightarrow S compleja $\Rightarrow x(t) = x_r(t) + i x_i(t)$

Def $x(t) o x[n]$ PAR $\Leftrightarrow \begin{cases} x(t) = x(-t) & \forall t \in D_x \\ x[n] = x[-n] & \forall n \in D_x \end{cases}$

$x(t) o x[n]$ IMPAR $\Leftrightarrow \begin{cases} x(t) = -x(-t) & \forall t \in D_x \\ x[n] = -x[-n] & \forall n \in D_x \end{cases}$

Prop $x(t) = x_p(t) + x_c(t)$ $x[n] = x_p[n] + x_c[n]$

$$\begin{cases} x_p(t) = \frac{1}{2} [x(t) + x(-t)] \\ x_c(t) = \frac{1}{2} [x(t) - x(-t)] \end{cases} \quad \begin{cases} x_p[n] = \frac{1}{2} [x[n] + x[-n]] \\ x_c[n] = \frac{1}{2} [x[n] - x[-n]] \end{cases}$$

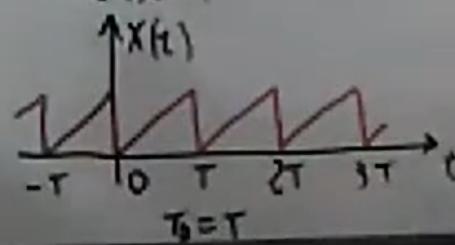
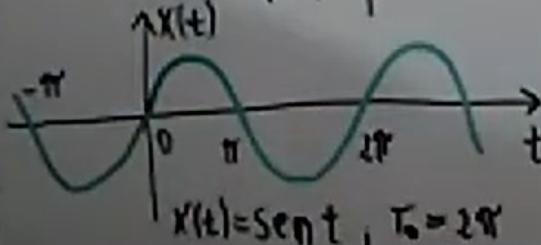
Prop $S_p \cdot S_p = S_p \quad S_c \cdot S_c = S_p$

$$S_p \cdot S_c = S_c \quad S_c \cdot S_p = S_c$$

Def: $x(t)$ es periódica de período $T \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow x(t) = x(t + T)$

En general $" "$ $T \in \mathbb{R}^+ y m \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x(t) = x(t + mT)$

Obs. $T_0 = \min \{T\}$ período fundamental



1.2.1 Ejemplos de transformaciones de la variable independiente

Un ejemplo simple y muy importante de transformación de la variable independiente de una señal es un *corrimiento de tiempo*. En la figura 1.8 se ilustra un corrimiento discreto en el cual tenemos dos señales $x[n]$ y $x[n - n_0]$ que son idénticas en forma pero están desplazadas una con respecto a la otra. También encontraremos corrimientos continuos, como se ilustra en la figura 1.9, en la cual $x(t - t_0)$ representa una versión de $x(t)$ retardada (si t_0 es positivo) o adelantada (si t_0 es negativo). Las señales que están relacionadas de esta forma se presentan en aplicaciones como el radar, el sonar y el procesamiento de señales sísmicas, en las cuales varios receptores situados en diferentes localizaciones detectan una señal que está siendo transmitida a través de un cierto medio (agua, roca, aire, etc.). En este caso, la diferencia en el tiempo de propagación desde el punto de origen de la señal transmitida a cualquier par de receptores tiene como resultado un corrimiento de tiempo entre las señales obtenidas por los dos receptores.

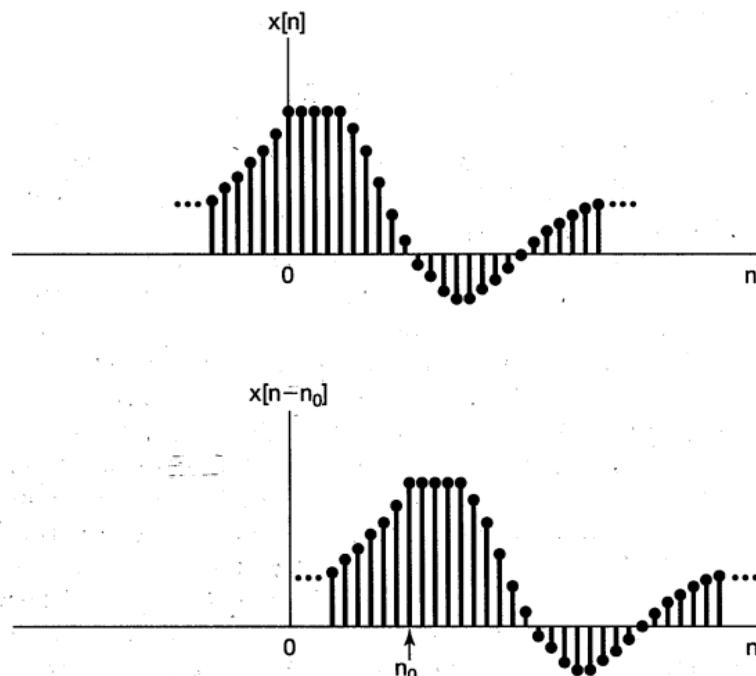


Figura 1.8 Señales discretas relacionadas por un corrimiento de tiempo. En esta figura $n_0 > 0$, de manera que $x[n - n_0]$ es una versión atrasada de $x[n]$ (es decir, cada punto en $x[n]$ ocurre más tarde en $x[n - n_0]$).

En vez de iniciar en el origen empieza después de un "n tiempo"

Figura 1.10 Inversión del tiempo

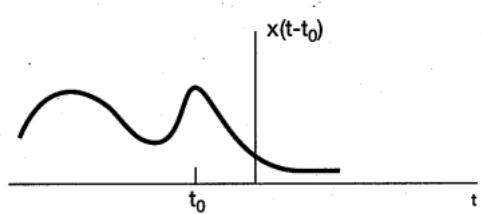
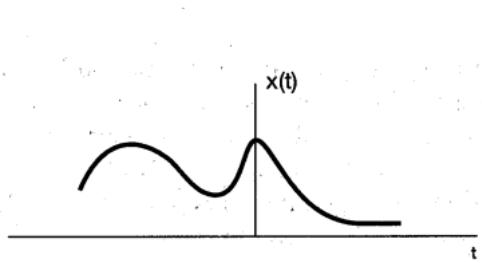


Figura 1.9 Señales continuas relacionadas mediante un corrimiento de tiempo. En esta figura, $t_0 < 0$, de manera que $x(t - t_0)$ es una versión adelantada de $x(t)$ (es decir, cada punto en $x(t)$ ocurre con anticipación en $x(t - t_0)$).

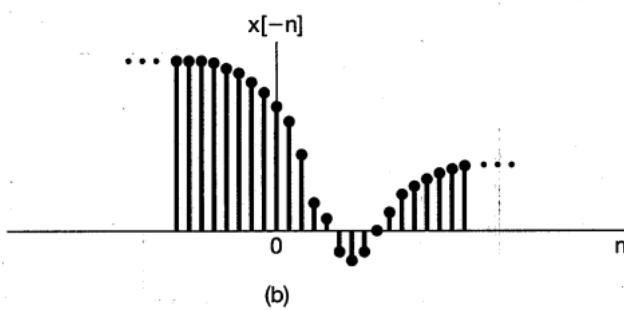
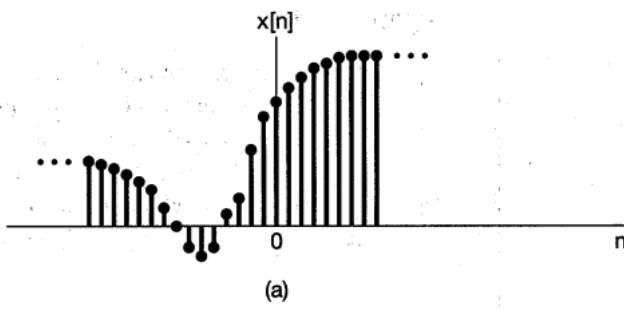
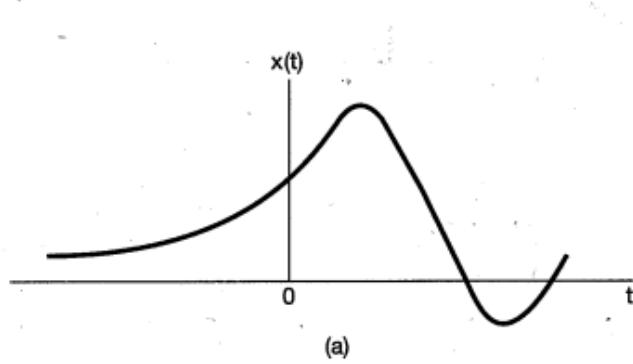
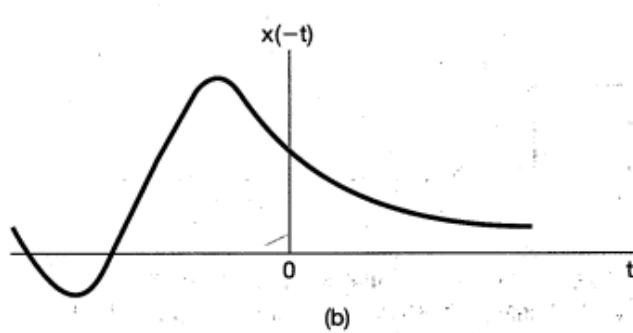


