09/05/2025

INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
RIO GRANDE DO SUL
Campus Erechim

Curso Superior de Análise e Desenvolvimento de Sistemas - Prof: Andre Luiz Bedendo – Matemática Discreta

7. Aplicações de Matrizes em Transformações Gráficas

7.1 Rotação

A **transformação gráfica de rotação** é uma operação fundamental na computação gráfica, matemática e física, utilizada para girar objetos em torno de um ponto (em 2D) ou de um eixo (em 3D). Ela é representada por **matrizes de rotação**, que transformam coordenadas de um sistema para outro por meio da multiplicação matricial. Observe a figura a seguir.

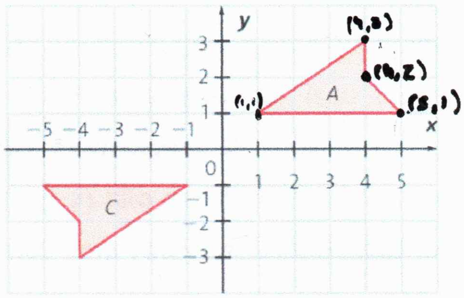


Figura 7.1

A figura A sofreu uma rotação de 180º no sentido anti-horário em torno da origem (0,0), dando origem à figura C. As matrizes relacionadas à figura 7.1 são,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad e \quad C = \begin{pmatrix} -1 & -4 & -4 & -5 \\ -1 & -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

neste caso, obtemos a matriz associada a figura C multiplicando a matriz associada à figura A, pela matriz $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, que é correspondente a $\begin{pmatrix} \cos 180^{\underline{o}} & -\sin 180^{\underline{o}} \\ \sin 180^{\underline{o}} & \cos 180^{\underline{o}} \end{pmatrix}$, assim,

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -4 & -4 & -5 \\ -1 & -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

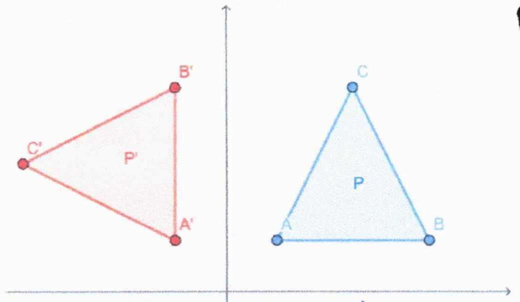
Ao invés de utilizarmos uma matriz de rotação 2x2, vamos considerar a **rotação 2D com matriz homogênea 3×3, a qual** é uma forma estendida da transformação de rotação tradicional que permite combinar, numa única operação, **rotação, translação, escala e reflexão**. Isso é feito usando **coordenadas homogêneas**, um recurso muito usado em computação gráfica, robótica e geometria computacional.

Assim, a fórmula de rotação $2D$ é dada por, $P' = R(\theta) \cdot P$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) & 0 \\ sin(\theta) & cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Onde $R(\theta)$ é a matriz de rotação, e P é um vetor coluna, ou ainda pode ser uma matriz onde cada coluna representa um ponto que será rotacionado, e P' o novo vetor após a operação de rotação.

Exemplo 1. Realize a rotação do triangulo P, formado pelas coordenadas $A = (1,1), B = (4,1)$ e $C = (2{,}5\ ;\ 4)$, em 90° no sentido anti-horário, e determine as novas coordenadas do triangulo P'.



$\theta = 90°$

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\,\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$P' = R(\theta) \cdot P$

$$P' = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{array}{c} \begin{matrix} A & B & C \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2{,}5 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{matrix} A' & B' & C' \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} -1 & -1 & -4 \\ 1 & 4 & 2{,}5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$A'(-1, 1)$ $B'(-1, 4)$

$C'(-4, 2{,}5)$

A **rotação 3D** consiste em girar um ponto ou objeto no espaço tridimensional em torno de um dos **três eixos principais**: x, y ou z. Para representar isso com precisão em aplicações como computação gráfica, robótica ou modelagem 3D, usamos **matrizes homogêneas 4×4**. As coordenadas de um ponto $3D$ $P(x, y, z)$ são escritas como $Ph(x, y, z, 1)$ no sistema homogêneo, o que permite incluir **translação junto com rotação**, usando apenas multiplicações de matrizes.

➢ Matrizes de rotação 3D homogêneas 4 x 4

Rotação em torno do eixo do x: mantém fixo o eixo do x, e rotaciona o plano yz.

$$R_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & cos(\theta) & -sin(\theta) & 0 \\ 0 & sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rotação em torno do eixo do y: mantém fixo o eixo do y, e rotaciona o plano xz.

$$R_y(\theta) = \begin{pmatrix} cos(\theta) & 0 & sin(\theta) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

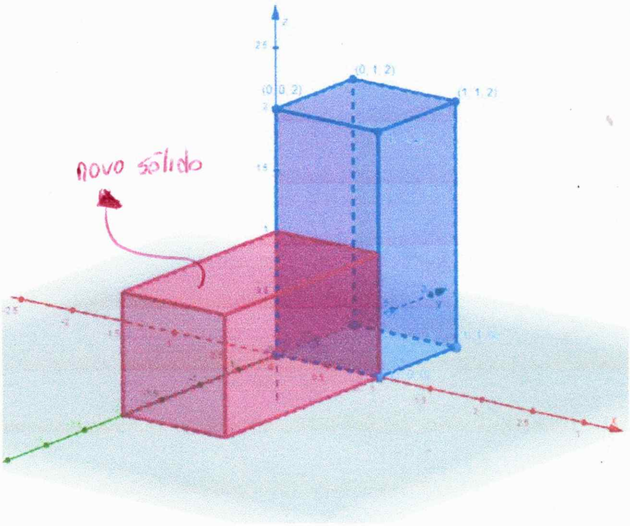
Rotação em torno do eixo do z: mantém fixo o eixo do z, e rotaciona o plano xy.

$$R_z(\theta) = \begin{pmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) & 0 & 0 \\ sin(\theta) & cos(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

OBS: As rotações 3D puras podem ser feitas com matrizes 3×3. Mas para combinar rotação com translação, escala ou projeção, usamos coordenadas homogêneas e matrizes 4×4.

