Határozza meg a következő komplex számok trigonometrikus alakját.

(a) $1+i$

$1+i = r\cdot(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi)$ $\quad // z := 1+i = a+bi \ (a,b\in\mathbb{R})$

$r = |z| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

$$\left.\begin{aligned}\cos\varphi &= \frac{a}{|z|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\\ \sin\varphi &= \frac{b}{|z|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\end{aligned}\right\}\ \varphi = 45^\circ$$

$1+i = \sqrt{2}\cdot(\cos 45^\circ + i\cdot\sin 45^\circ)$

(b) $-\sqrt{3}+i$

$z = -\sqrt{3} + i = r\cdot(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi)$

$r = |z| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = 2$

$\cos\varphi = \frac{-\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \varphi = 150^\circ$

$-\sqrt{3} + i = 2\cdot(\cos 150^\circ + i\cdot\sin 150^\circ)$

(c) $\frac{9}{2} - \frac{9\sqrt{3}}{2}i$

$w = \frac{9}{2} - \frac{9\cdot\sqrt{3}}{2}i = r\cdot(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi)$

$r = |w| = \sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2 + \left(-\frac{9\cdot\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{81+3\cdot 81}{4}} = \sqrt{\frac{4\cdot 81}{4}} = 9$

$\sin\varphi = \frac{-9\cdot\sqrt{3}}{2\cdot 9} = \frac{-\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \varphi = 60^\circ$

$\frac{9}{2} - \frac{9\cdot\sqrt{3}}{2}i = 9\cdot(\cos 60^\circ + i\cdot\sin 60^\circ)$

(f) $i$

$i = r(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi) = z$

$r = |z| = \sqrt{0^2+1^2} = 1$

$\cos\varphi = \frac{0}{1} = 0 \Rightarrow \varphi = 90^\circ$

$i = \cos 90^\circ + i\cdot\sin 90^\circ$

(g) 10

$10 = r \cdot \cos\varphi + i \cdot \sin\varphi = w$

$r = |w| = \sqrt{10^2 + 0^2} = 10$

$\cos\varphi = \frac{10}{10} = 1 \Rightarrow \varphi = 0^\circ$

$10 = 10 \cdot (\cos 0^\circ + i \cdot \sin 0^\circ)$

Végezze el a következő műveleteket a trigonometrikus alak felhasználásával.

(a) $\left(\frac{9}{2} - \frac{9\sqrt{3}}{2}i\right)\left(-\frac{\sqrt{14}}{2} - \frac{\sqrt{14}}{2}i\right)$ (i) $\left(1 - \frac{\sqrt{3} - i}{2}\right)^{24}$ (h) $\left(\frac{\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i}{-\frac{5\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2}i}\right)^{12}$

## Tétel (Moivre-azonosságok)

*Legyenek* $z, w \in \mathbb{C}$ *nemnulla komplex számok:* $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $w = |w|(\cos\psi + i\sin\psi)$, *és legyen* $n \in \mathbb{N}^+$. *Ekkor*

1. $zw = |z||w|(\cos(\varphi + \psi) + i\sin(\varphi + \psi))$;
2. $\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|} \cdot (\cos(\varphi - \psi) + i\sin(\varphi - \psi))$;
3. $z^n = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$.

$\underbrace{\left(\frac{9}{2} - \frac{9\sqrt{3}}{2}i\right)}_{r(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi)} \underbrace{\left(-\frac{\sqrt{14}}{2} - \frac{\sqrt{14}}{2}i\right)}_{r\cdot(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi)} = 9 \cdot \sqrt{7} \cdot (\cos(60+135)^\circ + i \cdot \sin(60+135)^\circ)$

$9 \cdot (\cos 60 + i \cdot \sin 60)$ $\sqrt{7} \cdot (\cos 135 + i \cdot \sin 135)$

$r = \sqrt{a^2+b^2}$ $\cos\varphi = \frac{a}{|z|}$

$\frac{-\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i}{\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{3}i} = \frac{3}{2/3} \cdot (\cos(150-30)^\circ + i \cdot \sin(150-30)^\circ)$

$3 \cdot (\cos 150^\circ + i \cdot \sin 150^\circ)$

$\frac{2}{3} \cdot (\cos 30^\circ + i \cdot \sin 30^\circ)$

$$\left(1-\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{24}=\left(\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\frac{1}{2}\cdot i\right)^{24}=\left(\sqrt{\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}\cdot(\cos\varphi+i\cdot\sin\varphi)\right)^{24}=$$

$$=\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\cdot(\cos 60^\circ+i\cdot\sin 60^\circ)\right)^{24}=\sqrt{2-\sqrt{3}}^{24}\cdot(\cos 0^\circ \quad +i\cdot\sin 0^\circ \quad)$$

