13/05/2025

INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
RIO GRANDE DO SUL
Campus Erechim

Curso Superior de Análise e Desenvolvimento de Sistemas - Prof: Andre Luiz Bedendo – Matemática Discreta

8. Aplicações de Matrizes em Transformações Gráficas

8.1 Transformações Compostas

Uma **transformação gráfica composta** é o resultado da aplicação **sequencial** de duas ou mais transformações geométricas sobre uma figura. A ordem das transformações importa, pois as operações **não são comutativas** (ou seja, mudar a ordem muda o resultado final). No contexto de transformações gráficas (principalmente em **computação gráfica** e **álgebra linear**), usamos **coordenadas homogêneas**. Isso permite representar **todas as transformações afins** (translação, rotação, escala, reflexão, cisalhamento) em **uma única matriz 3×3 (2D)** ou **4×4 (3D)**.

A ideia é **multiplicar as matrizes individuais de cada transformação na ordem desejada**, e o resultado será uma **única matriz composta**. Essa matriz final pode ser aplicada a todos os pontos do objeto com **apenas uma multiplicação matricial**.

Nas aulas anteriores vimos que:

- Translação: TR: desloca a figura para outra posição sem alterar sua forma ou orientação;
- Reflexão: RF: Espelha a figura em relação a um eixo (em 2D) ou a um plano (em 3D);
- Rotação: $R(\theta)$: gira a figura em torno de um ponto (2D) ou eixo (3D);

IMPORTANTE: A matriz de Transformação Composta TC é obtida pela multiplicação de cada matriz de transformação na ordem desejada seguindo a regra da multiplicação matricial **da direita para a esquerda.**

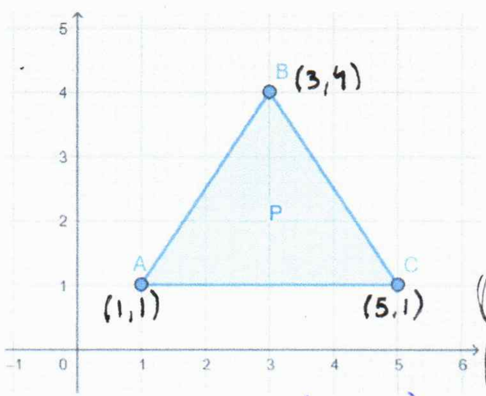
Exemplo 1. A região triangular a seguir será transformada por uma rotação de $\boxed{90°}$ em torno da origem, seguida de uma reflexão no eixo x, e uma translação de 3 unidades para a direita e 2 unidades para cima no plano cartesiano. Determine as novas coordenadas dos vértices (posições no plano) do triangulo após essa sequência de transformações.

$\cos 90 = 0$
$\sin 90 = 1$

$\theta = 90°$

▸ RF_x

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



① Rotação
② Reflexão
③ Translação

$$TC = TR \cdot RF_x \cdot R(\theta)$$

▸ $RF_x \cdot R(\theta)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

▸ $R(\theta)$

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\theta = 90°$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

▸ $TR \cdot (RF_x \cdot R(\theta)) = TC$

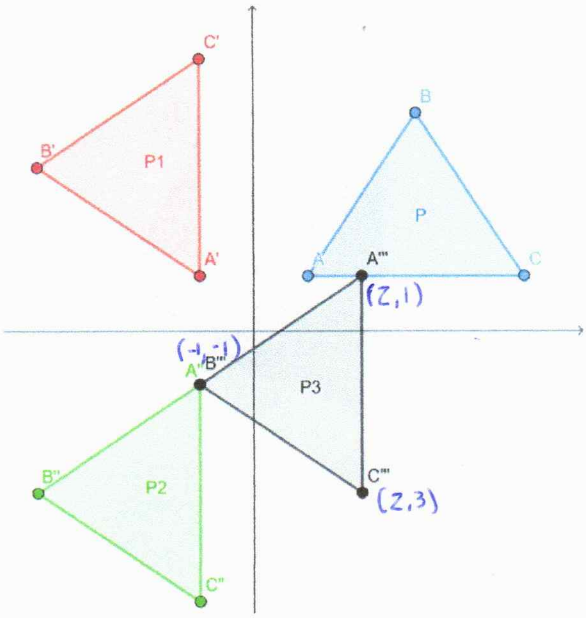
$$TC = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{TC = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

▸ TR

(3, 2)
a b

$$TR = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3,2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



