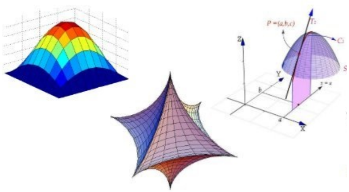
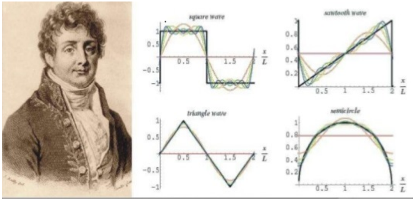
Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales y Series de Fourier

Unidad 2 (clase 2)

Prof. Carolina Cárdenas





Contenido de la Clase

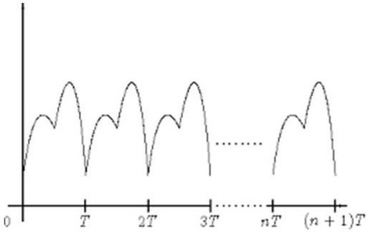
1. Series de Fourier
   - Definición
   - Desarrollo en serie de Fourier
   - Condiciones para la convergencia

Funciones Periódicas

La función $f(t)$ se dice que es periódica de periodo T si

Funciones Periódicas

La función $f(t)$ se dice que es periódica de periodo T si $f(t+T)=f(t)$.

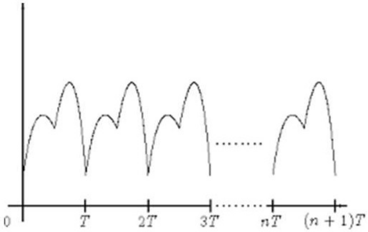


$f(t+mT)=f(t)$, con $m\in\mathbb{Z}$

Funciones Periódicas

La función $f(t)$ se dice que es periódica de periodo T si $f(t+T) = f(t)$.

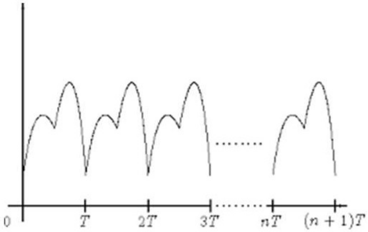
Términos Básicos:



$f(t + mT) = f(t)$, con $m \in \mathbb{Z}$

Funciones Periódicas

La función $f(t)$ se dice que es periódica de periodo T si $f(t+T) = f(t)$.



$f(t+mT) = f(t)$, con $m \in \mathbb{Z}$

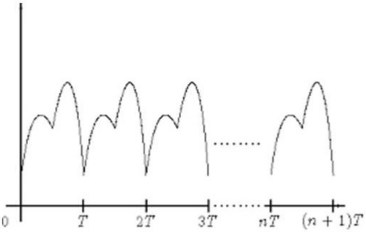
Términos Básicos:

- Frecuencia: Es el número de repeticiones por unidad de tiempo:

$$frecuencia = \frac{1}{T}$$

Funciones Periódicas

La función $f(t)$ se dice que es periódica de periodo T si $f(t+T) = f(t)$.



$$f(t+mT) = f(t)\,, \text{ con } m \in \mathbb{Z}$$

Términos Básicos:

- Frecuencia: Es el número de repeticiones por unidad de tiempo:

$$frecuencia = \frac{1}{T}$$

- Frecuencia Circular:

$$w = \frac{2\pi}{T}$$

rad/seg.

Definición

Si $f(t)$ es una función periódica de periodo $T = \frac{2\pi}{w}$, que puede expresarse como una serie de Fourier, entonces esa serie está dada por:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(nwt) + b_n \operatorname{sen}(nwt)\right] \tag{1}$$

donde los coeficientes están dados por la fórmula de Euler

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_d^{d+T} f(t)dt \tag{2}$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_d^{d+T} f(t)cos(nwt)\,dt \tag{3}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_d^{d+T} f(t)sen(nwt)\,dt \tag{4}$$

para $n = 1, 2, \cdots$,

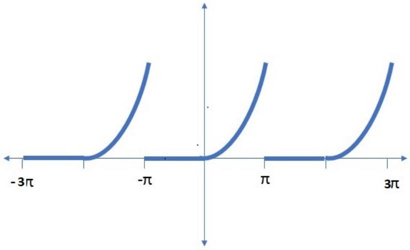
OBSERVACION

- Los límites integración en las fórmulas de Euler pueden ser especificados sobre cualquier periodo, de manera que la elección de d es arbitraria.
- Los senoides sen nwt o cos nwt se llaman armónicos de $f(t)$.

