A -1-nek két darab egész kitevőjű hatványa van: -1 és 1.

Az i-nek 4 van: i, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$. Innentől kezdve ismétlődik: $i^5 = i$, $i^6 = i^2 = -1$, stb. *Négyesével* periodikus, csak a kitevő négyes maradéka számít. Képletben: ha $n = 4q + r$, akkor $i^n = i^r$ (mert $i^{4q} = (i^4)^q = 1$).

Hasonlóan $-i$ hatványai $-i$, $(-i)^2 = -1$, $(-i)^3 = i$, $(-i)^4 = 1$. Ezek is négyesével ismétlődnek.

Definíció (K1.5.7)
A $0 \neq z \in \mathbb{C}$ *rendje* az egész kitevős hatványainak a száma. Ez pozitív egész, vagy a ∞ szimbólum. Jele: $o(z)$.

Tehát $o(-1) = 2$, $o(i) = 4$, $o(-i) = 4$.

A z komplex szám akkor és csak akkor egységgyök, ha van olyan pozitív egész n, hogy $z^n = 1$. Ha $z = (r, \varphi)$, akkor tehát $1 = (r, \varphi)^n = (r^n, n\varphi)$, és ez akkor és csak akkor teljesül, ha $r = 1$ (hiszen r egy nemnegatív valós szám, és valamilyen k egész számmal $n\varphi = k2\pi$, azaz $\varphi = k\frac{2\pi}{n}$.

Egy egységgyök primitív n-edik egységgyök, ha n-edik egységgyök, de semmilyen, n-nél kisebb m-re nem m-edik egységgyök, vagyis a legkisebb olyan pozitív egész n, amely kitevős hatványa 1. Egy egységgyök rendje az az n, amelyre primitív n-edik egységgyök.

Egy primitív n-edik egységgyök az n-nel osztható, és csak az n-nel osztható m pozitív egész számokra m-edik egységgyök, ami azt is jelenti, hogy ha a komplex szám valamilyen pozitív egész n-re n-edik egységgyök, akkor az n valamilyen pozitív egész m osztójára primitív m-edik egységgyök. Az előbbiek alapján csak azt az n-et adjuk meg, amely n-re az adott szám primitív n-edik egységgyök, feltéve, hogy egységgyök.

Az alábbi számok közül melyek egységgyökök, mennyi ezek rendje, milyen n-re lesznek ezek n-edik egységgyökök, illetve primitív n-edik egységgyökök?

(a) 1 (b) -1 (c) i

(d) $1+i$ (e) $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$

(a) 1: • $1^1 = 1 \Rightarrow$ 1. egységgyök

• $\nexists n \in \mathbb{N}^+ : (1 > n \wedge 1^n = 1) \Rightarrow$ primitív egységgyök

o(z) = o(1) = 1

(b) -1: • $(-1)^2 = 1 \Rightarrow$ 2. egységgyök

• $(-1)^1 \neq 1 \Rightarrow \nexists n \in \mathbb{N}^+ : (n < 2 \wedge 1^n = 1) \Rightarrow$ primitív 2. egységgyök

o(z) = o(-1) = 2

(c) i: • $i^2 = -1 \Rightarrow i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1 \Rightarrow$ 4. egységgyök

• 4 pozitív egész osztói: $1, 2, 4 \Rightarrow \nexists n \in \mathbb{N}^+ : (n < 4 \wedge 1^n = 1) \Rightarrow$ primitív 4. egységgyök

o(z) = o(i) = 4

(d) $1+i$: • $1+i = (r, \varphi) = (\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}) \Rightarrow |1+i| = \sqrt{2} = r \neq 1 \Rightarrow$ nem egységgyök

$// 1 = (r, \varphi)^n = (r^n, n \cdot \varphi) \Leftrightarrow r = 1$

o(z) = o(1+i) = ∞

(e) $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$: • $\frac{1+i}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (1+i) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}) = (1, \frac{\pi}{4}) \Rightarrow r = 1$

