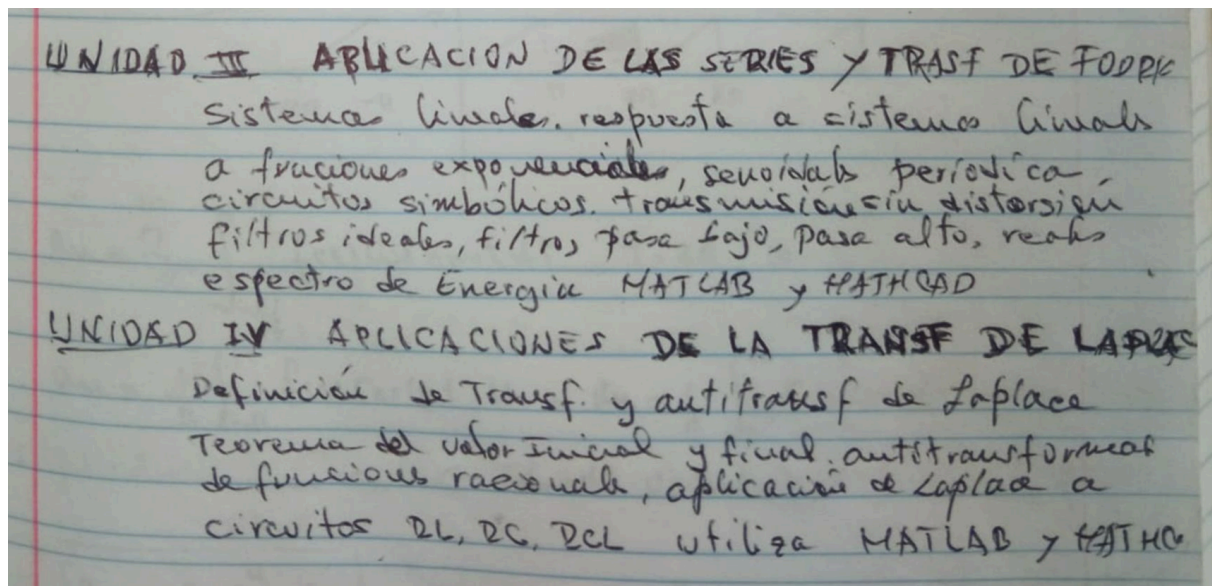


parcial 2



En este parcial trataremos con las aplicaciones de las series de fourier y transformada de fourier aplicada a las respuesta en frecuencia, esto aprovechandonos de las propiedades que tienen los sistemas lineales para así poder hacer uso de las tablas de propiedades. Por otro lado trabajaremos con los filtros, los cuales permiten dejar pasar o eliminar una cantidad de informacion de una señal de entrada, a determinadas frecuencias, existen filtros pasabajos, pasa alta y pasa banda, existen otros pero no nos vamos a meter con ellos.

