- logikai műveletek igazságtáblája

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
I	I	H	I	I	I	I
I	H	H	H	I	H	H
H	I	I	H	I	I	H
H	H	I	H	H	I	I

- a logikai műveletek tulajdonságai, ítéletlogikai tételek

1. $A \vee A \Leftrightarrow A$, $A \wedge A \Leftrightarrow A$ *(idempotencia)*
2. $A \vee (B \vee C) \Leftrightarrow (A \vee B) \vee C, A \wedge (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \wedge C$ *(asszociativitás)*
3. $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A, A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$ *(kommutativitás)*
4. $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C), A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ *(disztributivitás)*
5. $(A \vee B) \wedge A \Leftrightarrow A$, $(A \wedge B) \vee A \Leftrightarrow A$ *(abszorpció, azaz elnyelési tulajdonság)*
6. $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B, \neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$ *(De Morgan azonosságok)*
7. $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$ *(kontrapozíció tétele)*
8. $((A \Rightarrow B) \wedge A) \Rightarrow B$ *(modus ponens)*
9. $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$ *(szillogizmus)*
10. $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)) \Leftrightarrow (A \Leftrightarrow B)$

- kvantorok

  - $\exists$ (egzisztenciális kvantor): „létezik", „van olyan".
  - $\forall$ (univerzális kvantor): „bármely", „minden".

- üreshalmaz

Azt a halmazt, melynek nincs eleme, üres halmaznak nevezzük. Jele: $\emptyset$ vagy $\{\}$.

Figyelem! $\emptyset \neq \{\emptyset\}$.

- részhalmaz

Az A halmaz részhalmaza a B halmaznak: $A \subseteq B$, ha A minden eleme B-nek is eleme, azaz

$$\forall x(x \in A \Rightarrow x \in B).$$

Ha $A \subseteq B$-nek, de $A \neq B$, akkor A valódi részhalmaza B-nek: $A \subsetneq B$.

- részhalmaz reláció tulajdonságai

1. $\forall A\ (A \subseteq A)$ *(reflexivitás).*
2. $\forall A, B, C\ \ ((A \subseteq B \land B \subseteq C) \Rightarrow A \subseteq C)$ *(tranzitivitás).*
3. $\forall A, B\ \ ((A \subseteq B \land B \subseteq A) \Rightarrow A = B)$ *(antiszimmetria).*

- halmazok uniója

Az A és B halmazok uniója: $A \cup B$ az a halmaz, mely pontosan A és B összes elemét tartalmazza: $A \cup B = \{x \mid x \in A \lor x \in B\}$.
Általában: Legyen $\mathscr{A}$ egy olyan halmaz, melynek az elemei is halmazok (halmazrendszer). Ekkor $\bigcup \mathscr{A} = \cup\{A : A \in \mathscr{A}\} = \cup_{A \in \mathscr{A}} A$ az a halmaz, mely $\mathscr{A}$ összes elemének elemeit tartalmazza:

$$\cup \mathscr{A} = \{x \mid \exists A \in \mathscr{A} : x \in A\}.$$

Speciálisan: $A \cup B = \cup\{A, B\}$.

- az unió tulajdonságai

Minden A, B, C halmazra:

1. $A \cup \emptyset = A$
2. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ *(asszociativitás)*
3. $A \cup B = B \cup A$ *(kommutativitás)*
4. $A \cup A = A$ *(idempotencia)*
5. $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$

- halmazok metszete

Az A és B halmazok metszete: $A \cap B$ az a halmaz, mely pontosan az A és B *közös* elemeit tartalmazza: $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$.
Általában: Legyen $\mathscr{A}$ egy olyan halmaz, melynek az elemei is halmazok (halmazrendszer). Ekkor $\cap\mathscr{A} = \cap\{A : A \in \mathscr{A}\} = \cap_{A \in \mathscr{A}} A$ a következő halmaz:

$$\cap\mathscr{A} = \{x \mid \forall A \in \mathscr{A} : x \in A\}.$$

Speciálisan: $A \cap B = \cap\{A, B\}$.

- a metszet tulajdonságai

Minden A, B, C halmazra:

1. $A \cap \emptyset = \emptyset$
2. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ *(asszociativitás)*
3. $A \cap B = B \cap A$ *(kommutativitás)*
4. $A \cap A = A$ *(idempotencia)*
5. $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$

- (páronként) diszjunkt halmazrendszer

Ha $A \cap B = \emptyset$, akkor A és B diszjunktak.
Általánosabban: Ha $\mathscr{A}$ egy halmazrendszer, és $\cap\mathscr{A} = \emptyset$, akkor $\mathscr{A}$ diszjunkt, illetve $\mathscr{A}$ elemei diszjunktak.
Ha $\mathscr{A}$ egy halmazrendszer, és $\mathscr{A}$ bármely két eleme diszjunkt, akkor $\mathscr{A}$ elemei páronként diszjunktak.