• $n \cdot \varphi = k \cdot 2\pi \Rightarrow (n \cdot \frac{\pi}{4} = k \cdot 2\pi \Leftrightarrow n = 8k \ (n \in \mathbb{N}^+, k \in \mathbb{Z}))$

• $\nexists n \in \mathbb{N}^+ : (8 > n \wedge 1^n = 1) \Rightarrow$ primitív 8. egységgyök

$\left.\begin{array}{l} n = 8 \cdot 1 = 8; \\ \frac{1+i}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot i \end{array}\right\}$ 8. egységgyök

o(z) = o(1+i/√2) = 8

Hányféleképpen lehet sorba rakni 1, 2, 3 illetve 5 különböző karaktert?

Ismétlés nélküli permutáció $n!$, n elem lehetséges sorrendje (sorrend számít, egy elem (pontosan) egyszer).

karakterek sorba rakása

$\underset{a}{\boxed{1}} = 1!$ $\quad \underset{a,\ b}{\boxed{2}} \cdot \underset{b,\ a}{\boxed{1}} = 2 \cdot 1 = 2!$

$\boxed{3} \cdot \boxed{2} \cdot \boxed{1} = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3!$

abc acb bac bca cab cba

$\boxed{5} \cdot \boxed{4} \cdot \boxed{3} \cdot \boxed{2} \cdot \boxed{1} = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5!$

Definíció (permutáció)

Egy A véges halmaz egy permutációja egy olyan, A elemeiből álló sorozat, amely A minden elemét *pontosan egyszer* tartalmazza. (Úgy is mondhatjuk, hogy A elemeinek egy lehetséges sorrendje.)

Tétel (Permutációk száma)

Egy n elemű halmaz permutációinak száma:

$$P_n = n! = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$$

($n!$ kiolvasva: n faktoriális).

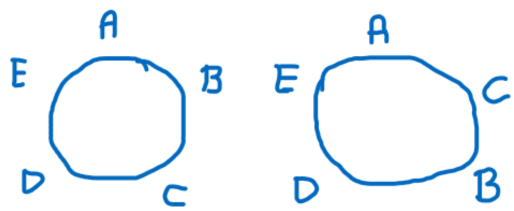
(a) Egy irodalmi esten 5 vers hangzik el. Hányféleképpen követhetik a versek egymást?

5 vers, sorrend számít,
egy vers egyszer hangzik el

$\boxed{5} \cdot \boxed{4} \cdot \boxed{3} \cdot \boxed{2} \cdot \boxed{1} = 5! = P_5$

(d) Hogyan változik az (a)-(b) kérdésben a lehetőségek száma, ha a résztvevőket egy kerekasztalhoz ültetjük?

5 versmondó; sorrend számít; kerekasztal; 1 ember – 1 szavalás

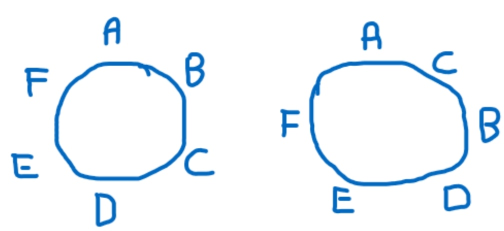


A B C D E	A C B D E
~~B C D E A~~	~~C B D E A~~
~~C D E A B~~	~~B D E A C~~
~~D E A B C~~	~~D E A C B~~
~~E A B C D~~	~~E A C B D~~

$$P'_5 = \frac{5!}{5} = 4!$$

// ciklikus permutáció = $n!/n$

6 ember; sorrend számít; kerekasztal; 1 ember – 1 ülőhely



A B C D E F	A C B D E F
~~B C D E F A~~	~~C B D E F A~~
~~C D E F A B~~	~~B D E F A C~~
~~D E F A B C~~	~~D E F A C B~~
~~E F A B C D~~	~~E F A C B D~~
~~F A B C D E~~	~~F A C B D E~~

$$P'_6 = \frac{6!}{6} = 5!$$

// ciklikus permutáció = $n!/n$

Hányféleképpen lehet sorba rakni
(a) 3 piros, 1 kék és 1 fehér
(b) 3 piros, 2 kék és 1 fehér
golyót?