3.8 Serie de Fourier y sistemas LTI 226

3.9 Filtrado 231

3.9.1 Filtros conformadores de frecuencia 232

3.9.2 Filtros selectivos en frecuencia 236

3.10 Ejemplos de filtros continuos descritos mediante ecuaciones diferenciales 239

3.10.1 Un filtro paso bajas RC sencillo 239

3.10.2 Un filtro paso altas RC sencillo 241

3.11 Ejemplos de filtros discretos descritos mediante ecuaciones de diferencias 244

3.11.1 Filtros recursivos discretos de primer orden 244

3.11.2 Filtros no recursivos discretos 245

3.9 FILTRADO

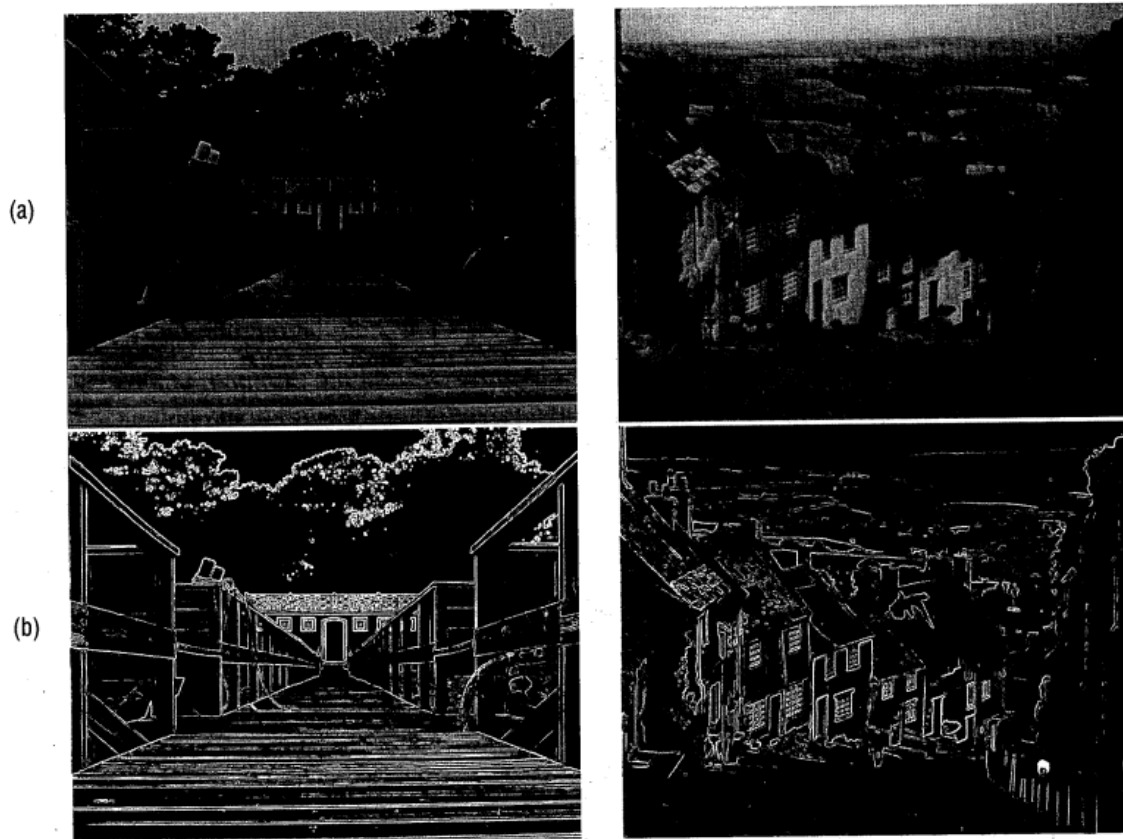


Figura 3.24 Efecto de un filtro diferenciador en una imagen: (a) dos imágenes originales; (b) el resultado del procesamiento de las imágenes originales con un filtro diferenciador.

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-j\omega t} dt.$$

3.9.2 Filtros selectivos en frecuencia,

tros básicos se usan ampliamente y se les han dado nombres para indicar su función. Por ejemplo, un *filtro paso bajas* es aquel que deja pasar bajas frecuencias (es decir, frecuencias alrededor de $\omega = 0$) y atenúa o elimina las frecuencias más altas. Un *filtro paso altas* es aquel que deja pasar las frecuencias altas y atenúa o elimina las bajas, y un *filtro paso banda* es el que deja pasar una banda de frecuencias y atenúa frecuencias tanto más altas como más bajas con respecto a la banda que deja pasar. En cada caso, las *frecuencias de corte* son las frecuencias que definen los límites entre las frecuencias que pasan y las que se eliminan, es decir, las frecuencias en la *banda de paso* y en la *banda de supresión*.

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \omega_c \\ 0, & |\omega| > \omega_c \end{cases}, \quad (3.140)$$

como se muestra en la figura 3.26.

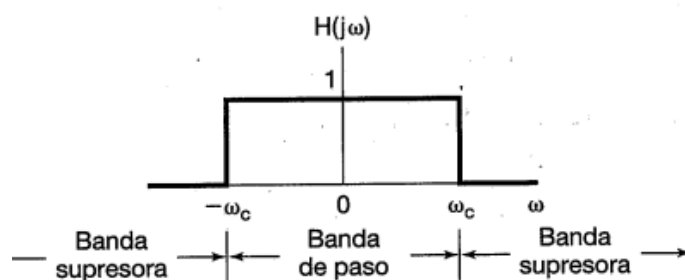
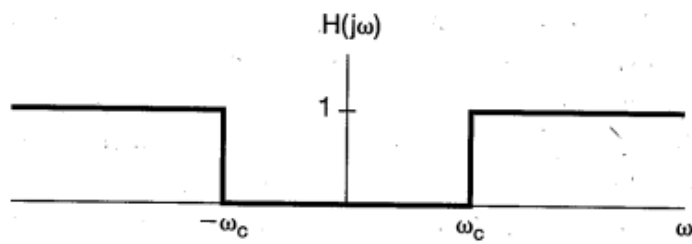
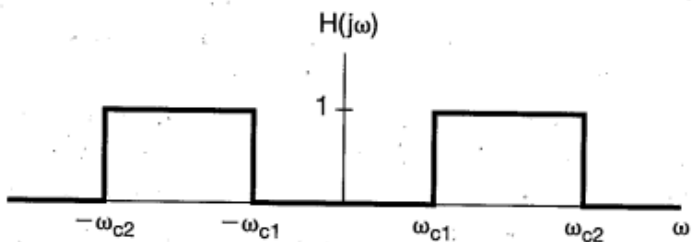


Figura 3.26 Respuesta en frecuencia de un filtro paso bajas ideal.

