2. Matrizes

Uma **matriz** é uma tabela de números organizada em **linhas e colunas**. Ela é usada para representar e manipular dados de forma estruturada, facilitando cálculos e transformações matemáticas.

Definição. Sejam m e n números inteiros positivos. Uma matriz $m\ x\ n$ (lê-se: matriz m por n) é uma tabela retangular de m linhas e n colunas de números reais.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

diagonal principal (somente em matrizes quadradas)

Usaremos também a nomenclatura compacta $[a_{ij}]$ para representar toda essa matriz.

Cada elemento ou entrada a_{ij} da matriz usa a notação de duplo índice. O da linha é o primeiro índice, i, e o da coluna é o segundo índice, j. O elemento a_{ij} está na i-ésima linha e j-ésima coluna. Em geral, a ordem de uma matriz $m\ x\ n$ é simplesmente definida por m linhas e n colunas.

Exemplos:

$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ 2x3 $\quad$ $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \\ 5 & 1 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$ 3x3 $\quad$ $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$ 4x1 $\quad$ $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ 1x4

As Matrizes são fundamentais em diversas áreas da computação, como:

- **Processamento de Imagens e Gráficos** → Imagens são representadas como matrizes de pixels, onde cada número indica a cor ou intensidade da luz.
- **Inteligência Artificial e Machine Learning** → Redes neurais utilizam matrizes para armazenar e processar grandes quantidades de dados.
- **Banco de Dados e Algoritmos** → Matrizes são usadas para organizar dados e melhorar operações em sistemas computacionais.
- **Criptografia e Segurança** → Códigos e mensagens secretas podem ser manipulados por operações matriciais para garantir a segurança digital.
- **Simulações e Jogos** → Físicas de jogos e transformações gráficas (rotação, escalonamento) são feitas com matrizes.

Exemplo 1. Construa uma matriz quadrada de ordem 3, $A = [a_{ij}]$, definida pela seguinte lei de formação, $\boxed{a_{ij} = i \cdot j + i^2.}$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 8 & 10 \\ 12 & 15 & 18 \end{bmatrix}$$

2.1 Operações com Matrizes

Sejam duas matrizes $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ e $C = [c_{ij}]$ de ordem $m \, x \, n$, e k um valor escalar $\epsilon \, \mathbb{R}$. Definimos:

- Soma de matrizes: $C = (A + B)$:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \qquad \text{para todo } 1 \leq i \leq m \;\; e \; 1 \leq j \leq n$$

Exemplo 2.

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}_{2\times3} \qquad B = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \end{vmatrix}_{2\times3}$$

$$C = A + B$$

$$C = \begin{vmatrix} 2-1 & 3+0 & 1+2 \\ 0-1 & 2+5 & 3+2 \end{vmatrix}$$

$$C = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -1 & 7 & 5 \end{vmatrix}_{2\times3}$$

- Diferença de matrizes: $C = (A - B)$

$$\cancel{c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}} \qquad \text{para todo } 1 \leq i \leq m \;\; e \; 1 \leq j \leq n$$

$$c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$$

Exemplo 3.

$$A = \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}_{2\times2} \qquad B = \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}_{2\times2}$$

$$C = A - B$$

$$C = \begin{vmatrix} \overbrace{-1-(-3)}^{-1+3} & \overbrace{4-(-2)}^{4+2} \\ 2-1 & 0-5 \end{vmatrix}$$

$$C = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & -5 \end{vmatrix}$$ Diag. principal

- Multiplicação por escalar: $C = k \cdot A$

  $c_{ij} = k \cdot a_{ij}$ para todo $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$

Exemplo 4.

$$C = 2 \cdot A$$

$$A = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} \qquad C = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 6 \\ 8 & 6 & 2 \end{vmatrix}$$

- Transposição: dada a matriz de ordem $m \times n$ $A = [a_{ij}]$, definimos sua transposta como,

  $\boxed{A^T = [a_{ji}],}$ de ordem $m \times n$

Exemplo 5.

$A^T \Rightarrow$ Trocar as posições ("linha vira coluna")

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}_{2\times3} \qquad A^T = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}_{3\times2}$$

$$B = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}_{3\times3} \qquad B^T = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix}_{3\times3}$$

- Multiplicação de Matrizes: Seja A uma matriz de ordem $m \times p$ e B uma matriz $p \times n$. Definimos o produto AB como a matriz $C = [c_{ij}]$, de ordem $m \times n$, tal que c_{ij} é o produto da linha i da matriz A pela coluna j da matriz B. Multiplicamos as entradas correspondentes da linha e da coluna e então somamos os produtos resultantes. $A_{m \times \underset{\text{coluna}}{p}} \quad B_{\underset{\text{linha}}{p} \times n} \rightarrow C_{m \times n} = A \cdot B$

Exemplo 6. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \\ 5 & 1 & 2 \end{bmatrix}_{3\times3}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}_{3\times2}$, determine a matriz C resultante de $A \cdot B$.

$$C = \underset{A}{\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix}_{3\times3}} \cdot \underset{B}{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}}_{3\times2}$$

$$C = \begin{vmatrix} (-1)\cdot1 + 0\cdot2 + 1\cdot(-1) & (-1)\cdot0 + 0\cdot3 + 1\cdot4 \\ 3\cdot1 + (-2)\cdot2 + 5\cdot(-1) & 3\cdot0 + (-2)\cdot3 + 5\cdot4 \\ 5\cdot1 + 1\cdot2 + 2\cdot(-1) & 5\cdot0 + 1\cdot3 + 2\cdot4 \end{vmatrix}$$

$$C = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -6 & 14 \\ 5 & 11 \end{vmatrix}_{3\times2}$$

OBS: Obrigatório que o número de ~~colunas~~ colunas de A seja igual ao número de linhas da matriz B.