3 piros golyó, 1 kék golyó, 1 fehér golyó

$\boxed{5} \cdot \boxed{4} \cdot \boxed{3} \cdot \boxed{2} \cdot \boxed{1}$

PIROS PIROS

PIROS PIROS

PIROS PIROS PIROS KÉK FEHÉR
PIROS KÉK PIROS PIROS FEHÉR

Tétel (Ismétléses permutációk száma)

k_1 darab első típusú, k_2 második típusú, ..., k_m m-edik típusú elem lehetséges sorrendjét az elemek egy ismétléses permutációjának nevezzük, és ezek száma $n = k_1 + k_2 + \ldots + k_m$ esetén

$$ {}^{i}P_n^{k_1,k_2,\ldots,k_m} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_m!}. $$

$$ {}^{i}P_5^{3,1,1} = \frac{5!}{3! \cdot 1! \cdot 1!} = \frac{5!}{3!} = 5 \cdot 4 = \underline{\underline{20}} $$

3 piros golyó, 2 kék golyó, 1 fehér golyó

$$ {}^{i}P_6^{3,2,1} = \frac{6!}{3! \cdot 2! \cdot 1!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot \cancel{4}^{2} \cdot \cancel{3 \cdot 2 \cdot 1}}{\cancel{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \cancel{2} \cdot 1 \cdot 1} = $$

$$ = 6 \cdot 5 \cdot 2 = \underline{\underline{60}} $$

Hány különböző ötjegyű számot lehet felírni az
(a) 1, 2, 3, 4, 5
(b) 1, 1, 2, 3, 4
(c) 1, 1, 2, 2, 2
számjegyek felhasználásával? (Minden számjegyet pontosan annyiszor kell felhasználni ahányszor a felsorolásban szerepel.)

(a) 1, 2, 3, 4, 5 $5! = P_5$

(b) 1, 1, 2, 3, 4 $\frac{5!}{2!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60 = {}^{i}P_5^{2,1,1,1}$

(c) 1, 1, 2, 2, 2 $\frac{5!}{2! \cdot 3!} = 5 \cdot 2 = 10 = {}^{i}P_5^{2,3}$

Egy futóversenyen 15 tanuló vesz részt. Hányféleképpen alakulhat az első 3 hely sorsa, ha tudjuk hogy nem lesz holtverseny?

15 tanuló – 3 hely;
sorrend számít; ∅ holtverseny

$\boxed{15} \cdot \boxed{14} \cdot \boxed{13} = 15 \cdot 14 \cdot 13 = \frac{15!}{12!} = \frac{15!}{(15-3)!} = V_{15}^{3}$

Definíció (variáció)

Legyen A egy halmaz és $k \in \mathbb{N}^+$. Az A elemiből képezhető k hosszúságú sorozatokat, melyek A bármely elemét *legfeljebb egyszer* tartalmazzák, az A halmaz k-ad osztályú variációinak nevezzük.

Tétel (Variációk száma)

Legyen $k \in \mathbb{N}^+$. Egy n elemű halmaz k-ad osztályú variációinak száma:

$$V_n^k = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = n!/(n-k)!$$

ha $k \le n$ és 0 egyébként.

Hányféleképpen lehet 20 tanuló között 6 különböző könyvet kiosztani, ha mindegyikük legfeljebb egy könyvet kaphat?

