

A 2, 3, 4, 5, 7 számjegyek egyszeri felhasználásával képezzünk ötjegyű számokat.

- Hány számot képezhetünk?
- Hány páros van közöttük?
- Hány olyan van, amely osztható négygyel?

2, 3, 4, 5, 7; ötjegyű szám

$$(a) 5! // \boxed{5} \cdot \boxed{4} \cdot \boxed{3} \cdot \boxed{2} \cdot \boxed{1} \quad (b) 2 \cdot 4! // \boxed{4} \cdot \boxed{3} \cdot \boxed{2} \cdot \boxed{1} \cdot \boxed{2} \quad (c) \boxed{4} \cdot \boxed{3} \cdot \boxed{2} \cdot \boxed{1} \cdot \boxed{4}$$

$$(c) 4 \mid \overline{abcde} \Leftrightarrow 4 \mid \overline{de} \quad (a, c, d, e \in \{2, 3, 4, 5, 7\}) \Rightarrow \overline{de} \in \{24, 32, 52, 72\}$$

$$\Rightarrow \boxed{3} \cdot \boxed{2} \cdot \boxed{1} \cdot \overline{de} \Rightarrow \underline{\underline{4 \cdot 3!}}$$

Hány 5-tel osztható hatjegyű szám képezhető a 0, 1, 2, 3, 4, 5 számokból, ha minden számjegy csak egyszer szerepelhet?

$$5 \mid \overline{abcdef} ; a, b, c, d, e, f \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}; a \neq 0 : 5 \cdot 5!$$

Egy tíztagú társaság tagjai között 4 különböző könyvet sorsolnak ki úgy, hogy egy-egy személy csak egy könyvet nyerhet. Hányféleképpen végződhet a sorsolás?

10 fő; 4 különböző könyv; 1 fő - 1 könyv; sorrend számít

$$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = \frac{10!}{(10-4)!} = P_{10}^4$$

Egy műhelyben egy műszak alatt elkészített 500 db zár 4%-a selejtes. Hányféleképpen lehet kiválasztani 10 zárat úgy, hogy a kiválasztottak közül

- pontosan 5 selejtes legyen
- legalább 2 selejtes legyen

500 zár; 4% selejtes; 10 kiválasztása; sorrend nem számít

$$(a) 5 \text{ selejtes: } \underbrace{500}_{\sum} \cdot \underbrace{0,04}_{\text{selejtes}} = 20 \text{ selejtes} \Rightarrow \binom{20}{5} \cdot \binom{480}{5}$$

$$(b) \text{ legalább 2 selejtes: } 500 \cdot 0,04 = 20 \text{ selejtes}$$

$$\boxed{\text{ÖSSZES ESET} - \text{ROSSZ ESET} = \text{JÓ ESET}}$$

$$\binom{500}{10} - \left(\underbrace{\binom{480}{10}}_{0 \text{ selejtes}} + \underbrace{\binom{480}{9} \cdot \binom{20}{1}}_{1 \text{ selejtes}} \right) = \text{jó esetek száma}$$

Egy 32 létszámú osztály, amelynek Nagy Pál is tagja, diákbizottságot választ. A bizottság összetétele: 1 titkár és 4 bizottsági tag. Hány olyan eset lehetséges, amikor Nagy Pál

- (a) titkára a bizottságnak
- (b) nem titkárként tagja a bizottságnak
- (c) szerepel a bizottságban

31 fő + NP; 1 titkár + 4 biz. tag; 5 fő kiválasztása

(a) NP titkár
 $\binom{1}{1} \cdot \binom{31}{4}$

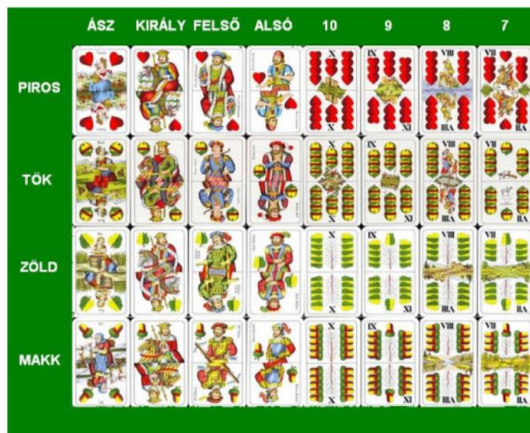
(b) NP tag, de nem titkár
 $\binom{31}{1} \cdot \binom{30}{3} \cdot \binom{1}{1}$

(c) NP tag
 $a) + b)$

Egy 32 lapos magyar kártya-csomagból egyszerre kiveszünk 5 lapot. Hány olyan húzás lehetséges, ahol a kihúzott lapok között

- (a) csak piros fordul elő
- (b) pontosan 1 piros van
- (c) van piros
- (d) 2 piros és 3 zöld van
- (e) minden szín előfordul
- (f) pontosan 1 ász és 4 piros található
- (g) mind ász vagy piros