$$\frac{24\cdot 60}{360}=\frac{\cancel{6\cdot 60}\cdot 4}{\cancel{360}}$$

$$\left(\frac{\frac{3}{2}+\frac{3\cdot\sqrt{3}}{2}i}{-\frac{5\cdot\sqrt{3}}{2}+\frac{5}{2}i}\right)^{12}=\left(\frac{3\cdot(\cos 60^\circ+i\cdot\sin 60^\circ)}{5\cdot(\cos 150^\circ+i\cdot\sin 150^\circ)}\right)^{12}$$

$$\frac{3}{5}\cdot\left(\cos\underbrace{(60-150)^\circ}_{-90^\circ+360^\circ}+i\cdot\sin(60-150)^\circ\right)$$

$$\frac{3}{2}+\frac{3\cdot\sqrt{3}}{2}\cdot i=\underbrace{\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{9\cdot 3}{4}}}_{3}\cdot(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ)$$

$$\cos\varphi=\frac{3/2}{3}=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{2}\Rightarrow\varphi=60^\circ$$

$$-\frac{5\sqrt{3}}{2}+\frac{5}{2}i=\underbrace{\sqrt{\frac{25\cdot 3+25}{4}}}_{5}\cdot(\cos 150^\circ+i\cdot\sin 150^\circ)$$

$$\sin\varphi=\frac{5/2}{5}=\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{2}\Rightarrow\varphi=150^\circ$$

$$\left(\frac{\frac{3}{2}+\frac{3\cdot\sqrt{3}}{2}i}{-\frac{5\cdot\sqrt{3}}{2}+\frac{5}{2}i}\right)^{12}=\left(\frac{3\cdot(\cos 60^\circ+i\cdot\sin 60^\circ)}{5\cdot(\cos 150^\circ+i\cdot\sin 150^\circ)}\right)^{12}=\left(\frac{3}{5}\cdot(\cos 270^\circ+i\cdot\sin 270^\circ)\right)^{12}=$$

$$=\left(\frac{3}{5}\right)^{12}\cdot\left(\cos(12\cdot 270)^\circ+i\cdot\sin(12\cdot 270)^\circ\right)=\left(\frac{3}{5}\right)^{12}\cdot(\cos 0^\circ+i\cdot\sin 0^\circ)$$

$$\frac{12\cdot 270}{360}=\frac{\cancel{12\cdot 30}\cdot 9}{\cancel{360}}=9x$$

Végezze el a következő gyökvonásokat a komplex számok halmazán.

## Tétel (Gyökvonás komplex számok körében)

*Legyen* $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $n \in \mathbb{N}^+$. *Ekkor a* $z$ $n$*-edik gyökei:*

$$w_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right)$$

$k = 0, 1, \ldots, n-1.$

$-60$ második gyöke

$$W_1 = \sqrt[2]{|-60|} \cdot \left(\cos\left(\varphi/2 + \pi\right) + i \cdot \sin\left(\varphi/2 + \pi\right)\right) =$$

$$= \sqrt{60} \cdot \left(\cos\left(\tfrac{\pi}{2} + \pi\right) + i \cdot \sin(90 + 180)^\circ\right)$$

$\cos\varphi = \frac{-60}{60} = -1$

$1 - \sqrt{3}i$ hatodik gyöke

$$W_5 = \sqrt[6]{2} \cdot \left(\cos\left(\frac{60}{6} + \frac{2 \cdot 5 \cdot 360^\circ}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi/3}{6} + \frac{2 \cdot 5 \cdot \pi}{6}\right)\right) =$$

$\cos\varphi = \frac{1}{2}$

$$= \sqrt[6]{2} \cdot \left(\cos(10 + 120 \cdot 5)^\circ + i \cdot \sin(10 + 120 \cdot 5)^\circ\right) =$$

$$= \sqrt[6]{2} \cdot \left(\cos\left(\pi/18 + \frac{5\pi}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{18} + \frac{5 \cdot \pi}{3}\right)\right)$$