Figura 1.10 (a) Una señal discreta $x[n]$; (b) su reflejo $x[-n]$ alrededor de $n = 0$.

Una segunda transformación básica del eje del tiempo es la inversión de tiempo. Por ejemplo, como se ilustra en la figura 1.10, la señal $x[-n]$ se obtiene a partir de la señal $x[n]$ mediante un reflejo respecto a $n = 0$ (es decir, invirtiendo la señal). De manera similar, como se ilustra en la figura 1.11, $x(-t)$ se obtiene a partir de la señal $x(t)$ mediante el reflejo de $t = 0$. Esto es, si $x(t)$ representa una señal de audio grabada en una cinta, entonces $x(-t)$ es la misma grabación pero tocada en sentido contrario. Otra transformación es la de escalamiento de tiempo. En la figura 1.12 hemos ilustrado tres señales, $x(t)$, $x(2t)$ y $x(t/2)$, que están relacionadas por cambios lineales de escala en la variable independiente. Si pensamos nuevamente en el ejemplo de $x(t)$ como una grabación en cinta, entonces $x(2t)$ es la grabación tocada al doble de la velocidad y $x(t/2)$ es la grabación tocada a media velocidad.



(a)



(b)

Figura 1.11 (a) Una señal continua $x(t)$; (b) su reflejo $x(-t)$ alrededor de $t = 0$.

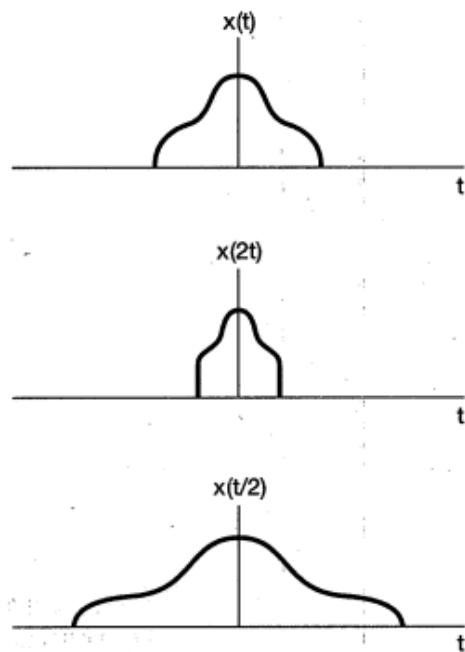
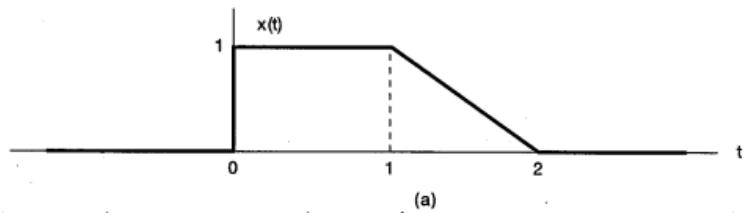


Figura 1.12 Señales continuas relacionadas mediante escalamiento de tiempo.

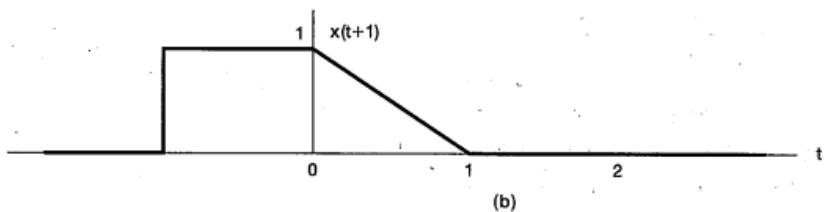
operaciones con señales (suma, resta, multiplicacion, traslacion, transpucion, escalamiento en magnitud y tiempo)

Ejemplo 1.1

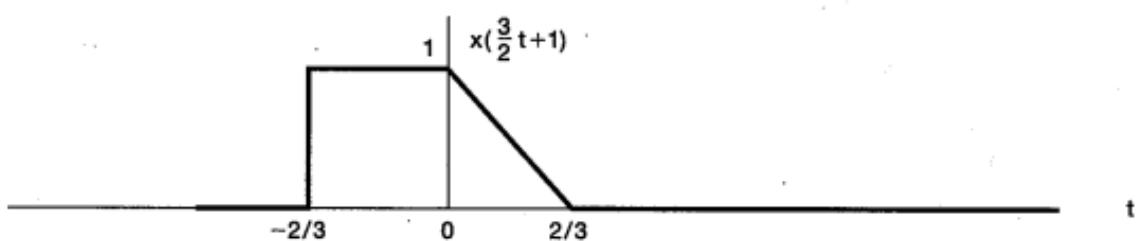
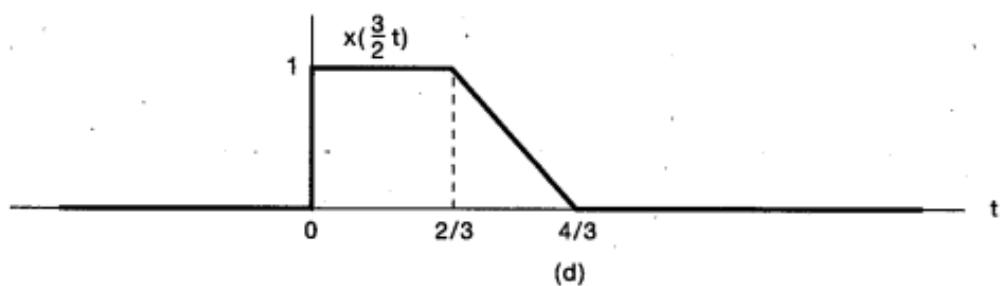
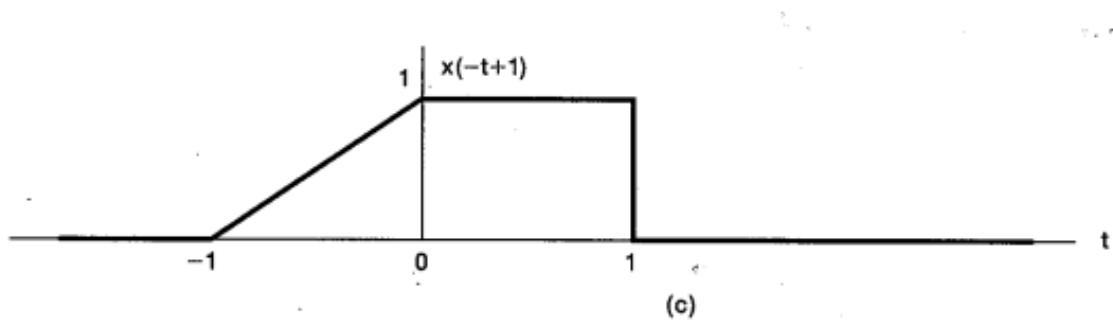
Dada la señal $x(t)$ mostrada en la figura 1.13(a), la señal $x(t + 1)$ corresponde a un adelanto (corrimiento a la izquierda) por una unidad a lo largo del eje t como se ilustra en la figura 1.13(b). Específicamente, observamos que el valor de $x(t)$ en $t = t_0$ ocurre en $x(t + 1)$ en $t = t_0 - 1$. Por ejemplo, el valor de $x(t)$ en $t = 1$ se encuentra en $x(t + 1)$ en $t = 1 - 1 = 0$. Asimismo, ya que $x(t)$ es cero para $t < 0$, tenemos que $x(t + 1)$ es cero para $t < -1$. De igual manera, ya que $x(t)$ es cero para $t > 2$, $x(t + 1)$ es cero para $t > 1$.