• Matriz dos pontos do triângulo

$$P = \begin{array}{c} \begin{matrix} A & B & C \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$P''' = TC \cdot P$$

$$P''' = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P''' = \begin{array}{c} \begin{matrix} A''' & B''' & C''' \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

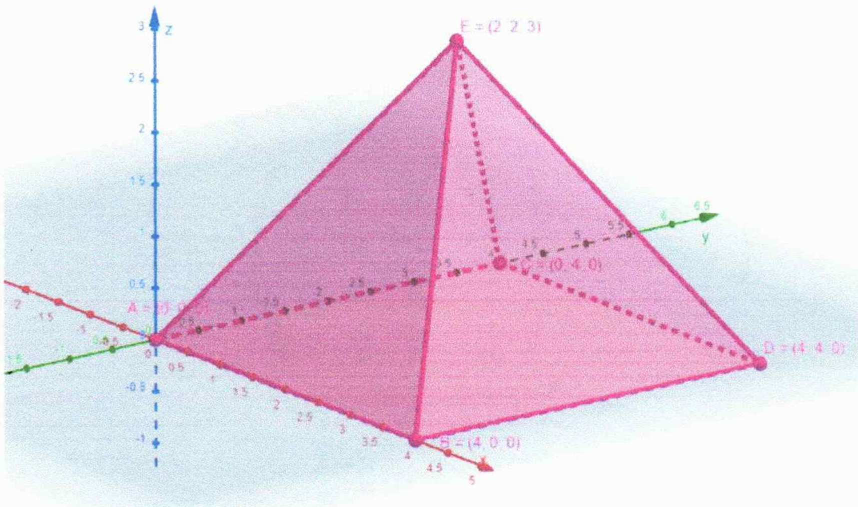
Exemplo 2. A pirâmide formado pelos pontos A, B, C, D, E a seguir será reposicionada no espaço 3D seguindo a seguinte sequência de transformações:

1° → Rotação 90° eixo x

2° → Translação (-3, -7, 3)

- Rotação de 90º em relação ao eixo x;
- Translação na ordem de $(-3, -7, 3)$;

Determine as novas coordenadas da posição da pirâmide após essa transformação gráfica.



$$R_x(\theta)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\theta = 90$$

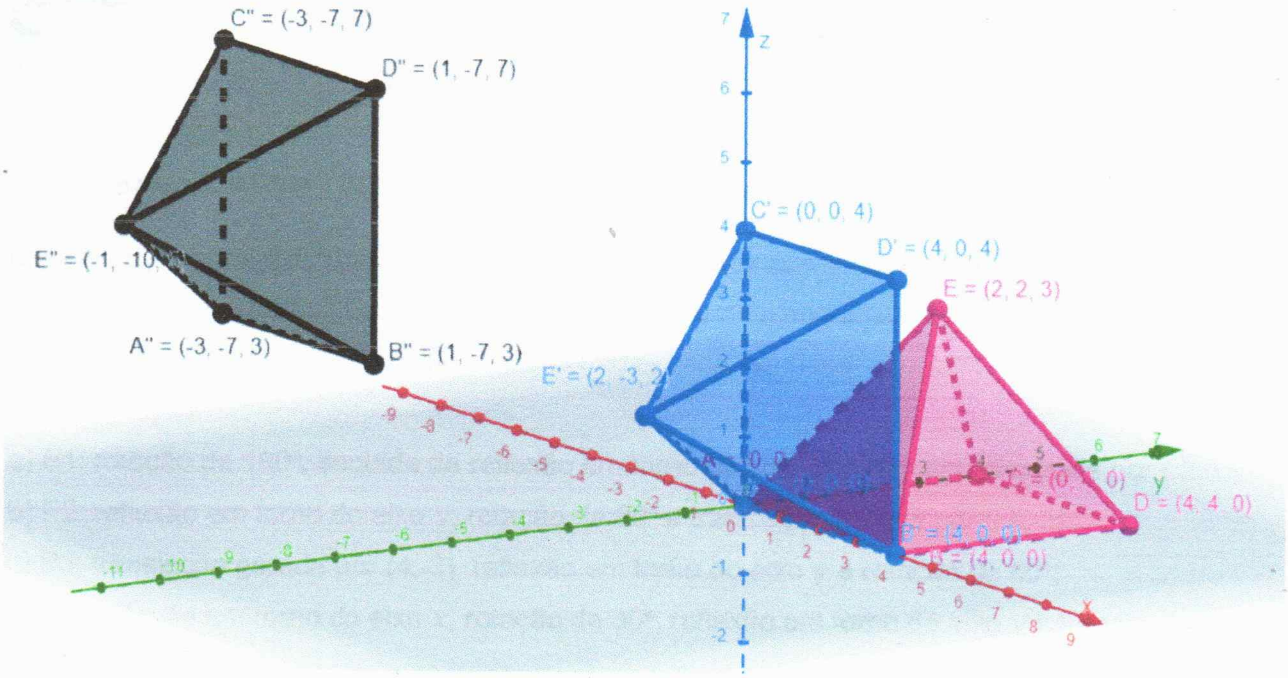
$$R_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$TR$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & 0 & T_y \\ 0 & 0 & 1 & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$(-3, -7, 3)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