$-\frac{7}{2} + \frac{7}{2}i$ nyolcadik gyöke

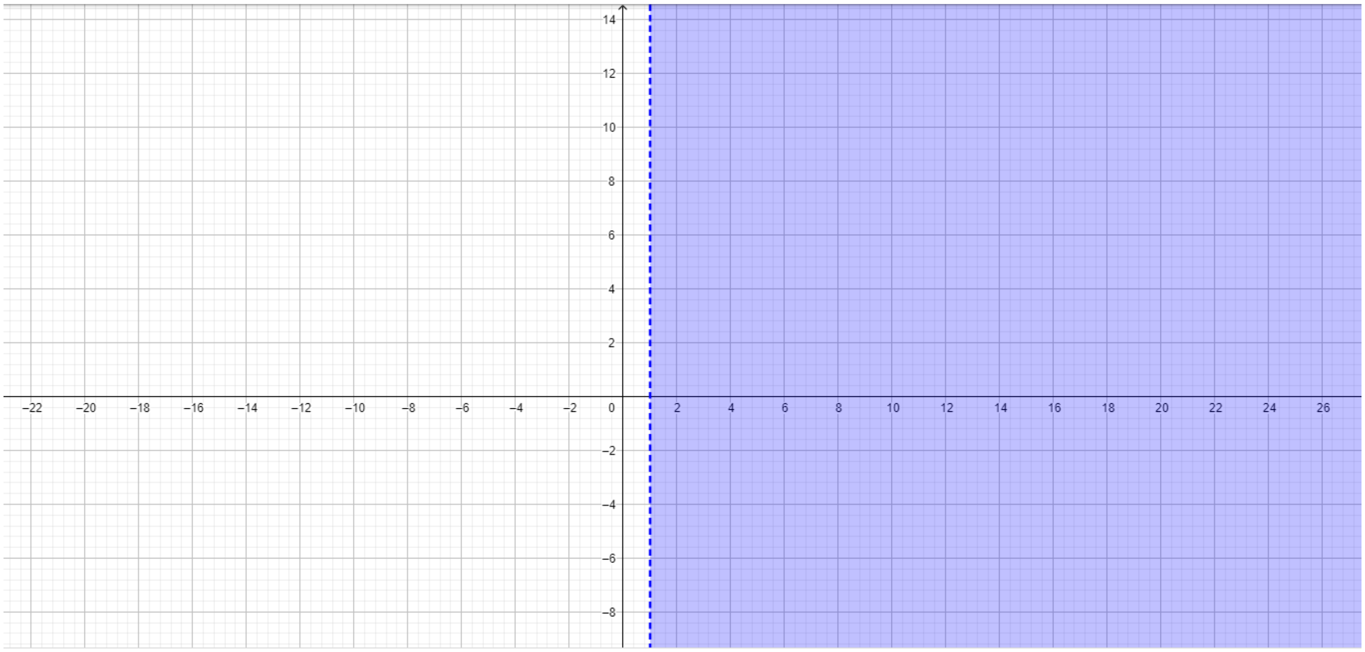
$$W_7 = \sqrt[8]{49/4} \cdot \left(\cos\left(\frac{135}{8} + \frac{2 \cdot 7 \cdot 360}{8}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{8 \cdot 4} + \frac{2 \cdot 7 \cdot \pi}{8}\right)\right) =$$

$\frac{49}{4} + \frac{49}{4} = \frac{98}{4} = \frac{2 \cdot 49}{4}$

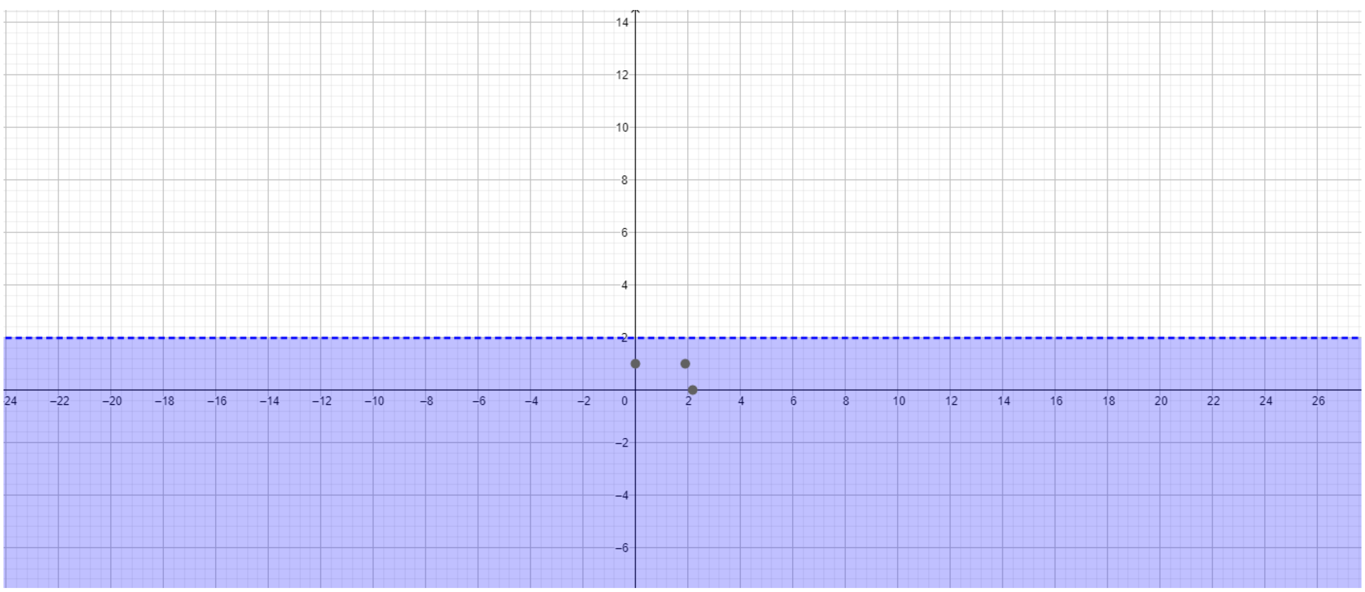
$$= \sqrt[8]{\frac{49}{4}} \cdot \left(\cos\left(\frac{135}{8} + 45 \cdot 7\right)^\circ + i \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{32} + \frac{7 \cdot \pi}{4}\right)\right)$$

Ábrázolja a következő halmazokat a Gauss-számsíkon.