(a)



(b)



1.2.2 Señales periódicas

Un tipo importante de señales que encontraremos con frecuencia en todo el libro es la clase de señales *periódicas*. Una señal periódica continua $x(t)$ tiene la característica de que hay un valor positivo T para el cual

$$x(t) = x(t + T) \quad (1.11)$$

1.2.3 Señales par e impar

Otro conjunto de propiedades útiles de las señales está relacionado con la simetría que presentan con la inversión de tiempo. Una señal $x(t)$ o $x[n]$ es conocida como una señal **par** si es idéntica a su contraparte invertida en el tiempo, es decir, con su reflejo respecto del origen. En tiempo continuo una señal es par si

$$x(-t) = x(t) \quad (1.14)$$

mientras que una señal en tiempo discreto es par si

$$x[-n] = x[n]. \quad (1.15)$$

A una señal se le considera **ímpar** si

$$x(-t) = -x(t), \quad (1.16)$$

$$x[-n] = -x[n]. \quad (1.17)$$

Una señal impar debe ser necesariamente 0 en $t = 0$ o $n = 0$, ya que las ecuaciones (1.16) y (1.17) requieren que $x(0) = -x(0)$ y $x[0] = -x[0]$. En la figura 1.17 se muestran ejemplos de señales par e impar continua.

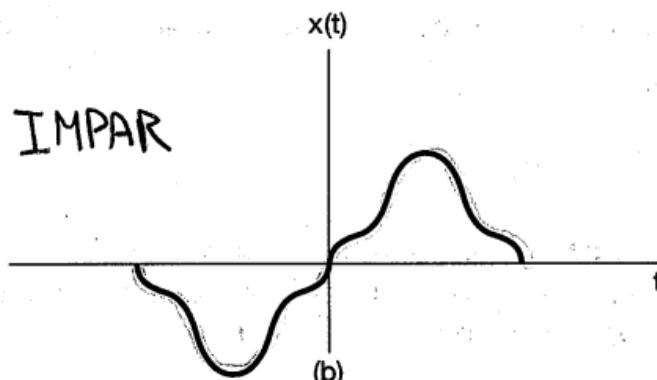
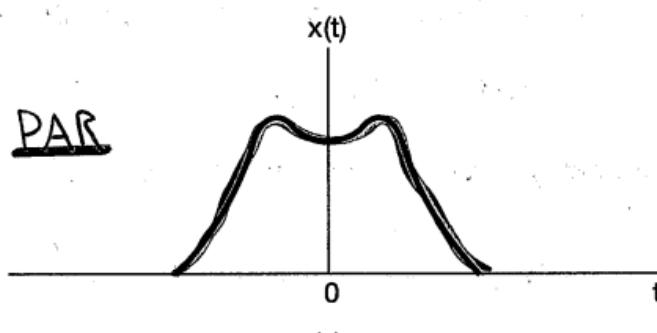


Figura 1.17 (a) Una señal par continua; (b) una señal impar continua.

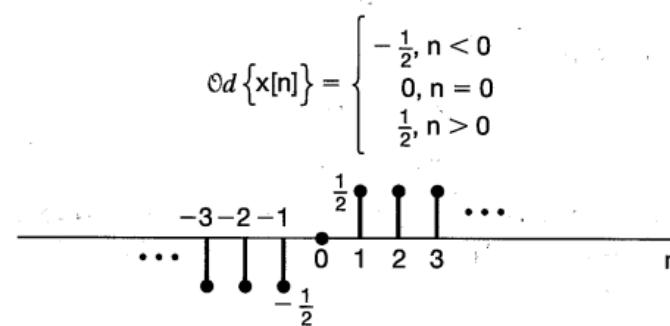
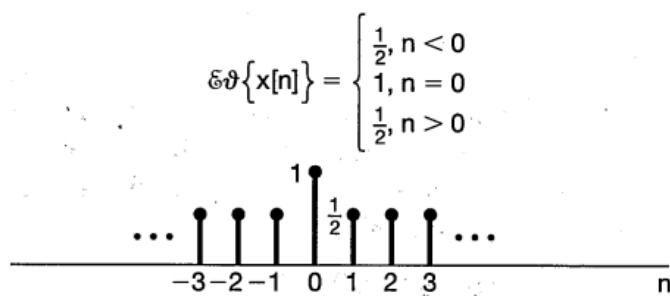
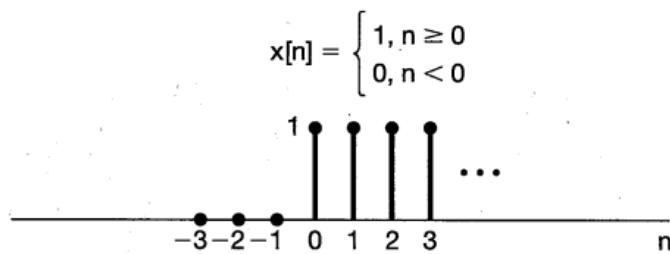


Figura 1.18 Ejemplo de la descomposición par e impar de una señal discreta.

Un hecho importante es que cualquier señal se puede separar en la suma de dos señales, una de las cuales es par y la otra es impar. Para ver esto, considere la señal

$$\text{Ev}[x(t)] = \frac{1}{2} [x(t) + x(-t)], \quad (1.18)$$

la cual corresponde a la *parte par* de $x(t)$. De manera similar, la *parte impar* de $x(t)$ está dada por

$$\text{Od}[x(t)] = \frac{1}{2} [x(t) - x(-t)]. \quad (1.19)$$

Verificar que la parte par es de hecho par, que la parte impar es impar y que $x(t)$ es la suma de las dos es un ejercicio simple. Definiciones exactamente análogas son válidas en el caso de discreto. La figura 1.18 proporciona un ejemplo de la descomposición par-impar de una señal discreta.

Ler lo siguiente porque mas adelante lo van usar, en este parcial creo que no

1.3 SEÑALES EXPONENCIALES Y SENOIDALES

1.3.3 Propiedades de periodicidad de exponenciales discretas

Esa parte es importante

TABLA 1.1 Comparación de señales $e^{j\omega_0 t}$ y $e^{j\omega_0 n}$.

$e^{j\omega_0 t}$ (continuo)	$e^{j\omega_0 n}$ (discreto)
Señales distintas para distintos valores de ω_0	Señales idénticas para valores de ω_0 separados por múltiplo de 2π
Periódica para cualquier elección de ω_0	Periódica sólo si $\omega_0 = 2\pi m/N$ para algunos enteros $N > 0$ y m .
Frecuencia fundamental ω_0	Frecuencia fundamental* ω_0/m
Periodo fundamental $\omega_0 = 0$: indefinido $\omega_0 \neq 0$: $\frac{2\pi}{\omega_0}$	Periodo fundamental* $\omega_0 = 0$: indefinido $\omega_0 \neq 0$: $m \left(\frac{2\pi}{\omega_0} \right)$

* Supone que m y N no tienen ningún factor en común.

