A 2, 3, 4, 5, 7 számjegyek egyszeri felhasználásával képezzünk ötjegyű számokat.
(a) Hány számot képezhetünk?
(b) Hány páros van közöttük?
(c) Hány olyan van, amely osztható néggyel?

2, 3, 4, 5, 7 ; ötjegyű szám

(a) $5!$ // $\boxed{5}\cdot\boxed{4}\cdot\boxed{3}\cdot\boxed{2}\cdot\boxed{1}$ (b) $2\cdot 4!$ // $\boxed{4}\cdot\boxed{3}\cdot\boxed{2}\cdot\boxed{1}\cdot\boxed{2} \oplus \boxed{4}\cdot\boxed{3}\cdot\boxed{2}\cdot\boxed{1}\cdot\boxed{4}$

(c) $4 \mid \overline{abcde} \Leftrightarrow 4 \mid \overline{de}$ $(a,b,c,d,e \in \{2,3,4,5,7\}) \Rightarrow \overline{de} \in \{24, 32, 52, 72\}$

$\Rightarrow \boxed{3}\cdot\boxed{2}\cdot\boxed{1}\cdot de \Rightarrow \underline{\underline{4\cdot 3!}}$

Hány 5-tel osztható hatjegyű szám képezhető a 0, 1, 2, 3, 4, 5 számokból, ha minden számjegy csak egyszer szerepelhet?

$5 \mid \overline{abcdef}$; $a,b,c,d,e,f \in \{0,1,2,3,4,5\}$, $a \neq 0$: $5\cdot 5!$

Egy tíztagú társaság tagjai között 4 különböző könyvet sorsolnak ki úgy, hogy egy-egy személy csak egy könyvet nyerhet. Hányféleképpen végződhet a sorsolás?

10 fő ; 4 különböző könyv ; 1 fő - 1 könyv ; sorrend számít

$10\cdot 9\cdot 8\cdot 7 = \frac{10!}{(10-4)!} = V_{10}^{4}$

Egy műhelyben egy műszak alatt elkészített 500 db zár 4%-a selejtes. Hányféleképpen lehet kiválasztani 10 zárat úgy, hogy a kiválasztottak közül
(a) pontosan 5 selejtes legyen
(b) legalább 2 selejtes legyen

500 zár ; 4% selejtes ; 10 kiválasztása ; sorrend nem számít

(a) 5 selejtes : $\underbrace{500}_{\Sigma}\cdot\underbrace{0{,}04}_{\text{selejtes}} = 20$ selejtes $\Rightarrow \binom{20}{5}\cdot\binom{480}{5}$

(b) legalább 2 selejtes : $500\cdot 0{,}04 = 20$ selejtes

$\boxed{\text{ÖSSZES ESET} - \text{ROSSZ ESET} = \text{JÓ ESET}}$

$\binom{500}{10} - \left(\underbrace{\binom{480}{10}}_{\text{Ø selejtes}} + \underbrace{\binom{480}{9}\cdot\binom{20}{1}}_{\text{1 selejtes}}\right) =$ jó esetek száma

Egy 32 létszámú osztály, amelynek Nagy Pál is tagja, diákbizottságot választ. A bizottság összetétele: 1 titkár és 4 bizottsági tag. Hány olyan eset lehetséges, amikor Nagy Pál

(a) titkára a bizottságnak
(b) nem titkárként tagja a bizottságnak
(c) szerepel a bizottságban

31 fő + NP; 1 titkár + 4 biz. tag; 5 fő kiválasztása

(a) NP titkár

$\binom{1}{1}\cdot\binom{31}{4}$

(b) NP tag, de nem titkár

$\binom{31}{1}\cdot\binom{30}{3}\cdot\binom{1}{1}$

(c) NP tag

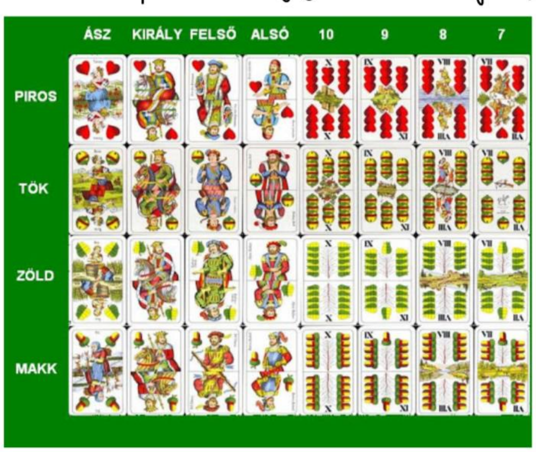
a) + b)

Egy 32 lapos magyarkártya-csomagból egyszerre kiveszünk 5 lapot. Hány olyan húzás lehetséges, ahol a kihúzott lapok között

(a) csak piros fordul elő
(b) pontosan 1 piros van
(c) van piros
(d) 2 piros és 3 zöld van
(e) minden szín előfordul
(f) pontosan 1 ász és 4 piros található
(g) mind ász vagy piros

32 lapos magyarkártya; 5 lap húzása egyszerre

↳ ∅ sorrend



(a) csak piros: $\binom{8}{5}$

(b) egy piros: $\binom{8}{1}\cdot\binom{24}{4}$

ÖSSZES − ROSSZ

(c) van benne piros: $\binom{32}{5}-\binom{24}{5}$ v $\binom{8}{1}\cdot\binom{31}{4}$