$A = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 1\}$



$B = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z < 2\}$



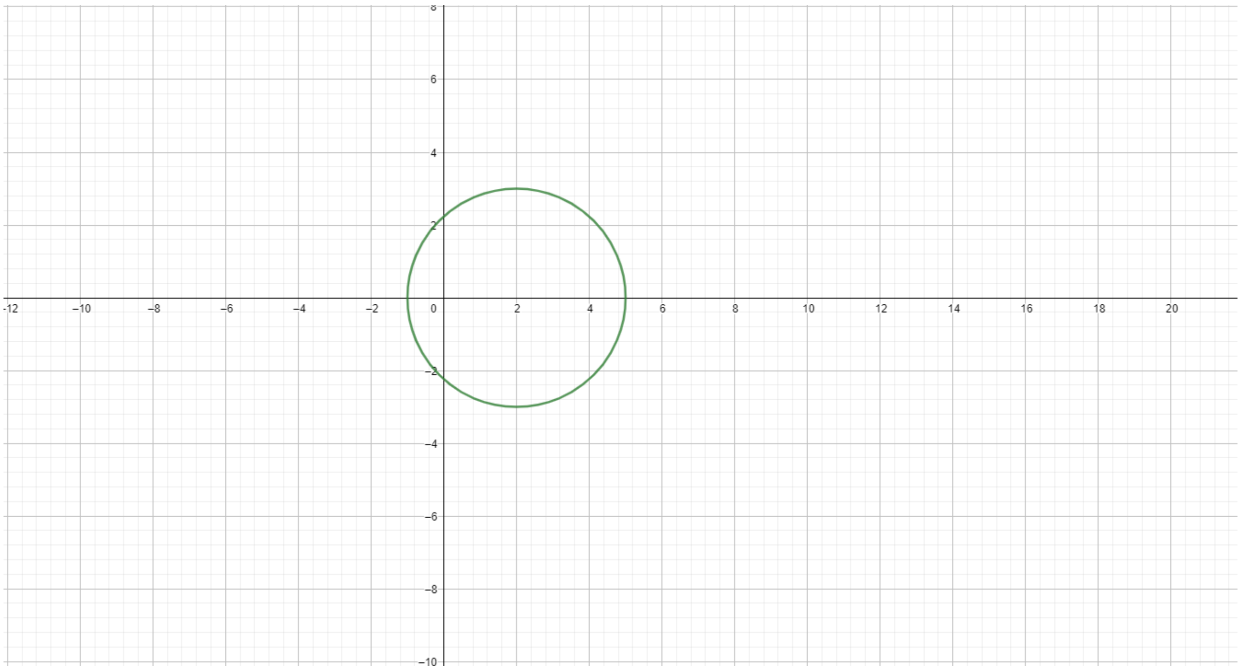
$C = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 2| = 3\}$

$|z - 2| = |a + bi - 2| = |(a - 2) + bi| = \sqrt{(a - 2)^2 + b^2}$

$\sqrt{(a - 2)^2 + b^2} = 3 \iff (a - 2)^2 + b^2 = 9 = (a - 2)^2 + (b - 0)^2$

//köregyenlet – koordináta-geometria: $(x-u)^2 + (y-v)^2 = r^2$, ahol $(u,v)$ a kör középpontja

