INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
RIO GRANDE DO SUL
Campus Erechim

Curso Superior de Análise e Desenvolvimento de Sistemas - Prof: Andre Luiz Bedendo – Matemática Discreta

4. Determinantes

Os determinantes de matrizes desempenham um papel fundamental na computação e no desenvolvimento de sistemas, sendo amplamente utilizados em áreas como computação gráfica, inteligência artificial, segurança da informação e análise de redes. Na computação gráfica, auxiliam na manipulação de imagens e animações por meio de transformações geométricas, como rotações e escalonamentos. Já na inteligência artificial e no aprendizado de máquina, são essenciais para a resolução de sistemas de equações e na otimização de algoritmos. Além disso, os determinantes têm aplicações em criptografia, garantindo a segurança de dados, e na análise de redes, contribuindo para a estabilidade e eficiência de sistemas computacionais. Seu uso é indispensável para o desenvolvimento de tecnologias inovadoras e para a solução de problemas complexos na ciência da computação.

Definição: O determinante de uma matriz é um número real associado às matrizes quadradas. Ele é calculado a partir dos elementos da matriz e pode ser interpretado geometricamente como um fator de escala para transformações lineares. Matematicamente, para uma matriz A, o determinante é representado como **det(A) ou |A|.**

4.1 Cálculo de Determinantes

- Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz quadrada de ordem 2. O determinante de A é calculado pelo produto dos elementos da diagonal principal menos o produto dos elementos da diagonal secundária.

principal

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \rightarrow \det(A) = a_{11} \cdot a_{22} - (a_{12} \cdot a_{21})$$

secundária

Exemplo 1.

$$A = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} \rightarrow \det(A) = 2 \cdot 3 - (-1 \cdot 5)$$

$$\det(A) = 6 - (-5)$$

$$\boxed{\det(A) = 11}$$

Exemplo 2. Resolva a seguinte equação.

$$\begin{vmatrix} x-2 & 6 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 2 \quad \text{det}$$

$$(x-2) \cdot 5 - (6 \cdot 3) = 2$$

$$5x - 10 - 18 = 2$$

$$5x = 30 \rightarrow \boxed{x = 6}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 6-2 & 6 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

- Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz quadrada de ordem 3. O determinante de A é calculado utilizando a regra de Sarrus.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \rightarrow \det(A) = \left| \begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array} \right|$$

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{13}a_{22}a_{31})$$

Exemplo 3.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|cc} 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{array} \right]$$

$\det(A) = 2\cdot 2(-1) + 1\cdot 3\cdot 2 + 0(-1)\cdot 1 - (2\cdot 2\cdot 0 + 1\cdot 3\cdot 2 + (-1)(-1)\cdot 1)$

$\det(A) = -4 + 6 + 0 - (0 + 6 + 1)$

$\det(A) = 2 - (7)$

$\boxed{\det(A) = -5}$

MATRIZ TRIANGULAR
- elementos "em baixo" da d. principal são 0.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

- Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz quadrada de ordem $n \geq 3$. O **método da triangulação** (ou **eliminação de Gauss**) é uma técnica eficiente para calcular o determinante de matrizes de ordem maior, transformando a matriz original em uma matriz **triangular superior** (ou inferior) — ou seja, uma matriz onde todos os elementos abaixo (ou acima) da diagonal principal são zero.

Passo a passo do método da triangulação:

1. **Transforme a matriz original em uma matriz triangular superior**, utilizando operações elementares nas linhas (trocas, multiplicações por escalar e somas entre linhas).
2. **Aplique as regras para as operações**, pois elas afetam o valor do determinante:
   compensar
   - **Troca de linhas:** muda o sinal do determinante (multiplica por -1).
   - **Divisão de uma linha por um escalar k:** multiplica o determinante por k.
   - **Somar/subtrair uma linha com outra:** não altera o valor do determinante.
3. Após triangular a matriz, **o determinante será o produto dos elementos da diagonal principal**, considerando os ajustes feitos com as operações anteriores.

OBS: Durante o processo, é aconselhável transformar os elementos da diagonal principal valores iguais a 1 (UM), com exceção do último elemento da diagonal principal.

