Gabriel H. Schaeffer

INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
RIO GRANDE DO SUL
Campus Erechim

Curso Superior de Análise e Desenvolvimento de Sistemas - Prof: Andre Luiz Bedendo – Matemática Discreta

6. Aplicações de Matrizes em Transformações Gráficas

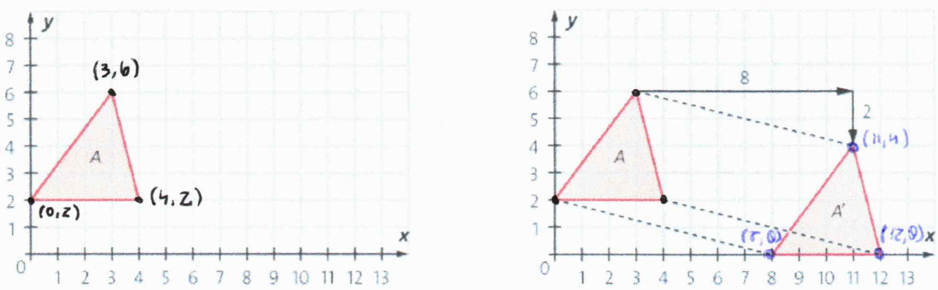
As imagens em uma tela de computador ou televisão de tecnologia mais moderna são na verdade formadas por pequenos pontos (pixels), elementos de uma matriz. Por exemplo, uma imagem de resolução 800 x 600 tem 800 vezes 600 = 480000 pixels distribuídos em 800 colunas e 600 linhas. Quando um programa gráfico altera a posição, reflete, rotaciona ou muda a escala da imagem, na verdade está mudando a posição dos pixels que a formam. Em computação gráfica isso tudo é feito por operações de matrizes. As matrizes em transformações gráficas são usadas para modificar a posição, orientação, forma ou tamanho de objetos em um plano ou espaço. Elas permitem representar essas transformações de forma matemática e eficiente, especialmente em computação gráfica. As principais aplicações são:

1. **Translação**: move um objeto de um ponto a outro.
2. **Reflexão**: espelha o objeto em relação a um eixo.
3. **Escala**: aumenta ou diminui o tamanho de um objeto.
4. **Rotação**: gira o objeto em torno de um ponto.
5. **Cisalhamento (Shear)**: distorce a forma de um objeto inclinando seus lados.

Essas transformações são feitas por multiplicação de matrizes, normalmente usando matrizes homogêneas (3x3 para gráficos 2D, 4x4 para 3D), o que permite combinar múltiplas transformações em uma única operação. São amplamente utilizadas em animações, jogos, modelagem 3D e design gráfico.

6.1 Translação

A translação move um ponto ou objeto no plano somando constantes às suas coordenadas. Se queremos mover um ponto $P(x, y)$ para uma nova posição $P'(x', y')$, usamos dois valores: a (quanto mover no eixo x) e b (quanto mover no eixo y). Observe a figura a seguir.



Vértices da região triangular A: (0, 2); (3, 6) e (4, 2). Vértices da região triangular A': (8, 0); (11, 4) e (12, 0).

Figura 6.1

As matrizes relacionadas à figura 6.1 são,

(0,2) (3,4) (4,2)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 2 \end{pmatrix} \quad e \quad A' = \begin{pmatrix} 8 & 11 & 12 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

a região triangular A sofreu uma translação dando origem a região triangular A'. Podemos usar a matriz coluna $\begin{pmatrix} 8 \\ -2 \end{pmatrix}$ para realizar essa translação.

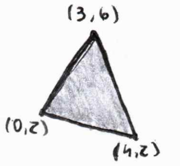
$$\begin{pmatrix} 8 \\ -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \to movemos\ 8\ unidades\ à\ direita\ ao\ longo\ de\ x, e\ depois \\ \to movemos\ 2\ unidades\ para\ baixo\ ao\ longo\ de\ y \end{matrix}$$

Assim, a fórmula de translação é dada por, $P' = T \cdot P$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Onde T é a matriz de translação, e P é um vetor coluna, ou ainda pode ser uma matriz onde cada coluna representa um ponto que será transladado.