1.4 LAS FUNCIONES IMPULSO UNITARIO Y ESCALÓN UNITARIO

En esta sección presentamos otras señales básicas —específicamente, las funciones impulso unitario y escalón unitario continuas y discretas— que son de importancia considerable en el análisis de señales y sistemas. En el capítulo 2 veremos cómo se pueden usar las señales impulso unitario como bloques fundamentales básicos para la construcción y representación de otras señales. Empezaremos con el caso discreto.

1.4.1 Las secuencias discretas impulso unitario y escalón unitario

Una de las señales discretas más simples es el *impulso unitario* (o *muestra unitaria*), la cual se define como

$$\delta[n] = \begin{cases} 0, & n \neq 0 \\ 1, & n = 0 \end{cases} \quad (1.63)$$

y está representada en la figura 1.28. En adelante, a todo lo largo del libro nos referiremos a $\delta[n]$ indistintamente como *impulso unitario* o *muestra unitaria*.

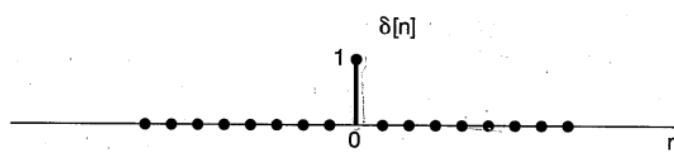


Figura 1.28 Impulso unitario discreto (muestra).

Una segunda señal discreta básica es el escalón unitario discreto, señalada como $u[n]$ y definida por

$$u[n] = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases} \quad (1.64)$$

La secuencia escalón unitario se muestra en la figura 1.29.

Sección 1.4 Las funciones impulso unitario y escalón unitario

31

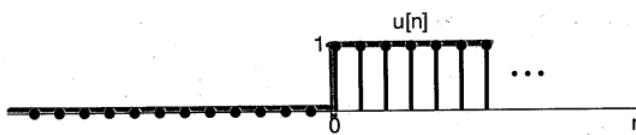


Figura 1.29 Secuencia escalón unitario discreto.

Existe una relación muy cercana entre el impulso unitario y el escalón unitario discreto. De manera particular, el impulso unitario discreto es la *primera diferencia* del escalón discreto

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1]. \quad (1.65)$$

Y a la inversa, el escalón unitario discreto es la sumatoria de la muestra unitaria. Esto es,

$$u[n] = \sum_{m=-\infty}^n \delta[m], \quad (1.66)$$

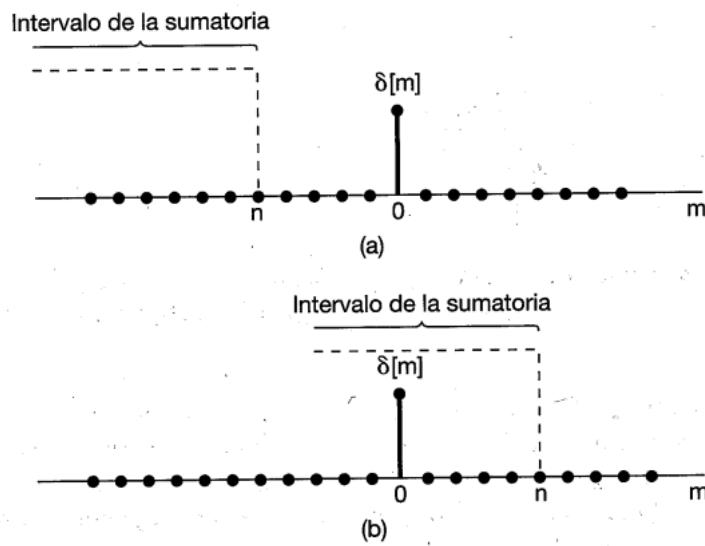


Figura 1.30 Suma consecutiva de la ecuación (1.66): (a) $n < 0$; (b) $n > 0$.

$$u[n] = \sum_{k=-\infty}^0 \delta[n - k],$$

o de manera equivalente,

$$u[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n - k].$$

1.4.2 Las funciones continuas escalón unitario e impulso unitario

La función *escalón unitario* $u(t)$ continua se define de manera similar a su contraparte discreta. Específicamente

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}, \quad (1.70)$$

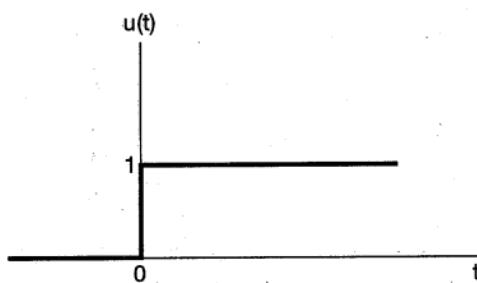


Figura 1.32 Función escalón unitario continuo.

escalón unitario. En particular, el escalón unitario continuo es la *integral continua* del impulso unitario

$$u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau. \quad (1.71)$$

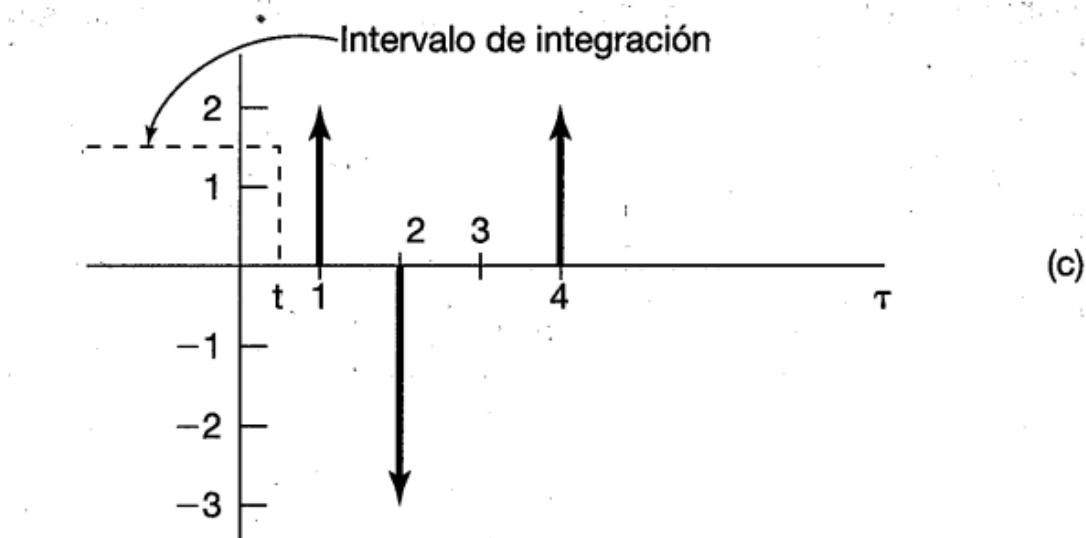
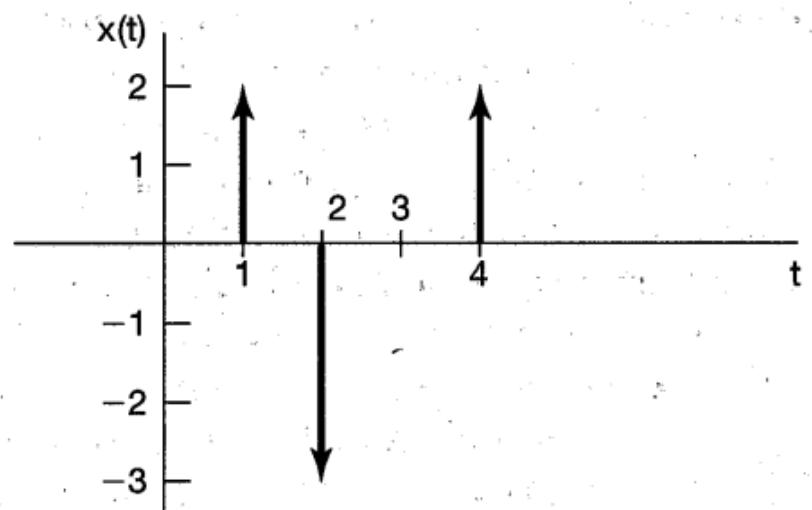
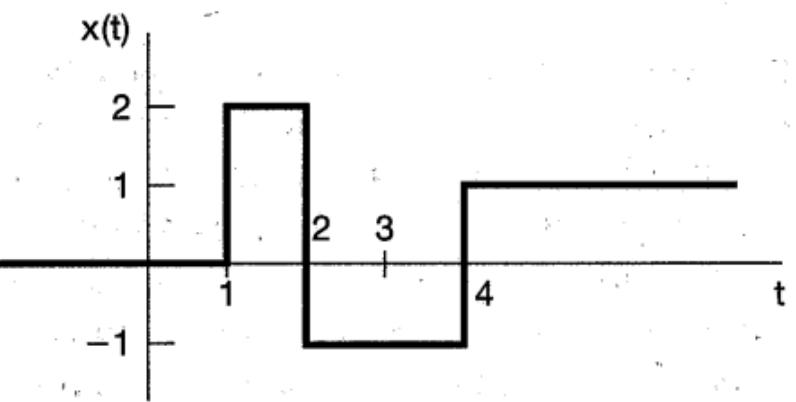
Lo anterior también sugiere una relación entre $\delta(t)$ y $u(t)$ análoga a la expresión para $\delta[n]$ en la ecuación (1.65). En particular, a partir de la ecuación (1.71) vemos que el impulso unitario continuo puede obtenerse de la *primera derivada* del escalón unitario continuo:

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}. \quad (1.72)$$

Esto todavía no va _____

Ejemplo 1.7

Considere la señal discontinua $x(t)$ representada en la figura 1.40(a). Debido a la relación que existe entre el impulso unitario y el escalón unitario continuo, se puede calcular y graficar fácilmente la derivada de esta señal. Específicamente, la derivada de $x(t)$ resulta ser claramente 0, excepto cuando se presentan discontinuidades. En el caso del escalón unitario, hemos visto [ecuación-(1.72)] que la diferenciación da lugar a un impulso unitario localizado en el punto de discontinuidad. Además, al multiplicar ambos miembros de la ecuación (1.72) por cualquier número k , vemos que la derivada de un escalón unitario con una discontinuidad de tamaño k origina un impulso de área k en el punto de la discontinuidad. Esta regla también se cumple para cualquier otra señal con un salto discontinuo, como $x(t)$ en la figura 1.40(a). En consecuencia, podemos dibujar su derivada $\dot{x}(t)$, como en la figura 1.40(b), donde un impulso se coloca en cada discontinuidad de $x(t)$, con área igual al tamaño de la discontinuidad. Observe, por ejemplo, que la discontinuidad en $x(t)$ en $t = 2$ tiene un valor de -3 , de manera que un impulso escalado por -3 se localiza en $t = 2$ en la señal $\dot{x}(t)$.



Como una verificación de nuestro resultado, veamos cómo se recupera $x(t)$ a partir de $\dot{x}(t)$. De manera específica, ya que $x(t)$ y $\dot{x}(t)$ son cero para $t \leq 0$, sólo necesitamos verificar para $t > 0$,

$$x(t) = \int_0^t \dot{x}(\tau) d\tau. \quad (1.77)$$

Como se ilustra en la figura 1.40(c), para $t < 1$ la integral del lado derecho de la ecuación (1.77) es cero, ya que ninguno de los impulsos que constituyen a $\dot{x}(t)$ están dentro del intervalo de integración. Para $1 < t < 2$, el primer impulso (localizado en $t = 1$) es el único dentro del intervalo de integración, y entonces la integral en la ecuación (1.77) es igual a 2, el área de este impulso. Para $2 < t < 4$, los dos impulsos iniciales están dentro del intervalo de integración, y la integral acumula la suma de las dos áreas, esto es, $2 - 3 = -1$. Finalmente, para $t > 4$, los tres impulsos están dentro del intervalo de integración, de manera que la integral es igual a la suma de las tres áreas, es decir, $2 - 3 + 2 = +1$. El resultado es exactamente la señal $x(t)$ representada en la figura 1.40(a).

1.5 SISTEMAS CONTINUOS Y DISCRETOS

2.1 SISTEMAS LTI DISCRETOS: LA SUMA DE CONVOLUCIÓN

2.1.1 La representación de señales discretas en términos de los impulsos

La idea fundamental de visualizar cómo el impulso unitario discreto se puede usar para construir cualquier señal discreta consiste en pensar en una señal discreta como una secuencia de impulsos individuales. Para ver la forma en que esta idea intuitiva puede transformarse en una representación matemática, considere la señal $x[n]$ mostrada en la figura 2.1(a). En las partes restantes de esta figura hemos dibujado cinco secuencias de impulso unitario desplazadas en el tiempo y escaladas, donde el escalamiento de cada impulso es igual al valor de $x[n]$ en el instante particular en que ocurre la muestra unitaria. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} x[-1]\delta[n+1] &= \begin{cases} x[-1], & n = -1 \\ 0, & n \neq -1 \end{cases}, \\ x[0]\delta[n] &= \begin{cases} x[0], & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}, \\ x[1]\delta[n-1] &= \begin{cases} x[1], & n = 1 \\ 0, & n \neq 1 \end{cases}. \end{aligned}$$

Para cualquier valor de n , sólo uno de los términos del miembro derecho de la ecuación (2.1) es diferente de cero, y el escalamiento asociado con ese término es precisamente $x[n]$. Al escribir esta sumatoria en una forma más compacta, tenemos

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n - k]. \quad (2.2)$$

Esto corresponde a la representación de una secuencia arbitraria como una combinación lineal de impulsos unitarios desplazados $\delta[n - k]$, donde los pesos en esta combinación lineal son $x[k]$. Como un ejemplo, considere $x[n] = u[n]$, el escalón unitario. En este caso, puesto