- az unió és a metszet disztributivitási tulajdonságai

1. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
2. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

- halmazok különbsége, komplementere

Az A és B halmazok különbsége az $A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\}$ halmaz.

Egy rögzített X alaphalmaz és $A \subseteq X$ részhalmaz esetén az A halmaz komplementere az $\overline{A} = A' = X \setminus A$ halmaz.

- a komplementer tulajdonságai

Legyen X az alaphalmaz. Ekkor minden $A, B \subseteq X$ halmazra:

1. $\overline{\overline{A}} = A;$
2. $\overline{\emptyset} = X;$
3. $\overline{X} = \emptyset;$
4. $A \cap \overline{A} = \emptyset;$
5. $A \cup \overline{A} = X;$
6. $A \subseteq B \Leftrightarrow \overline{B} \subseteq \overline{A};$
7. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B};$
8. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$

- szimmetrikus differencia

Az A és B halmazok szimmetrikus differenciája az

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

halmaz.

$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (B \cap A).$

- hatványhalmaz

Ha A egy halmaz, akkor azt a halmazrendszert, melynek elemei pontosan az A halmaz részhalmazai az A hatványhalmazának mondjuk, és 2^A-val jelöljük. (A $\mathscr{P}(A)$ jelölés is szokásos.)

Tetszőleges A véges halmazra: $|2^A| = 2^{|A|}$.

- rendezett pár

Az (x, y) rendezett párt a $\{\{x\}, \{x, y\}\}$ halmazzal definiáljuk.
Az (x, y) rendezett pár esetén x az első, y a második koordináta.

- halmazok Descartes-szorzata

Az X, Y halmazok Descartes-szorzatán (direkt szorzatán) az

$$X \times Y = \{(x, y) \ : \ x \in X, y \in Y\}$$

rendezett párokból álló halmazt értjük.

- binér reláció

Ha valamely X, Y halmazokra $R \subseteq X \times Y$, akkor azt mondjuk, hogy R reláció X és Y között. Ha $X = Y$, akkor azt mondjuk, hogy R X-beli reláció (homogén binér reláció).

- ÉT, ÉK

Az $R \subseteq X \times Y$ reláció értelmezési tartománya:

$$dmn(R) = \{x \in X \mid \exists y \in Y : (x, y) \in R\},$$

értékkészlete:

$$rng(R) = \{y \in Y \mid \exists x \in X : (x, y) \in R\}.$$

- reláció kiterjesztése, leszűkítése, inverze

Egy R binér relációt az S binér reláció kiterjesztésének, illetve S-et az R leszűkítésének (megszorításának) nevezzük, ha $S \subseteq R$. Ha A egy halmaz, akkor az R reláció A-ra való leszűkítése (az A-ra való megszorítása) az

$$R|_A = \{(x, y) \in R \ : \ x \in A\}.$$

Egy R binér reláció inverze az $R^{-1} = \{(y, x) : (x, y) \in R\}$ reláció.

- halmaz képe, inverz képe

Legyen $R \subseteq X \times Y$ egy binér reláció, A egy halmaz. Az A halmaz (R szerinti) képe az

$$R(A) = \{y \in Y \mid \exists x \in A : (x, y) \in R\}$$

halmaz. Adott B halmaz inverz képe, vagy őse képe a B halmaz R^{-1} szerinti képe, azaz $R^{-1}(B)$. (Ez nem más, mint:

$$R^{-1}(B) = \{x \in X \mid \exists y \in B : (x, y) \in R\})$$

- relációk kompozíciója és tulajdonságai

Legyenek R és S binér relációk. Ekkor az $R \circ S$ kompozíció (összetétel, szorzat) reláció:

$$R \circ S = \{(x, z) \mid \exists y : (x, y) \in S, (y, z) \in R\}.$$

Legyenek R, S, T relációk. Ekkor

1. $R \circ (S \circ T) = (R \circ S) \circ T$ *(a kompozíció asszociatív).*
2. $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$ *(kompozíció inverze).*