Exemplo 1. Realize a translação da região triangular da figura 6.1, utilizando o vetor $(8, -2)$.



$$P = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(8,-2) \to T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{T \cdot P}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 11 & 12 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \underbrace{(8,0), (11,4), (12,0)}_{\text{Novas coords. do ▲}}$$

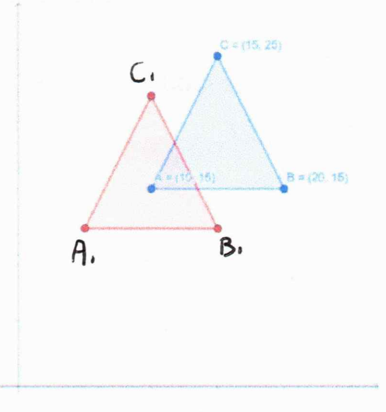
Se for somente translação, pode-se fazer a soma das coordenadas com a constante.

$(0,2)+(8,-2)$ → $(8,0)$

$(3,6)+(8,-2)$ → $(11,4)$

$(4,2)+(8,-2)$ → $(12,0)$

Exemplo 2. Uma equipe de desenvolvedores está criando uma aplicação web para visualização de dados georreferenciados em um sistema de coordenadas cartesiano simplificado, representando objetos como pontos, retângulos e polígonos. Durante a navegação no mapa, quando o usuário arrasta a tela, todos os elementos precisam ser reposicionados com base no vetor de deslocamento do movimento do mouse. Para isso, a aplicação utiliza matrizes para aplicar as transformações de forma otimizada em todos os objetos. Durante o uso do sistema, o usuário arrasta a tela 5 unidades para a esquerda e 3 unidades para baixo. Determine as novas coordenadas dos sensores após aplicar essa translação. $V=(-5,-3)$



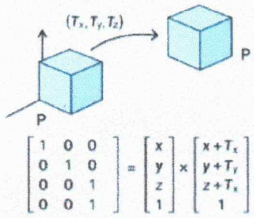
$A_1 = (10 + (-5), 15 + (-3)) \Rightarrow (5, 12)$

$B_1 = (20 + (-5), 15 + (-3)) \Rightarrow (15, 12)$

$C_1 = (15 + (-5), 25 + (-3)) \Rightarrow (10, 22)$

A **translação** é o movimento de um objeto de um ponto para outro no espaço, **sem mudar sua orientação** ou **forma** — basicamente, é "arrastar" o objeto de um lugar para outro. Em computação gráfica 3D, para fazer uma translação de forma eficiente (especialmente dentro de motores gráficos e pipelines de renderização), multiplicamos o ponto que desejamos mover $P = (x, y, z, 1)$ pela matriz de translação dada por,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & 0 & T_y \\ 0 & 0 & 1 & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Onde T_x, T_y e T_z são as distâncias que você deseja mover o objeto em cada eixo (X, Y e Z), obtendo o novo ponto transladado P'. Como a matriz de translação é homogênea, a operação fica simplificada a,

$$P' = (x + T_x, y + T_y, z + T_z, 1)$$

Exemplo 3. Imagine que temos um cubo localizado no ponto $P = (2,3,5)$ no espaço tridimensional. Agora, queremos transladá-lo para uma nova posição movendo-o: 4 unidades no eixo x, -2 unidades no eixo y e 7 unidades no eixo z. Determine as coordenadas no ponto transladado.

$T_x = 4$

$T_y = -2$

$T_z = 7$

$P' = (x + T_x, y + T_y, z + T_z)$

$P' = (2+4, 3-2, 5+7)$

$P' = (6, 1, 12)$

Exemplo 4. Em um projeto de análise de dados de voo de drone, registramos várias "waypoints" em um sistema global (por exemplo, em relação ao ponto de lançamento). Para simplificar cálculos locais (distâncias, rotações, visualizações), queremos definir um sistema de coordenadas onde a origem seja a primeira waypoint registrada. Você recebeu 3 waypoints (x,y,z), em metros no sistema global do drone.

