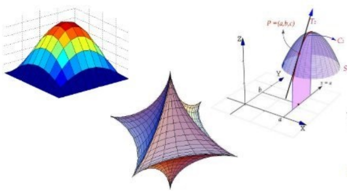
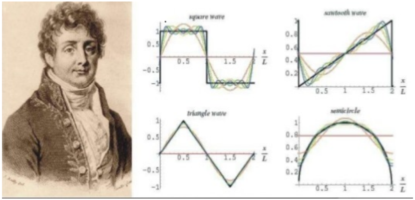
Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales y Series de Fourier

Unidad 2 (clase 3)

Prof. Carolina Cárdenas





Contenido de la Clase

1. Series de Fourier
   - Funciones de periodo 2π
   - Desarrollo en serie de Fourier

Funciones de periodo 2π

Definición

Si el periodo T de una función periódica $f(t)$ es 2π, entonces $w = 1$, y la serie de Fourier se expresa:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(nt) + b_n \operatorname{sen}(nt)\right] \tag{1}$$

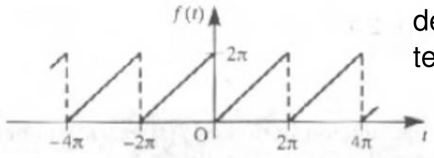
donde los coeficientes están dados por la fórmula de Euler

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_d^{d+2\pi} f(t)dt\,, \quad a_n = \frac{2}{T}\int_d^{d+2\pi} f(t)\cos(nt)\,dt \tag{2}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_d^{d+2\pi} f(t)\operatorname{sen}(nt)\,dt \tag{3}$$

para $n = 1, 2, \cdots$,

EJEMPLO Obtener el desarrollo en serie de Fourier de la siguiente función periódica.



Onda diente de sierra

$$f(t) = t\,,\; f(t+2\pi) = f(t).$$

Solución: Usando las ecuaciones de los coeficientes de Fourier, tenemos que:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T}\int_d^{d+T} f(t)dt \\ &= \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)dt = 2\pi \end{aligned}$$

Para $n = 1, 2, \cdots ,$, tenemos:

$$a_n = \frac{2}{T}\int_d^{d+T} f(t)\cos(nwt)dt \;\Rightarrow\; a_n = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos\left(n\frac{2\pi}{2\pi}t\right)dt$$

sustituyendo $f(t)$ y usando integración por partes, tenemos

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} t\cos nt\,dt = \frac{1}{\pi}\left[\frac{t\,\mathrm{sen}\,nt}{n} + \frac{\cos nt}{n^2}\Big|_0^{2\pi}\right] \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{2\pi}{n}\mathrm{sen}\,2n\pi + \frac{1}{n^2}\cos 2n\pi - \frac{\cos 0}{n^2}\right] = 0 \end{aligned}$$

ya que $\mathrm{sen}\,2n\pi = 0$ y $\cos 2n\pi = \cos 0 = 1$. Observe, en este caso la necesidad de resolver a_0 por separado, ya que para $n = 0$ el término a_n anterior no está definido. Ahora calculemos b_n, similarmente

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T}\int_d^{d+T} f(t)sen\,(nwt)\,dt = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{sen}\left(n\frac{2\pi}{2\pi}t\right)dt \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} t\,\mathrm{sen}\,(nt)\,dt \end{aligned}$$

integrando por partes resulta

$$
\begin{aligned}
b_n &= = \frac{1}{\pi}\Big[-\frac{t}{n}\cos nt + \frac{\operatorname{sen} nt}{n}\Big]\Big|_0^{2\pi} \\
&= \frac{1}{\pi}\Big[-\frac{2\pi}{n}\cos 2n\pi\Big] \\
&= -\frac{2}{n}, \quad (\cos 2n\pi = 1).
\end{aligned}
$$

Así $f(t)$ se representa como una serie de Fourier como:

$$f(t) = \frac{2\pi}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} \operatorname{sen} nt$$

o, en forma explicita

$$f(t) = \pi - 2\Big(\operatorname{sen} t + \frac{sen2t}{2} + \frac{sen3t}{3} + \cdots + \frac{sennt}{n} + \cdots \Big).$$

Donde la serie de Fourier de $f(t)$ converge a $f(t)$?.
A donde converge la serie de Fourier de $f(t)$ en las discontinuidades de $f(t)$?.

