Döntse el, mely reláció reflexív, irreflexív, szimmetrikus, antiszimmetrikus illetve tranzitív, továbbá határozza meg a relációk értelmezési tartományát és értékkészletét.
(a) $R = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a \cdot b \text{ páratlan}\}$

Ahhoz, hogy **a×b** páratlan legyen, ahhoz **a**-nak és **b**-nek is páratlannak kell lennie. Így, mivel a pár első tagja minden esetben páratlan, így **a** állhat párban önmagával, azaz bármilyen **a** esetén az R reláció tartalmazza az **(a,a)** párt. Így aztán, az R reláció reflexív.
Mivel R reflexív, ezért R nem lehet irreflexív, mert a két tulajdonság egyszerre nem teljesülhet.
Ha **R** szimmetrikus, akkor minden **(a,b)** párhoz megtalálható a **(b,a)** párja is. A reflexív elemeknél ez garantált, hiszen ott önmaga a saját szimmetrikus párja. De az is igaz, hogy a szorzásban a szorzó és a szorzandó felcserélhető, azaz a×b ugyanaz mint b×a, így biztosan szerepel az **(a,b)** pár mellett a **(b,a)** pár is, így **R** reláció szimmetrikus is.
Az antiszimmetria a szimmetrikussággal egyszerre akkor teljesülhetne, ha csak reflexív elemek szerepelnének R-ben, hiszen - a definíció szerint – **(a,b)** és **(b,a)** párok minden esetben csakis úgy lehetnének a relációban, hogy a=b. De mivel ez nincs így, így R nem antiszimmetrikus.
Mivel bármely két páratlan szám szorzata páratlan, így tetszőleges **a,b,c** páratlan számok esetén, ha **(a,b)** és **(b,c)** szerepel R-ben, akkor **(a,c)** is szerepel. Így R tranzitív is.
Mivel R szimmetrikus, reflexív és tranzitív, így R egy ekvivalenciareláció.
Mivel **a** és **b** csak páratlan szám lehet, tetszőleges sorrendben egy páron belül, így **R** értelmezési tartománya és az értékkészlete megegyezik: **$D_R = R_R$ = páratlan természetes számok**.

Lehet-e egy reláció egyszerre szimmetrikus és antiszimmetrikus? Illetve reflexív és irreflexív? Állítását indokolja.

Ahhoz, hogy egy reláció szimmetrikus és antiszimmetrikus legyen egyidőben, egyszerre kell teljesülnie (tetszőleges **a** és **b** értelmezési tartománybeli elemre), hogy (a,b) esetén (b,a) is szerepel a relációban, valamint hogy ez a fenti csak akkor igaz, ha a = b. Így ez a reláció **létezhet**, ha csak reflexív (a pár első tagja önmagával párban álló) elemeket tartalmaz a reláció.
Ami az egyidejű reflexivitást és irreflexivitást illeti, mivel bármely a értelmezési tartománybeli elem egyszerre nem tud önmagával és nem önmagával relációban állni (ahogy a definíciók állítják), így egy reláció **nem lehet** egyszerre reflexív és irreflexív.

Tekintsük a következő ρ relációt.
(a) $\rho = \{(1,1),(1,5),(2,2),(3,3),(3,4),(4,3),(4,4),(5,1),(5,5)\} \subseteq \{1,2,3,4,5\} \times \{1,2,3,4,5\}$
(b) $\rho = \{(1,1),(1,5),(1,6),(1,8),(2,2),(2,4),(3,3),(3,7),(4,2),(4,4),(5,1),(5,5),(5,6),$
$(5,8),(6,1),(6,5),(6,6),(6,8),(7,3),(7,7),(8,1),(8,5),(8,6),(8,8)\} \subseteq \{1,2,3,4,5,6,7,8\} \times$
$\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$

(1) Mutassa meg, hogy ρ ekvivalenciareláció.
(2) Határozza meg az A halmaz ρ ekvivalenciareláció szerinti osztályfelbontását (másképp: Határozza meg az A/ρ hányadoshalmazt).

(a)
ρ ekvivalenciareláció, hiszen reflexív (az összes olyan pár szerepel, ahol a pár első tagja relációban áll önmagával; pl. (1,1),(2,2),…), szimmetrikus (minden párnak megvan a „tükörképe"; pl. (1,5)-(5,1),…) és tranzitív is (tetszőleges a,b,c elemre igaz, hogyha (a,b) és (b,c) szerepel, akkor (a,c) is szerepel; pl (1,5)-(5,1)-(1,1),…).
A/ρ = { [1], [2], [3], [4], [5] } = { { y | y **ρ** 1 }, { y | y **ρ** 2 },… } = { { 1,5 }, { 2 }, { 3,4 }, { 3,4 }, { 1,5 } }
=> { { 1,5 }, { 3,4 }, { 2 } }.