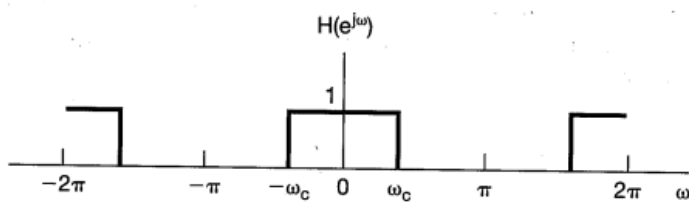


(a)

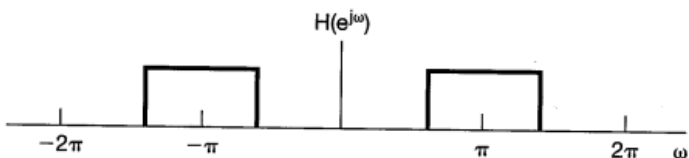


(b)

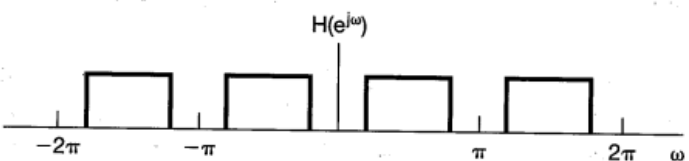
Figura 3.27 (a) Respuesta en frecuencia de un filtro paso altas ideal; (b) respuesta en frecuencia de un filtro paso banda ideal.



(a)



(b)



(c)

Figura 3.28 Filtros selectivos en frecuencia ideales discretos: (a) paso bajas; (b) paso altas; (c) paso banda.

la figura 3.28(b) es un filtro ideal paso altas y la figura 3.28(c) es un filtro ideal paso banda. Observe que, como se analizó en la sección anterior, las características de los filtros ideales continuos y discretos difieren en virtud del hecho de que, para los filtros discretos, la respuesta en frecuencia $H(e^{j\omega})$ debe ser periódica con periodo 2π , con frecuencias bajas cercanas a múltiplos pares de π y frecuencias altas cercanas a múltiplos impares de π .

Como veremos en muchas ocasiones, los filtros ideales son bastante útiles en la descripción de configuraciones de sistemas idealizados para muchas aplicaciones. Sin embargo, no son realizables en la práctica y sólo se les puede aproximar. Además, aun si se pudieran realizar, algunas características de los filtros ideales podrían hacerlos indeseables para aplicaciones específicas, y de hecho pueden ser preferibles los filtros no ideales.

3.10.1 Un filtro paso bajas RC sencillo.

Los circuitos eléctricos son usados ampliamente en las operaciones de filtrado continuo. Uno de los ejemplos más sencillos lo constituye el circuito RC de primer orden mostrado en la figura 3.29, donde el voltaje de la fuente $v_s(t)$ es la entrada del sistema. Este circuito se puede usar para realizar una operación de filtrado paso bajas o paso altas, dependiendo de qué señal de salida adoptamos. En particular, suponga que consideramos el voltaje del capacitor $v_c(t)$ como la salida. En este caso, el voltaje de salida está relacionado

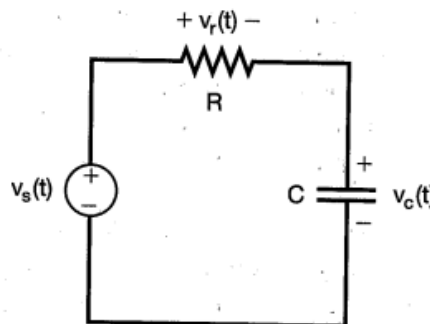


Figura 3.29 Filtro RC de primer orden.

con el de entrada a través de la ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes

$$RC \frac{dv_c(t)}{dt} + v_c(t) = v_s(t). \quad (3.141)$$

Si suponemos un reposo inicial, el sistema descrito por la ecuación (3.141) es LTI. Para determinar su respuesta en frecuencia $H(j\omega)$, observamos que, por definición, con el voltaje de entrada $v_s(t) = e^{j\omega t}$, debemos tener el voltaje de salida $v_c(t) = H(j\omega)e^{j\omega t}$. Si sustituimos esta expresión en la ecuación (3.141) obtenemos

$$RC \frac{d}{dt} [H(j\omega)e^{j\omega t}] + H(j\omega)e^{j\omega t} = e^{j\omega t}, \quad (3.142)$$

o

$$RC j\omega H(j\omega)e^{j\omega t} + H(j\omega)e^{j\omega t} = e^{j\omega t}, \quad (3.143)$$

de lo cual se deduce directamente que

$$H(j\omega)e^{j\omega t} = \frac{1}{1 + RC j\omega} e^{j\omega t}, \quad (3.144)$$

o

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + RC j\omega}. \quad (3.145)$$

La magnitud y la fase de la respuesta en frecuencia $H(j\omega)$ para este ejemplo se muestran en la figura 3.30. Observe que para frecuencias cercanos a $\omega = 0$, $|H(j\omega)| \approx 1$, mientras que para valores más grandes de ω (positivos o negativos), $|H(j\omega)|$ es considerablemente más pequeña y de hecho disminuye rápidamente conforme $|\omega|$ se incrementa. Por tanto, este sencillo filtro RC (con $v_c(t)$ como salida) es un filtro paso bajas no ideal.