- homogén relációk tulajdonságai

Legyen R reláció X-en. Ekkor azt mondjuk, hogy

1. R tranzitív, ha $\forall x, y, z \in X : (x\ R\ y \wedge y\ R\ z) \Rightarrow x\ R\ z$; ($=$, $<$, $\leq$, $|$, $\subseteq$)
2. R szimmetrikus, ha $\forall x, y \in X : x\ R\ y \Rightarrow y\ R\ x$; ($=$, T)
3. R antiszimmetrikus, ha $\forall x, y \in X : (x\ R\ y \wedge y\ R\ x) \Rightarrow x = y$; ($=$, $\leq$, $\subseteq$)
4. R szigorúan antiszimmetrikus, ha $\forall x, y \in X : x\ R\ y \Rightarrow \neg y\ R\ x$; ($<$)
5. R reflexív, ha $\forall x \in X : x\ R\ x$; ($=$, $\leq$, $|$, $\subseteq$, T)
6. R irreflexív, ha $\forall x \in X : \neg x\ R\ x$; ($<$)
7. R trichotóm, ha $\forall x, y \in X$ esetén $x = y$, $x\ R\ y$ és $y\ R\ x$ közül pontosan egy teljesül; ($<$)
8. R dichotóm, ha $\forall x, y \in X$ esetén $x\ R\ y$ vagy $y\ R\ x$ (esetleg mindkettő) teljesül. ($\leq$)

- ekvivalenciareláció, ekvivalenciaosztály

Legyen X egy halmaz, R reláció X-en. Az R relációt ekvivalenciarelációnak nevezzük, ha reflexív, szimmetrikus és tranzitív.

Legyen $\sim$ egy ekvivalenciareláció az X halmazon. Tetszőleges $x \in X$ esetén az

$$\tilde{x} = [x] = \{y \mid y \sim x\}$$

halmazt az x ekvivalenciaosztályának nevezzük.

- halmaz osztályozásai

Egy (nemüres) X halmaz részhalmazainak egy $\mathscr{O}$ rendszerét az X osztályozásának nevezzük, ha

- $\mathscr{O}$ nemüres halmazokból áll,
- $\mathscr{O}$ páronként diszjunkt halmazrendszer és
- $\cup\mathscr{O} = X$.

Ekkor az $\mathscr{O}$ elemeit (melyek maguk is halmazok) az X osztályainak nevezzük.

- részbenrendezés, rendezés

- Az X halmazon értelmezett reflexív, tranzitív és antiszimmetrikus relációt részbenrendezésnek nevezzük. (Jele: $\leq$, $\preceq$, $\ldots$)
- Ha $\preceq$ egy részbenrendezés X-en, akkor az $(X; \preceq)$ párt részbenrendezett halmaznak nevezzük.
- Ha valemely $x, y \in X$-re $x \preceq y$ vagy $y \preceq x$ teljesül, akkor x és y összehasonlítható. (Ha minden elempár összehasonlítható, akkor a reláció dichotóm.)
- Ha az X halmazon értelmezett részbenrendezés dichotóm (azaz, ha bármely két elem összehasonlítható), akkor rendezésnek nevezzük.

- függvény

Egy $f \subseteq X \times Y$ relációt függvénynek (leképezésnek, transzformációnak, hozzárendelésnek, operátornak) nevezünk, ha

$$\forall x, y, y' : (x, y) \in f \wedge (x, y') \in f \Rightarrow y = y'.$$

Az $(x, y) \in f$ jelölés helyett ilyenkor az $f(x) = y$ (vagy $f : x \mapsto y$, $f_x = y$) jelölést használjuk. Az y az f függvény x helyen (argumentumban) felvett értéke.

Az $f \subseteq X \times Y$ függvények halmazát $X \to Y$ jelöli, így használható az $f \in X \to Y$ jelölés. Ha $dmn(f) = X$, akkor az $f : X \to Y$ jelölést használjuk (ez a jelölés csak akkor használható, ha $dmn(f) = X$).

- injekció, szürjektivitás, bijekció

Az $f : X \to Y$ függvény

- injektív, ha $\forall x, x', y : (f(x) = y \wedge f(x') = y) \Rightarrow x = x'$;
- szürjektív, ha $rng(f) = Y$;
- bijektív, ha injektív és szürjektív.

Emlékeztető

Relációk kompozíciója: $R \circ S = \{(x, y) | \exists z : (x, z) \in S \wedge (z, y) \in R\}$.

Függvény: Az f reláció függvény, ha $(x, y) \in f \wedge (x, y') \in f \Rightarrow y = y'$.

