1. zárthelyi dolgozat – minta

1. feladat 6 pont

(a) Döntse el, hogy a következő állítások igazak vagy hamisak (helyes válasz: 1 pont, nincs válasz/helytelen válasz: 0 pont). **2 pont**

(1) Egy komplex szám abszolút értéke valós szám. **I H**
(2) Ha egy reláció nem szimmetrikus, akkor biztosan antiszimmetrikus. **I H**
(3) Egy ekvivalenciareláció esetén az ekvivalenciaosztályok uniója a reláció értelmezési tartománya. **I H**
(4) Ha egy függvény injektív, akkor az inverze függvény. **I H**

(b) Határozza meg az $R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid 2x - 8 = y\} \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ reláció értelmezési tartományát és az $R^{-1}(\{-2, -4\})$ inverz képet. **2 pont**

(c) Konstruáljon az a, b, c, d elemek felhasználásával olyan R relációt, melyre: $D_R = \{a, d\}$, nem szimmetrikus, reflexív és $R(\{d\}) = \{d\}$. **2 pont**

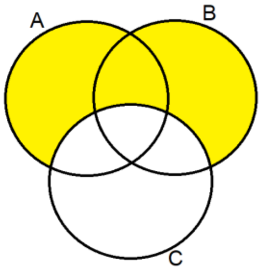
1.) a) IGAZ – HAMIS – IGAZ – IGAZ
1.) b) $ÉT_R = D_R$ = { egész számok halmaza }; $R^{-1}(\{-2, -4\}) = \{ x \in \mathbf{Z} \mid \exists y \in \mathbf{Z} : (x, y) \in R \} = \{ 3, 2 \}$
1.) c) R = { (a,a), (a,d), (d,d) }:
nem szimmetrikus, azaz nem minden (x,y) pár szimmetrikus (y,x) párja szerepel R-ben;
reflexív, mert a D_R-beli elemek mindegyike párban áll önmagával;
R({d}) = d és D_R = {a,d} is teljesül.

2. feladat 10 pont

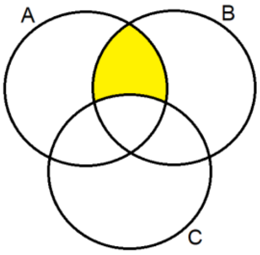
(a) Igazolja, hogy az $R \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x - y$ osztható 5-tel$\}$ reláció ekvivalenciareláció. Mik lesznek az ekvivalenciaosztályok? **5 pont**

(b) Adjon meg olyan A, B és C halmazokat, amelyekre nem teljesül a következő összefüggés: $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$. **2 pont**

2.) a) Ha R ekvivalenciareláció, akkor reflexív, szimmetrikus és tranzitív.
R reflexív, mivel x = y esetén x - y = x - x = 0 osztható öttel.
R szimmetrikus, hiszen ha x - y osztható öttel, akkor y - x is osztható öttel (nemcsak akkor, ha x = y).
R tranzitív, hiszen tetszőleges x, y és z egész számok esetén, ha 5 | x – y és 5 | y – z, akkor 5 | x – z is.
Mivel mindhárom feltétel egyidőben teljesül, ezért R ekvivalenciareláció.
A fentiek alapján ∀x, y ∈ **Z**-re: x R y, ha 5 | x – y . Ebből az látszik, hogy mindig x-ből fogunk kivonni y-t, ami aztán öttel osztható lesz. Ezért az ekvivalenciaosztályok az öttel való oszthatóság alapján fognak rendeződni. Világos, hogy egy egész szám öttel való osztásakor ötféle maradékot adhat: 0, 1, 2, 3 vagy 4. Vagyis olyan osztályokat kell létrehoznunk, amikre az igaz, hogy x öttel való osztásakor 0, 1, 2, 3 vagy 4 maradékot ad, mert így az összes olyan y le lesz fedve az öt diszjunkt osztály által, amikre az igaz, hogy x – y osztható öttel. Tehát az 5 osztály az öt maradékosztályai:
[0] = { y | y R 0 } = { …, -10, -5, 0, 5, 10,… }; [1] = { y | y R 1 } = { …, -9, -4, 1, 6, 11,… };
[2] = { y | y R 2 } = { …, -8, -3, 2, 7, 12,… }; [3] = { y | y R 3 } = { …, -7, -2, 3, 8, 13,… };
[4] = { y | y R 4 } = { …, -6, -1, 4, 9, 14,… }.
2.) b) Ábrázoljuk az egyenlet két oldalát Venn-diagrammal!