20 tanuló – 6 könyv

különböző könyvek ⇒ ✓ sorrend; 1 tanuló – 1 könyv

$$V_{20}^{6} = \frac{20!}{(20-6)!} = \frac{20!}{14!} = \underline{\underline{20 \cdot 19 \cdot \ldots \cdot 15}}$$

Az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 számjegyek felhasználásával hány ötjegyű szám készíthető ha
(a) mindegyik számjegy csak egyszer használható fel
(b) mindegyik számjegy többször felhasználható

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8

(a) egyszer használható fel

ötjegyű szám: $\frac{8!}{3!} = \underline{\underline{56 \cdot 120}} = V_8^5$

(b) többször használható fel

Definíció (ismétléses variáció)

Legyen A egy halmaz és $k \in \mathbb{N}^+$. Egy, az A elemiből készíthető k hosszúságú sorozatokat az A halmaz k-ad osztályú ismétléses variációinak nevezzük.

Tétel (Ismétléses variációk száma)

Legyen $k \in \mathbb{N}^+$. Egy n elemű k-ad osztályú ismétléses variációinak száma:

$$^{i}V_n^k = n^k.$$

$$^{i}V_8^5 = \underline{\underline{8^5}}$$

Egy tesztben 30 kérdés mindegyikéhez ötféle választ adtak meg, amelyek közül a válaszadónak pontosan egyet kell megjelölni. Hányféleképpen lehet kitölteni a tesztet?

30 kérdés - 5 válaszlehetőség

$$^{i}V_5^{30} = 5^{30}$$

Hányféleképpen lehet 20 tanuló között 6 egyforma könyvet szétosztani, ha mindegyikük legfeljebb egy könyvet kaphat?

20 tanuló - 6 egyforma könyv;
1 tanuló - 0/1 könyv

Definíció (kombináció)

Legyen $k \in \mathbb{N}$. Az A halmaz k elemű részhalmazait az A halmaz k-ad osztályú kombinációinak nevezzük.

Tétel (Kombinációk száma)

Legyen $k \in \mathbb{N}$. Egy n elemű halmaz k-ad osztályú kombinációinak száma

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

ha $k \leq n$ (és 0 egyébként).

$$C_{20}^{6} = \binom{20}{6} = \frac{20!}{6! \cdot (20-6)!} = \underline{\underline{\frac{20!}{6! \cdot 14!}}}$$

Hányféleképpen lehet kitölteni egy ötöslottó-szelvényt?

ötöslottó-szelvény kitöltése

5 húzás - 90 szám - Ø ismétlés - Ø sorrend

$$C_{90}^{5} = \underline{\underline{\binom{90}{5}}} = \frac{90!}{5!\cdot 85!} = 43949268$$

Egy 32-lapos kártyacsomagból 6 lapot húzunk. Hányféleképpen alakulhat a húzás eredménye ha
(a) a kihúzott lapok sorrendje is számít
(b) a kihúzott lapok sorrendje nem számít

32 lap - 6 húzás

(a) ✓ sorrend

$$V_{32}^{6} = \frac{32!}{26!}$$

(b) Ø sorrend

$$C_{32}^{6} = \binom{32}{6} = \frac{32!}{6!\cdot 26!}$$

Hányféleképpen lehet 28 gyerek között 4 almát szétosztani, ha egy gyerek több almát is kaphat?

28 gyerek - 4 alma - ✓ ismétlődés

Definíció (ismétléses kombináció)

Legyen $k \in \mathbb{N}$. Egy A halmazból k-szor választva, ismétléseket is megengedve, de a sorrendet figyelmen kívül hagyva, az A halmaz k-ad osztályú ismétléses kombinációit kapjuk.

Tétel (Ismétléses kombinációk száma)

Egy n elemű halmaz k-ad osztályú ismétléses kombinációinak száma:

$$^{i}C_n^k = \binom{n+k-1}{k}.$$

$$^{i}C_{28}^{4} = \binom{28+4-1}{4} = \binom{31}{4} = \frac{31!}{4!\cdot 27!}$$