- függvények kompozícióinak tulajdonságai

1. *Ha f és g függvény, akkor $g \circ f$ is függvény.*
2. *Ha f és g függvény, akkor $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.*
3. *Ha f és g injektív, akkor $g \circ f$ is injektív.*
4. *Ha $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ szürjektívek, akkor $g \circ f : X \to Z$ is szürjektív.*

- képzetes egység

Legyen i (képzetes egység) megoldása az $x^2 = -1$ egyenletnek.

- komplex számok

Az $a + bi$ alakú kifejezéseket, ahol $a, b \in \mathbb{R}$, komplex számoknak ($\mathbb{C}$) hívjuk, az ilyen formában való felírásukat algebrai alaknak nevezzük.

- összeadás: $(a + bi) + (c + di) = a + c + (b + d)i$.
- szorzás: $(a + bi)(c + di) = ac - bd + (ad + bc)i$.

formális definíció:

A komplex halmaza $\mathbb{C}$ az $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ párok halmaza az alábbi műveletekkel:

- összeadás: $(a, b) + (c, d) = (a + c, d + b)$;
- szorzás: $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$.

- komplex számok valós és képzetes része

A $z = a + bi \in \mathbb{C}$ $(a, b \in \mathbb{R})$ komplex szám
valós része: $Re(z) = a \in \mathbb{R}$, képzetes része: $Im(z) = b \in \mathbb{R}$.

- algebra alaptétele

Legyen $n > 0$ és $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$. Ekkor az $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ polinomnak létezik gyöke $\mathbb{C}$-ben, azaz létezik olyan z komplex szám, melyre $a_0 + a_1z + a_2z^2 + \ldots + a_nz^n = 0$.

- összeadás és szorzás komplex számokon

Összeadás tulajdonságai

1. *Asszociativitás:* $\forall a, b, c \in \mathbb{C} : (a + b) + c = a + (b + c)$.
2. *Kommutativitás:* $\forall a, b \in \mathbb{C} : a + b = b + a$.
3. *Semleges elem (nullelem):* $\exists 0 \in \mathbb{C}$ (*nullelem*), *hogy* $\forall a \in \mathbb{C}$: $0 + a = a + 0 = a$.
4. *Additív inverz (ellentett):* $\forall a \in \mathbb{C} : \exists -a \in \mathbb{C}$ (a *ellentettje*), *melyre* $a + (-a) = (-a) + a = 0$.

Szorzás tulajdonságai

1. *Asszociativitás:* $\forall a, b, c \in \mathbb{C} : (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
2. *Kommutativitás:* $\forall a, b, c \in \mathbb{C} : a \cdot b = b \cdot a$.
3. *Egységelem:* $\exists 1 \in \mathbb{C}$ (*egységelem*), *melyre* $\forall a \in \mathbb{C} : 1 \cdot a = a \cdot 1 = a$.
4. *Multiplikatív inverz (reciprok):* $\forall a \in \mathbb{C}$ *nemnulla számhoz* $\exists a^{-1} = \frac{1}{a} \in \mathbb{C}$ (a *reciproka*), *melyre* $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$.