(d) két piros és három zöld: $\binom{8}{2}\cdot\binom{8}{3}$

(e) minden szín van benne: $\binom{8}{1}\cdot\binom{8}{1}\cdot\binom{8}{1}\cdot\binom{8}{1}\cdot\binom{28}{1}$

(f) egy ász és négy piros: $\left(\binom{1}{1}\cdot\binom{7}{3}\cdot\binom{21}{1}\right)+\left(\binom{7}{4}\cdot\binom{3}{1}\right)$

(g) csak ász vagy piros: $\binom{10}{5}$

//kizáró vagy

Hányféleképpen lehet 24 egyforma golyót 8 különböző dobozba szétosztani úgy, hogy

(a) a dobozokba akár 0 golyó is kerülhet

(b) minden dobozban legyen legalább 1 golyó

(c) minden dobozban legyen legalább 2 golyó

(a) Tudjuk, hogy lehetséges olyan doboz, amibe 0 golyó kerülhet.

$$\binom{n+k-1}{k-1} = \frac{(n+k-1)!}{(k-1)! \cdot n!} \qquad \begin{matrix} n=24 \\ k=8 \end{matrix} \Rightarrow \binom{31}{7}$$

A kombináció képletét alakítjuk át, ami hasonlít az ismétléses kombinációéra, de mégis más.
Ha n azonos elemet akarunk k eltérö helyre bontani - megkötések nélkül -, akkor a fenti képletet alkalmazzuk.

(b) Tudjuk, hogy minden dobozba legalább 1 golyó kerül, de utána a maradék 16 golyót helyezhetjük úgy, hogy egy adott dobozba csak a korábban behelyezett 1 golyó legyen.

$$\binom{n+k-1}{k-1} = \frac{(n+k-1)!}{(k-1)! \cdot n!} \qquad \begin{matrix} n=16 \\ k=8 \end{matrix} \Rightarrow \binom{23}{7}$$

A kombináció képletét alakítjuk át, ami hasonlít az ismétléses kombinációéra, de mégis más.
Ha n azonos elemet akarunk k eltérö helyre bontani - megkötések nélkül -, akkor a fenti képletet alkalmazzuk.

(c) Tudjuk, hogy minden dobozba legalább 2 golyó kerül, de utána a maradék 8 golyót helyezhetjük úgy, hogy egy adott dobozba csak a korábban behelyezett 2 golyó legyen.

$$\binom{n+k-1}{k-1} = \frac{(n+k-1)!}{(k-1)! \cdot n!} \qquad \begin{matrix} n=8 \\ k=8 \end{matrix} \Rightarrow \binom{15}{7}$$

A kombináció képletét alakítjuk át, ami hasonlít az ismétléses kombinációéra, de mégis más.
Ha n azonos elemet akarunk k eltérö helyre bontani - megkötések nélkül -, akkor a fenti képletet alkalmazzuk.

STARS AND BARS

1. tétel:
Bármilyen n és k pozitív egész számok esetén, a pozitív egészek k hosszú párjainak száma - aminek az összege n - megegyezik az n-1 elemet tartalmazó halmaz k-1 hosszú részhalmazainak a számával.

Mindkét fenti (n és k) szám megadható a $\binom{n-1}{k-1}$ binomiális együtthatóval.

2. tétel:
Bármilyen n és k pozitív egész számok esetén, a nemnegatív egészek k hosszú párjainak száma - aminek az összege n - megegyezik az n+1 elemet tartalmazó halmaz k-1 hosszú multihalmazainak a számosságával.

Mindkét fenti (n és k) szám megadható a $\binom{n+k-1}{k-1} = \binom{n+k-1}{n}$ binomiális együtthatók valamelyikével.

https://en.wikipedia.org/wiki/Stars_and_bars_(combinatorics)

Legyen $n, k \in \mathbb{N}$. Igazolja a következő azonosságokat:

(a) $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

$$\frac{(n+1)!}{k! \cdot (n-k+1)!} = \frac{n!}{(k-1)! \cdot (n-k+1)!} + \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \quad // : n!$$

$$\frac{n+1}{k! \cdot (n-k+1)!} = \frac{1}{(k-1)! \cdot (n-k+1)!} + \frac{1}{k! \cdot (n-k)!} \quad // \cdot k!$$

$$\frac{n+1}{(n-k+1)!} = \frac{k}{(n-k+1)!} + \frac{1}{(n-k)!} \quad // \cdot (n-k+1)!$$

$$n+1 = k + (n-k+1)$$

$$n+1 = k-k+n+1$$

$$n+1 = n+1 \quad /-n$$

$$\underline{\underline{1=1}}$$

(b) $k \cdot \binom{n}{k} = n \cdot \binom{n-1}{k-1}$

$$k \cdot \binom{n}{k} = n \cdot \binom{n-1}{k-1}$$

$$k \cdot \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = n \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)! \cdot (n-1-k+1)!}$$

$$k \cdot \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = n \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)! \cdot (n-k)!} \quad // \cdot (n-k)!$$

$$k \cdot \frac{n!}{k!} = n \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)!}$$

$$\frac{n! \cdot k}{k!} = \frac{n!}{(k-1)!} \quad // : n!$$

$$\frac{k}{k!} = \frac{1}{(k-1)!} \iff \underline{\underline{\frac{k!}{(k-1)!} = k}}$$