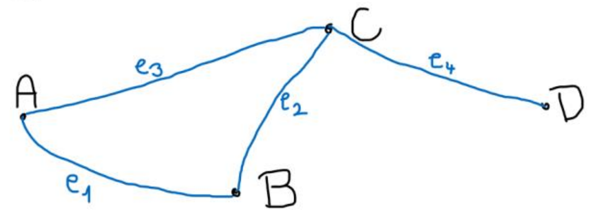
Ábrázoljuk a következő irányítatlan gráfot: $G = (V, E, \varphi)$, $V = \{A, B, C, D\}$, $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, $\varphi = \{(e_1, \{A, B\}), (e_2, \{B, C\}), (e_3, \{A, C\}), (e_4, \{C, D\})\}$. Határozza meg a következőket: $d(A), d(B), d(C), d(D)$. Rajzolja le $\overline{G}$-t. Izomorf-e G és $\overline{G}$?

G:



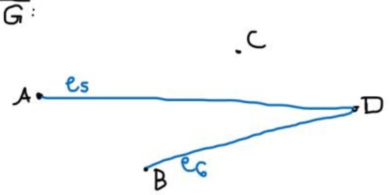
Definíció (csúcs fokszáma)
A v csúcs fokszámán (vagy fokán) a rá illeszkedő élek számát értjük, a hurokéleket kétszer számolva.
Jelölése: $d(v)$ vagy $deg(v)$.

Definíció (gráf komplementere)
Egy G egyszerű gráf komplementere az a $\overline{G}$ egyszerű gráf, melynek csúcshalmaza megegyezik G csúcshalmazával, és amelyben két csúcs pontosan akkor van összekötve éllel, ha G-ben nincs.

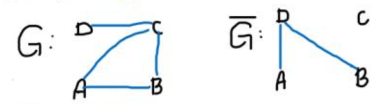
Definíció (gráfok izomorfiája)
A $G = (\varphi, E, V)$ és $G' = (\varphi', E', V')$ gráfok izomorfak, ha léteznek $f: E \to E'$ és $g: V \to V'$ bijektív leképezések, hogy minden $e \in E$-re és $v \in V$-re e pontosan akkor illeszkedik v-re, ha $f(e)$ illeszkedik $g(v)$-re.

$\cdot d(A)=2 \quad \cdot d(B)=2 \quad \cdot d(C)=3 \quad \cdot d(D)=1$

$\overline{G}$:



$\cdot$ G és $\overline{G}$ izomorf-e:



NEM

Bizonyítsuk be, hogy egy gráfban a páratlan fokszámú csúcsok száma mindig páros.

Tétel (Fokszámösszeg)
A $G = (\varphi, E, V)$ gráfra
$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|.$$

A fenti tétel alapján, egy adott gráf összes csúcsának fokszámösszege az az élek számainak kétszerese, így ez mindig egy páros szám lesz. Ez azért igaz, mert minden él két csúcsot köt össze. Ezek alapján, a gráf páros fokszámú csúcsainak fokszámainak az összege páros, tehát a maradék fokszámösszeg, amit a gráf páratlan csúcsai adnak ki, az is páros. Páratlan számok összege pedig csak akkor páros, ha páros darab szerepel.

Lehet-e egy 7 pontú egyszerű gráf fokszámsorozata
(a) 4, 4, 3, 3, 2, 2, 1;
(b) 6, 3, 3, 3, 3, 2, 0;
(c) 5, 5, 5, 2, 2, 2, 1;
(d) 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2?

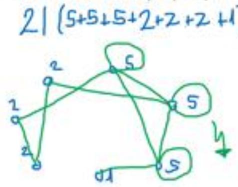
(a) 4,4,3,3,2,2,1:
$2 \nmid (4+4+3+3+2+1) \Rightarrow$ ✗

(b) 6,3,3,3,3,2,0:
$2 \mid (6+3+3+3+3+2+0)$ ✓
de $d(\#1)=6 \wedge |V|=7 \wedge d(\#7)=0$
$\Rightarrow$ hurokél az első csúcsnál
$\Rightarrow$ nem egyszerű gráf $\Rightarrow$ ✗

Tétel (Fokszámösszeg)
A $G = (\varphi, E, V)$ gráfra
$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|.$$

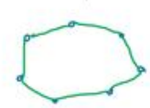
Definíció (hurokél, egyszerű gráf)
Ha egy él egyetlen csúcsra illeszkedik, azt hurokélnek nevezzük.
Ha $e \neq e'$ esetén $\varphi(e) = \varphi(e')$, akkor e és e' párhuzamos élek.
Ha egy gráfban nincs sem hurokél, sem párhuzamos élek, akkor azt egyszerű gráfnak nevezzük.

