Tekintsük a következő relációkat:
$\rho = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid |x-y| \leq 3\}$, $\varphi = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid 6x - 1 = 4y + 5\}$,
$\lambda = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid 4 \mid 2x + 3y\}$, $\alpha = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid 1,5x - 1,5 \leq y\}$
Határozza meg a következő kompozíciókat.

$\boxed{\varphi \circ \lambda}$ $\boxed{\varphi^3}$

$\varphi \circ \lambda = \{ (x,z) \mid \exists y: (x,y) \in \lambda, (y,z) \in \varphi \} =$
$= \{ (x,z) \mid \exists y: (4 \mid 2x + 3y) \wedge (6y - 1 = 4z + 5) \} =$
$= \underline{\underline{\{ (x,z) \mid 4 \mid 2x + 3 \times ({}^4/_6 \times z + 1) \}}}$

$\varphi^3 = \varphi^2 \circ \varphi = \{ (x,z) \mid \exists y: (x,y) \in \varphi, (y,z) \in \varphi^2 \} =$
$= \{ (x,z) \mid \exists y: (x,y) \in \varphi, (y,z) \in \{ (y,z) \mid \exists w: (y,w) \in \varphi, (w,z) \in \varphi \} \} =$
$= \{ (x, z) \mid \exists y: 6x - 1 = 4y + 5 \wedge (y,z) \in \{ (y, z) \mid \exists w:$
$6y - 1 = 4w + 5 \wedge 6w - 1 = 4z + 5 \} \} =$
$= \{ (x, z) \mid \exists y: 6x - 1 = 4y + 5 \wedge (y,z) \in \{ (y, z) \mid$
$6y - 1 = 4 \times ({}^4/_6 \times z + 1) + 5 \} \} =$
$= \{ (x, z) \mid \exists y: 6x - 1 = 4y + 5 \wedge 6y - 1 = 4 \times ({}^4/_6 \times z + 1) + 5 \} =$
$= \underline{\underline{\{ (x, z) \mid 6 \times (6/4 \times x - 6/4) - 1 = 4 \times ({}^4/_6 \times z + 1) + 5 \}}}$

Válasszuk ki a következő relációk közül a függvényeket. Adja meg a függvények értelmezési tartományát, értékkészletét. Mely függvény szürjektív, injektív, bijektív?
(a) $A = \{1,2,3,4,5\}, B = \{10,11,12,13,14\}, f \subseteq A \times B, f = \{(1,11),(2,11),(4,12),(5,10)\}$
(b) $A = \{1,2,3,4\}, B = \{a,b,c,d,e,f\}, f \subseteq A \times B, f = \{(1,a),(2,c),(3,e),(3,f),(4,a)\}$
(c) $A = \{1,2,3,4,5\}, B = \{a,b,c,d,e,f\}, f \subseteq A \times B, f = \{(1,a),(4,e),(5,d)\}$
(d) $A = \{1,2,3\}, B = \{1,3,5\}, f \subseteq A \times B, f = \{(1,1),(2,5),(3,5)\}$

(a) $dmn(f) = ÉT_f = D_f = \{ 1,2,4,5 \}$ $rng(f) = ÉK_f = R_f = \{ 10,11,12 \}$
nem injektív, mert (1,11) és (2,11) egyszerre szerepel f-ben
nem szürjektív, mert rng(f) nem a teljes B halmaz
nem bijektív, mert nem szürjektív és nem injektív
(b) nem függvény, mert nem egyértelmű a hozzárendelés a 3-ashoz

(c) dmn(f) = $ÉT_f$ = D_f = { 1,4,5 } rng(f) = $ÉK_f$ = R_f = { a,d,e }
injektív, mert egy B-beli elem egy A-bel elemmel van összekötve
nem szürjektív, mert rng(f) nem a teljes B halmaz
nem bijektív, mert injektív, de nem szürjektív
(d) dmn(f) = $ÉT_f$ = D_f = { 1,2,3 } rng(f) = $ÉK_f$ = R_f = { 1,5 }
nem injektív, mert (2,5) és (3,5) egyszerre szerepel f-ben
nem szürjektív, mert rng(f) nem a teljes B halmaz
nem bijektív, mert nem injektív és nem szürjektív