Para dar una idea inicial de los compromisos involucrados en el diseño de filtros, consideremos brevemente el comportamiento en el dominio del tiempo del circuito. En particular, la respuesta al impulso del sistema descrito por la ecuación (3.141) es

$$h(t) = \frac{1}{RC} e^{-t/RC} u(t), \quad (3.146)$$

La magnitud y la fase de la respuesta en frecuencia $H(j\omega)$ para este ejemplo se muestran en la figura 3.30. Observe que para frecuencias cercanos a $\omega = 0$, $|H(j\omega)| \approx 1$, mientras que para valores más grandes de ω (positivos o negativos), $|H(j\omega)|$ es considerablemente más pequeña y de hecho disminuye rápidamente conforme $|\omega|$ se incrementa. Por tanto, este sencillo filtro RC (con $v_c(t)$ como salida) es un filtro paso bajas no ideal.

Para dar una idea inicial de los compromisos involucrados en el diseño de filtros, consideremos brevemente el comportamiento en el dominio del tiempo del circuito. En particular, la respuesta al impulso del sistema descrito por la ecuación (3.141) es

$$h(t) = \frac{1}{RC} e^{-t/RC} u(t), \quad (3.146)$$

y la respuesta al escalón es

$$s(t) = [1 - e^{-t/RC}]u(t), \quad (3.147)$$

las cuales están graficadas en la figura 3.31 (donde $\tau = RC$). Al comparar las figuras 3.30 y 3.31, vemos un compromiso fundamental. En concreto, suponga que nos gustaría que nuestro filtro dejara pasar sólo frecuencias muy bajas. De la figura 3.30(a), esto implica que $1/RC$ debe ser pequeño, o de manera equivalente, que RC es muy grande, de modo que las frecuencias diferentes a las que nos interesan serán atenuadas lo suficiente. Sin embargo, observando la figura 3.31(b), vemos que si RC es grande, entonces a la respuesta al escalón le tomará un tiempo considerable alcanzar su valor final de 1. Esto es, el sistema responde lentamente a la entrada escalón. Por el contrario, si deseamos tener una respuesta más rápida, necesitamos un valor más pequeño de RC , lo cual a su vez implica que el filtro dejará pasar frecuencias más altas. Este tipo de compromiso entre el comportamiento en el dominio de la frecuencia y en el dominio del tiempo es típico de los problemas que surgen al diseñar y analizar sistemas y filtros LTI, y constituye un tema que veremos con más detalle en el capítulo 6.