$\to W_1 \Rightarrow (0,0,0)$

Ponto	x	y	z
W_1	100	200	50
W_2	120	210	60
W_3	110	220	55

Determine:

a) a matriz de translação T que leva W_1 à origem.

b) As novas coordenadas no sistema global após a translação;

a) $W_1 (100, 200, 50) \xrightarrow{+T} (0,0,0)$

$V = (-100, -200, -50)$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -100 \\ 0 & 1 & 0 & -200 \\ 0 & 0 & 1 & -50 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{W_1' (0,0,0)}$

b) $W_2 + V$

$W_2' (120 - 100, 210 - 200, 60 - 50)$

$\boxed{W_2' (20, 10, 10)}$

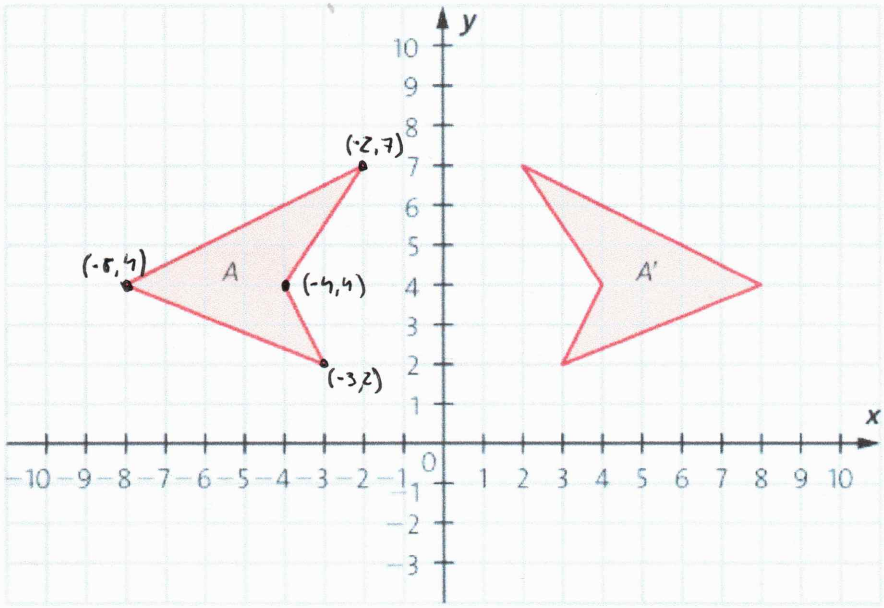
$W_3 + V$

$W_3' (110 - 100, 220 - 200,$

$\boxed{W_3' (10, 20, 5)}$

6.2 Reflexão

A reflexão é uma transformação geométrica que "espelha" pontos de uma figura a uma linha (em 2D), ou a um plano (em 3D). Observe o diagrama abaixo. A figura A sofreu uma reflexão em relação ao eixo y, dando origem à figura A'.



Vértices da figura A: $(-3, 2), (-4, 4), (-2, 7), (-8, 4)$ Vértices da figura A': $(3, 2), (4, 4), (2, 7), (8, 4)$

Figura 6.2

A **forma matricial** para reflexão depende do **eixo** em relação ao qual estamos refletindo. De modo geral, para se obter a reflexão em relação a um eixo no plano (2D), basta multiplicar a matriz de reflexão pela matriz associada a figura, onde:

$$M_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \; ; Matriz\ de\ reflexão\ sobre\ o\ eixo\ x;$$

$$M_y = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \; ; Matriz\ de\ reflexão\ sobre\ o\ eixo\ y;$$

Exemplo 5. Determine as coordenadas da imagem da figura 6.2 após a reflexão da figura A sobre o eixo do y.