$C = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 2| = 3\}$

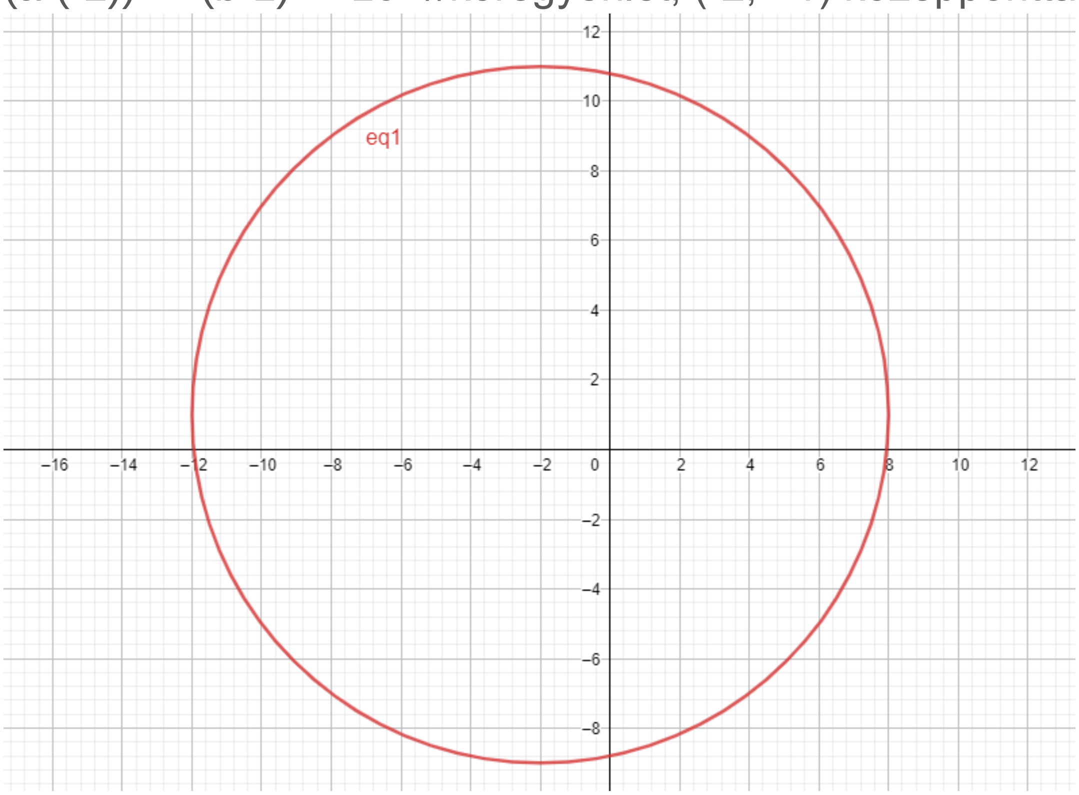


$\{z \in \mathbb{C} \mid |z - i + 2| = 10\}$

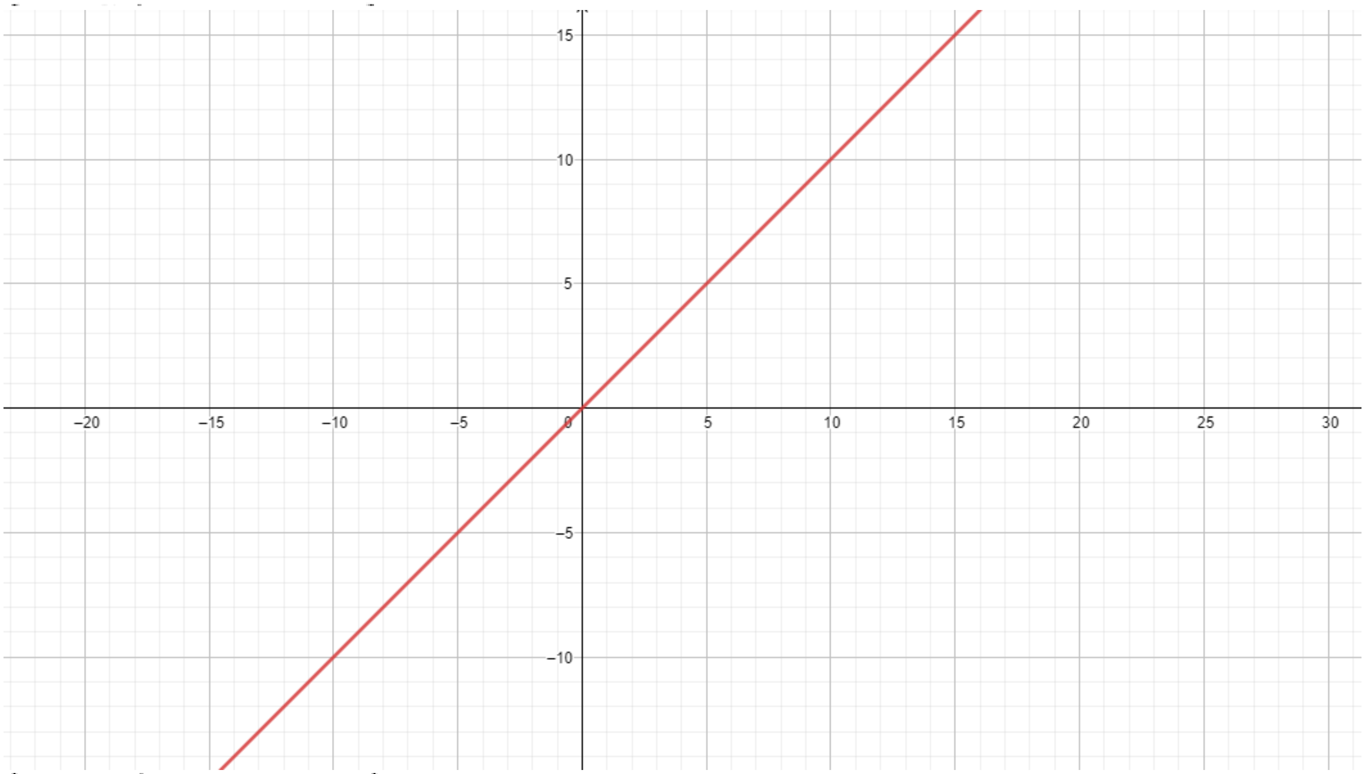
$|z - i + 2| = |a + bi - i + 2| = |(a + 2) + i \times (b - 1)| = \sqrt{(a+2)^2 + (b-1)^2}$

$\sqrt{(a+2)^2 + (b-1)^2} = 10 \Leftrightarrow (a+2)^2 + (b-1)^2 = 100 \Rightarrow$

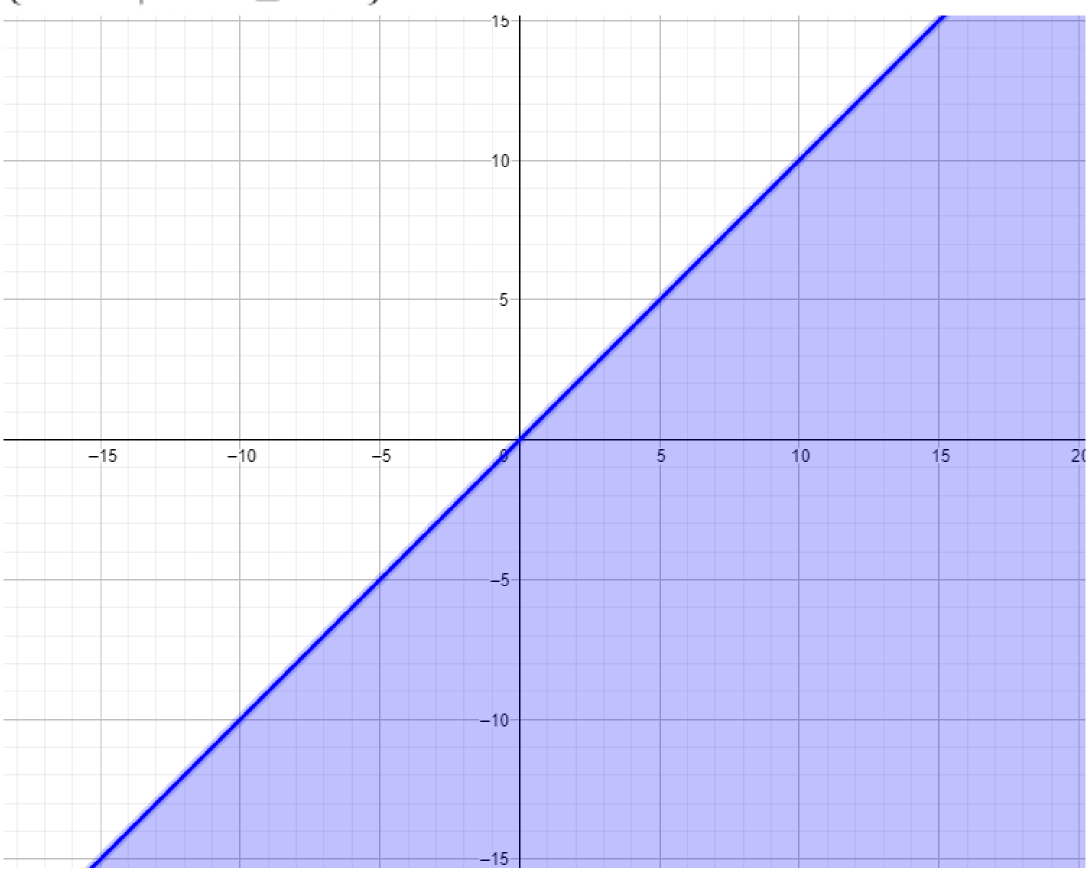
$(a-(-2))^2 + (b-1)^2 = 10^2$ //köregyenlet, (-2, +1) középponttal



$\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z\}$



$\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z \geq \operatorname{Im} z\}$



$\{z \in \mathbb{C} \mid |z-2| \leq |z+3|\}$

|z – 2| = |a + bi - 2| = |(a - 2) + bi| = √((a - 2)$^2$ + b$^2$)