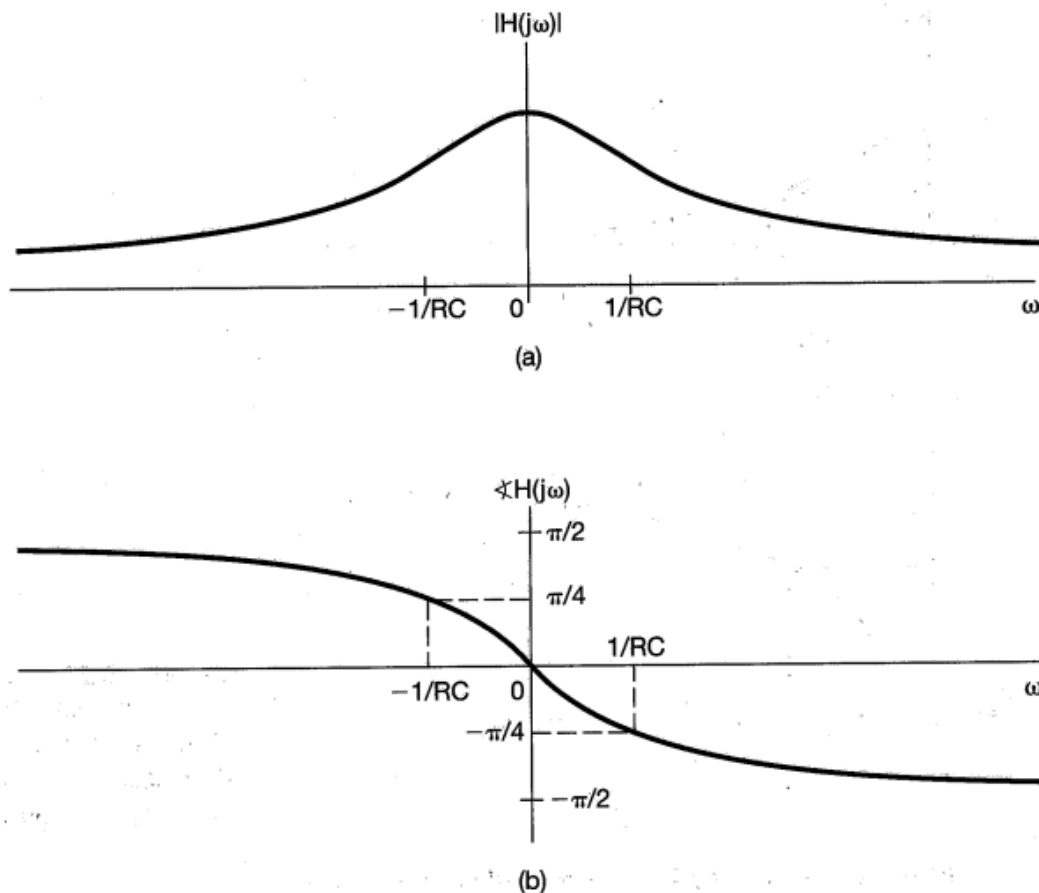


Figura 3.30 Gráficas de (a) magnitud y (b) fase para la respuesta en frecuencia del circuito RC de la figura 3.29 con salida $v_o(t)$.

3.10.2 Un filtro paso altas RC sencillo.

Como una alternativa para seleccionar el voltaje del capacitor como la salida de nuestro circuito RC, podemos escoger el voltaje a través del resistor. En este caso, la ecuación

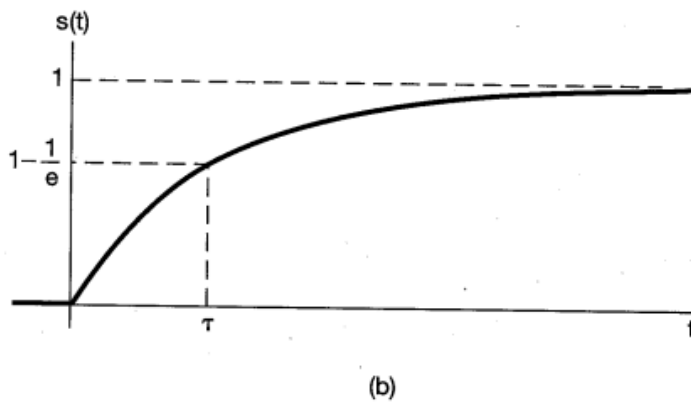
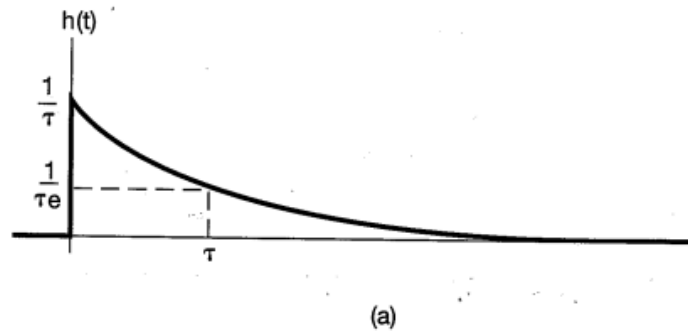


Figura 3.31 (a) Respuesta al impulso del filtro paso bajas RC de primer orden con $\tau = RC$, (b) respuesta al escalón del filtro paso bajas RC con $\tau = RC$.