(b)

ρ ekvivalenciareláció, hiszen reflexív (az összes olyan pár szerepel, ahol a pár első tagja relációban áll önmagával; pl. (1,1),(2,2),…), szimmetrikus (minden párnak megvan a „tükörképe"; pl. (1,5)-(5,1),…) és tranzitív is (tetszőleges a,b,c elemre igaz, hogyha (a,b) és (b,c) szerepel, akkor (a,c) is szerepel; pl (1,5)-(5,8)-(1,8),…).

A/ρ = { [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8] } = { { y | y **ρ** 1 }, { y | y **ρ** 2 },… } =
= { { 1,5,6,8 }, { 2,4 }, { 3,7 }, { 2,4 }, { 1,5,6,8 }, { 1,5,6,8 } , { 3,7 } , { 1,5,6,8 } }
=> { { 1,5,6,8 }, { 2,4 }, { 3,7 } }.

Bizonyítsa be, hogy az alábbi relációk ekvivalenciarelációk. Adja meg az ekvivalenciaosztályokat.
(a) $R = \{(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid m + n \text{ páros szám}\}$

(a)

R ekvivalenciareláció, mert reflexív (Ha **m+n** páros, akkor **m** és **n** páratlan vagy **m** és **n** páros. Bármelyik esetben állhat **m** önmagával párban, mert **m+m** mindkét esetben páros lesz.), szimmetrikus (Ha **m+n** páros, akkor **n+m** is páros, így **(m,n)** és **(n,m)** párok is szerepelnek R-ben.) és tranzitív (Ha létezik **(m,n)** pár, akkor **n**-hez csak olyan szám társulhat, ami **n**-hez hasonlóan páros/páratlan, így **(n,z)** pár esetén **(m,z)** párban állhat, mert **m,n,z** egyaránt páros/páratlan számok.) reláció.

Mivel tetszőleges páros-páros vagy páratlan-páratlan véges sok számpárok vannak a relációban, ezért bármelyik egész szám egy ekvivalenciaosztálynak feleltethető meg, így az ekvivalenciaosztályok:
… , [-1], [0], [1], … .

Legyen $A = \{1, 2, 3\}, B = \{a, b, c, d, e, f\}, C = \{2, 4, 6, 8\}$ továbbá $R \subseteq A \times B, S \subseteq B \times C$, $R = \{(1, a), (1, b), (2, c), (2, f), (3, d), (3, e), (3, f)\}$ és $S = \{(a, 2), (a, 4), (c, 6), (c, 8), (d, 2), (d, 4), (d, 6), (f, 8)\}$. Határozza meg az $S \circ R$ kompozíciót.

S ∘ R = { (x,z) | ∃y: (x,y) ∈ R, (y,z) ∈ S } = { (1,2), (1,4), (2,6), (2,8), (2,8), (3,2), (3,4), (3,6), (3,8) }.

Legyen $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}; S, R \subseteq A \times A$. Határozza meg az $S \circ R$ kompozíciót.
(a) $R = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 1)\}$ és $S = \{(1, 6), (2, 3), (2, 4), (3, 1)\}$
(b) $R = \{(1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 5), (5, 6), (6, 7)\}$ és $S = \{(1, 2), (1, 4), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (4, 2), (4, 6), (5, 6), (7, 2)\}$

(a) S ∘ R = { (x,z) | ∃y: (x,y) ∈ R, (y,z) ∈ S } = { (1,3), (1,4), (1,1), (2,3), (2,4), (3,1), (4,6) }
(b) S ∘ R = { (x,z) | ∃y: (x,y) ∈ R, (y,z) ∈ S } = { (1,1), (1,2), (1,6), (2,3), (2,2), (2,6), (3,6), (6,2) }

Legyen $R, S \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Határozza meg az $S \circ R$ és $R \circ S$ kompozíciót.
(a) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid 4x = y^2 + 6\}$ és $S = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x - 1 = y\}$
(b) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = 2y\}$ és $S = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x^3\}$

(a) S ∘ R = { (x,z) | ∃y: (x,y) ∈ R, (y,z) ∈ S } = { (x,z) | ∃y: 4x = y2 + 6, y – 1 = z } = { (x,z) | 4x = (z+1)2 + 6 }
(a) R ∘ S = { (x,z) | ∃y: (x,y) ∈ S, (y,z) ∈ R } = { (x,z) | ∃y: x – 1 = y, 4y = z2 + 6 } = { (x,z) | 4(x-1) = z2 + 6 }
(b) S ∘ R = { (x,z) | ∃y: (x,y) ∈ R, (y,z) ∈ S } = { (x,z) | ∃y: x = 2y, z = y3 } = { (x,z) | z = $(\frac{x}{2})$3 }
(b) R ∘ S = { (x,z) | ∃y: (x,y) ∈ S, (y,z) ∈ R } = { (x,z) | ∃y: y = x3, y = 2z } = { (x,z) | 2z = x3 }