OBSERVACION

- Los límites integración en las fórmulas de Euler pueden ser especificados sobre cualquier periodo, de manera que la elección de d es arbitraria.
- Los senoides sen nwt o cos nwt se llaman armónicos de $f(t)$.

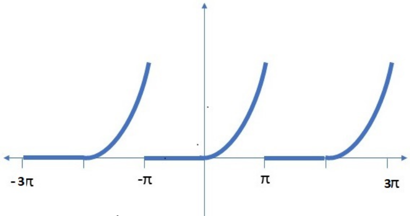
EJEMPLO Obtener el desarrollo en serie de Fourier de la siguiente función periódica.



OBSERVACION

- Los límites integración en las fórmulas de Euler pueden ser especificados sobre cualquier periodo, de manera que la elección de d es arbitraria.
- Los senoides sen nwt o cos nwt se llaman armónicos de $f(t)$.

EJEMPLO Obtener el desarrollo en serie de Fourier de la siguiente función periódica.



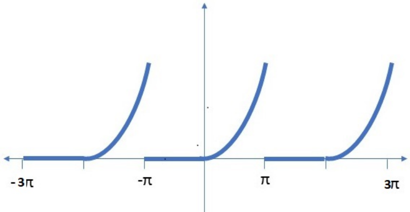
$$f(t) = \begin{cases} 0 & -\pi < t < 0 \\ t^2 & 0 \leq t < \pi \end{cases}$$

$$f(t+T) = f(t), \quad T = 2\pi.$$

OBSERVACION

- Los límites integración en las fórmulas de Euler pueden ser especificados sobre cualquier periodo, de manera que la elección de d es arbitraria.
- Los senoides sen nwt o cos nwt se llaman armónicos de $f(t)$.

EJEMPLO Obtener el desarrollo en serie de Fourier de la siguiente función periódica.



$$f(t) = \begin{cases} 0 & -\pi < t < 0 \\ t^2 & 0 \leq t < \pi \end{cases}$$

$$f(t+T) = f(t), \quad T = 2\pi.$$

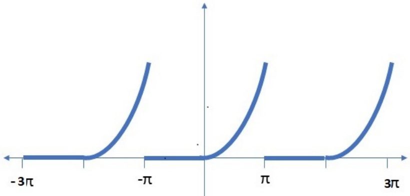
Solución: Usando las ecuaciones (2), (3) y (4) tenemos que:

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_d^{d+T} f(t)dt$$

OBSERVACION

- Los límites integración en las fórmulas de Euler pueden ser especificados sobre cualquier periodo, de manera que la elección de d es arbitraria.
- Los senoides sen nwt o cos nwt se llaman armónicos de $f(t)$.

EJEMPLO Obtener el desarrollo en serie de Fourier de la siguiente función periódica.



$$f(t) = \begin{cases} 0 & -\pi < t < 0 \\ t^2 & 0 \leq t < \pi \end{cases}$$

$$f(t+T) = f(t), \quad T = 2\pi.$$

Solución: Usando las ecuaciones (2), (3) y (4) tenemos que:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T}\int_d^{d+T} f(t)dt \\ &= \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = \frac{\pi^2}{3} \end{aligned}$$

Para $n = 1, 2, \cdots$,, tenemos:

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{d}^{d+T} f(t)\cos(nwt)dt \;\Rightarrow$$

Para $n = 1, 2, \cdots$,, tenemos:

$$a_n = \frac{2}{T}\int_d^{d+T} f(t)\cos(nwt)dt \;\Rightarrow\; a_n = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos\left(n\frac{2\pi}{2\pi}t\right)dt$$

Para $n = 1, 2, \cdots$,, tenemos:

$$a_n = \frac{2}{T}\int_d^{d+T} f(t)\cos(nwt)dt \;\Rightarrow\; a_n = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos\left(n\frac{2\pi}{2\pi}t\right)dt$$

sustituyendo $f(t)$ y usando integración por partes, tenemos

$$a_n \;=\; \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} t^2\cos nt\,dt = \frac{1}{\pi}\frac{1}{n^3}\left[n^2t^2\,\mathrm{sen}\,nt - 2\,\mathrm{sen}\,nt + 2nt\cos nt\Big|_0^{\pi}\right]$$

