Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) := 3x - 4$. Bizonyítsa be, hogy a függvény bijektív, majd határozza meg az inverzét.

Az f függvény akkor lehet bijektív, ha injektív és szürjektív. Ha szürjektív, akkor f értékkészlete a teljes valós számok halmaza. Mivel a 3x – 4 egy lineáris formula, ezért x helyére bele tudunk olyan számokat helyettesíteni, amik kiadják a teljes valós számok halmazát. Ha f injektív, akkor egy y érték egy x értékhez tartozik. Ez a tulajdonság teljesül, mert a 3x – 4 = y egyenlet adott y-ra egy darab x értéket ad vissza. Tehát, f bijektív, számítsuk ki az inverzét! Analízis I. gyakorlati tudásunkat felhasználva, ellenőrizzük, hogy létezik-e inverze! oldjuk meg a 3x – 4 = 3t – 4 egyenletet. Ha a végén az jön ki, hogy x = t, akkor létezik inverz:

3x – 4 = 3t – 4 <=> 3x = 3t <=> x = t

Ezek szerint létezik f-nek inverze, számoljuk hát ki az inverz függvényt! Ha az f függvény egyenlete y-ra rendezett, akkor az inverz függvényé x-re rendezett. Vagyis alakítsuk át a 3x – 4 = y egyenletet úgy, hogy az egyik oldalt csak 1 darab x szerepeljen:

3x – 4 = y <=> 3x = y + 4 <=> x = (y + 4) / 3

Sikeresen kiszámoltuk f inverzét: $f^{-1}(x) = (x + 4) / 3$.

Döntsük el, hogy az alábbi relációk közül melyek függvények.

$f \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}, xfy \iff$ tízes számrendszerben $x$ ugyanazokból a számjegyekből áll mint $y$

Ha f függvény, akkor egy x értékhez egy y érték tartozik. Nos, a 101 és a 110 is ugyanazokból a számjegyekből áll tízes számrendszerben. Tehát, f tartalmazhatja a (101,110) és a (110, 101) párokat, de a reflexív párok – (101, 101), (110, 110) – is szerepelnek ilyenkor. Ezért nem egyértelmű a hozzárendelés, tehát f nem függvény.

$f \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}, xfy \iff 2x = y$

Ha f függvény, akkor egy x értékhez egy y érték tartozik. Mivel x és y természetes számbeli számok és nem szerepel négyzetes tag a szabályban, így a negatív számokkal nem kell foglalkoznunk. A 0 csak egyféleképpen szerepelhet f-ben: (0, 0)-ként. Mivel a szabály lineáris és nem tudunk olyan nemnulla természetes számról, ami egyszerre önmaga és önmaga duplája, így f egyértelműen rendel adott x-hez adott y-t, tehát f függvény.

$f \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}, xfy \iff x^2 + y^2 = 9$

Ha f függvény, akkor egy x értékhez egy y érték tartozik. A szabály alapján ha az egyik szám 0, a másik kötelező jelleggel 3 kell, hogy legyen, így a 0-n nem múlik az egyértelmű hozzárendelhetőség. Ami a négyzetes tagokat illeti, ez már nem mondható el. Csak vegyük a 3-at és a -3-at! Ha x = 3 és y = 3, akkor teljesül az egyenlet. Ahogy teljesül akkor is, ha x = 3 és y = -3, vagy x = -3 és y = -3, vagy ha x = -3 és y = 3. Így f nem egyértelműen rendel adott x-hez adott y-t, így f nem függvény.

Bizonyítsa be, hogy a $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ halmazon $(m_1, n_1)R(m_2, n_2) \iff m_1 \leq m_2 \wedge n_1 \leq n_2$ részbenrendezés.

Ha R reflexív, antiszimmetrikus és tranzitív egyidőben, akkor R részbenrendezés, definíció szerint. Nos, vizsgáljuk meg, hogy érvényesülnek-e ezek a tulajdonságok!

- Reflexívnek reflexív R, hiszen a szabály alapján fennállhat olyan eset, hogy $m_1 = m_2$ és $n_1 = n_2$ (ahol a fenti számok tetszőleges természetes számok).
- A tranzitivitás is teljesül, hiszen tetszőleges m1, m2, m3, n1, n2, n3 természetes szám esetén, ha $m_1 \leq m_2$ és $m_2 \leq m_3$, akkor $m_1 \leq m_3$, valamint $n_1 \leq n_2$ és $n_2 \leq n_3$ esetén $n_1 \leq n_3$.
- Ami az antiszimmetriát illeti, két tetszőleges természetes szám csak akkor lehet egyszerre ≤ és ≥ egymáshoz képest, ha a két szám egyenlő, egyébként pedig az egyik mindig nagyobb, mint a másik.

Teljesült a három feltétel, így igazoltuk, hogy R részbenrendezés.