(c) 5,5,5,2,2,2,1:
$2 \mid (5+5+5+2+2+2+1)$



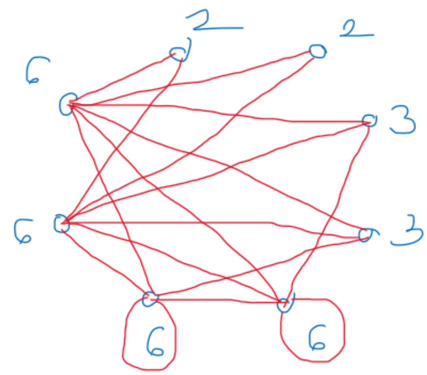
// A 3 darab ötfokos csúcs között 3 él,
// azaz 6 fok megy. A maradék 15 - 6 = 9
// él a másik 4 csúcsba mehet. De ezek száma
// 2 + 2 + 2 + 1 = 7, ami kevesebb, mint a 9.

(d) 2,2,2,2,2,2,2:
$2 \mid 7 \cdot 2$



Van-e olyan 8 pontú gráf, melyben a csúcsok fokai rendre 6,6,6,6,3,3,2,2? És egyszerű gráf?

6,6,6,6,3,3,2,2



Az alábbi ábra példa egy nem egyszerű gráfra, de vajon van-e egyszerű gráfra is ilyen? Ha van ilyen, akkor van komplementere is 1,1,1,1,4,4,5,5 fokszámsorozattal. Ennél a komplementer-gráfnál, a nem elsőfokú csúcsokra jut 18 fokszám, ebből 12 elmegy a köztük futható 6 élre. A maradék 6 fok a fenálló 4 elsőfokú csúcsra jut. Vagyis 2 fok – azaz 1 él – kimarad a játékból. Emiatt nem lehet egyszerű gráfunk.

(a) Bizonyítsuk be, hogy véges, egyszerű gráfban létezik 2 különböző pont, melyek fokszáma egyenlő.

Bizonyítsuk be indirekt módon:

Legyen G - V csúcshalmazzal és E élhalmazzal - egy egyszerű, véges gráf, ahol n jelöli a csúcsok számát (|V|), m pedig az élek számát (|E|)!
Azt állítjuk, hogy nincs két olyan G-beli csúcs, amelyek fokszáma azonos (kvantorokkal: $\forall u, v \in V: \deg(u) \neq \deg(v)$).

Mivel G egy egyszerű gráf, a legnagyobb fokszám, amit egy G-beli csúcs birtokolhat, az n-1 , mivel minden G-gráfbeli csúcs össze lehet kötve az összes többi csúccsal (nem feltétlen van így, de lehetséges). Így minden V-beli v csúcsra igaz, hogy $0 \leq \deg(v) \leq n-1$, és így n darab lehetséges fokszám van, ami az egyes V-beli v-khez tartozhat, tegyük ezeket egy D halmazba: $D = \{0,1,2,\ldots,n-1\}$!
Mivel n darab csúcs van és n-féle fokszám, valamint G nem tartalmazhat két azonos fokszámú csúcsot, egyértelmű hozzárendelés látszik V és D halmazok közt, azaz egy V-beli csúcshoz egy D-beli fokszám tartozik, ahogy egy D-beli fokszám egy V-beli csúcshoz van hozzárendelve. Azonban, ez azt is jelenti, hogy lesz egy olyan csúcs V-ben, ami 0 fokszámú, míg egy másik n-1 fokszámmal rendelkezik, ami lehetetlen, hiszen ha van egy izolált csúcs, akkor nincs olyan csúcs, ami önmagán kívül az összes csúcsot elérné, márpedig az n-1 fokszám pontosan ezt jelenti.
Ezek szerint, vagy 0-s fokszámú csúcs nem szerepel G-ben, vagy n-1-es fokszámú csúcs nem szerepel G-ben. Viszont ez azt is jelenti, hogy legalább eggyel kevesebb elemet tudunk a D halmazból V-hez társítani úgy, hogy a csúcsok száma V-ben nem változott. Ezek alapján, arra a logikus döntésre jutunk, hogy az állításunk hamis, mert lesz olyan D-beli fokszám, ami több V-beli csúcshoz fog tartozni, és így bármilyen véges és egyszerű gráfra igaz, hogy létezik 2 olyan, egymástól különböző csúcsa, melyek fokszáma megegyezik. $\square$