(A U B) \ C



(A \ C) ∩ (B \ C)

pl.: A = {1, 2, 3}, B = {2, 4, 5}, C = {3, 5, 6}

1. zárthelyi dolgozat – minta

(c) Igazolja, hogy tetszőleges A, B és C halmazok esetén igaz a következő összefüggés: $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$. **3 pont**

2.) c) $(A \cap B) \setminus C = \{ x \mid x \in (A \cap B) \setminus C \} = \{ x \mid x \in (A \cap B) \wedge x \notin C \} = \{ x \mid (x \in A \wedge x \in B) \wedge x \notin C \}$
$= \{ x \mid (x \in A \wedge x \notin C) \wedge (x \in B \wedge x \notin C) \} = \{ x \mid (x \in A \setminus C) \wedge (x \in B \setminus C) \} = \{ x \mid x \in (A \setminus C) \cap (B \setminus C) \}$
$= (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$.

3. feladat 5 pont

Legyen $R \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid 2y + 5 = -7x\}$ és $S \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $S = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid 2x \geq -7y + 2\}$. Határozza meg az $S \circ R$ és $R \circ S$ kompozíciót.

3.)
$R \circ S = \{ (x, z) \mid \exists y : (x, y) \in S, (y, z) \in R \} = \{ (x, z) \mid \exists y : 2x \geq -7y + 2 \wedge 2z + 5 = -7y \} =$
/* $2x \geq -7y + 2 \Leftrightarrow 2x \geq (2z + 5) + 2 \Leftrightarrow 2x \geq 2z + 7$ */
$= \{ (x, z) \mid 2x \geq 2z + 7 \}$.
$S \circ R = \{ (x, z) \mid \exists y : (x, y) \in R, (y, z) \in S \} = \{ (x, z) \mid \exists y : 2y + 5 = -7x \wedge 2y \geq -7z + 2 \} =$
/* $2y + 5 = -7x \Leftrightarrow 2y = -7x - 5 \Rightarrow 2y \geq -7z + 2 \Leftrightarrow -7x - 5 \geq -7z + 2$ */
$= \{ (x, z) \mid -7x - 5 \geq -7z + 2 \}$.

4. feladat 5 pont

(a) Döntse el a következő relációkról, hogy függvények-e. **3 pont**
$f_1 \subset (\mathbb{R} \setminus \{1\}) \times \mathbb{R}$, $f_1 = \{(x, y) \in (\mathbb{R} \setminus \{1\}) \times \mathbb{R} \mid (x - 1)y = 2\}$
$f_2 \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $f_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 = y^2\}$
$f_3 \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $f_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid \mid y - x^2 = -1 + 3y\}$

(b) Döntse el, hogy az $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$, $f(x) := 2\sqrt{x} - 13$ függvény injektív-, illetve szürjektív-e. **2 pont**

4.) a)
f_1 függvény, ennek igazolására rendezzük át az egyenletet x-re $(x - 1) \times y = 2 \Leftrightarrow x - 1 = 2 / y \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = (2 + y) / y$. Ennél az egyenletnél nem tudunk 2 vagy több olyan y értéket mondani, ami ugyanazt az x-et eredményezné, így az f_1 egyértelmű hozzárendelés, és így függvény.
f_2 nem függvény, mert tetszőleges x és y nemnulla valós számok esetén a fenti szabály megengedi, hogy f_2 tartalmazza az (x, y), $(x, -y)$, $(-x, y)$ és $(-x, -y)$ típusú párokat. Így nem egyértelmű a hozzárendelés, ezért f_2 nem függvény.
f_3 függvény, ennek igazolására rendezzük át az egyenletet x^2-re: $y - x^2 = -1 + 3y \Leftrightarrow x^2 = -1 + 2y$.
Mivel az egyenlet jobb oldala lineáris, ezért nem tudok több olyan y-t mondani, amivel ugyanazon x értéket kapnánk. Ezáltal f_3 egy egyértelmű hozzárendelésű függvény.
4.) b)
Ha f injektív, akkor $\forall x, x_0, y : (f(x) = y \wedge f(x_0) = y) \Rightarrow x = x_0$. Mivel x csak pozitív valós szám (vagy 0) lehet a négyzetgyök miatt és az egyenlet négyzetes x tagot nem tartalmaz, ezért nem tudok két olyan eltérő x értéket mondani, ami ugyanazt az y értéket adná ki, így f injektív.
Ha f szürjektív, akkor rng(f) = Y. Vagyis f értékkészlete a teljes valós számok halmaza. Nos, mivel az x legkisebb értéke 0 lehet, így az y legkisebb értéke $2 \times 0 - 13 = -13$ lehet. Ennél kisebb számot nem fog elérni, mert x 0-nál csak nagyobb értékeket vehet fel. Emiatt f értékkészlete nem a teljes valós számok halmaza, csak a -13 és (pozitív) végtelen közti számok halmaza, így f nem szürjektív.

1. zárthelyi dolgozat – minta

5. feladat 7 pont

A trigonometrikus alak segítségével számítsa ki z értékét trigonometrikus és algebrai alakban is, majd adja meg az összes olyan w komplex számot trigonometrikus alakban, melyekre $w^3 = z$, ahol $z = \dfrac{(1+i)^{40}}{\left(-1+\sqrt{3}i\right)^{12}}$.

$$z = \frac{(1+i)^{40}}{(-1+\sqrt{3}i)^{12}}$$

$$(1+i)^{40} = \left(\sqrt{2}\cdot(\cos 45^\circ + i\cdot\sin 45^\circ)\right)^{40} = \sqrt{2}^{40}\cdot\left(\cos(45^\circ\cdot 40) + i\cdot\sin(45^\circ\cdot 40)\right) =$$

$r = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

$\left.\begin{array}{l}\cos\varphi = 1/\sqrt{2}\\ b = 1 \geq 0\end{array}\right\}\varphi = 45^\circ$

$$= 2^{20}\cdot(\cos 0^\circ + i\cdot\sin 0^\circ) \quad // 45^\circ\cdot 40 = 1800^\circ = 360^\circ\cdot 5 + \underline{\underline{0^\circ}}$$

$$(-1+\sqrt{3}\cdot i)^{12} = \left(2\cdot(\cos 120^\circ + i\cdot\sin 120^\circ)\right)^{12} = 2^{12}\cdot\left(\cos(120^\circ\cdot 12) + i\cdot\sin(120^\circ\cdot 12)\right) =$$

$r = \sqrt{(-1)^2+\sqrt{3}^2} = \sqrt{4} = 2$

$\left.\begin{array}{l}\cos\varphi = -1/2\\ b = \sqrt{3} \geq 0\end{array}\right\}\varphi = 120^\circ$

$$= 2^{12}\cdot(\cos 0^\circ + i\cdot\sin 0^\circ) \quad // 120^\circ\cdot 12 = 1440^\circ = 360^\circ\cdot 4 + \underline{\underline{0^\circ}}$$

$$z = \frac{(1+i)^{40}}{(-1+\sqrt{3}i)^{12}} = \frac{2^{20}\cdot(\cos 0^\circ + i\cdot\sin 0^\circ)}{2^{12}\cdot(\cos 0^\circ + i\cdot\sin 0^\circ)} = \frac{2^{20}}{2^{12}} = 2^{20-12} = \underline{\underline{2^8 = 256}}$$

1. zárthelyi dolgozat – minta

6. feladat 7 pont

Ábrázolja a Gauss-számsíkon a következő halmazokat:

(a) $\{z \in \mathbb{C} \mid 3 \cdot \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z \geq 2 \wedge \operatorname{Im} z < 5\}$ **3 pont**

(b) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1| \geq 4 \wedge \operatorname{Re} z > 2\}$ **4 pont**

6.) a) z := a + bi (a,b ϵ **R**) => (3 × Re(z) + Im(z) ≥ 2 ⬄ 3a + b ≥ 2) ^ (Im(z) < 5 ⬄ b < 5)
=> (b ≥ 2 – 3a ^ b < 5) => 2 – 3a ≤ b < 5 => <u>(a): { z ϵ **C** | 2 – 3a ≤ b < 5 }</u>

6.) b) z := a + bi (a,b ϵ **R**) => (|a + bi – 1| ≥ 4 ⬄ $\sqrt{(a-1)^2 + b^2}$ ≥ 4) ^ (Re(z) > 2 ⬄ a > 2)
=> ($(a - 1)^2 + b^2 \geq 16$ ⬄ $(a - 1)^2 + (b - 0)^2 \geq 4^2$) ^ a > 2) => <u>(b): { z ϵ **C** | $(a - 1)^2 + (b - 0)^2 \geq 4^2$ ^ a > 2 }</u>