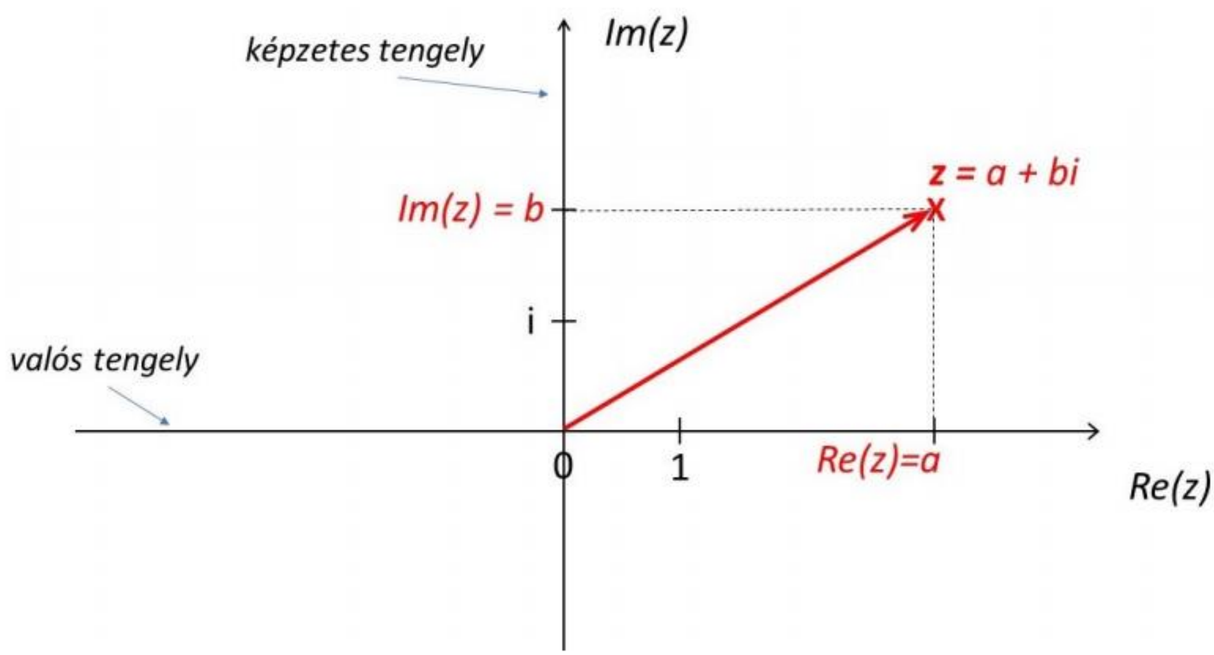
Disztributivitás

$\forall a, b, c \in \mathbb{C} : a(b + c) = ab + ac$ (*és* $(a + b)c = ac + bc$)

- komplex számok ábrázolása

A komplex számok ábrázolhatók a komplex számsíkon (Gauss-sík):

- $z = a + bi \leftrightarrow (a, b)$
- bijekció (kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés) $\mathbb{C}$ és a sík pontjai (vagy helyvektorai) között



- abszolútérték, konjugált

Egy $z = a + bi \in \mathbb{C}$ algebrai alakban megadott komplex szám abszolút értéke: $|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Egy $z = a + bi$ algebrai alakban megadott komplex szám konjugáltja a $\overline{z} = \overline{a + bi} = a - bi$ szám.

Tetszőleges z komplex szám esetén:

1. $|z| \geq 0$,
2. $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.

- ellentett

Egy $z \in \mathbb{C}$ szám ellentettje az a $\hat{z}$ szám, melyre $z + \hat{z} = 0$.

Egy $z = a + bi \in \mathbb{C}$ algebrai alakban megadott komplex szám ellentettje a $-z = -a - bi$ algebrai alakban megadott komplex szám.

- hányados kiszámítása algebrai alakban

Legyenek $z, w \in \mathbb{C}$, $w \neq 0$. *Ekkor* $\frac{z}{w}$ *algebrai alakja megkapható a nevező konjugáltjával való bővítéssel:* $\frac{z}{w} = \frac{z \cdot \overline{w}}{w \cdot \overline{w}}$.

Legyen z algebrai alakja $a + bi$. Ekkor
$z \cdot \overline{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 = |z|^2$.

- egy komplex szám trigonometrikus alakja, argumentuma

Egy $z \in \mathbb{C}$ nemnulla szám trigonometrikus alakja:

$$z = r(\cos\varphi + i \sin\varphi),$$

ahol $r = |z|$.

Egy nemnulla $z \in \mathbb{C}$ argumentuma az a $\varphi = arg(z) \in [0, 2\pi)$, melyre $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Figyelem!

- A 0-nak nem használjuk a trigonometrikus alakját.
- A trigonometrikus alak nem egyértelmű (mert az irányszög nem egyértelmű): $r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r(\cos(\varphi + 2\pi) + i\sin(\varphi + 2\pi))$.

- Moivre-azonosságok

Legyenek $z, w \in \mathbb{C}$ *nemnulla komplex számok:* $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $w = |w|(\cos\psi + i\sin\psi)$, *és legyen* $n \in \mathbb{N}^+$. *Ekkor*

1. $zw = |z||w|(\cos(\varphi + \psi) + i\sin(\varphi + \psi))$;
2. $\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|} \cdot (\cos(\varphi - \psi) + i\sin(\varphi - \psi))$;
3. $z^n = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$.

- komplex szám n-edik gyökei, gyökvonás

Legyen $n \in \mathbb{N}^+$. A z komplex szám n-edik gyökei az olyan w komplex számok, melyekre $w^n = z$.

Legyen $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $n \in \mathbb{N}^+$. *Ekkor a* z n*-edik gyökei:*

$$w_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right)$$

$k = 0, 1, \ldots, n - 1$.