Para $n = 1, 2, \cdots$,, tenemos:

$$a_n = \frac{2}{T}\int_d^{d+T} f(t)\cos(nwt)dt \;\Rightarrow\; a_n = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos\left(n\frac{2\pi}{2\pi}t\right)dt$$

sustituyendo $f(t)$ y usando integración por partes, tenemos

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} t^2\cos nt\,dt = \frac{1}{\pi}\frac{1}{n^3}\left[n^2t^2\,\mathrm{sen}\,nt - 2\,\mathrm{sen}\,nt + 2nt\cos nt\Big|_0^{\pi}\right] \\ &= \frac{1}{\pi}\frac{1}{n^3}\left[n^2\pi^2\,\mathrm{sen}\,n\pi - 2\,\mathrm{sen}\,n\pi + 2n\pi\cos n\pi - 0\right] \end{aligned}$$

Para $n = 1, 2, \cdots$,, tenemos:

$$a_n = \frac{2}{T}\int_d^{d+T} f(t)\cos(nwt)dt \;\Rightarrow\; a_n = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos\left(n\frac{2\pi}{2\pi}t\right)dt$$

sustituyendo $f(t)$ y usando integración por partes, tenemos

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} t^2\cos nt\,dt = \frac{1}{\pi}\frac{1}{n^3}\left[n^2t^2\operatorname{sen} nt - 2\operatorname{sen} nt + 2nt\cos nt\Big|_0^{\pi}\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\frac{1}{n^3}\left[n^2\pi^2\operatorname{sen} n\pi - 2\operatorname{sen} n\pi + 2n\pi\cos n\pi - 0\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\frac{1}{n^3}2n\pi\cos n\pi = 2\frac{(-1)^n}{n^2}\,, \quad \operatorname{sen} n\pi = 0\,, \quad n \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Para $n = 1, 2, \cdots$,, tenemos:

$$a_n = \frac{2}{T}\int_d^{d+T} f(t)\cos(nwt)dt \;\Rightarrow\; a_n = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos\left(n\frac{2\pi}{2\pi}t\right)dt$$

sustituyendo $f(t)$ y usando integración por partes, tenemos

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} t^2\cos nt\,dt = \frac{1}{\pi}\frac{1}{n^3}\left[n^2t^2\operatorname{sen} nt - 2\operatorname{sen} nt + 2nt\cos nt\Big|_0^{\pi}\right] \\ &= \frac{1}{\pi}\frac{1}{n^3}\left[n^2\pi^2\operatorname{sen} n\pi - 2\operatorname{sen} n\pi + 2n\pi\cos n\pi - 0\right] \\ &= \frac{1}{\pi}\frac{1}{n^3}2n\pi\cos n\pi = 2\frac{(-1)^n}{n^2}, \quad \operatorname{sen} n\pi = 0, \quad n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Ahora calculemos b_n, similarmente

Para $n = 1, 2, \cdots$,, tenemos:

$$a_n = \frac{2}{T}\int_d^{d+T} f(t)\cos(nwt)dt \;\Rightarrow\; a_n = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos\left(n\frac{2\pi}{2\pi}t\right)dt$$

sustituyendo $f(t)$ y usando integración por partes, tenemos

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} t^2\cos nt\,dt = \frac{1}{\pi}\frac{1}{n^3}\left[n^2t^2\,\text{sen}\,nt - 2\,\text{sen}\,nt + 2nt\cos nt\Big|_0^{\pi}\right] \\ &= \frac{1}{\pi}\frac{1}{n^3}\left[n^2\pi^2\,\text{sen}\,n\pi - 2\,\text{sen}\,n\pi + 2n\pi\cos n\pi - 0\right] \\ &= \frac{1}{\pi}\frac{1}{n^3}2n\pi\cos n\pi = 2\frac{(-1)^n}{n^2}\,, \quad \text{sen}\,n\pi = 0\,, \quad n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Ahora calculemos b_n, similarmente

$$b_n = \frac{2}{T}\int_d^{d+T} f(t)sen\,(nwt)\,dt = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\text{sen}\left(n\frac{2\pi}{2\pi}t\right)dt$$

Para $n = 1, 2, \cdots$,, tenemos:

$$a_n = \frac{2}{T}\int_d^{d+T} f(t)\cos(nwt)dt \;\Rightarrow\; a_n = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos\left(n\frac{2\pi}{2\pi}t\right)dt$$

sustituyendo $f(t)$ y usando integración por partes, tenemos

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} t^2\cos nt\,dt = \frac{1}{\pi}\frac{1}{n^3}\left[n^2t^2\,\mathrm{sen}\,nt - 2\,\mathrm{sen}\,nt + 2nt\cos nt\Big|_0^{\pi}\right] \\ &= \frac{1}{\pi}\frac{1}{n^3}\left[n^2\pi^2\,\mathrm{sen}\,n\pi - 2\,\mathrm{sen}\,n\pi + 2n\pi\cos n\pi - 0\right] \\ &= \frac{1}{\pi}\frac{1}{n^3}2n\pi\cos n\pi = 2\frac{(-1)^n}{n^2}\,, \quad \mathrm{sen}\,n\pi = 0\,, \quad n\in\mathbb{Z} \end{aligned}$$

Ahora calculemos b_n, similarmente

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T}\int_d^{d+T} f(t)sen\,(nwt)\,dt = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{sen}\left(n\frac{2\pi}{2\pi}t\right)dt \\ &= \frac{2}{2\pi}\int_0^{\pi} t^2\,\mathrm{sen}\left(n\frac{2\pi}{2\pi}t\right)dt \end{aligned}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\frac{1}{n^3}\left[-n^2 t^2 \cos nt + 2(\cos nt + nt \operatorname{sen} nt)\Big|_0^{\pi}\right]$$

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\frac{1}{n^3}\Big[-n^2t^2\cos nt + 2(\cos nt + nt\,\operatorname{sen} nt)\Big|_0^{\pi}\Big] \\
&= \frac{1}{\pi}\frac{1}{n^3}[-n^2\pi^2\cos n\pi + 2\cos n\pi - 2]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\frac{1}{n^3}\left[-n^2t^2\cos nt + 2(\cos nt + nt\,\mathrm{sen}\, nt)\Big|_0^{\pi}\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\frac{1}{n^3}[-n^2\pi^2\cos n\pi + 2\cos n\pi - 2] \\
&= \frac{(-1)^{n+1}\pi}{n} + \frac{2}{\pi n^3}((-1)^n - 1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\frac{1}{n^3}\Big[-n^2t^2\cos nt + 2(\cos nt + nt\operatorname{sen} nt)\Big|_0^{\pi}\Big] \\
&= \frac{1}{\pi}\frac{1}{n^3}[-n^2\pi^2\cos n\pi + 2\cos n\pi - 2] \\
&= \frac{(-1)^{n+1}\pi}{n} + \frac{2}{\pi n^3}((-1)^n - 1)
\end{aligned}
$$

Así $f(t)$ se representa como una serie de Fourier como:

$$
f(t) = \frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2(-1)^n}{n^2}\cos(nt) + \left(\frac{(-1)^{n+1}\pi}{n} + \frac{2}{\pi n^3}((-1)^n - 1)\right)\operatorname{sen}(nt)\right]
$$

Donde se cumplirá esta convergencia?
Donde la serie de Fourier de $f(t)$ converge a $f(t)$?.

Condiciones de Convergencia

Las condiciones de Dirichlet

Si $f(t)$ es una función periódica acotada que en cualquier periodo tiene:

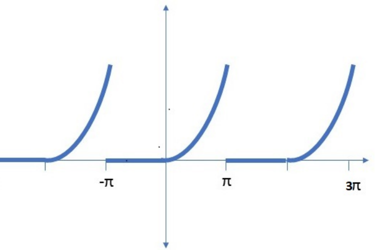
1. Un número finito de máximos y mínimos aislados, y
2. un número finito de discontinuidad finita

entonces la expansión en serie de Fourier de $f(t)$ converge a $f(t)$ en todos los puntos donde $f(t)$ es continua y al promedio de los límites por la derecha y por la izquierda de $f(t)$ en los puntos donde $f(t)$ es discontinua (esto es al promedio de las discontinuidades).

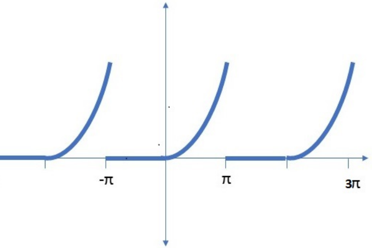
$$\frac{f(t_0^+) + f(t_0^-)}{2}$$

donde $f(t_0^+) = \lim\limits_{t \to t_0^+} f(t)$ y $f(t_0^-) = \lim\limits_{t \to t_0^-} f(t)$

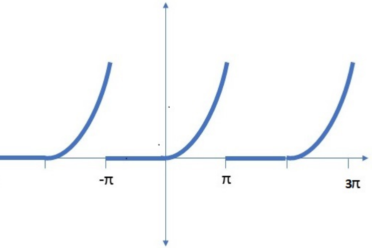
EJEMPLO Consideremos la función periódica $f(t)$ de período 2π del ejemplo previo, cuya gráfica está dada por:



EJEMPLO Consideremos la función periódica $f(t)$ de período 2π del ejemplo previo, cuya gráfica está dada por:

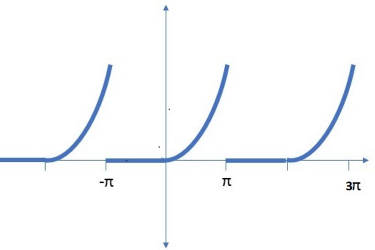


EJEMPLO Consideremos la función periódica $f(t)$ de período 2π del ejemplo previo, cuya gráfica está dada por:



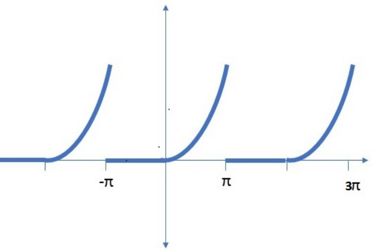
Note que $t = \pi$ es un punto de discontinuidad de f, entonces la serie de Fourier converge a

EJEMPLO Consideremos la función periódica $f(t)$ de período 2π del ejemplo previo, cuya gráfica está dada por:



Note que $t = \pi$ es un punto de discontinuidad de f, entonces la serie de Fourier converge a $\dfrac{f(\pi^+) + f(\pi^-)}{2}$ donde:

EJEMPLO Consideremos la función periódica $f(t)$ de período 2π del ejemplo previo, cuya gráfica está dada por:



Note que $t = \pi$ es un punto de discontinuidad de f, entonces la serie de Fourier converge a $\dfrac{f(\pi^+) + f(\pi^-)}{2}$ donde:

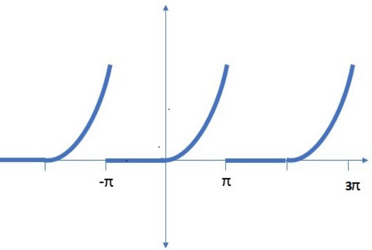
$f(\pi^+) = \lim_{t\to\pi^+} f(t) = 0$

$f(\pi^-) = \lim_{t\to\pi^-} f(t) = \pi^2$

así la serie en π converge a

$$\frac{f(\pi^+) + f(\pi^-)}{2} = \frac{\pi^2}{2}$$

EJEMPLO Consideremos la función periódica $f(t)$ de período 2π del ejemplo previo, cuya gráfica está dada por:



Note que $t = \pi$ es un punto de discontinuidad de f, entonces la serie de Fourier converge a $\dfrac{f(\pi^+) + f(\pi^-)}{2}$ donde:

$$f(\pi^+) = \lim_{t \to \pi^+} f(t) = 0$$

$$f(\pi^-) = \lim_{t \to \pi^-} f(t) = \pi^2$$

así la serie en π converge a

$$\frac{f(\pi^+) + f(\pi^-)}{2} = \frac{\pi^2}{2}$$

En general, $f(t)$ es discontinua en $t = (2n+1)\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, la serie de Fourier de $f(t)$ en estos puntos converge a

$$\frac{f(\pi^+) + f(\pi^-)}{2} = \frac{\pi^2}{2}$$

Usando la función del ejemplo y su representación en serie de Fourier muestre que:

1. $\dfrac{\pi^2}{12} = 1 - \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} - \dfrac{1}{4^2} + \dfrac{1}{5^2} \cdots$

Solución:

Usando la función del ejemplo y su representación en serie de Fourier muestre que:

1. $\dfrac{\pi^2}{12} = 1 - \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} - \dfrac{1}{4^2} + \dfrac{1}{5^2} \cdots$

Solución:

Note que $t = 0$ es un punto de continuidad de f. Entonces la serie de Fourier de $f(t)$ converge a $f(t)$ en $t = 0$ (en cualquier punto donde $f(t)$ es continua) es decir:

$$f(t) = \frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2(-1)^n}{n^2}\cos(nt) + \left(\frac{(-1)^{n+1}\pi}{n} + \frac{2}{\pi n^3}((-1)^n - 1)\right)\operatorname{sen}(nt)\right]$$

Esta igual es válida en $\mathbb{R} - \{t : \ t = (2n+1)\pi, \ n \in \mathbb{Z}, \}$.

$$f(0) = \frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2(-1)^n}{n^2}cos(n0) + \left(\frac{(-1)^{n+1}\pi}{n} + \frac{2}{n^3}((-1)^n - 1)\right)sen(n0)\right]$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{n^2} \Rightarrow \frac{\pi^2}{12} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} \cdots$$