• Matriz dos pontos da pirâmide (P)

$$P = \begin{array}{c} \begin{matrix} A & B & C & D & E \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$TC = TR \cdot R_x(\theta)$$

$$TC = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$TC = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{Matriz de transformação composta}}$$

$$P'' = TC \cdot P$$

$$P'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P'' = \begin{array}{c} \begin{matrix} A'' & B'' & C'' & D'' & E'' \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} -3 & 1 & -3 & 1 & -1 \\ -7 & -7 & -7 & -7 & -10 \\ 3 & 3 & 7 & 7 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Lista 8. Transformações Gráficas Compostas (Para valores não inteiros, utilize 3 casas decimais).

1. Os polígonos $P1, P2, P3$ e $P4$ serão reposicionadas pela sequência de transformações dada em cada item. Determine as novas coordenadas dos vértices de cada polígono após essa transformação.

a) P1: rotação de 180º, seguida de reflexão em torno do eixo x, e translação gerada por (-2,5);

b) P2: reflexão em torno do eixo y, rotação de 90º e translação gerada por (-1,-3);

c) P3: translação gerada por (4,-3), reflexão em torno do eixo y e rotação de 60º;

d) P4: reflexão em torno do eixo x, rotação de 30º, reflexão em torno do eixo y e translação gerada por (4,3);

e) P5: rotação de 90º, translação gerada por (-4,1), reflexão em torno do eixo y e rotação de 180º;

2. **Interface de Mapeamento em um Sistema de Drones.** Você está desenvolvendo um painel de controle para monitoramento de drones autônomos em uma aplicação web que exibe em tempo real a posição e orientação dos drones em um mapa 2D. Cada drone envia sua posição relativa (em coordenadas locais) e orientação (ângulo em graus), além de um identificador de sua região de atuação (por exemplo, área urbana, rural ou industrial), o que define o eixo de simetria do mapa onde ele deve ser espelhado. Para exibir corretamente a posição dos drones na interface gráfica, você precisa realizar uma transformação gráfica composta que:

1. **Rotacione o drone** de acordo com o seu ângulo de orientação em torno da origem local;
2. **Reflita** a posição e orientação do drone no eixo y (caso a região seja do tipo "industrial");
3. **Translade** a posição para as coordenadas globais do mapa, considerando o ponto de origem da região correspondente.

Calcule a posição final transformada do drone no sistema de coordenadas global, aplicando as transformações na ordem correta. Dados do drone: Posição local do drone: $P = (10,5)$;

- Orientação: $\theta = 30$;
- Tipo de região: **industrial** → requer reflexão no eixo y;
- Origem da região industrial no mapa: $(x, y) = (100,200)$;

3. **Manipulação de Peças em um Simulador 3D de Montagem Industrial.** Você está desenvolvendo um simulador 3D de montagem de peças industriais, onde o usuário pode reposicionar, rotacionar e alinhar componentes 3D sobre uma base.

Um dos blocos padrão (com centro inicial no ponto $P = (2,3,4)$) precisa ser posicionado corretamente para a próxima etapa da montagem. O processo envolve:

1. Rotação de 90° em torno do eixo z para alinhar a face correta.

2. Reflexão em relação ao plano xy;
3. Translação do bloco para a posição final no espaço $3D$: $(10,5,7)$;

Determine a posição final transformada do ponto após aplicar as transformações em ordem.