Ha egy véges egyszerű gráf nem összefüggő, akkor a komplementere összefüggő lesz-e?

Ha egy véges gráf nem összefüggő, akkor legalább két komponense van.
Jelölje a gráf csúcshalmazát **V**, és legyen az egyik komponens csúcsainak halmaza **X ⊆ V**.
Ekkor a gráfban **X** és **V \ X** halmazok között nem megy él, és mivel a gráfnak legalább két komponense van,ezért sem **X**, sem **V \ X** halmaz nem üres, azaz **∃ v ∈ X, ∃ w ∈ V \ X**.
A gráf komplementerében **X** minden eleme **V \ X** halmaz minden elemével össze van kötve éllel (hiszen a gráfban ezek nem lehetnek összekötve).
Igazoljuk végül, hogy a komplementerben létezik út **X** minden eleméből **X** minden elemébe, és **V \ X** minden eleméből **V \ X** minden másik elemébe is!
V \ X halmaz bármely két eleme össze van kötve **v** csúccsal, és így van közöttük kettő élű út.
Hasonlóan, **X** halmaz bármely két eleme össze van kötve **w** csúccsal, és így van közöttük kettő élű út.

(a) Igaz-e, hogy ha egy gráf bármely két pontja között van séta, akkor út is van?

Definíció (séta)

Legyen $G = (\varphi, E, V)$ egy gráf, $n \in \mathbb{N}$. Egy G-beli n hosszú séta v_0-ból v_n-be egy

$$v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, v_{n-1}, e_n, v_n$$

sorozat, ahol

- $v_j \in V \quad \forall\, 0 \leq j \leq n$-re,
- $e_k \in E \quad \forall\, 1 \leq k \leq n$-re,
- $\varphi(e_m) = \{v_{m-1}, v_m\} \quad \forall\, 1 \leq m \leq n$-re.

Ha $v_0 = v_n$, akkor zárt sétáról beszélünk, különben nyílt sétáról.

Definíció (vonal)

Ha a sétában szereplő élek mind különbözőek, akkor vonalnak nevezzük. Az előzőeknek megfelelően beszélhetünk zárt vagy nyílt vonalról.

Definíció (út)

Ha a sétában szereplő csúcsok mind különbözőek, akkor útnak nevezzük.

Igaz, hiszen a két pont közötti legrövidebb sétában nem lehet pontismétlődés, hiszen ha egy pontot többször is érintenénk, akkor a két érintése közötti részt nyugodtan elhagyhatnánk a sétánkból, s továbbra is a két pont közötti sétát kapnánk. Így, mivel a séta garantáltan különböző csúcsok összekötését eredményezi, így ez út is.

(b) Mutassuk meg, hogy ha a-ból vezet út b-be, és b-ből c-be, akkor a-ból is vezet c-be!

Legyen az a-ból b-be vezető út: a, e_1, v_2, e_2, v_3, e_3, …, v_6, e_6, b !
Legyen a b-ből c-be vezető út: b, e_7, v_8, e_8, v_9, e_9, …, v_{12}, e_{12}, c !
Látjuk, hogy az egyik út abban a csúcsban végződik, ahol a másik kezdődik. Nos, hogyha az a-ból induló utat a b csúcsban nem befejezzük, hanem a b-ből induló útra áttérve folytatjuk, akkor bejárhatjuk mindkét utat és a-ból vezet így séta c-be, ésha az a) részfeladat szűkítési módszerét használjuk, akkor kapunk egy sétát is a-ból c-be.