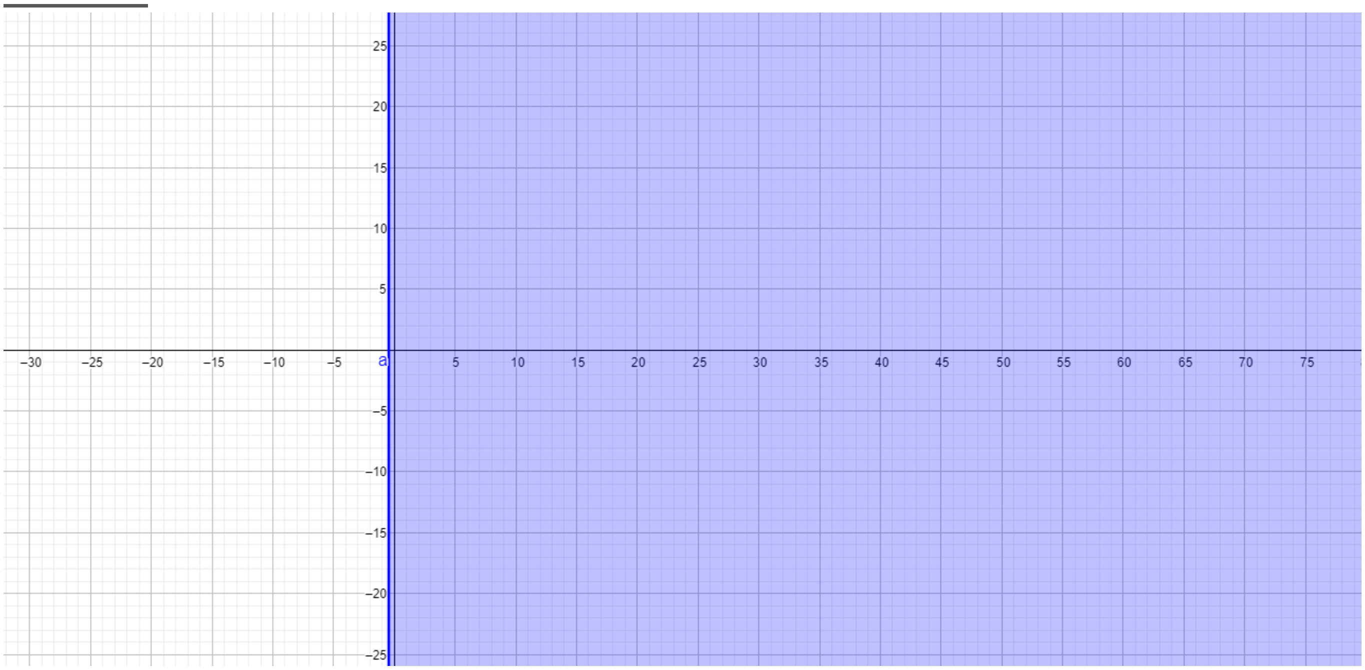
|z + 3| = |a + bi + 3| = |(a + 3) + bi| = √((a + 3)$^2$ + b$^2$)

√((a - 2)$^2$ + b$^2$) ≤ √((a + 3)$^2$ + b$^2$) <=> (a - 2)$^2$ + b$^2$ ≤ (a + 3)$^2$ + b$^2$ <=>

(a - 2)$^2$ ≤ (a + 3)$^2$ <=> a$^2$ – 2×2×a + 4 ≤ a$^2$ + 2×3×a + 9 <=>

a$^2$ – 4×a + 4 ≤ a$^2$ + 6×a + 9 <=> -4×a + 4 ≤ 6×a + 9 <=> -5 ≤ 10×a <=>

-0.5 ≤ a




Az alábbi számok közül melyek egységgyökök, mennyi ezek rendje, milyen $n$-re lesznek ezek $n$-edik egységgyökök, illetve primitív $n$-edik egységgyökök?

(a) $1$ (b) $-1$ (c) $i$

(d) $1+i$ (e) $\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$ (f) $\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$

(g) $\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ (i) $\cos\left(\sqrt{2}\pi\right) + i\sin\left(\sqrt{2}\pi\right)$

A $-1$-nek két darab egész kitevőjű hatványa van: $-1$ és $1$.

Az $i$-nek 4 van: $i$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$. Innentől kezdve ismétlődik: $i^5 = i$, $i^6 = i^2 = -1$, stb. *Négyesével* periodikus, csak a kitevő négyes maradéka számít. Képletben: ha $n = 4q + r$, akkor $i^n = i^r$ (mert $i^{4q} = (i^4)^q = 1$).

Hasonlóan $-i$ hatványai $-i$, $(-i)^2 = -1$, $(-i)^3 = i$, $(-i)^4 = 1$. Ezek is négyesével ismétlődnek.

**Definíció (K1.5.7)**
A $0 \neq z \in \mathbb{C}$ *rendje* az egész kitevős hatványainak a száma. Ez pozitív egész, vagy a $\infty$ szimbólum. Jele: $o(z)$.

Tehát $o(-1) = 2$, $o(i) = 4$, $o(-i) = 4$.