Verificadas las condiciones de Dirichlet, note que $t = 0$ es un punto de discontinuidad de f, entonces la serie de Fourier converge a $\dfrac{f(0^+) + f(0^-)}{2}$ donde:

$f(0^+) = \lim\limits_{t \to 0^+} f(t) = 0$

$f(0^-) = \lim\limits_{t \to 0^-} f(t) = 2\pi$

así la serie en $t = 0$ converge a

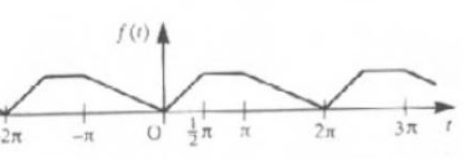
$$\frac{f(0^+) + f(0^-)}{2} = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

En general, $f(t)$ es discontinua en $t = 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, la serie de Fourier de $f(t)$ en estos puntos converge a $\dfrac{f(0^+) + f(0^-)}{2} = \pi$

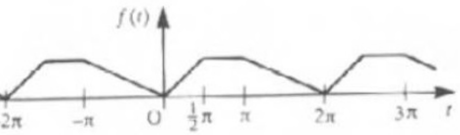
Luego, en los puntos donde $f(t)$ es continua, esto es $t \in \mathbb{R} - \{t : \ t = 2n\pi, \ n \in \mathbb{Z}\}$, la serie converge a $f(t)$.

$$f(t) = \frac{2\pi}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} \operatorname{sen} nt$$

EJEMPLO Dada la función periódica $f(t)$ de la figura 1, encuentre el desarrollo en serie de Fourier de $f(t)$ y estudie la convergencia.



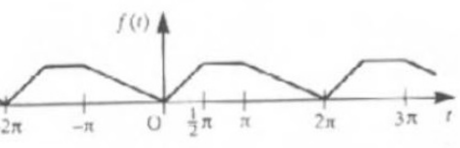
EJEMPLO Dada la función periódica $f(t)$ de la figura 1, encuentre el desarrollo en serie de Fourier de $f(t)$ y estudie la convergencia.



$$f(t) = \begin{cases} t & 0 \le t \le \frac{1}{2}\pi \\ \frac{1}{2}\pi & \frac{1}{2}\pi \le t \le \pi \\ \pi - \frac{1}{2}t & \pi \le t \le 2\pi \end{cases}$$

$$f(t + 2\pi) = f(t).$$

EJEMPLO Dada la función periódica $f(t)$ de la figura 1, encuentre el desarrollo en serie de Fourier de $f(t)$ y estudie la convergencia.



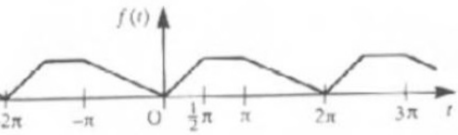
Solución: Usando las ecuaciones de los coeficientes de Fourier tenemos:

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_d^{d+T} f(t)dt$$

$$f(t) = \begin{cases} t & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}\pi \\ \frac{1}{2}\pi & \frac{1}{2}\pi \leq t \leq \pi \\ \pi - \frac{1}{2}t & \pi \leq t \leq 2\pi \end{cases}$$

$$f(t+2\pi) = f(t)\,.$$

EJEMPLO Dada la función periódica $f(t)$ de la figura 1, encuentre el desarrollo en serie de Fourier de $f(t)$ y estudie la convergencia.



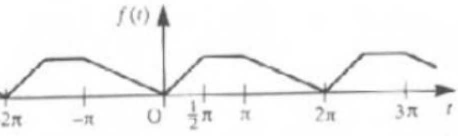
$$f(t) = \begin{cases} t & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}\pi \\ \frac{1}{2}\pi & \frac{1}{2}\pi \leq t \leq \pi \\ \pi - \frac{1}{2}t & \pi \leq t \leq 2\pi \end{cases}$$

$$f(t + 2\pi) = f(t).$$

Solución: Usando las ecuaciones de los coeficientes de Fourier tenemos:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T}\int_d^{d+T} f(t)dt \\ &= \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)dt \end{aligned}$$

EJEMPLO Dada la función periódica $f(t)$ de la figura 1, encuentre el desarrollo en serie de Fourier de $f(t)$ y estudie la convergencia.



