Döntse el, mely relációk teljes rendezések az $A = \{1, 2, 3, 4\}$ halmazon.

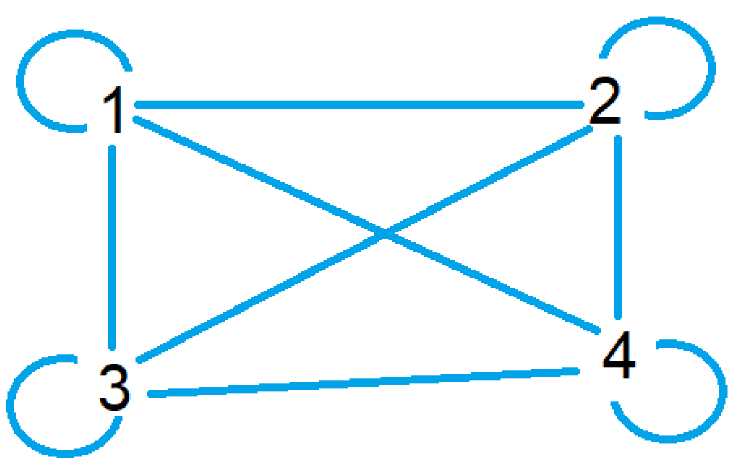
(a) $f = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,3), (2,4), (3,3), (3,4), (4,4)\}$

(b) $f = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,4), (3,3), (4,4)\}$

(c) $f = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,3), (2,4), (3,4)\}$

(a)

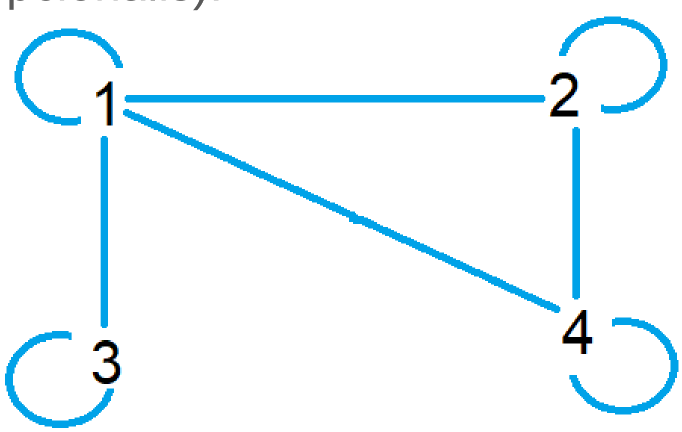
- reflexivitás: minden D_f-beli elemre igaz, hogy párban áll önmagával ($\forall x \in D_f$: x f x)
- tranzitivitás: nem tudok ellenpéldát hozni arra, hogy tetszőleges A-beli elemre: ha f-ben szerepel (a,b) és (b,c) pár, akkor ne szerepelne (a,c) pár
  ($\forall x,y,z \in A$: (x f y ^ y f z) => x f z)
- antiszimmetria: tetszőleges A-beli elemre igaz az, hogyha létezik (a,b) pár f-ben, akkor csak akkor szerepel (b,a) pár is, ha a = b ($\forall x,y \in A$: (x f y ^ y f x) => x = y)
- a fenti 3 egyidejű teljesülése miatt f részbenrendezés
- dichotóm-e: valamilyen párosításban össze van-e kapcsolva f-ben minden elem mindennel közvetlenül? Ábrázoljuk gráfként a párokat a jobb átláthatóságért (ez opcionális)!



  Az ábrából leolvasható, hogy ez a tulajdonság is teljesül.
- Mivel f részbenrendezés és dichotóm, így (teljes) rendezés is.

(b)

- reflexivitás: minden D_f-beli elemre igaz, hogy párban áll önmagával ($\forall x \in D_f$: x f x)
- tranzitivitás: nem tudok ellenpéldát hozni arra, hogy tetszőleges A-beli elemre: ha f-ben szerepel (a,b) és (b,c) pár, akkor ne szerepelne (a,c) pár
($\forall x,y,z \in A$: (x f y ^ y f z) => x f z)
- antiszimmetria: tetszőleges A-beli elemre igaz az, hogyha létezik (a,b) pár f-ben, akkor csak akkor szerepel (b,a) pár is, ha a = b ($\forall x,y \in A$: (x f y ^ y f x) => x = y)
- a fenti 3 egyidejű teljesülése miatt f részbenrendezés
- dichotóm-e: valamilyen párosításban össze van-e kapcsolva f-ben minden elem mindennel közvetlenül? Ábrázoljuk gráfként a párokat a jobb átláthatóságért (ez opcionális)!



Az ábrából leolvasható, hogy ez a tulajdonság nem teljesül, mert vannak elemek, amik közvetlenül nem érik el egymást (2 és 3, 3 és 4).
- Mivel f részbenrendezés, de nem dichotóm, így nem (teljes) rendezés.

(c)

- reflexivitás: nem minden D_f-beli elemre igaz, hogy párban áll önmagával ($\forall x \in D_f$: x f x), így ez a tulajdonság nem teljesül
- Mivel a részbenrendezés egyik tulajdonsága nem áll fenn, nem lehet részbenrendezés, és így nem lehet (teljes) rendezés sem.

Végezzük el a következő műveleteket a komplex számok halmazán.