Exemplo 4. Calcule o valor do determinante da matriz A.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 & -3 \\ 1 & 2 & 5 & 10 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & -1 & 6 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}$$

OPERAÇÕES det
×3 △
×(-1) □
×10 ◇

△ $L_1 = L_1/3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 5 & 10 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

$L_2 = L_2 - L_1$ & $L_4 = L_4 - L_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 11 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -4 & 7 \end{pmatrix}$$

$L_2 \leftrightarrow L_4$ □

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & 7 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 11 \end{pmatrix}$$

$L_3 = L_3 - 2L_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & 7 \\ 0 & 0 & 10 & -10 \\ 0 & 0 & 2 & 11 \end{pmatrix}$$

$L_3 = L_3/10$ ◇

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 11 \end{pmatrix}$$

$L_4 = L_4 - 2L_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 13 \end{pmatrix}$$

$\det(A) = 1\cdot 1\cdot 1\cdot 13\cdot(3\cdot(-1)\cdot 10)$

$= 13(-30)$

$\det(A) = -390$

INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
RIO GRANDE DO SUL
Campus Erechim

Curso Superior de Análise e Desenvolvimento de Sistemas - Prof: Andre Luiz Bedendo – Matemática Discreta

Lista 3. Determinantes

1. Calcule o valor do determinante das matrizes de acordo com o método mais apropriado.

$a)\begin{bmatrix}5 & 2\\ -1 & 2\end{bmatrix}$ $b)\begin{bmatrix}\frac{3}{2} & 1\\ 4 & -2\end{bmatrix}$ $c)\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 2\\ -1 & \frac{5}{3}\end{bmatrix}$ $d)\begin{bmatrix}-3 & 1\\ \frac{7}{5} & -2\end{bmatrix}$ $e)\begin{bmatrix}1 & -1\\ 12 & 5\end{bmatrix}$ $f)\begin{bmatrix}5 & \frac{3}{5}\\ 7 & \frac{9}{2}\end{bmatrix}$ $g)\begin{bmatrix}3 & -1\\ -8 & 2\end{bmatrix}$

$h)\begin{bmatrix}2 & -1 & 4\\ 3 & 5 & 0\\ -2 & 1 & 8\end{bmatrix}$ $i)\begin{bmatrix}-2 & 0 & 1\\ 1 & 6 & 0\\ -2 & -5 & 7\end{bmatrix}$ $j)\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\ 0 & 1 & -1\\ -5 & 5 & 1\end{bmatrix}$ $k)\begin{bmatrix}-1 & -1 & -3\\ -3 & 0 & -5\\ -2 & -7 & -1\end{bmatrix}$ $l)\begin{bmatrix}0 & -1 & 1\\ 8 & 10 & 3\\ -5 & 4 & 25\end{bmatrix}$

$m)\begin{pmatrix}3 & 5 & 5 & -3\\ 5 & 0 & 5 & 10\\ 0 & 5 & 1 & 1\\ 1 & 2 & -1 & 6\end{pmatrix}$ $n)\begin{pmatrix}2 & 3 & 3 & -1\\ 6 & 3 & 4 & 10\\ 1 & 2 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 5 & 6\end{pmatrix}$ $o)\begin{pmatrix}1 & 0 & 9 & 0\\ 4 & 2 & 3 & 10\\ 1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 2 & -1 & 2\end{pmatrix}$ $p)\begin{pmatrix}1 & 1 & -3 & -3\\ 5 & 2 & 4 & 0\\ 4 & 2 & 5 & 1\\ 1 & 3 & -1 & 2\end{pmatrix}$

2. Considere as matrizes a seguir, determine:

$A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 3 & 2 & 0\\ -2 & -2 & 1\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}1 & 3\\ -5 & 2\end{bmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2 & 1\\ 1 & 4 & 0 & 2\\ -2 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3 & 1\end{pmatrix}$ $D=\begin{bmatrix}5 & -1 & 3\\ 3 & 3 & 2\\ -2 & 1 & -1\end{bmatrix}$ $E=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -2 & 5\end{bmatrix}$

a) $det(A\cdot D)$ b) $det(C^{-1})$ c) $det(A+D)$ d) $det(C)$ e) $det(B\cdot E)$

f) $det(A)$ g) $det(D)$ h) $det(5A)$ i) $det(D\cdot D)$ j) $det(A\cdot D)$

3. Calcule o valor da incógnita em cada determinante.

$a)\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 2 & 4\\ 1 & -1 & x\end{vmatrix}=21$ $b)\begin{vmatrix}2 & 4 & 3\\ -1 & -2 & 4\\ a & 0 & 5\end{vmatrix}=22$ $c)\begin{vmatrix}-5 & 2 & 3\\ -1 & b & -2\\ 3 & -1 & 8\end{vmatrix}=-228$

Respostas:

Número 1: a) 12 b) -7 c) $\frac{17}{6}$ d) $\frac{23}{5}$ e) 17 f) $\frac{183}{10}$ g) -2
h) 156 i) -77 j) 31 k) -35 l) 297 m) -510 n) 117 o) -264
p) -63 Número 2: a) -3 b) $\frac{1}{5}$ c) 70 d) -5 e) 204
f) -1 g) 3 h) -125 i) 9 j) -3 Número 3: a) 3 b) 1 c) 5