Exemplo 7. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 5 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \\ 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, determine a matriz $C = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & -2 \end{bmatrix}$, determine a matriz D resultante da operação $A \cdot B + C^T$.

$A_{3\times 4}$ $B_{4\times 2}$

$=, \therefore$ é possível multiplicar

$\underbrace{A \cdot B}_{} + C^T = D$

$E + C^T = D$

$A \cdot B = E$

- **Traço de Matrizes**: Seja A for uma matriz quadrada, então o traço de A, denotado por $tr(A)$, é definido pela soma das entradas da diagonal principal de A. O traço de A não é definido se A não for uma matriz quadrada.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad tr(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33} + \cdots a_{mn}$$

sendo A quadrada $m = n$.

Exemplo 8. Determine o valor do traço das seguintes matrizes.

$A = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 13 \\ 3 & 1 & 5 \\ 5 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ $\qquad$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 30 \\ 1 & 27 \end{pmatrix}$

$tr(A) = -4 + 1 + 2$

$= \boxed{-1}$

$tr(B) = 2 + 27$

$= \boxed{29}$

INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
RIO GRANDE DO SUL
Campus Erechim

Curso Superior de Análise e Desenvolvimento de Sistemas - Prof: Andre Luiz Bedendo – Matemática Discreta

Lista 1. Matrizes e operações elementares

1. Dadas as matrizes A e B em cada item, determine a matriz C resultante das seguintes operações:

$(a)\ A+B$; $(b)\ A-B$; $(c)\ 3A$; $(d)\ 2A-3B$

$I1)\ A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ -1 & 5\end{bmatrix}\ B=\begin{bmatrix}1 & -3\\ -2 & -4\end{bmatrix}$ $\quad I2)\ A=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 2\\ 4 & 1 & -1\\ 2 & 0 & 1\end{bmatrix}\ B=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 2\\ 4 & -3 & -1\end{bmatrix}$

$I3)\ A=\begin{bmatrix}-3 & 1\\ 0 & -1\\ 2 & 1\end{bmatrix}\ B=\begin{bmatrix}4 & 0\\ -2 & 1\\ -3 & -1\end{bmatrix}$ $\quad I4)\ A=\begin{bmatrix}5 & -2 & 3 & 1\\ -1 & 0 & 2 & 2\end{bmatrix}\ B=\begin{bmatrix}-2 & 3 & 1 & 0\\ 4 & 0 & -1 & -2\end{bmatrix}$

2. Considere as seguintes matrizes $A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ 3 & 2 & 1\\ 4 & -2 & 2\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 4\\ 0 & 5\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}2 & 1 & -3\\ 2 & 2 & -5\end{bmatrix}, D=\begin{bmatrix}1\\ -2\\ 3\end{bmatrix}$, se possível determine a matriz resultante das seguintes operações.

a) $A\cdot B$ b) $B+C^T$ c) $B\cdot C$ d) $(A\cdot B)+C^T$ e) $D^T\cdot A$

f) $\frac{1}{2}A\cdot C^T$ g) $(5A+A^T)\cdot C^T$ h) $(D^T\cdot B)\cdot C$ i) $-2C\cdot D$ j) $(B\cdot 3C)+A$

3. Dadas as matrizes A e B, determine se possível a matriz C resultante das operações: $(a)\ AB$; $(b)\ BA$. Em seguida, determine se possível o valor do traço de cada matriz C.

$I1)\ A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 4 & 1 & -1\\ 2 & 0 & 1\\ 2 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 3\end{bmatrix}\ B=\begin{bmatrix}-1 & 3 & 2 & 1 & 1\\ 2 & 1 & -1 & 5 & 6\\ -3 & 1 & 1 & 1 & 4\end{bmatrix}$ $\quad I2)\ A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 3\\ 2 & -1 & 1 & 2\end{pmatrix}\ B=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ -1 & 0 & 4\\ -5 & 0 & 6\\ 1 & 5 & -3\end{pmatrix}$

Respostas. Número 2.

a) $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 5 & 19\\ 2 & 10\end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix}3 & 4\\ 2 & 6\\ -3 & 0\end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix}6 & 5 & -13\\ 10 & 9 & -23\\ 10 & 10 & -25\end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix}3 & 2\\ 6 & 21\\ -1 & 5\end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix}8 & -11 & 4\end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix}\frac{3}{2} & 1\\ \frac{5}{2} & \frac{5}{2}\\ 0 & -3\end{bmatrix}$

g) $\begin{bmatrix}10 & 0\\ 31 & 37\\ -5 & -38\end{bmatrix}$ h) $\begin{bmatrix}16 & 17 & -42\end{bmatrix}$ i) $\begin{bmatrix}18\\ 34\end{bmatrix}$ j) $\begin{bmatrix}20 & 14 & -39\\ 33 & 29 & -68\\ 34 & 28 & -73\end{bmatrix}$

Número 3.

$I1)\ (a)\begin{bmatrix}-7 & 5 & 4 & 3 & 9\\ 1 & 12 & 6 & 8 & 6\\ -5 & 7 & 5 & 3 & 6\\ -7 & 11 & 5 & 15 & 26\\ -7 & 4 & 2 & 8 & 18\end{bmatrix}\ tr=43\quad (b)\begin{pmatrix}17 & 6 & 3\\ 14 & 17 & 35\\ 5 & 7 & 9\end{pmatrix}\ tr=43\quad I2\ (a)\begin{pmatrix}2 & 16 & -3\\ -2 & 12 & 0\end{pmatrix}\ tr=\nexists$ (b) $\nexists$