Döntsük el, hogy az alábbi relációk közül melyek függvények.
(a) $f \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}, xfy \iff x \mid y$
(b) $f \subseteq \{0,3,5\} \times \{1,2,5\}, xfy \iff xy = 0$
(c) $f \subseteq \{1,2,5\} \times \{0,3,5\}, xfy \iff xy = 0$
(f) $f \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, xfy \iff x^2 = y^2$
(g) $f \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}, xfy \iff x^2 = y^2$

(a) nem függvény, mert az oszthatóság szabályai szerint, ha x | y, akkor x | x, így szerepelne f-ben (x,y) és (x,x)-típusú pár is, amitől nem lenne egyértelmű a hozzárendelés
(b) xy csak akkor 0, ha x = 0, vagyis (0,1), (0,2), (0,5) párokból áll f, így újfent nem egyértelmű a hozzárendelés
(c) xy csak akkor 0, ha y = 0, viszont így (1,0), (2,0), (5,0) párokból áll f, amitől függvény (csak nem injektív)
(f) $x^2 = y^2$ esetén (x,y), (x,-y), (-x,y), (-x,-y)-típusú párokból áll f, így nem egyértelműen rendel hozzá f az egyes x-ekhez y-okat, így nem függvény
(g) mivel a természetes számok halmazán dolgozunk, így $x^2 = y^2$ esetén igaz, hogy x = y, vagyis (x,x), (y,y)-típusú párokból áll az f, ezzel egyértelmű hozzárendelés történik, így f függvény

Legyen $A = \{2, 3, 6, 8, 9, 12, 18\} \subseteq \mathbb{N}^+$, $R \subseteq A \times A$ és $aRb \iff a \mid b$.
Mutassa meg, hogy az R reláció részbenrendezés az A halmazon.

R reflexív-e, antiszimmetrikus-e, tranzitív-e:
reflexivitás: tetszőleges A-beli elemeknél ha a|b, akkor a|a, így minden a párban áll önmagával, így az összes reflexív elem szerepel benne, így R reflexív;
antiszimmetria: ha ez fennáll, akkor a|b esetén b∤a, kivéve, ha a=b, és ez igaz is, így ha (a,b) pár szerepel R-ben, akkor (b,a) pár nem (amennyiben a ≠ b), így R antiszimmetrikus;
tranzitivitás: ezek alapján, ha a|b és b|c, akkor a|c (tetszőleg a,b,c A-beli elem esetén), ami szintén igaz; így (a,b) és (b,c) párok esetén (a,c) is eleme R-nek, így R tranzitív is.
Mivel R reflexív, antiszimmetrikus és tranzitív, így részbenrendezés is.

Döntse el a következő relációkról, hogy részbenrendezési relációk-e az adott halmazon.
$R \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, aRb \iff |a| \leq |b|$

R reflexív-e, antiszimmetrikus-e, tranzitív-e:
reflexivitás: mivel |a| = |b| megengedett, így R-ben szerepelnek (a,a)-típusú elemek, így R reflexív;
antiszimmetria: mivel tetszőleges egész számokra |a| < |b| vagy |a| = |b|, ezért az előbbi esetben nem szerepelhetnek (b,a) párok, csak (a,b) párok, emiatt csak a reflexív elemekre igaz a szimmetria, így R antiszimmetrikus;
tranzitivitás: tetszőleges egész számok esetén igaz az, hogyha |a| ≤ |b| és |b| ≤ |c|, akkor |a| ≤ |c|, így (a,b), (b,c) és (a,c) párok is szerepelnek R-ben, így R tranzitív is.
Mivel R reflexív, antiszimmetrikus és tranzitív, így részbenrendezési reláció is.