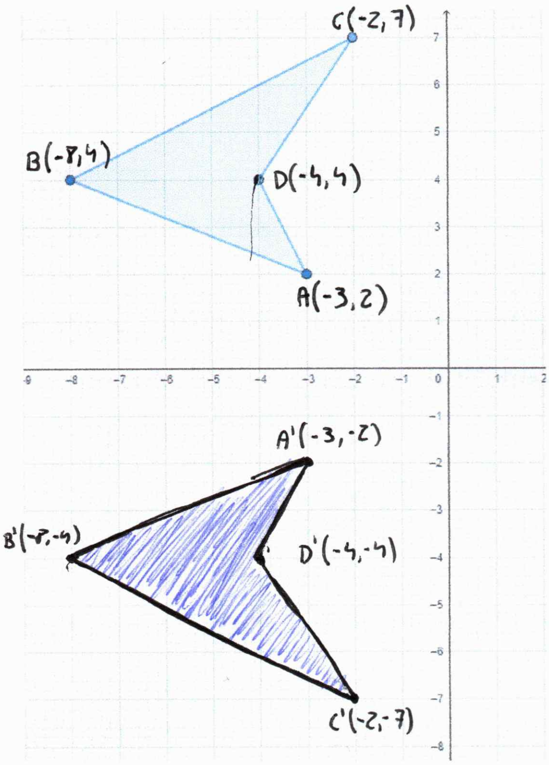
P pontos da Fig. A

$$M_y \cdot [P]$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -8 & -2 & -4 \\ 2 & 4 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \left.\begin{pmatrix} +3 & +8 & +2 & +4 \\ +2 & +4 & +7 & +4 \end{pmatrix}\right\} A'$$

Exemplo 6. Determine as coordenadas da imagem da figura 6.2 após a reflexão da figura A sobre o eixo do x. Represente graficamente essa figura após o movimento reflexão.

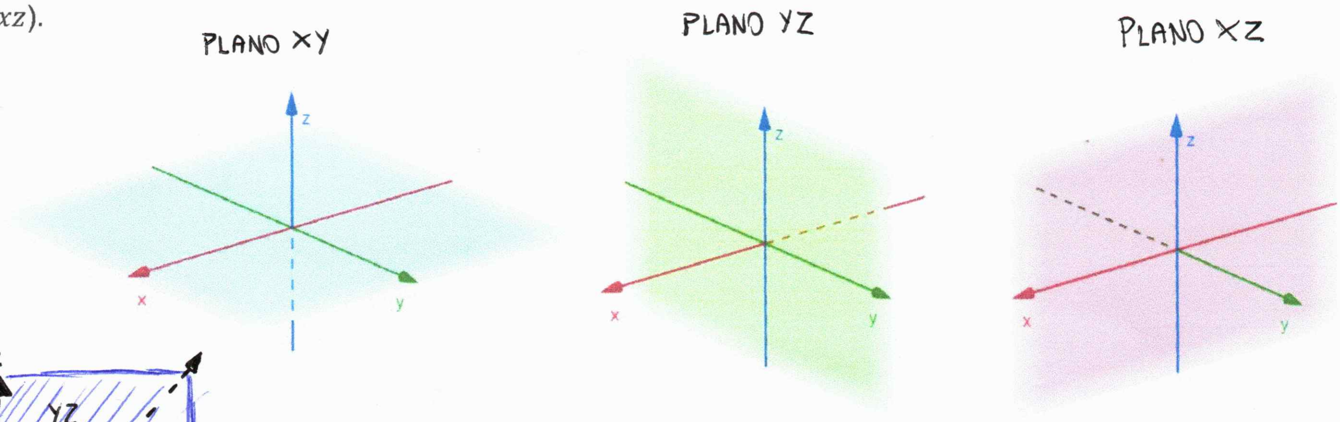


$M_x \cdot A$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{pmatrix} -3 & -8 & -2 & -4 \\ 2 & 4 & 7 & 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$= \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A' & B' & C' & D' \end{array} \\ \begin{pmatrix} -3 & -8 & -2 & -4 \\ -2 & -4 & -7 & -4 \end{pmatrix} \end{array}$$

Na computação gráfica 3D, a **reflexão** é uma transformação geométrica que inverte a posição de um objeto em relação a um plano específico. Essa operação é essencial em gráficos 3D, pois é usada para criar efeitos visuais como espelhos, superfícies reflexivas e simetrias. Em termos de álgebra linear, a reflexão pode ser representada por uma **matriz de transformação**. Essa matriz, quando multiplicada por um vetor de coordenadas de um ponto, resulta no ponto refletido. Existem três tipos comuns de planos de reflexão em 3D: os planos coordenados (xy, yz, xz).



