

## 1. feladatsor: Halmazok

### 1. feladat

Legyen az alaphalmaz  $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ , továbbá legyen  $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge 1 \leq x \leq 4\}$ ,  $B = \{0, 2, 4, 8\}$ ,  $C = \{\text{az egyjegyű prímszámok}\}$ .

(a) Határozza meg a következő halmazokat:

$$A \cap B$$

$$B \cup C$$

$$A \setminus C$$

$$\overline{C}$$

(b) Tekintsük az  $X = \{A, B, C\}$  halmazrendszert. Határozza meg a következő halmazokat.

$$\cap X$$

$$\cup X$$

(c) Állapítsa meg a következő kijelentések logikai értékét, ha  $Y = \{\{x \mid x \in U \text{ és } x \text{ páros}\}, \{x \mid x \in U \text{ és } x \text{ páratlan}\}\}$ .

$$4 \in B$$

$$A \subseteq B$$

$$\{\emptyset\} \subseteq X \cup Y$$

$$3 \in A \cap B$$

$$\{1, 2\} \subseteq A$$

$$A \in X \cup Y$$

$$A \subseteq X \cup Y$$

$$C \cap \emptyset = \emptyset$$

$$2 \subseteq A$$

$$\{2\} \subseteq A$$

$$2 \in X \cup Y$$

$$\{2\} \in X \cap Y$$

### 2. feladat

Keressünk olyan  $A, B, C$  halmazokat, melyekre egyszerre teljesülnek a következők:

$$A \cap B \neq \emptyset, \quad A \cap C = \emptyset, \quad (A \cap B) \setminus C = \emptyset.$$

### 3. feladat

Legyen  $A = \{a, b, c, d\}$ ,  $B = \{c, d\}$ ,  $C = \{a, e\}$ . Mutassuk meg, hogy ekkor  $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (B \cap C)$ . Igaz-e ez az állítás tetszőleges  $A, B, C$  halmazokra?

### 4. feladat

Tekintsük az  $X = \{\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4, 5\}, \{0, 2, 3, 7\}\}$  halmazrendszert. Határozza meg a következő halmazokat:

(a)  $\cap X$

(b)  $X \cup \{\{3, 5, 7\}, \{1\}, \{2\}\}$

(c)  $\cup (X \cup \{\{3, 5, 7\}, \{1\}, \{2\}\})$

(d)  $\cap (X \cup \{\{3, 5, 7\}, \{1\}, \{2\}\})$

### 5. feladat

Legyen  $\mathcal{A} = \{\{a, b, c\}, \{a, d, e\}, \{a, f\}\}$ . Mi lesz  $\cup \mathcal{A}$  és  $\cap \mathcal{A}$ ?

### 6. feladat

Határozza meg az  $A, B, C$  halmazok elemeit, ha tudjuk, hogy  $A \setminus B = \{1, 3, 5\}$ ,  $A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ,  $(A \cap C) \cup (B \cap C) = \emptyset$ ,  $C \setminus B = \{2, 4\}$  és  $(A \cap B) \setminus C = \{6\}$ .

**7. feladat**

Legyenek  $A, B, C$  tetszőleges halmazok,  $U$  az alaphalmaz,  $A, B, C \subseteq U$ . Igazoljuk a következő azonosságokat.

- |  |  |
|--|--|
| (a) $A \cup B = B \cup A$                            | (g) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ |
| (b) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$          | (h) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ |
| (c) $A \cap B = B \cap A$                            | (i) $A \cup \overline{A} = U$                              |
| (d) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$          | (j) $A \cap \overline{A} = \emptyset$                      |
| (e) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ | (k) $\overline{\overline{A}} = A$                          |
| (f) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ |  |

**8. feladat**

Igazolja a következő azonosságokat.

- (a)  $A \triangle \emptyset = A$   
 (b)  $A \triangle A = \emptyset$   
 (c)  $A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$   
 (d)  $A \triangle (A \triangle B) = B$

**9. feladat**

Legyenek  $A, B, C$  tetszőleges halmazok. Igazoljuk a következő állításokat.

- (a) ha  $A \subseteq C$  és  $B \subseteq C$  akkor  $A \cup B \subseteq C$   
 (b) ha  $A \subseteq B$  és  $A \subseteq C$  akkor  $A \subseteq B \cap C$   
 (c)  $A \cup (B \cap A) = A$

**10. feladat**

Legyen  $A$  és  $B$  nemüres halmazok. Igazolja a következő egyenlőségeket.

- (a)  $(A \setminus B) \cap B = \emptyset$   
 (b)  $(A \cup \overline{B}) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) = \overline{B}$

**11. feladat**

Hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezést:  $(A \cup (A \cap B) \cup (A \cap B \cap C)) \cap (A \cup B \cup C)$ .

**12. feladat**

Legyen az alaphalmaz  $U$  továbbá  $A, B, C \subseteq U$  tetszőleges halmazok. Igazolja a következő egyenlőségeket.

- (a)  $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$   
 (b)  $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$   
 (c)  $A \setminus (A \setminus (B \setminus C)) = A \cap B \cap \overline{C}$

**13. feladat**

Legyen  $A = \{1, 2\}$ ,  $B = \{a, b, c\}$  és  $C = \{2, 3, 4\}$ . Határozza meg az  $A \times A$ ,  $A \times B$ ,  $A \times A \times B$ ,  $B \times A$ ,  $(A \times A) \times B$ ,  $A \times (A \times B)$ ,  $A \triangle B$ ,  $A \triangle C$  halmazokat.

**14. feladat**

Legyenek  $A, B, C$  nemüres halmazok. Igazolja a következő egyenlőséget:

$$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C).$$

**15. feladat**

Legyenek  $A, B, C, D$  nemüres halmazok. Bizonyítsuk be, hogy  $A \times B \subseteq C \times D$  akkor és csak akkor teljesül, ha  $A \subseteq C$  és  $B \subseteq D$ .

**16. feladat**

Bizonyítsa be a következő összefüggést:  $\overline{(A \cap B \cup C) \cap \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}} = A \cup \overline{B} \cup \overline{C}$ .

**17. feladat**

Legyenek  $A$  és  $B$  tetszőleges halmazok. Bizonyítsuk be, hogy  $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$ , ahol  $P(A)$  jelöli  $A$  hatványhalmazát. Igaz-e az állítás unióval?

**18. feladat**

Döntse el, hogy igazak-e a következő egyenlőségek tetszőleges  $A, B, C$  halmazokra. Állításait bizonyítsa.

- (a)  $\overline{A} \cap B = B \setminus A$
- (b)  $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus B) \cap C$
- (c)  $(A \cup B) \cap (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \setminus B)$
- (d)  $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$
- (e)  $(A \cup B) \setminus A = B$
- (f)  $(A \cup B) \setminus C = A \cup (B \setminus C)$