$$f(t) = \begin{cases} t & 0 \le t \le \frac{1}{2}\pi \\ \frac{1}{2}\pi & \frac{1}{2}\pi \le t \le \pi \\ \pi - \frac{1}{2}t & \pi \le t \le 2\pi \end{cases}$$

$$f(t+2\pi) = f(t).$$

Solución: Usando las ecuaciones de los coeficientes de Fourier tenemos:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T}\int_d^{d+T} f(t)dt \\ &= \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)dt \\ &= \frac{1}{\pi}\Big[\int_0^{\frac{\pi}{2}} tdt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{2}\pi dt \\ &+ \int_\pi^{2\pi} \Big(\pi - \frac{1}{2}tdt\Big)dt\Big] = \frac{5}{8}\pi. \end{aligned}$$

Para $n = 1, 2, \cdots,$, tenemos:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{d}^{d+T} f(t) \cos(nwt) dt \;\Rightarrow$$

Para $n = 1, 2, \cdots$,, tenemos:

$$a_n = \frac{2}{T}\int_d^{d+T} f(t)\cos(nwt)dt \;\Rightarrow\; a_n = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos\left(n\frac{2\pi}{2\pi}t\right)dt$$

Para $n = 1, 2, \cdots$,, tenemos:

$$a_n = \frac{2}{T}\int_d^{d+T} f(t)\cos(nwt)dt \;\Rightarrow\; a_n = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos\left(n\frac{2\pi}{2\pi}t\right)dt$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos nt\,dt$$

Para $n = 1, 2, \cdots ,$, tenemos:

$$a_n = \frac{2}{T}\int_d^{d+T} f(t)\cos(nwt)dt \;\Rightarrow\; a_n = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos\left(n\frac{2\pi}{2\pi}t\right)dt$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos nt\,dt \\ &= \frac{1}{\pi}\Big[\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos nt\,dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{2}\pi\cos nt\,dt + \int_{\pi}^{2\pi}\left(\pi - \frac{1}{2}t\right)\cos nt\,dt\Big] \end{aligned}$$

Para $n = 1, 2, \cdots$,, tenemos:

$$a_n = \frac{2}{T}\int_d^{d+T} f(t)\cos(nwt)dt \;\Rightarrow\; a_n = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos\left(n\frac{2\pi}{2\pi}t\right)dt$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos nt\, dt \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos nt\, dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{2}\pi\cos nt\, dt + \int_{\pi}^{2\pi}\left(\pi - \frac{1}{2}t\right)\cos nt\, dt\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{t}{n}\operatorname{sen} nt + \frac{\cos nt}{n^2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[\frac{\pi}{2n}\operatorname{sen} nt\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + \left[\frac{2\pi - t}{2}\frac{\operatorname{sen} nt}{n} - \frac{\cos nt}{2n^2}\right]_{\pi}^{2\pi} \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{2n}\operatorname{sen}\frac{1}{2}n\pi + \frac{1}{n^2}\cos\frac{1}{2}n\pi - \frac{1}{n^2}\right] - \frac{\pi}{2n}\operatorname{sen}\frac{1}{2}n\pi - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{2n^2}\cos n\pi
\end{aligned}$$

Para $n = 1, 2, \cdots$,, tenemos:

$$a_n = \frac{2}{T}\int_d^{d+T} f(t)\cos(nwt)dt \;\Rightarrow\; a_n = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos\left(n\frac{2\pi}{2\pi}t\right)dt$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos nt\,dt \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos nt\,dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{1}{2}\pi\cos nt\,dt + \int_{\pi}^{2\pi}\left(\pi - \frac{1}{2}t\right)\cos nt\,dt\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{t}{n}\operatorname{sen} nt + \frac{\cos nt}{n^2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[\frac{\pi}{2n}\operatorname{sen} nt\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + \left[\frac{2\pi - t}{2}\frac{\operatorname{sen} nt}{n} - \frac{\cos nt}{2n^2}\right]_{\pi}^{2\pi} \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{2n}\operatorname{sen}\frac{1}{2}n\pi + \frac{1}{n^2}\cos\frac{1}{2}n\pi - \frac{1}{n^2}\right] - \frac{\pi}{2n}\operatorname{sen}\frac{1}{2}n\pi - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{2n^2}\cos n\pi \\
&= \frac{1}{2\pi n^2}\left(2\cos\frac{1}{2}n\pi - 3 + \cos n\pi\right)
\end{aligned}$$

Para $n = 1, 2, \cdots$,, tenemos:

$$a_n = \frac{2}{T}\int_d^{d+T} f(t)\cos(nwt)dt \;\Rightarrow\; a_n = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos\left(n\frac{2\pi}{2\pi}t\right)dt$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos nt\,dt \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos nt\,dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{1}{2}\pi\cos nt\,dt + \int_{\pi}^{2\pi}\left(\pi - \frac{1}{2}t\right)\cos nt\,dt\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{t}{n}\operatorname{sen} nt + \frac{\cos nt}{n^2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[\frac{\pi}{2n}\operatorname{sen} nt\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + \left[\frac{2\pi - t}{2}\frac{\operatorname{sen} nt}{n} - \frac{\cos nt}{2n^2}\right]_{\pi}^{2\pi} \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{2n}\operatorname{sen}\frac{1}{2}n\pi + \frac{1}{n^2}\cos\frac{1}{2}n\pi - \frac{1}{n^2}\right] - \frac{\pi}{2n}\operatorname{sen}\frac{1}{2}n\pi - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{2n^2}\cos n\pi \\
&= \frac{1}{2\pi n^2}\left(2\cos\frac{1}{2}n\pi - 3 + \cos n\pi\right)
\end{aligned}$$

Note que para $n = 2k(par)$, con $k = 1, 2, \cdots$, tenemos que
$\cos\frac{1}{2}n\pi = \cos\frac{1}{2}2k\pi = \cos k\pi = (-1)^k$, con $k = 1, 2, \cdots$.

Así que $\cos \frac{1}{2} n\pi = (-1)^{\frac{n}{2}}$, $k = \frac{n}{2}$.

Así que $\cos\frac{1}{2}n\pi = (-1)^{\frac{n}{2}},\ k = \frac{n}{2}$.
Ahora si $n = 2k+1 (impar)$, con $k = 1, 2, \cdots$, tenemos que

$$\cos\frac{1}{2}n\pi = \cos\frac{1}{2}(2k+1)\pi = 0$$

con $k = 1, 2, \cdots$, y $\cos n\pi = \cos(2k+1)\pi = -1$, con $k = 1, 2, \cdots$.

Así que $\cos \frac{1}{2}n\pi = (-1)^{\frac{n}{2}}$, $k = \frac{n}{2}$.
Ahora si $n = 2k + 1$ (*impar*), con $k = 1, 2, \cdots$, tenemos que

$$\cos \frac{1}{2}n\pi = \cos \frac{1}{2}(2k+1)\pi = 0$$

con $k = 1, 2, \cdots$, y $\cos n\pi = \cos(2k+1)\pi = -1$, con $k = 1, 2, \cdots$.
Luego,

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n^2\pi}[(-1)^{\frac{n}{2}} - 1] & (n \text{ par}) \\ -\frac{2}{n^2\pi} & (n \text{ impar}) \end{cases}$$

Así que $\cos\frac{1}{2}n\pi = (-1)^{\frac{n}{2}}$, $k = \frac{n}{2}$.
Ahora si $n = 2k+1(impar)$, con $k = 1, 2, \cdots$, tenemos que

$$\cos\frac{1}{2}n\pi = \cos\frac{1}{2}(2k+1)\pi = 0$$

con $k = 1, 2, \cdots$, y $\cos n\pi = \cos(2k+1)\pi = -1$, con $k = 1, 2, \cdots$.
Luego,

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n^2\pi}[(-1)^{\frac{n}{2}} - 1] & (n \text{ par}) \\ -\frac{2}{n^2\pi} & (n \text{ impar}) \end{cases}$$

Ahora calculemos b_n, similarmente

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T}\int_d^{d+T} f(t) sen\,(nwt)\, dt = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{sen}\left(n\frac{2\pi}{2\pi}t\right) dt \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{sen}\,(nt)\, dt \end{aligned}$$

Así que $\cos \frac{1}{2}n\pi = (-1)^{\frac{n}{2}}$, $k = \frac{n}{2}$.
Ahora si $n = 2k + 1 (impar)$, con $k = 1, 2, \cdots$, tenemos que

$$\cos \frac{1}{2}n\pi = \cos \frac{1}{2}(2k+1)\pi = 0$$

con $k = 1, 2, \cdots$, y $\cos n\pi = \cos(2k+1)\pi = -1$, con $k = 1, 2, \cdots$.
Luego,

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n^2\pi}[(-1)^{\frac{n}{2}} - 1] & (n \text{ par}) \\ -\frac{2}{n^2\pi} & (n \text{ impar}) \end{cases}$$

Ahora calculemos b_n, similarmente

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T}\int_d^{d+T} f(t) sen\,(nwt)\,dt = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,\text{sen}\left(n\frac{2\pi}{2\pi}t\right)dt \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,\text{sen}\,(nt)\,dt \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\,\text{sen}\,nt\,dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{2}\pi\,\text{sen}\,nt\,dt + \int_{\pi}^{2\pi} \left[\pi - \frac{1}{2}t\right] \text{sen}\,nt\,dt\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\Big(\Big[-\frac{t}{n}\cos nt+\frac{1}{n^2}\operatorname{sen} nt\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}+\Big[-\frac{\pi}{2n}\cos nt\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \\ &\quad +\Big[\frac{t-2\pi}{2n}\cos nt-\frac{1}{2n^2}\operatorname{sen} nt\Big]_{\pi}^{2\pi}\Big) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\left(\left[-\frac{t}{n}\cos nt+\frac{1}{n^2}\operatorname{sen} nt\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\left[-\frac{\pi}{2n}\cos nt\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right. \\
&\left.+\left[\frac{t-2\pi}{2n}\cos nt-\frac{1}{2n^2}\operatorname{sen} nt\right]_{\pi}^{2\pi}\right) \\
&= \frac{1}{\pi}-\frac{\pi}{2n}\cos\frac{1}{2}n\pi+\frac{1}{n^2}\operatorname{sen}\frac{1}{2}n\pi-\frac{\pi}{2n}\cos n\pi+\frac{\pi}{2n}\cos\frac{1}{2}n\pi+\frac{\pi}{2n}\cos n\pi \\
&= \frac{1}{\pi n^2}\operatorname{sen}\frac{1}{2}n\pi
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\Bigg(\Big[-\frac{t}{n}\cos nt+\frac{1}{n^2}\operatorname{sen} nt\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}+\Big[-\frac{\pi}{2n}\cos nt\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \\
&\quad +\Big[\frac{t-2\pi}{2n}\cos nt-\frac{1}{2n^2}\operatorname{sen} nt\Big]_{\pi}^{2\pi}\Bigg) \\
&= \frac{1}{\pi}-\frac{\pi}{2n}\cos\frac{1}{2}n\pi+\frac{1}{n^2}\operatorname{sen}\frac{1}{2}n\pi-\frac{\pi}{2n}\cos n\pi+\frac{\pi}{2n}\cos\frac{1}{2}n\pi+\frac{\pi}{2n}\cos n\pi \\
&= \frac{1}{\pi n^2}\operatorname{sen}\frac{1}{2}n\pi
\end{aligned}
$$

Note que para $n = 2k(par)$, con $k = 1, 2, \cdots$, tenemos que $\operatorname{sen}\frac{1}{2}n\pi = \operatorname{sen}\frac{1}{2}2k\pi = \operatorname{sen} k\pi = 0$, para $k = 1, 2, \cdots$. Ahora si $n = 2k + 1(impar)$, con $k = 1, 2, \cdots$, tenemos que

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\left(\left[-\frac{t}{n}\cos nt+\frac{1}{n^2}\,\text{sen}\, nt\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\left[-\frac{\pi}{2n}\cos nt\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right. \\
&\quad \left.+\left[\frac{t-2\pi}{2n}\cos nt-\frac{1}{2n^2}\,\text{sen}\, nt\right]_{\pi}^{2\pi}\right) \\
&= \frac{1}{\pi}-\frac{\pi}{2n}\cos\frac{1}{2}n\pi+\frac{1}{n^2}\,\text{sen}\,\frac{1}{2}n\pi-\frac{\pi}{2n}\cos n\pi+\frac{\pi}{2n}\cos\frac{1}{2}n\pi+\frac{\pi}{2n}\cos n\pi \\
&= \frac{1}{\pi n^2}\,\text{sen}\,\frac{1}{2}n\pi
\end{aligned}
$$

Note que para $n=2k(par)$, con $k=1,2,\cdots$, tenemos que $\text{sen}\,\frac{1}{2}n\pi=\text{sen}\,\frac{1}{2}2k\pi=\text{sen}\,k\pi=0$, para $k=1,2,\cdots$. Ahora si $n=2k+1(impar)$, con $k=1,2,\cdots$, tenemos que

$$\text{sen}\,\frac{1}{2}n\pi=\text{sen}\,\frac{1}{2}(2k+1)\pi=\text{sen}(k\pi+\frac{\pi}{2})=\cos k\pi=(-1)^k$$

con $k=1,2,\cdots$, $\left(n=2k+1\Rightarrow k=\frac{n-1}{2}\right)$.

Luego,

$$b_n = \begin{cases} 0 & (n \text{ par}) \\ \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^2\pi} & (n \text{ impar}) \end{cases}$$

Luego,

$$b_n = \begin{cases} 0 & (n \text{ par}) \\ \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^2\pi} & (n \text{ impar}) \end{cases}$$

Ahora la expansión en serie de Fourier de $f(t)$ es:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nt) + b_n \operatorname{sen}(nt)]$$

Luego,

$$b_n = \begin{cases} 0 & (n \text{ par}) \\ \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^2\pi} & (n \text{ impar}) \end{cases}$$

Ahora la expansión en serie de Fourier de $f(t)$ es:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nt) + b_n \operatorname{sen}(nt)] \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n\ par} a_n \cos nt + \sum_{n\ impar} a_n \cos nt + \sum_{n\ par} b_n \operatorname{sen} nt + \sum_{n\ impar} b_n \operatorname{sen} nt \end{aligned}$$

Luego,

$$b_n = \begin{cases} 0 & (n \text{ par}) \\ \dfrac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^2\pi} & (n \text{ impar}) \end{cases}$$

Ahora la expansión en serie de Fourier de $f(t)$ es:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nt) + b_n \operatorname{sen}(nt)] \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n\ par} a_n \cos nt + \sum_{n\ impar} a_n \cos nt + \sum_{n\ par} b_n \operatorname{sen} nt + \sum_{n\ impar} b_n \operatorname{sen} nt \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n\ par} a_n \cos nt + \sum_{n\ impar} a_n \cos nt + \sum_{n\ impar} b_n \operatorname{sen} nt \end{aligned}$$

Luego,

$$b_n = \begin{cases} 0 & (n \text{ par}) \\ \dfrac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^2\pi} & (n \text{ impar}) \end{cases}$$

Ahora la expansión en serie de Fourier de $f(t)$ es:

$$\begin{aligned}
f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nt) + b_n \operatorname{sen}(nt)] \\
&= \frac{a_0}{2} + \sum_{n \text{ par}} a_n \cos nt + \sum_{n \text{ impar}} a_n \cos nt + \sum_{n \text{ par}} b_n \operatorname{sen} nt + \sum_{n \text{ impar}} b_n \operatorname{sen} nt \\
&= \frac{a_0}{2} + \sum_{n \text{ par}} a_n \cos nt + \sum_{n \text{ impar}} a_n \cos nt + \sum_{n \text{ impar}} b_n \operatorname{sen} nt \\
&= \frac{a_0}{2} + \sum_{n \text{ par}} \frac{1}{n^2\pi}[(-1)^{\frac{n}{2}} - 1] \cos nt + \sum_{n \text{ impar}} \frac{-2}{n^2\pi} \cos nt + \sum_{n \text{ impar}} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^2\pi} \operatorname{sen} nt
\end{aligned}$$

Luego,

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n\ par} \frac{1}{n^2\pi}\left[(-1)^{\frac{n}{2}} - 1\right]\cos nt + \sum_{n\ impar} \frac{-2}{n^2\pi}\cos nt + \sum_{n\ impar} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^2\pi}\operatorname{sen} nt$$

Luego,

$$
\begin{aligned}
f(t) = {} & \frac{a_0}{2} + \sum_{n\ par} \frac{1}{n^2\pi}\left[(-1)^{\frac{n}{2}} - 1\right]\cos nt + \sum_{n\ impar} \frac{-2}{n^2\pi}\cos nt + \sum_{n\ impar} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^2\pi}\,\mathrm{sen}\, nt \\
= {} & \frac{5}{16}\pi - \frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos 2t}{2^2} + \frac{\cos 6t}{6^2} + \frac{\cos 10t}{10^2} + \cdots\right) \\
- {} & \frac{2}{\pi}\left(\cos t - \frac{\cos 3t}{3^2} + \frac{\cos 3t}{3^2} + \cdots\right) \\
+ {} & \frac{1}{\pi}\,\mathrm{sen}\, t - \frac{\mathrm{sen}\, 3t}{3^2} + \frac{\mathrm{sen}\, 5t}{5^2} - \frac{\mathrm{sen}\, 7t}{7^2} + \cdots
\end{aligned}
$$

EJERCICIO: Expresar el resultado en términos de k.