(d) Határozzuk meg az $(6x^8 - 11x^5)^{32}$ kifejezésben az x^{179} tag együtthatóját.

Tétel (Binomiális tétel)

Adott $x, y \in \mathbb{R}$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

$$(6x^8 - 11x^5)^{32} = \sum_{k=0}^{32} \binom{32}{k} \cdot (6x^8)^{32-k} \cdot (-11x^5)^k = \sum_{k=0}^{32} \binom{32}{k} \cdot 6^{32-k} \cdot x^{256-8k} \cdot (-11)^k \cdot x^{5k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{32} \binom{32}{k} \cdot 6^{32-k} \cdot (-11)^k \cdot x^{256-3k} \Rightarrow 256-3k = 179 \Leftrightarrow -3k = -77 \Leftrightarrow k = \frac{77}{3} \text{ ↯}$$

$$\Downarrow$$

x^{179} együtthatója: $\underline{\underline{0}}$

Egy 8-tagú társaság moziba megy. Hányféleképpen ülhetnek le egy sorba úgy, hogy Anna és Béla valamint Dani és Eszmeralda ne kerüljön egymás mellé?

Tétel (Szita-formula)

Legyenek $A_1, A_2, \ldots, A_n$ véges halmazok. Ekkor

$$|\cup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| \mp \ldots$$

"JÓ" = ÖSSZES − ROSSZ

ÖSSZES ESET: $\underbrace{P_8}_{\sqcup\sqcup\sqcup\sqcup\sqcup\sqcup\sqcup\sqcup} = 8!$ ROSSZ ESET: $\underbrace{P_6}_{\sqcup\sqcup\sqcup\sqcup\sqcup\sqcup\sqcup\sqcup} \cdot \underbrace{P_2}_{AB,\ BA} \cdot \underbrace{P_2}_{DE,\ ED} = 6! \cdot 2! \cdot 2!$

JÓ ESET: $\underline{\underline{8! - (2! \cdot 2! \cdot 6!)}}$

(a) Igaz-e, hogy 8 gyerek között mindig van legalább 2, akik a hét ugyanazon napján születtek?

Skatulya-elv

Ha n darab gyufásdobozunk és $n+1$ gyufaszálunk van, akkor akárhogyan rakjuk bele az összes gyufát a skatulyákba, valamelyikben legalább kettő gyufa lesz.

(a) 7 doboz − 8 gyermek

$$\Downarrow$$

IGAZ