diferencial que relaciona la entrada con la salida es

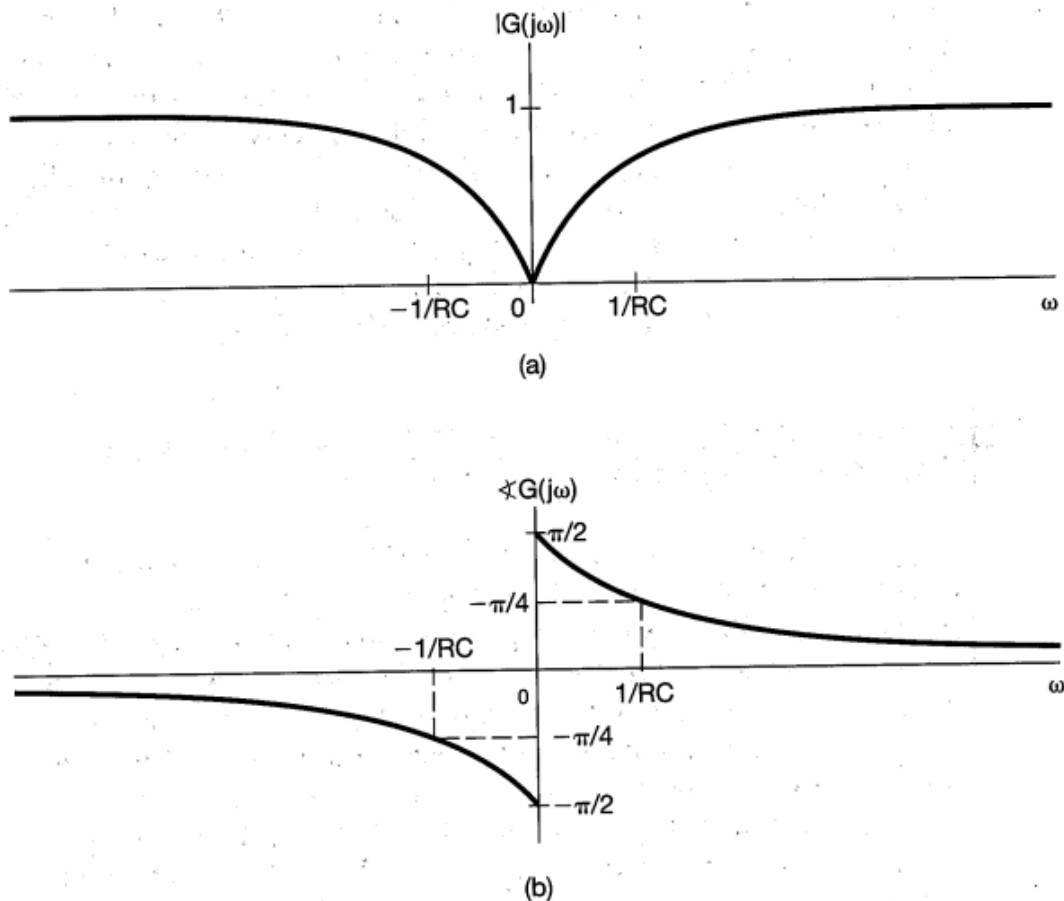


Figura 3.32 Gráficas de (a) magnitud y (b) fase de la respuesta en frecuencia del circuito RC de la figura 3.29 con salida $v_r(t)$.

escribir en la pizarra los circuitos pasabajas y pasa altas con sus respectivas ecuaciones

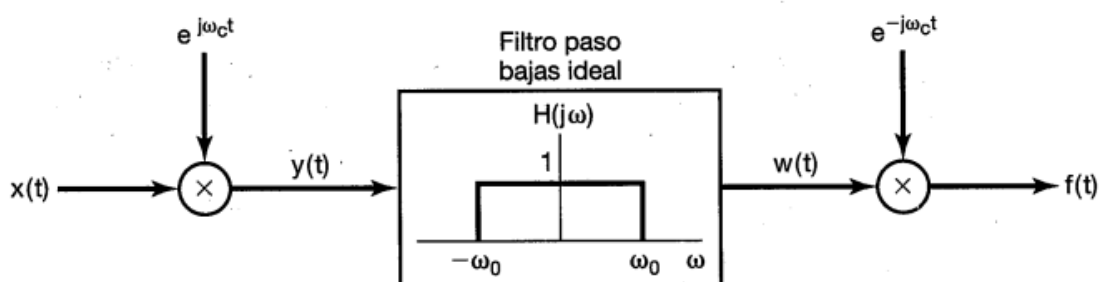


Figura 4.26 Construcción de un filtro paso banda usando una modulación en amplitud con una portadora exponencial compleja.