Exemplo 2. O prisma formado pelos vértices $A = (0,0,0), B = (1,0,0), C = (1,1,0)$, $D = (0,1,0), E = (0,0,2), F = (1,0,2), G = (1,1,2)$ e $H = (0,1,2)$, sofreu uma rotação de 90º no eixo do x. Determine as novas coordenadas do prisma após essa rotação.

$\theta = 90$



$$R_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \xrightarrow{\theta = 90} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{array}{c} \begin{matrix} A & B & C & D & E & F & G & H \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Quando $\theta = 90°$
▸ valores de x n̄ se alteram
▸ valores de $y \neq$
▸ valores de $z \neq$

$R_x(\theta) \cdot P$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} A' & B' & C' & D' & E' & F' & G' & H' \end{matrix} \end{array}$$

OBS: É possível criar uma **única matriz de rotação 3D** que combine rotações em torno dos eixos x, y e z simultaneamente. Isso é feito multiplicando as três matrizes de rotação correspondentes em uma **ordem específica**. Nesse caso, multiplica-se na ordem desejada as matrizes de rotações e cria-se a chamada matriz composta. Por exemplo, caso a rotação siga a ordem de rotação x, depois y, e depois z, temos que a matriz composta é calculada por $R = R_z(\theta) \cdot R_y(\theta) \cdot R_x(\theta)$.

CUIDADO: No contexto de álgebra linear, quando aplicamos várias transformações (matrizes) a um vetor, a multiplicação ocorre da **direita para a esquerda**, porque o vetor é multiplicado por essa cadeia de transformações:

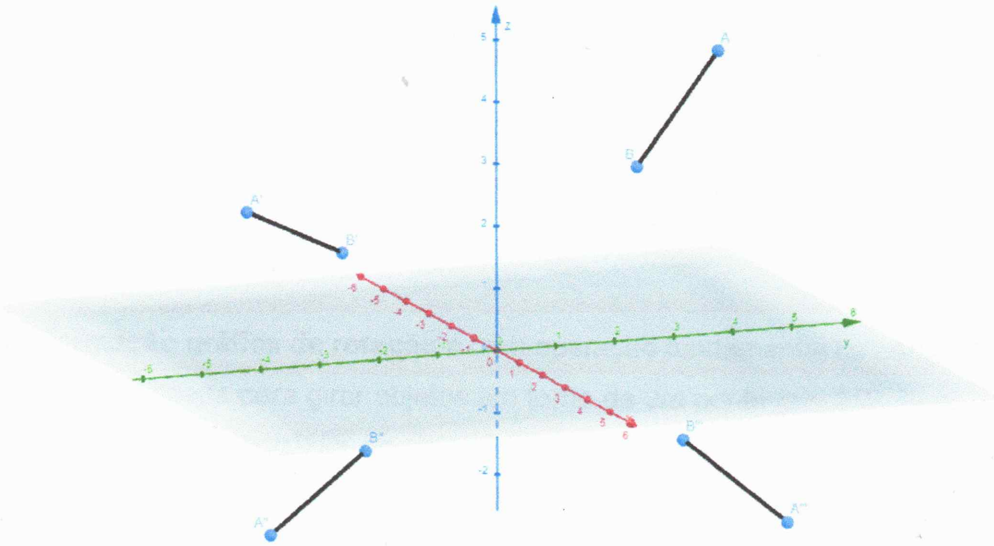
$$P' = R_z(\theta) \cdot \left(R_y(\theta) \cdot (R_x(\theta) \cdot P)\right)$$

ou seja,

- Primeiro o vetor P é transformado por R_x;
- O resultado é transformado por R_y;
- E por fim, transformado por R_z;

📌 **Ordem importa!** A multiplicação de matrizes **não é comutativa**. A ordem define se você aplica a rotação em x, depois y, depois z, ou em outro arranjo.

Exemplo 3. Determine a matriz de rotação composta na $\boxed{\text{ordem } xyz}$ que rotaciona o segmento de reta $\overline{AB}$ formado pelos pontos $A = (2,3,5)$ e $B = (1,2,3)$, 90º em cada eixo coordenado. Em seguida, determine as coordenadas do segmento após os movimentos de rotação.



$$R = R_z(\theta) \cdot R_y(\theta) \cdot R_x(\theta)$$

$$R_{xy} \blacktriangleright R_y(\theta) \cdot R_x(\theta)$$

$$= \begin{pmatrix} \cos 90 & 0 & \sin 90 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin 90 & 0 & \cos 90 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 90 & -\sin 90 \\ 0 & \sin 90 & \cos 90 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{R_{xy} = R_y(\theta) \cdot R_x(\theta)}$$

$$R \blacktriangleright R_z(\theta) \cdot R_{xy}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos 90 & -\sin 90 & 0 \\ \sin 90 & \cos 90 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{Matriz de rotação composta } R(\theta)}$$

$$P' = R(\theta) \cdot P$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{array}{cc} A & B \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$P' = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \\ A' \quad B' \end{array}$$