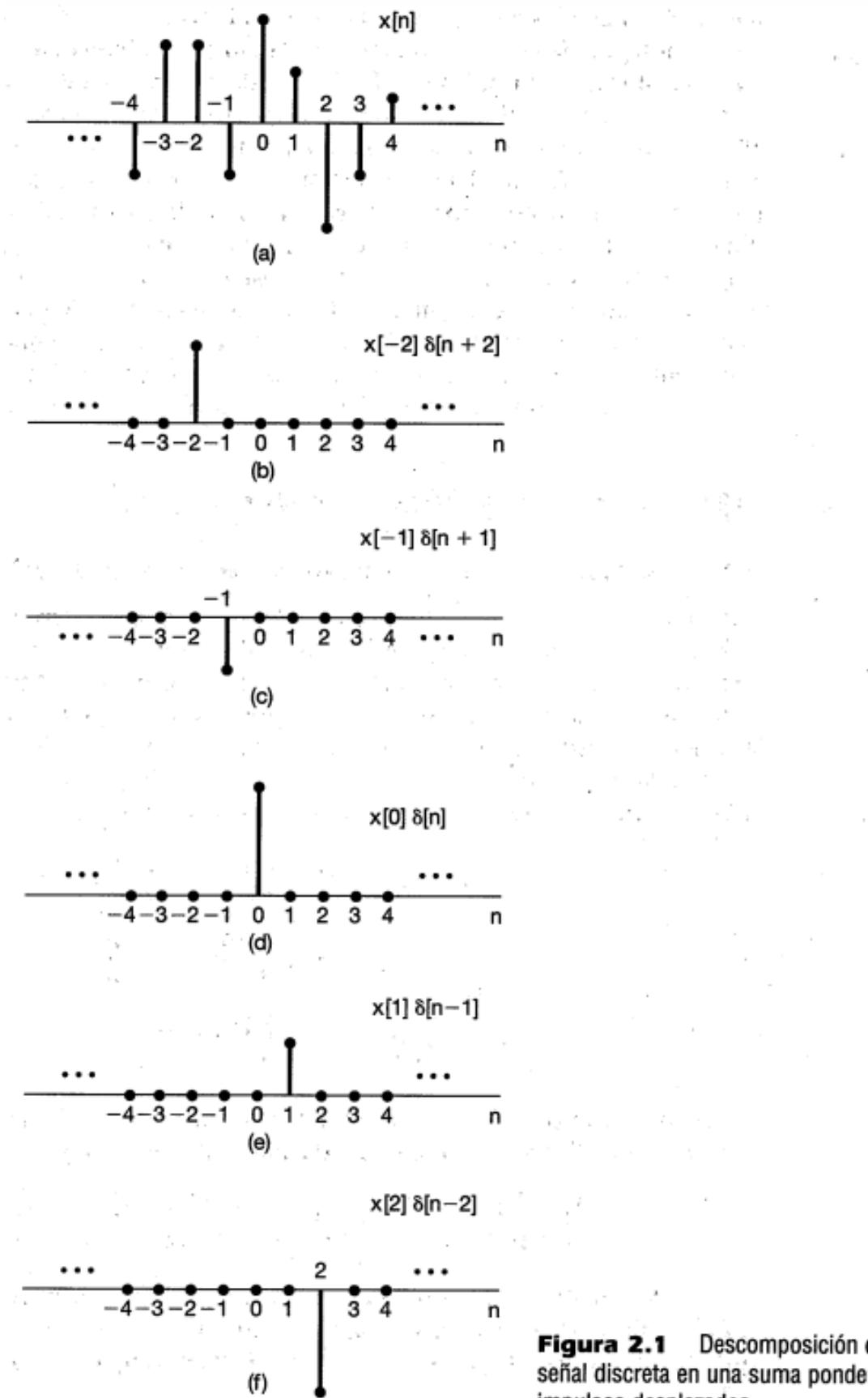


Figura 2.1 Descomposición de una señal discreta en una suma ponderada de impulsos desplazados.

que $u[k] = 0$ para $k < 0$ y $u[k] = 1$ para $k \geq 0$, la ecuación (2.2) se convierte en

$$u[n] = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta[n - k],$$

CONVOLUCION

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n - k]. \quad (2.6)$$

Este resultado se conoce como la *suma de convolución* o *suma de superposición*, y a la operación del miembro derecho de la ecuación (2.6) se le llama *convolución* de las secuencias $x[n]$ y $h[n]$. Representaremos la operación de convolución de manera simbólica como

$$y[n] = x[n] * h[n]. \quad (2.7)$$

Ejemplo 2.1

Considere un sistema LTI con respuesta al impulso $h[n]$ y entrada $x[n]$, como se ilustra en la figura 2.3(a). Para este caso, ya que sólo $x[0]$ y $x[1]$ son diferentes de cero, la ecuación (2.6) se simplifica hasta la expresión

$$y[n] = x[0]h[n - 0] + x[1]h[n - 1] = 0.5h[n] + 2h[n - 1]. \quad (2.8)$$

Las secuencias $0.5h[n]$ y $2h[n - 1]$ son los dos ecos de la respuesta al impulso necesarios para la superposición involucrada en la generación de $y[n]$. Estos ecos se presentan en la figura 2.3(b). Sumando los dos ecos para cada valor de n obtenemos $y[n]$, la cual se muestra en la figura 2.3(c).

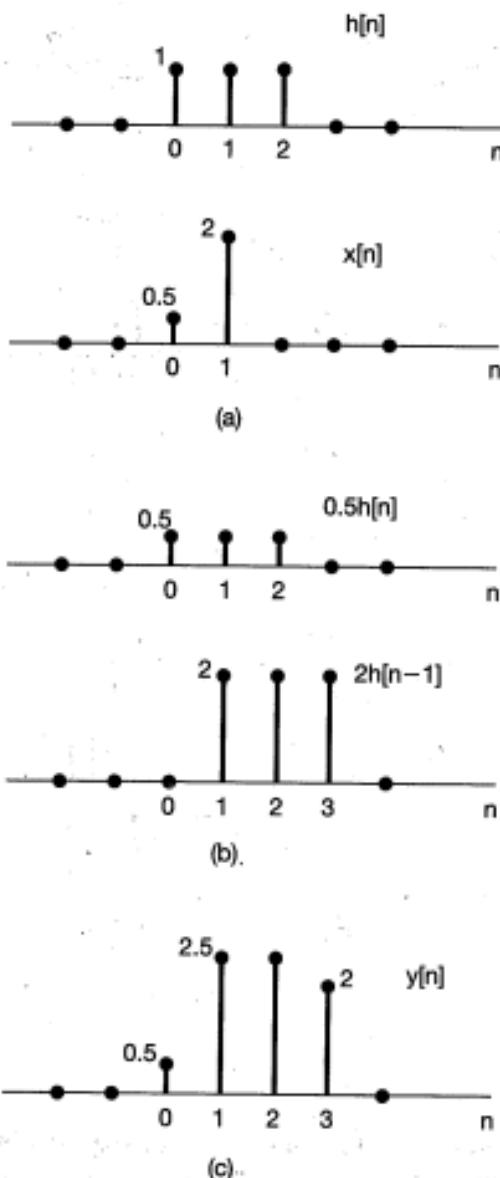


Figura 2.3: (a) La respuesta al impulso $h[n]$ de un sistema LTI y una entrada $x[n]$ al sistema; (b) las respuestas o "ecos" $0.5h[n]$ y $2h[n - 1]$, para los valores diferentes de cero de la entrada, esto es, $x[0] = 0.5$ y $x[1] = 2$; (c) la respuesta total $y[n]$, la cual es la suma de los ecos en (b).

2.2 SISTEMAS LTI CONTINUOS: LA INTEGRAL DE CONVOLUCIÓN

De manera análoga con los resultados deducidos y analizados en la sección anterior, el objetivo de esta sección es obtener una caracterización completa de un sistema LTI continuo en términos de su respuesta al impulso unitario. En el sistema discreto, la clave para nuestro desarrollo de la suma de convolución fue la propiedad de selección del impulso unitario discreto, esto es, representar matemáticamente de una señal como la superposición de funciones impulso unitario escaladas y desplazadas. Por tanto, de manera intuitiva podemos imaginar que estos sistemas discretos responden a una secuencia de impulsos individuales. En el caso continuo, de hecho, no tenemos una secuencia discreta de valores de entrada. No obstante, como analizamos en la sección 1.4.2, si pensamos en el impulso unitario como la idealización de un pulso el cual es tan corto que su duración no tiene consecuencias en un sistema físico real, podemos desarrollar una representación para señales continuas arbitrarias en términos de estos pulsos idealizados con una duración pequeña que tiende a desaparecer o, de forma equivalente, en términos de impulsos. Esta representación se desarrolla en la siguiente subsección, y después procederemos como en la sección 2.1 para desarrollar la representación de la integral de convolución para sistemas LTI continuos.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \delta(t - \tau) d\tau = x(t) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - \tau) d\tau = x(t).$$

Aunque esta deducción surge directamente de la sección 1.4.2, hemos incluido la deducción proporcionada en las ecuaciones (2.24)-(2.27) para comparar las similitudes con el caso discreto y, en particular, para enfatizar la interpretación de la ecuación (2.27) como la representación de la señal $x(t)$ en forma de "suma" (más precisamente una integral) de impulsos ponderados y desplazados.