4. **Alinhamento de Modelo Médico em Realidade Aumentada.** Você está desenvolvendo um aplicativo de realidade aumentada para estudantes de medicina, que exibe um modelo 3D do coração humano sobreposto ao peito de um paciente visto pela câmera. No sistema de coordenadas do modelo 3D, o coração está originalmente posicionado com seu centro em $P = (-2,0,0)$. Para alinhar corretamente o modelo ao corpo do paciente, algumas transformações precisam ser aplicadas ao coração virtual. Calcule a posição final do ponto P após as seguintes transformações:

1. Rotação de 45° em torno do eixo y, para ajustá-lo ao ângulo de visão lateral do paciente.
2. Rotação de 90° em torno do eixo x, para alinhar com a inclinação do tronco do paciente deitado.
3. Reflexão no plano xy, pois a câmera está invertendo o eixo z.
4. Translação para posicionar o coração no espaço global da câmera em (5,8,3);

Calcule a posição final do ponto P após todas as transformações compostas.

5. O segmento de reta formado pelos pontos $A = (1,3,5)$ e $B = (-2,-3,4)$ está posicionado no espaço 3D. Calcule as novas coordenadas deste pontos em cada item após serem realizadas as seguintes transformações na ordem dada.

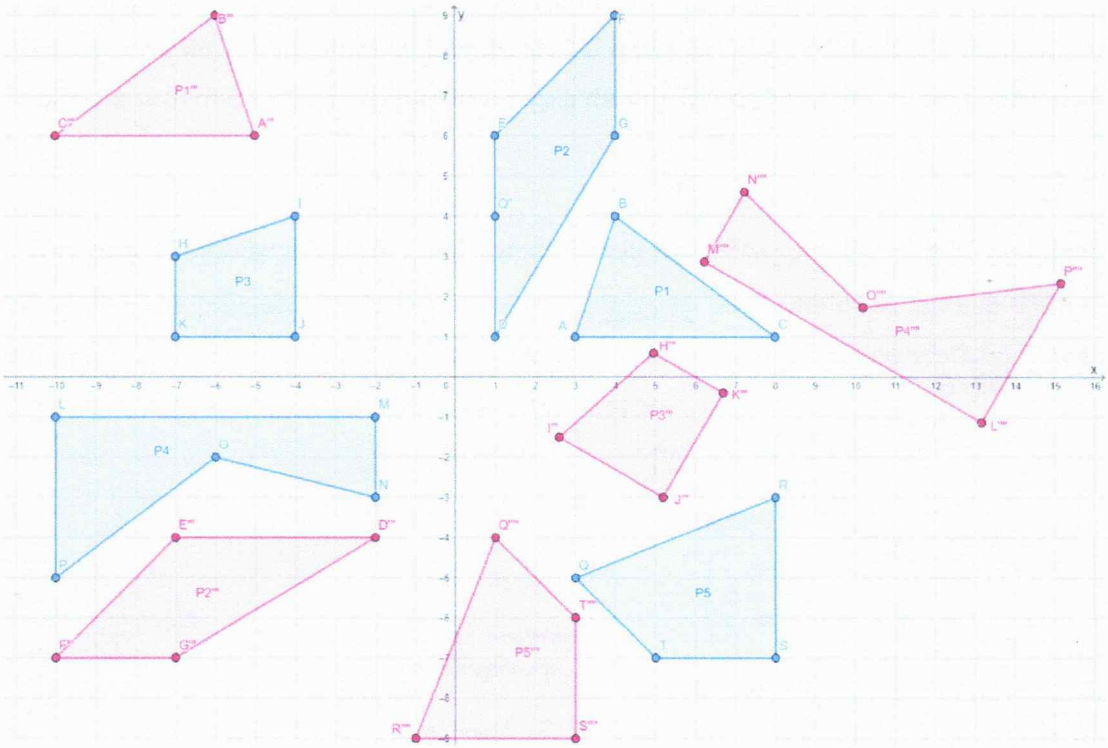
a) rotação de 45º no eixo y, translação por $(-3,-2,1)$, e uma reflexão em torno do plano xy;

b) reflexão em torno do plano xz, rotação de 30º no eixo z, e uma translação por $(-1,2,5)$;

c) translação por $(-1,-2,1)$, seguido de uma rotação de 90º no eixo y, e uma reflexão no plano yz;

Respostas:

Número 1:



Número 2: $(93,840\,;\ 209,330)$ Número 3: $(7,3,11)$ Número 4: $(3,586\,;\ 6,586\,;\ 3)$

Número 5: $a)\ A = (1,242\,;\ 1\,;\ -1,828)$ $B = (-1,585\,;\ -5\,;\ -3,242)$ $b)\ A = (1,366\,;\ 0,098\,;\ 10)$
$B = (-4,232\,;\ 3,598\,;\ 9)$ $c)\ A = (-6,1,0)$ $B = (-5,-5,3)$