Az 1+i a hatványkitevőjétől függően állandóan változik, ahogy a cos(√2×π)+i×sin(√2×π) is, ezért végtelen a rendje. A többi meghatározáshoz használjuk az állítást:

**1.5.11. Állítás.** Egy $z \neq 0$ komplex szám rendje pontosan akkor véges, ha abszolút értéke $1$, szöge pedig a $2\pi$ racionális többszöröse. Ha ez a racionális szám egyszerűsíthetetlen tört alakjában fölírva $p/q$ (ahol $q>0$), akkor a $z$ rendje $q$.

$$\left|\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{2}} = 1 \qquad \cos\varphi = \frac{1/\sqrt{2}}{1} \Rightarrow \varphi = 45^\circ = \frac{360^\circ}{8}$$

$$\left|\frac{1+\sqrt{3}\cdot i}{2}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1+3}{4}} = 1 \qquad \cos\varphi = \frac{1/2}{1} \Rightarrow 60^\circ = \frac{360^\circ}{6}$$

$$\left|\frac{-1+\sqrt{3}\cdot i}{2}\right| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1 \qquad \cos\varphi = \frac{-1/2}{1} \Rightarrow 120^\circ = \frac{360^\circ}{3}$$

| $z$ | $1$ | $-1$ | $i$ | $1+i$ | $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ | $\frac{1+\sqrt{3}\cdot i}{2}$ | $\frac{-1+\sqrt{3}\cdot i}{2}$ | $\cos(\sqrt{2}\cdot\pi)+i\cdot\sin(\sqrt{2}\cdot\pi)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $o(z)$ | 1 | 2 | 4 | $\infty$ | 8 | 6 | 3 | $\infty$ |

Nézzük, milyen n-re lesznek primitív és sima egységgyökök!

**Definíció ($n$-edik egységgyökök)**

Tetszőleges $n \in \mathbb{N}^+$ esetén az 1 $n$-edik gyökei az $n$-edik egységgyökök. (Azaz az $\epsilon^n = 1$ feltételnek eleget tevő komplex számok.)

**1.5.16.** Ha egy egységgyök rendje $d$, akkor csak az $n = d$ esetben lesz primitív $n$-edik egységgyök, és pontosan a $d \mid n$ számokra lesz lesz $n$-edik egységgyök, hiszen ezek a jó kitevői.

| $z$ | $1$ | $-1$ | $i$ | $1+i$ | $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ | $\frac{1+\sqrt{3}\cdot i}{2}$ | $\frac{-1+\sqrt{3}\cdot i}{2}$ | $\cos(\sqrt{2}\cdot\pi)+i\cdot\sin(\sqrt{2}\cdot\pi)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $o(z)$ | 1 | 2 | 4 | $\infty$ | 8 | 6 | 3 | $\infty$ |
| egység-gyök? | ✓ | ✓ | ✓ | | | | | |
| n-edik e.gyök | $\mathbb{Z}^+$ | $2\mid\mathbb{N}^+$ | $4\mid\mathbb{N}^+$ | | | | | |
| primitív n-edik e.gyök | 1 | 2 | 4 | | | | | |

Ahol a rend végtelen, ott nem beszélhetünk egységgyökökről. Nézzük a többi esetet!

$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^8 = 1^8\cdot\left(\cos(8\cdot 45^\circ)+i\sin(8\cdot 45^\circ)\right) = \cos(360^\circ)+i\cdot\sin(360^\circ)$$

Mivel n=8 esetén $z^n = 1$, ezért ez egységgyök, és n = d, így primitív egységgyök is. Hasonlóképpen nézzük a többi esetet is:

$$\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^6 = 1^6\cdot\left(\cos(6\cdot 60^\circ)+i\cdot\sin(6\cdot 60^\circ)\right) = 1$$

$$\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^3 = 1^3\cdot\left(\underbrace{\cos(120^\circ\cdot 3)}_{1}+\underbrace{i\cdot\sin 360^\circ}_{0}\right)$$

Mivel itt is $z^n = 1$ és n = d, így ezek is sima, illetve primitív egységgyökök.

| $z$ | $1$ | $-1$ | $i$ | $1+i$ | $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ | $\frac{1+\sqrt{3}\cdot i}{2}$ | $\frac{-1+\sqrt{3}\cdot i}{2}$ | $\cos(\sqrt{2}\cdot\pi)+i\cdot\sin(\sqrt{2}\cdot\pi)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $O(z)$ | $1$ | $2$ | $4$ | $\infty$ | $8$ | $6$ | $3$ | $\infty$ |
| egység-gyök? | ✓ | ✓ | ✓ | ✗ | ✓ | ✓ | ✓ | ✗ |
| n-edik e.gyök | $\mathbb{Z}^+$ | $2 \mid \mathbb{N}^+$ | $4 \mid \mathbb{N}^+$ | – | $8 \mid \mathbb{N}^+$ | $6 \mid \mathbb{N}^+$ | $3 \mid \mathbb{N}^+$ | – |
| primitív n-edik e.gyök | $1$ | $2$ | $4$ | – | $8$ | $6$ | $3$ | – |