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau. \quad (2.33)$$

La ecuación (2.33), conocida como la *integral de convolución* o la *integral de superposición*, es la contraparte continua de la suma de convolución de la ecuación (2.6) y corresponde a la representación de un sistema LTI continuo en términos de su respuesta a un impulso unitario. La convolución de dos señales $x(t)$ y $h(t)$ será representada simbólicamente como

$$\underline{y(t) = x(t) * h(t)}. \quad (2.34)$$

Ejemplo 2.6

Sea $x(t)$ la entrada a un sistema LTI con respuesta al impulso unitario $h(t)$, donde

$$x(t) = e^{-at}u(t), \quad a > 0$$

y

$$h(t) = u(t).$$

En la figura 2.17 hemos representado las funciones $h(\tau)$, $x(\tau)$ y $h(t - \tau)$ para un valor negativo y uno positivo de t . Gracias a la figura, vemos que para $t < 0$ el producto de $x(\tau)$ y $h(t - \tau)$ es cero, y en consecuencia, $y(t)$ es cero. Para $t > 0$,

$$x(\tau)h(t - \tau) = \begin{cases} e^{-a\tau}, & 0 < \tau < t \\ 0, & \text{para otro valor} \end{cases}$$

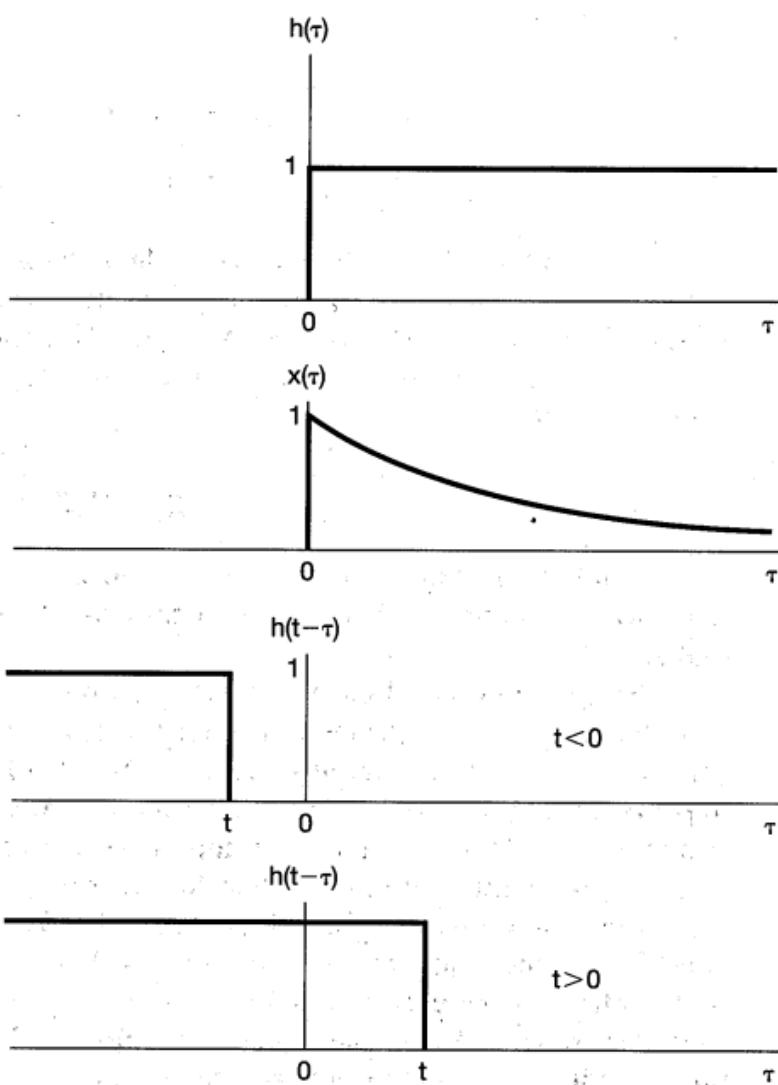


Figura 2.17 Cálculo de la integral de convolución para el ejemplo 2.6.

De esta expresión podemos calcular $y(t)$ para $t > 0$:

$$\begin{aligned}y(t) &= \int_0^t e^{-a\tau} d\tau = -\frac{1}{a}e^{-a\tau}\Big|_0^t \\&= \frac{1}{a}(1 - e^{-at}).\end{aligned}$$

Por consiguiente, para toda t , $y(t)$ es

$$y(t) = \frac{1}{a}(1 - e^{-at})u(t),$$

la cual se muestra en la figura 2.18.

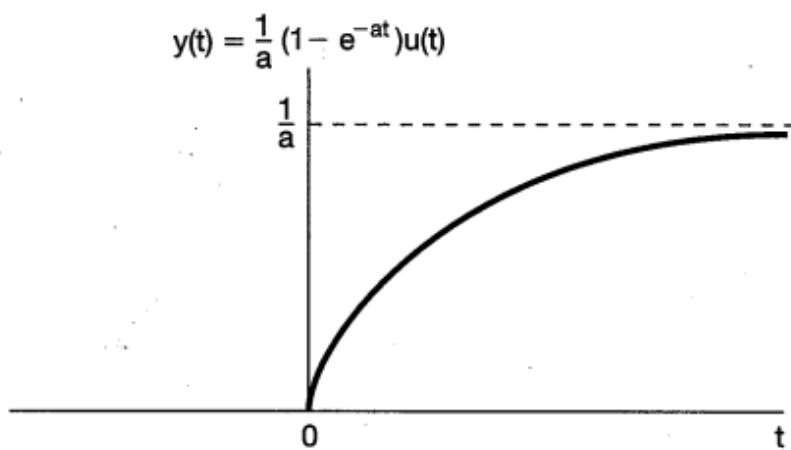


Figura 2.18 Respuesta del sistema en el ejemplo 2.6 con respuesta al impulso $h(t) = u(t)$ a la entrada $x(t) = e^{-at}u(t)$.

Ejemplo Convolucion

Ejemplo 2.7

Considere la convolución de las siguientes dos señales:

$$x(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < T \\ 0, & \text{para otro valor} \end{cases}$$

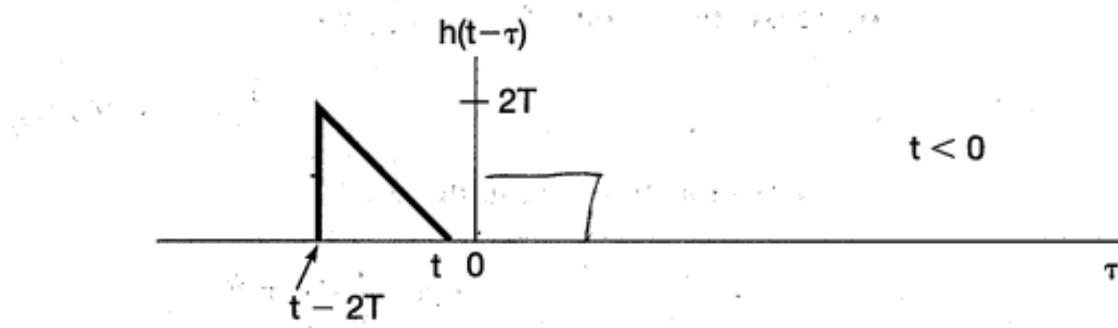
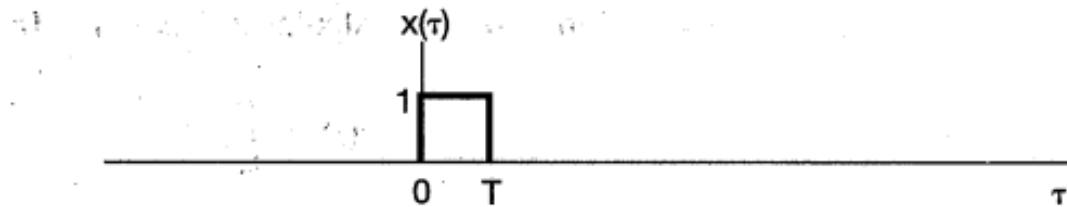
$$h(t) = \begin{cases} t, & 0 < t < 2T \\ 0, & \text{para otro valor} \end{cases}$$