32 lapos magyar kártya; 5 lap húzása egyszerre \hookrightarrow sorrend



(a) csak piros: $\binom{8}{5}$

(b) egy piros: $\binom{8}{1} \cdot \binom{24}{4}$

(c) van benne piros: $\text{ÖSSZES} - \text{ROSSZ} = \binom{32}{5} - \binom{24}{5} = \binom{8}{1} \cdot \binom{31}{4}$

(d) két piros és három zöld: $\binom{8}{2} \cdot \binom{8}{3}$

(e) minden szín van benne: $\binom{8}{1} \cdot \binom{8}{1} \cdot \binom{8}{1} \cdot \binom{8}{1} \cdot \binom{28}{1}$

(f) egy ász és négy piros: $\left(\binom{1}{1} \cdot \binom{7}{3} \cdot \binom{24}{1} \right) + \left(\binom{7}{4} \cdot \binom{3}{1} \right)$

(g) csak ász vagy piros: $\binom{10}{5}$
 // kizáró vagy

Hányféleképpen lehet 24 egyforma golyót 8 különböző dobozba szétosztani úgy, hogy

- (a) a dobozokba akár 0 golyó is kerülhet
- (b) minden dobozban legyen legalább 1 golyó
- (c) minden dobozban legyen legalább 2 golyó

(a) Tudjuk, hogy lehetséges olyan doboz, amibe 0 golyó kerülhet.

$$\binom{n+k-1}{k-1} = \frac{(n+k-1)!}{(k-1)! \cdot n!} \quad n=24 \Rightarrow \binom{31}{7}$$

A kombináció képletét alakítjuk át, ami hasonlít az ismétléses kombinációéra, de mégis más.

Ha n azonos elemet akarunk k eltérő helyre bontani - megkötések nélkül -, akkor a fenti képletet alkalmazzuk.

(b) Tudjuk, hogy minden dobozba legalább 1 golyó kerül, de utána a maradék 16 golyót helyezhetjük úgy, hogy egy adott dobozba csak a korábban behelyezett 1 golyó legyen.

$$\binom{n+k-1}{k-1} = \frac{(n+k-1)!}{(k-1)! \cdot n!} \quad n=16 \Rightarrow \binom{23}{7}$$

A kombináció képletét alakítjuk át, ami hasonlít az ismétléses kombinációéra, de mégis más.

Ha n azonos elemet akarunk k eltérő helyre bontani - megkötések nélkül -, akkor a fenti képletet alkalmazzuk.

(c) Tudjuk, hogy minden dobozba legalább 2 golyó kerül, de utána a maradék 8 golyót helyezhetjük úgy, hogy egy adott dobozba csak a korábban behelyezett 2 golyó legyen.

$$\binom{n+k-1}{k-1} = \frac{(n+k-1)!}{(k-1)! \cdot n!} \quad n=8 \Rightarrow \binom{15}{7}$$

A kombináció képletét alakítjuk át, ami hasonlít az ismétléses kombinációéra, de mégis más.

Ha n azonos elemet akarunk k eltérő helyre bontani - megkötések nélkül -, akkor a fenti képletet alkalmazzuk.

Legyen $n, k \in \mathbb{N}$. Igazolja a következő azonosságokat:

$$(a) \binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

$$\frac{(n+1)!}{k! \cdot (n-k+1)!} = \frac{n!}{(k-1)! \cdot (n-k+1)!} + \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \quad // : n!$$

$$\frac{n+1}{k! \cdot (n-k+1)!} = \frac{1}{(k-1)! \cdot (n-k+1)!} + \frac{1}{k! \cdot (n-k)!} \quad // : k!$$

$$\frac{n+1}{(n-k+1)!} = \frac{k}{(n-k+1)!} + \frac{1}{(n-k)!} \quad // \cdot (n-k+1)!$$

$$n+1 = k + (n-k+1)$$

$$n+1 = k - k + n + 1$$

$$n+1 = n+1 \quad / -n$$

$$\underline{\underline{1=1}}$$

$$(b) \quad k \cdot \binom{n}{k} = n \cdot \binom{n-1}{k-1}$$

$$k \cdot \binom{n}{k} = n \cdot \binom{n-1}{k-1}$$

$$k \cdot \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = n \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)! \cdot (n-1-k+1)!}$$

$$k \cdot \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = n \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)! \cdot (n-k)!} \quad // \cdot (n-k)!$$

$$k \cdot \frac{n!}{k!} = n \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)!}$$

$$\frac{n! \cdot k}{k!} = \frac{n!}{(k-1)!} \quad // : n!$$

$$\frac{k}{k!} = \frac{1}{(k-1)!} \Leftrightarrow \underline{\underline{\frac{k!}{(k-1)!} = k}}$$