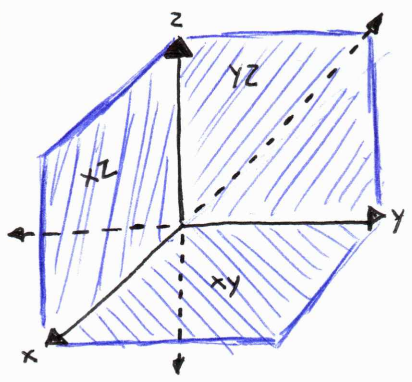


Figura 6.4. (a) Plano xy. (b) Plano yz. (c) Plano xz.

Reflexão em planos específicos.

Reflexão em torno do plano xy (Plano $z = 0$): a reflexão em torno do plano xy inverte a coordenada z, enquanto as coordenadas x e y permanecem inalteradas. A matriz de reflexão correspondente é:

$$R_{XY} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Quando você multiplica um ponto (x, y, z) por essa matriz, o ponto será refletido $(x, y, -z)$.

Reflexão em torno do plano yz (Plano $x = 0$): a reflexão em torno do plano yz inverte a coordenada x, enquanto as coordenadas y e z permanecem inalteradas. A matriz de reflexão correspondente é:

$$R_{YZ} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Quando você multiplica um ponto (x, y, z) por essa matriz, o ponto será refletido $(-x, y, z)$.

Reflexão em torno do plano xz (Plano $y = 0$): a reflexão em torno do plano xz inverte a coordenada y, enquanto as coordenadas x e z permanecem inalteradas. A matriz de reflexão correspondente é:

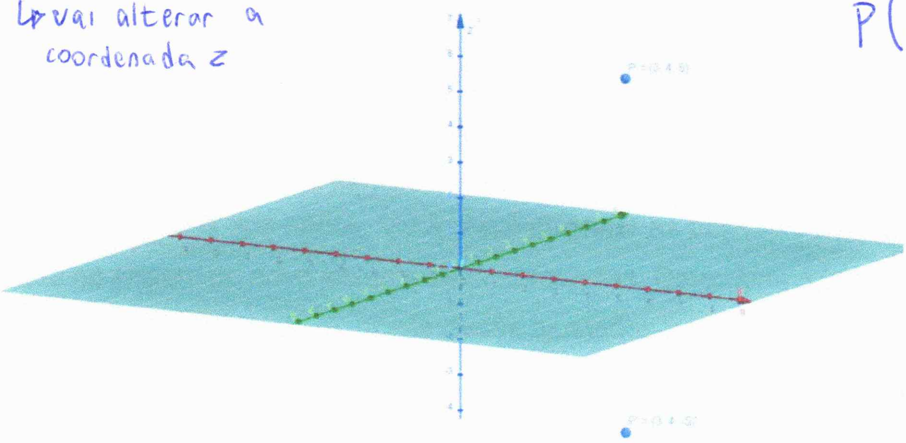
$$R_{XY} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Quando você multiplica um ponto (x, y, z) por essa matriz, o ponto será refletido $(x, -y, z)$.

Exemplo 7. Determine as novas coordenadas do ponto $P = (3,4,5)$, após ele sofrer uma reflexão no plano xy.

↳ vai alterar a coordenada z

$P(3, 4, -5)$



Lista 5. Transformações Gráficas – Translação e Reflexão

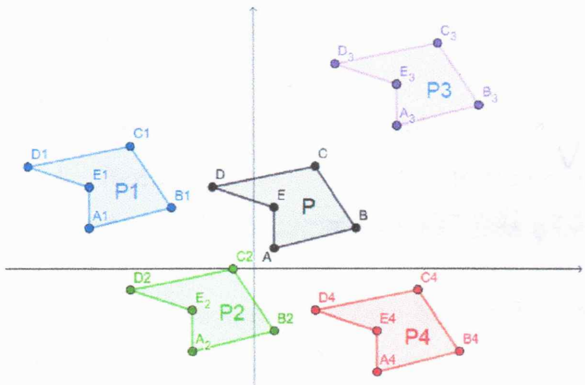
1. Dado o ponto $P(2,5)$ no plano 2D. Determine:

a) aplique a reflexão em relação ao eixo x, e determine as novas coordenadas do ponto;

b) aplique a reflexão em relação ao eixo y, e determine as novas coordenadas do ponto;

2. Considere o ponto $Q(-3,2,7)$ no espaço 3D. Realize a reflexão de Q em relação aos planos xy, yz e xz.

3. Na figura a seguir o polígono principal P, formado pelos pontos $A = (1,1), B = (5,2), C = (3,5)$, $D = (-2,4)\ e\ E = (1,3)$, foi transladado gerando os polígonos, $P1, P2, P3$ e $P4$. Determine as coordenadas de cada polígono transladado a partir de P sabendo que o vetor de translação em cada caso é dado por:



a) para $P1$, $v = (-9,1)$

b) para $P2$, $v = (-4,-5)$

c) para $P3$, $v = (6,6)$

d) para $P4$, $v = (5,-6)$

4. Um objeto está localizado no ponto $P = (-5,2,1)$ no espaço tridimensional. Ela sofre uma translação de 6 unidades no eixo x, -7 unidades no eixo y e 2 unidades no eixo z. Determine as coordenadas no ponto transladado.

5. Em um projeto de monitoramento ambiental subaquático, foram instalados sensores que medem temperatura e pressão em diferentes posições 3D no fundo do mar. Você conhece os dados de três sensores diferentes, $S1 = (500,150,-20), S2 = (520,160,-25)$ e $S3 = (510,155,-22)$. Por questão de padronização dos dados, você precisa ajustar as posições para que o primeiro sensor instalado fique na origem do novo sistema de coordenadas. Determine o vetor de translação que leva $S1$ para a origem, e em seguida os novos dados ajustados pela translação.

Respostas: Número 1: $a)\ (2,-5)$; $b)\ (-2,5)$ Número 2: xy: $(-3,2,-7)$; yz: $(3,2,7)$; xz: $(-3,-2,-7)$

Número 3: a) $A_1 = (-8,2), B_1 = (-4,3), C_1 = (-6,6), D_1 = (-11,5)\ e\ E_1 = (-8,4)$

b) $A_2 = (-3,-4), B_2 = (1,-3), C_2 = (-1,0), D_2 = (-6,-1)\ e\ E_2 = (-3,2)$ c) $A_3 = (7,7), B_3 = (11,8)$ $C_3 = (9,11), D_3 = (4,10)\ e\ E_3 = (7,9)$ d) $A_4 = (6,-5), B_4 = (10,-4), C_4 = (8,-1)$, $D_4 = (3,-2)\ e\ E_4 = (6,-3)$

Número 4: $P = (1,-5,3)$ Número 5: a) $[-500,-150\ 20]^T$ b) $S1 = (0,0,0), S2 = (20,10,-5)$ e $S3 = (10,5,-2)$

3) $A(1,1)$ $B(5,2)$ $C(3,5)$ $D(-2,4)$ $E(1,3)$

a) $v=(-9,1)$

~~$A'(1-9,\ 1+1)$~~

$A'(-8,2)$ ✓

$B'(-4,3)$ ✓

$C'(-6,6)$ ✓

$D'(-11,5)$ ✓

$E'(-8,4)$ ✓

b) $v=(-4,-5)$

$A'(-3,-4)$ ✓

$B'(1,-3)$ ✓

$C'(-1,0)$ ✓

$D'(-6,-1)$ ✓

$E'(-3,-2)$ ✓

c) $v=(6,6)$

$A'(7,7)$ ✓

$B'(11,8)$ ✓

$C'(9,11)$ ✓

$D'(4,10)$ ✓

$E'(7,9)$ ✓

d) $v=(5,-6)$

$A'(6,-5)$ ✓

$B'(10,-4)$ ✓

$C'(8,-1)$ ✓

$D'(3,-2)$ ✓

$E'(6,-3)$ ✓

4) $P(-5,2,1) \rightarrow (1,-5,3)$

5)

$S_1(500,150,-20) \rightarrow (0,0,0)$

$V=(-500,-150,20)$

S_2+V

$(520-500,\ 160-150,\ -25+20)$

$(20,10,-5)$

S_3+V

$(510-500,\ 155-150,\ -22+20)$

$(10,5,-2)$