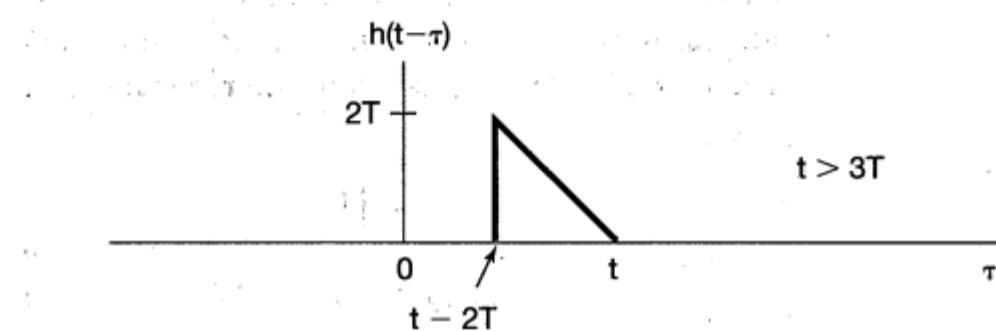
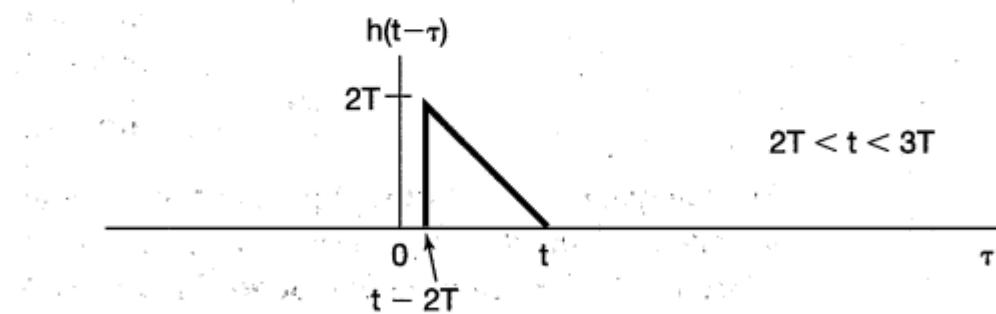
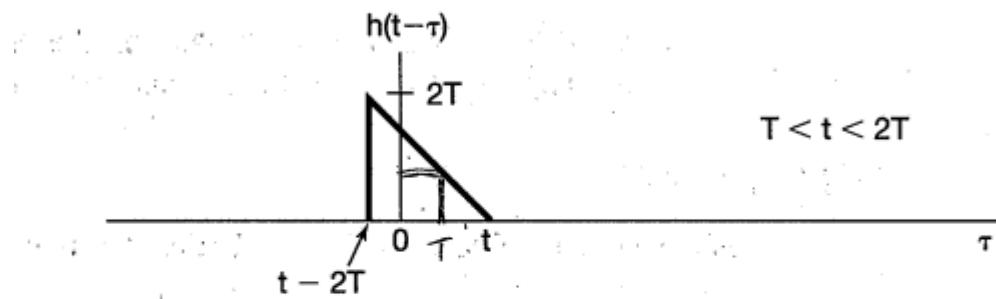
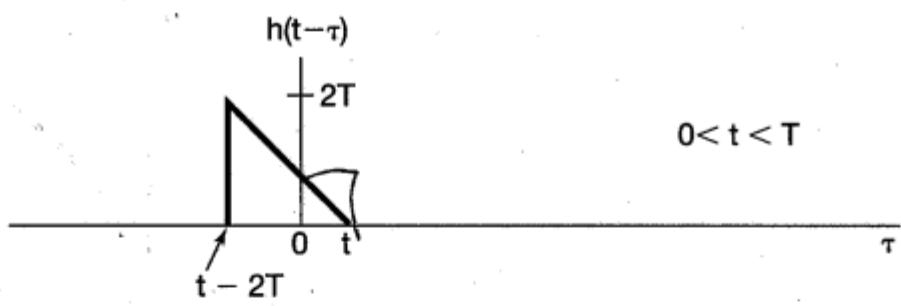
Al igual que en el ejemplo 2.4 para la convolución discreta, es conveniente considerar la evaluación de $y(t)$ en intervalos separados. En la figura 2.19 hemos dibujado $x(\tau)$ e ilustrado $h(t - \tau)$ en cada uno de los intervalos de interés. Para $t < 0$ y para $t > 3T$, $x(\tau)h(t - \tau) = 0$ para todos los valores de τ , y en consecuencia, $y(t) = 0$. Para los otros intervalos, el producto $x(\tau)h(t - \tau)$ es como se indica en la figura 2.20. Así, para estos tres intervalos, la integración puede realizarse de forma gráfica con el siguiente resultado:

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{1}{2}t^2, & 0 < t < T \\ Tt - \frac{1}{2}T^2, & T < t < 2T \\ -\frac{1}{2}t^2 + Tt + \frac{3}{2}T^2, & 2T < t < 3T \\ 0, & 3T < t \end{cases}$$

lo cual se muestra en la figura 2.21.

SISTEMAS LINEALES INVARIANTES EN EL TIEMPO





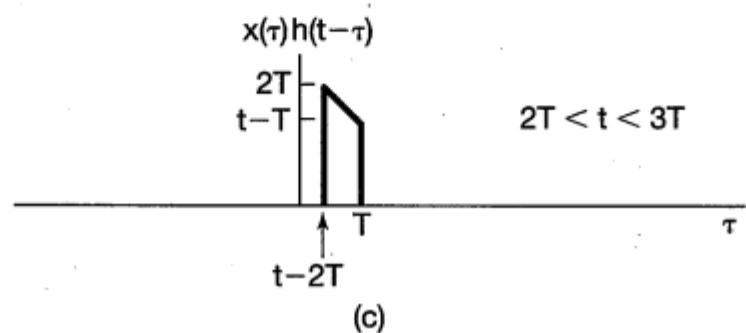
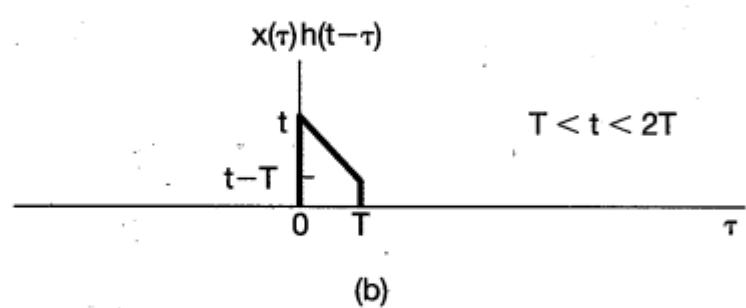
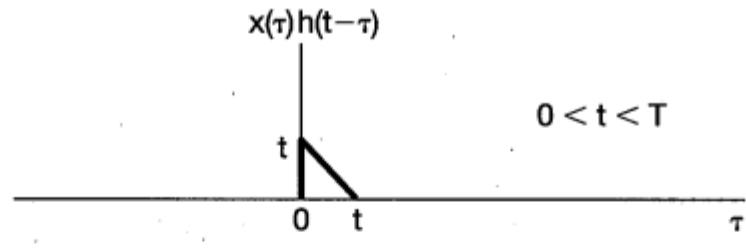


Figura 2.20 Producto $x(\tau)h(t - \tau)$ del ejemplo 2.7 para los tres intervalos de valores de t en los cuales el producto no es idéntico a cero. (Vea la figura 2.19.)

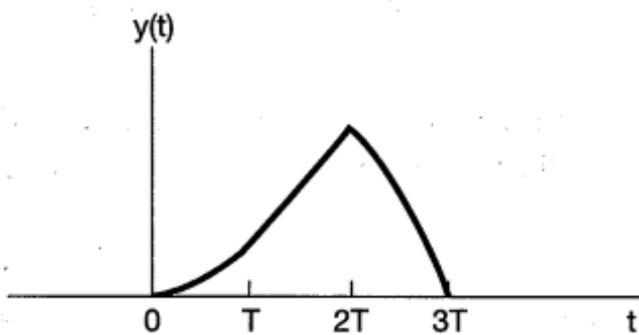


Figura 2.21 Señal $y(t) = x(t) * h(t)$ para el ejemplo 2.7.

unidad 2

parcial 3

Parcial 4