$\sqrt{-16}$ $\sqrt{-25}$ $(2i)^2$ $2i+5i$ $\frac{4i}{2i}$

$\sqrt{-16} = \sqrt{(-1)\cdot 16} = \sqrt{-1}\cdot\sqrt{16} = \sqrt{-1}\cdot 4 = \pm 4i = 0 \pm 5 i$

$\sqrt{-25} = \sqrt{(-1)\cdot 25} = \sqrt{-1}\cdot\sqrt{25} = \sqrt{-1}\cdot 5 = \pm 5 \cdot i = 0 \pm 5 \cdot i$

$(2i)^2 = 2^2 \cdot i^2 = 4 \cdot i^2 = -4 = -4 + 0 \cdot i$

$2i + 5i = i \cdot (2+5) = 7i = 0 + 7 \cdot i$

$\frac{4i}{2i} = \frac{4\cdot i}{2 \cdot i} = \frac{4}{2} = 2 = 2 + 0 \cdot i$

Legyen $z \in \mathbb{C}, z = -2 + 7i$. Adja meg a z komplex szám következő jellemzőit.

$\operatorname{Re} z$ $\operatorname{Im} z$ $-z$ $\overline{z}$ $|z|$

$\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(-2+7i) = -2$ $\operatorname{Im}(z) = \operatorname{Im}(-2+7i) = +7$

$-z = -(-2+7i) = 2-7i$ $\overline{z} = \overline{(-2+7i)} = -2-7i$

$|z| = |(-2+7i)| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{(-2)^2+(7)^2} = \sqrt{4+49} = \sqrt{53}$

Végezzük el a következő műveletet az algebrai alak felhasználásával: $\frac{4+3i}{(2-i)^2}$

$$\frac{4+3\cdot i}{(2-i)^2} = \frac{4+3i}{2^2-2\cdot 2\cdot i+i^2} = \frac{4+3i}{4-4i+i^2} = \frac{4+3i}{3-4i} = \frac{4+3i}{3-4i}\cdot\frac{3+4i}{3+4i} =$$

$$= \frac{(4+3i)\cdot(3+4i)}{(3-4i)\cdot(3+4i)} = \frac{12+16i+9i+12i^2}{9-16i^2} = \frac{12-12+25i}{9+16} = \frac{25i}{25} = i$$

Oldja meg a következő egyenletet a komplex számok halmazán: $\frac{x+i-3i\overline{x}}{x-4} = i-1$

$$x\in\mathbb{C}; \quad \frac{x+i-3\cdot i\cdot\overline{x}}{x-4} = i-1$$

$$x := a+b\cdot i \quad (a,b\in\mathbb{R})$$

$$\frac{(a+bi)+i-3\cdot i\cdot\overline{(a+bi)}}{(a+bi)-4} = i-1 \Leftrightarrow (a+bi)+i-3\cdot i\cdot(a-bi) = (i-1)\cdot(a+bi-4)$$

$$\Leftrightarrow a+bi+i-3\cdot i\cdot a+3\cdot i^2\cdot b = ai+bi^2-4i-a-bi+4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a+3\cdot b\cdot i^2)+i\cdot(b+1-3\cdot a) = (bi^2-a+4)+i\cdot(a-4-b) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a+3bi^2-bi^2+a-4)+i\cdot(b+1-3a) = i\cdot(a-4-b) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a+a-4+3bi^2-bi^2)+i\cdot(b+1-3a-a+4+b) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2a+2\cdot b\cdot i^2-4)+i\cdot(2b+5-4a) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2a-2b-4)+i\cdot(2b+5-4a) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2a-2b-4=0 \\ 2b+5-4a=0 \end{cases}$$

$$2a-2b-4=0 \Leftrightarrow 2a-2b=4 \Leftrightarrow a-b=2 \Leftrightarrow \underline{a=2+b}$$

$$2b+5-4a=0 \Leftrightarrow 2b+5-4\cdot(2+b)=0 \Leftrightarrow 2b+5-8-4b=-3-2b=0 \Leftrightarrow -3=2b$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{b=-3/2}} \Rightarrow a=2+b=2+(-3/2)=2-3/2=\frac{4-3}{2}=\underline{\underline{1/2}}$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{x=a+bi=\frac{1}{2}+\left(\frac{-3}{2}\right)\cdot i=\underline{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\cdot i}}$$

Határozza meg a következő komplex számok trigonometrikus alakját.

$$z = 1 + i = r \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$$

$$r = |z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\underbrace{\cos\varphi = a/|z| = 1/\sqrt{2} \quad \text{és} \quad b = 1 > 0}_{\varphi = 45^\circ}$$

$$1 + i = \sqrt{2} \cdot (\cos 45^\circ + i \cdot \sin 45^\circ)$$

$$z = -\sqrt{3} + i = r \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$$

$$r = |z| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\underbrace{\cos\varphi = a/|z| = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{és} \quad b = 1 > 0}_{\varphi = 150^\circ}$$

$$-\sqrt{3} + i = 2 \cdot (\cos 150^\circ + i \cdot \sin 150^\circ)$$

$$0 + 1 \cdot i = r \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi) = z$$

$$r = |z| = \sqrt{1^2} = 1$$

$$\underbrace{\cos\varphi = a/|z| = 0/1 = 0 \quad \text{és} \quad b \geq 0}_{\varphi = 90^\circ}$$

$$i = 1 \cdot (\cos 90^\circ + i \cdot \sin 90^\circ)$$