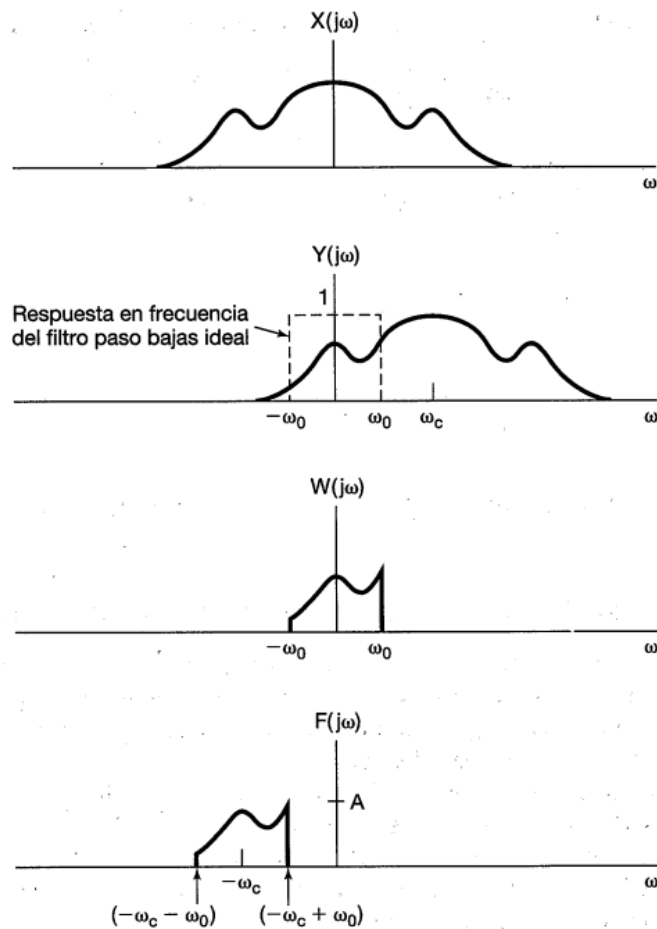


Figura 4.27 Espectros de las señales en el sistema de la figura 4.26.

Ejemplo 4.21

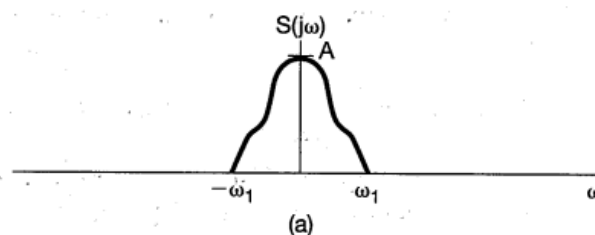
Sea $s(t)$ una señal cuyo espectro $S(j\omega)$ se ha trazado en la figura 4.23(a). También considere la señal

$$p(t) = \cos \omega_0 t.$$

Entonces,

$$P(j\omega) = \pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0),$$

como se trazó en la figura 4.23(b), y el espectro $R(j\omega)$ de $r(t) = s(t)p(t)$ se obtiene mediante



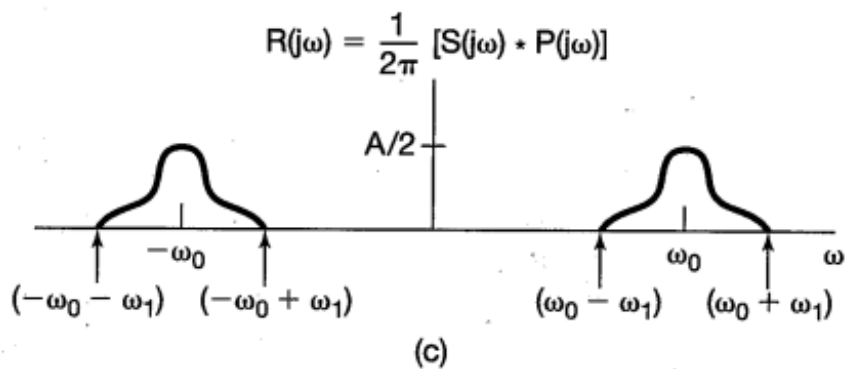
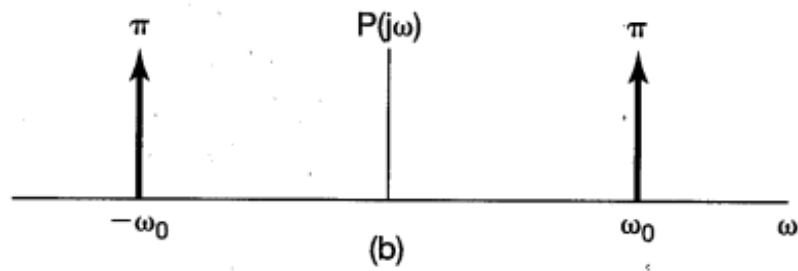


Figura 4.23 Uso de la propiedad de multiplicación del ejemplo 4.21: (a) la transformada de Fourier de una señal $s(t)$; (b) la transformada de Fourier de $p(t) = \cos \omega_0 t$; (c) la transformada de Fourier de $r(t) = s(t)p(t)$.

la aplicación de la ecuación (4.70), lo cual produce

$$\begin{aligned} R(j\omega) &= \frac{1}{2\pi} S(j\omega) * P(j\omega) \\ &= \frac{1}{2} S(j(\omega - \omega_0)) + \frac{1}{2} S(j(\omega + \omega_0)), \end{aligned} \tag{4.71}$$

la cual se presenta en la figura 4.23(c). Aquí supusimos que $\omega_0 > \omega_1$, de manera que las dos porciones diferentes de cero de $R(j\omega)$ no se traslapan. Claramente vemos que el espectro de $r(t)$ consiste de la suma de dos versiones de $S(j\omega)$ desplazadas y escaladas.

Con base en la ecuación (4.71) y en la figura 4.23, sabemos que toda la información contenida en la señal $s(t)$ es preservada cuando multiplicamos esta señal por una señal senoidal, aunque la información ha sido desplazada a frecuencias más altas. Este hecho conforma la base de los sistemas de modulación senoidal en amplitud para comunicaciones. En el próximo ejemplo veremos cómo podemos recuperar la señal original $s(t)$ a partir de la señal modulada en amplitud $r(t)$.

Ejemplo 4.22

Consideremos ahora a $r(t)$ tal como fue obtenida en el ejemplo 4.21, y supongamos que

$$g(t) = r(t)p(t),$$

donde, nuevamente, $p(t) = \cos \omega_0 t$. Entonces, $R(j\omega)$, $P(j\omega)$ y $G(j\omega)$ tienen la forma mostrada en la figura 4.24.

De la figura 4.24(c) y de la linealidad de la transformada de Fourier, se desprende que $g(t)$ es la suma de $(1/2)s(t)$ y de una señal con un espectro que es diferente de cero sólo a frecuencias más altas (centrado alrededor de $\pm 2\omega_0$). Suponga entonces que apli-

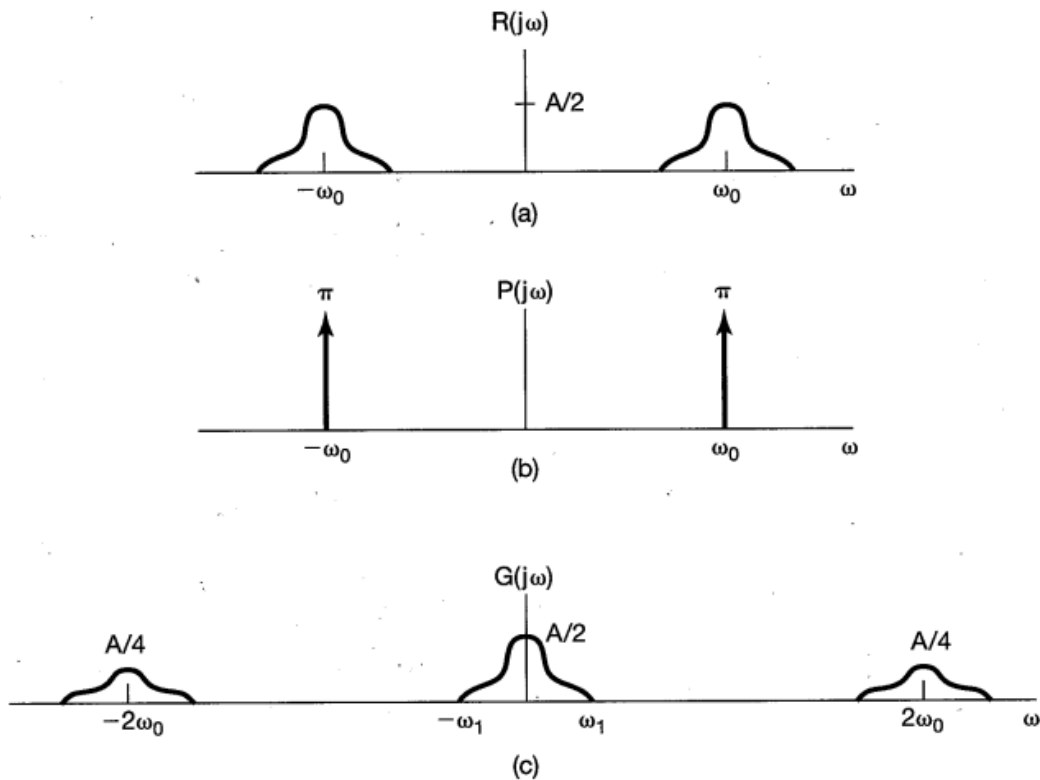


Figura 4.24 Espectro de las señales examinadas en el ejemplo 4.22:
(a) $R(j\omega)$; (b) $P(j\omega)$; (c) $G(j\omega)$.

Sección 4.5 La propiedad de multiplicación

325

camos la señal $g(t)$ a la entrada de un filtro paso bajas selectivo en frecuencia con respuesta en frecuencia $H(j\omega)$ el cual es constante a bajas frecuencias (digamos, $|\omega| < \omega_1$) y cero a altas frecuencias (para $|\omega| > \omega_1$). Entonces, la salida de este sistema tendrá como espectro a $H(j\omega)G(j\omega)$ el cual, debido a la particular selección de $H(j\omega)$, será una réplica escalada de $S(j\omega)$. Por tanto, la salida misma será una versión escalada de $s(t)$. En el capítulo 8 ampliaremos significativamente esta idea cuando desarrollemos con detalle los fundamentos de la modulación de amplitud.