3. Matrizes

Uma matriz **IDENTIDADE** $n \, x \, n$ é representada por I_n, se for formada pelos valores 1 na diagonal principal, e ZEROS nos demais elementos.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Assim, se $A = [a_{ij}]$, é uma matriz $n \, x \, n$ qualquer, a seguinte relação é válida.

$$A \cdot I_n = I_n \cdot A = A$$

Exemplo 1. Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, prove a relação que $\boxed{A \cdot I_n = A}$

$A = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \quad I_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \\ -1 \cdot 1 + 3 \cdot 0 & -1 \cdot 0 + 3 \cdot 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$$

3.1 Matrizes Inversas

Matrizes inversas são amplamente utilizadas na computação em diversas áreas, especialmente em computação gráfica, inteligência artificial, criptografia e solução de sistemas lineares. Por exemplo, na renderização de imagens 3D, matrizes são usadas para realizar transformações como translação, rotação e escalonamento. A matriz inversa é necessária para operações como encontrar a posição original de um ponto após uma transformação. Ou ainda, no treinamento de redes neurais e modelos estatísticos, matrizes inversas são usadas em cálculos de regressão linear, como na regressão de mínimos quadrados ordinários.

Definição: seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz $\underbrace{n \, x \, n}_{\text{quadrada}}$. Se existir uma matriz B, tal que $\boxed{AB = BA = I_n}$, então B é a matriz inversa de A.

Assim, escrevemos $B = A^{-1}$ (Lê-se: inversa de A). Se a matriz quadrada A tem inversa, então A é não singular. Se A não tem inversa, então A é singular.

$$\boxed{A \cdot A^{-1} = I_n}$$

Exemplo 2. Prove que as matrizes a seguir são matrizes inversas.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$A \cdot B = I$

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3\cdot 1+(-2\cdot 1) & 3\cdot 2+(-2)\cdot 3 \\ -1\cdot 1+1\cdot 1 & -1\cdot 2+1\cdot 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \therefore B = A^{-1}$$

3.2 Algoritmo de Inversão. Processo prático para determinar a matriz inversa.

Para encontrar a inversa de uma matriz invertível A, utilize uma sequência de operações elementares com linhas que reduza A à identidade e depois efetue a mesma sequência de operações em I_n para obter A^{-1}. Ou seja, vamos juntar a matriz identidade à direita de A, $[A|I]$, e efetuar as operações com linhas dessa matriz até que o lado esquerdo esteja reduzido a I. Essas operações converterão o lado direito em A^{-1}, de modo que a matriz final terá a forma $[I|A^{-1}]$.

Operações ementares com linhas são:

- Multiplicar uma linha por uma constante não nula;
- Trocar duas linhas entre si;
- Somar uma constante c vezes uma linha a uma outra linha;

$$|A \mid I| \to |I \mid A^{-1}|$$

Exemplo 3. Determine a matriz inversa utilizando o algoritmo da inversão.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$A^{-1} = ?$

$$\begin{array}{c} L_1: \\ L_2: \end{array} \left|\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right| \xrightarrow{\text{OBJETIVO}} \left|\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & ? & ? \\ 0 & 1 & ? & ? \end{array}\right|$$

PIVÔ

▷ $L_1 \Rightarrow L_1 + L_2$ ▷ $\left|\begin{array}{cc|cc} \boxed{1} & 7 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right|$

▷ $L_2 \Rightarrow L_2 + L_1$ ▷ $\left|\begin{array}{cc|cc} 1 & 7 & 1 & 1 \\ 0 & 11 & 1 & 2 \end{array}\right|$

▷ $L_2 \Rightarrow L_2/11$ ▷ $\left|\begin{array}{cc|cc} 1 & 7 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1/11 & 2/11 \end{array}\right|$

▷ $L_1 \Rightarrow L_1 - 7\cdot L_2$ ▷ $\left|\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{4}{11} & \frac{-3}{11} \\ 0 & 1 & \frac{1}{11} & \frac{2}{11} \end{array}\right|$ ▷ Matriz Inversa (A^{-1})

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

PIVO

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

= ▷ $L_2 \Rightarrow L_2 - 2\cdot L_1$

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right|$$

= ▷ $L_3 \Rightarrow L_3 - L_1$

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right|$$

= ▷ $L_1 \Rightarrow L_1 - 2\cdot L_2$ e $L_3 \Rightarrow L_3 + 2\cdot L_2$

$$\begin{array}{c} L_1 \\ \\ L_3 \end{array} \left|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 9 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right|$$

precisa ser 1

= ▷ $L_3 \Rightarrow L_3/(-10)$

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 9 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & -1/5 & -1/10 \end{array}\right|$$

= ▷ $L_1 \Rightarrow L_1 - 9\cdot L_3$ e $L_2 \Rightarrow L_2 + 3\cdot L_3$

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{5} & \frac{9}{10} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{2} & \frac{2}{5} & \frac{-3}{10} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{5} & \frac{-1}{10} \end{array}\right|$$

▷ A^{-1}

Lista 2. Matrizes Inversas

1. Dadas as matrizes A e B, prove que elas são inversas uma da outra, realizando as operações $A \cdot B$ e $B \cdot A$.

$a)\ A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\ B = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

$b)\ A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix}\ B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{7}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$

2. Dadas as seguintes matrizes A, determine sua matriz inversa A^{-1}, utilizando o algoritmo de inversão.

$a)\ A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

$b)\ A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$

$c)\ A = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$

$d)\ A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

$e)\ A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$f)\ A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

$g)\ A = \begin{bmatrix} -1 & -4 & -2 \\ 2 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

$h)\ A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$i)\ A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

Respostas. Número 2.

a) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

b) $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{1}{10} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$

c) $A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

$d)\ A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{10} & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{10} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

$e)\ A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{7}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{5}{2} \end{bmatrix}$

$f)\ A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -2 & -\frac{7}{2} & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$

$e)\ A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -\frac{3}{5} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{10} & \frac{3}{10} \end{bmatrix}$

$f)\ A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & \frac{5}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{5}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

$g)\ A^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -10 & 0 & 7 & -2 \\ 7 & -15 & 0 & 11 & -3 \\ -6 & 12 & 1 & -9 & 3 \\ 3 & -5 & 0 & 4 & -1 \\ -2 & 4 & 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}$