TEC | Tecnológico de Costa Rica

Área Académica de Ingeniería en Computadores
Análisis Numérico para Ingeniería, CE-3102
Tarea 2, Parte 2
Estudiantes:
Gabriel González Houdelath - 2017136865
Ignacio Carazo Nieto - 2017090425
Juan Peña Rostrán - 2018080231

1. Problema matemático a resolver

Se desea aproximar la solución ($\overline{\mathbf{x}}$) de un sistema de ecuaciones con funciones no lineales de la forma $f(x) = 0$, donde cada función debe ser definida y continua. Además, su primera derivada parcial debe exitir en el vector de variables independientes que la definen. Esto es, formalmente: $\mathbf{F} = (f_1, f_2, .., f_n) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.Y para cada función del conjunto: $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \exists \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ en $\mathbf{c} = (x_1, x_2, ..., x_n)^t \in \mathbb{R}^n$, $\forall i, j = 1, 2, ..., n$.
Entonces, el sistema de ecuaciones no lineales se define de la siguiente manera:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, \\ f_2(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

2. Caracterización matemática del método

Partiendo de un vector de valores iniciales $\mathbf{x}^{(0)}$ para el vector $\overline{\mathbf{x}}$ se debe calcular un valor $\Delta\mathbf{x}^{(0)}$ para aproximar cada vez más la solución según una tolerancia dada de manera que se cumpla $\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(0)} + \Delta\mathbf{x}^{(0)}) \approx 0$, lo cual se logra mediante la expansión de la serie de Taylor para dicha aproximación, donde al considerar los primeros dos términos se logra despejar el valor, tal y como se muestra a continuación:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(0)}) \approx -\frac{f(\mathbf{x}^{(0)})}{(\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}})^{(0)}} \tag{2}$$

Bajo la idea de la ec. 2 se fundamenta el método de Newton-Raphson aplicado para estos sistemas de ecuaciones no lineales, ya que para calcular la equivalencia se debe recurrir al llamado Jacobiano de $\mathcal{J}$ donde básicamente se encuentran las derivadas parciales de cada función que compone el sistema. Así, para el propósito de este problema la ec. 2 se puede representar como:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(0)}) \approx -[\mathcal{J}^{(0)}]^{-1} f(\mathbf{x}^{(0)}) \tag{3}$$

Y de forma general, se obtiene la solución iterando según:

$$\begin{cases} \mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - [\mathcal{J}^{(k)}]^{-1} f(\mathbf{x}^{(k)}) \\ \mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n \text{ como vector inicial.} \end{cases} \tag{4}$$

En específico, la matriz inversa del Jacobiano no se solicita calcular como parte de la implementación, en este caso se utiliza la biblioteca Numpy presente en Python para resolver sistemas lineales, así el sistema a calcular es de la forma:

$$\mathcal{J}^{(k)}\mathbf{y} = f(\mathbf{x}^{(k)}) \tag{5}$$

3. Pseudocódigo

Se tiene como parámetros de entrada:
$\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$
$\mathbf{f} = (f_1, f_2, .., f_n) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
$\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ variables del sistema
$tol > 0$
$iterMax > 0$, cantidad máxima de iteraciones
Salidas:
$\mathbf{x}^{(k)} \in \mathbb{R}^n$ como solución al problema
Cantidad de iteraciones k y error $e_k = \|\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)})\|_2 < tol$
Gráfica de k vs. e_k

3.1. Pasos

Inicializar los valores, $k = 0$, $\mathbf{x}^{(0)}$.

Algorithm 1: Algoritmo iterativo de Newton-Raphson para la solución de Sistemas de Ecuaciones No Lineales.

funcion newton_raphson $(\mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{x}, \mathbf{f}, tol, iterMax)$;
$\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}^{(0)}$
while $k < iterMax$ **do**
    $\mathbf{y} = [\mathcal{J}^{(k)}]^{-1} f(\mathbf{x}^{(k)})$
    $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{y}$
    if $\|\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)})\|_2 < tol$ **then**
        return $\mathbf{x}^{(k+1)}, error, k$;
    end
    $k \leftarrow k + 1$
end

Referencias

[1] A. Cordero, E. Martínez and J. R. Torregrosa, Iterative methods of order four and five for systems of nonlinear equations, J. Comput. Appl. Math., vol. 231, (2), pp. 541-551, 2009.

[2] J. P. Soto, Solución de Sistemas de Ecuaciones No Lineales Método de Newton-Raphson, 2020.

[3] A. J. Conejo and L. Baringo, Power System Operations. 2018.