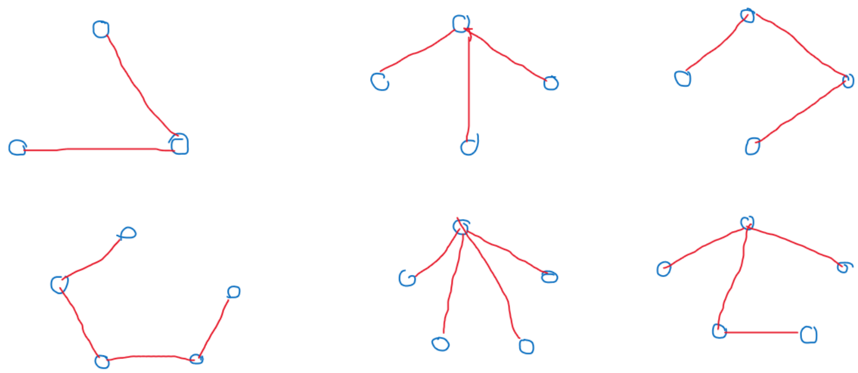
Bizonyítsuk be, hogy ha egy gráf minden pontjának fokszáma legalább 2, akkor a gráf tartalmaz kört.

Induljunk el egy tetszőleges A csúcsból, és írjuk le azt a karaktersorozatot (vonalat), aminek az első eleme A, következő eleme egy A-ból induló él, a következő eleme az iménti él másik végpontja, és így tovább úgy, hogy eddig fel nem használt élekkel dolgozzunk! Az első csúcsismétlődésnél álljunk meg!
Ekkor a kezdő- és végcsúcs közötti vonaldarab egy kör lesz. Vajon az eljárás nem akad el azelőtt, hogy csúcsismétlődés történne? Nem, mert minden csúcsra legalább két fokszám jut, és ha egy csúcsot még nem használtunk korábban, akkor az elérésére használt élen kívül még legalább egy másik él is indul belőle, amivel folytathatjuk az eljárást (hacsak nem egy hurokélről van szó, de akkor maga a hurokél lesz a körünk, amit keresünk).

Rajzoljuk le az összes (páronként nem izomorf) 3, 4 és 5 csúcsú fát.

Definíció (fa)

Egy gráfot **fának** nevezünk, ha összefüggő és körmentes.



Döntse el, hogy létezik-e olyan fagráf, melyre $|V| = 8$ és $f_3 = 2$. Ha igen, rajzolja le őket.

Ha lenne legalább negyedfokú csúcs is, akkor abból négyfelé elindulva találnánk legalább négy levelet, és a két hármas elágazásnál egy-egy letéréssel még 2 levelet, ami már hat levél, valamint a három elágazás, ami már most több, mint 8. Ezért biztos, hogy a leveleken és a pontosan kettő harmadfokú csúcson kívül csak másodfokú csúcsok lehetnek, így kettő elágazás van. Az egyikből háromfelé indulva találunk három levelet, és ezen kívül csak egy elágazás van, aminél csak egy további irányba ágazhatunk el, így pontosan négy levele van a fának. Két harmadfokú csúcs, négy levél és két másodfokú csúcs. Aszerint, hogy a két másodfokú csúcs egymással szomszédos-e:

1. ha a két másodfokú csúcs egymással szomszédos, és:
   a. az egyik az egyik elágazással, a másik a másik elágazással szomszédos;
   b. az egyik az egyik elágazással, a másik egy levéllel szomszédos (ekkor a két elágazás egymással szomszédos);
2. ha a két másodfokú csúcs nem szomszédos egymással, és:
   a. az egyik az egyik elágazással, a másik a másik elágazással szomszédos (ekkor a két elágazás egymással szomszédos);
   b. mindkettő ugyanazzal az elágazással szomszédos, és egyik sem szomszédos a másikkal;
   c. az egyik mindkettő elágazással szomszédos, a másik csak az egyikkel.

Egy példa: