Határozza meg azt a $z \in \mathbb{C}$ komplex számot, amelyre teljesül hogy

$$\left|\frac{z-3}{2-\overline{z}}\right| = 1 \wedge \mathrm{Re}\left(\frac{z}{2+i}\right) = 2$$

$$\left|\frac{z-3}{2-\overline{z}}\right| = 1 \wedge Re\left(\frac{z}{2+i}\right) = 2$$

$$Re\left(\frac{z}{2+i}\right) = Re\left(\frac{a+bi}{2+i}\right) = Re\left(\frac{a+bi}{2+i}\cdot\frac{2-i}{2-i}\right) =$$

$$= Re\left(\frac{2a-ai+2bi-bi^2}{2^2-i^2}\right) = Re\left(\frac{2a-ai+2bi+b}{4+1}\right) = Re\left(\frac{(2a+b)+i\cdot(2b-a)}{5}\right) =$$

$$= Re\left(\frac{2a+b}{5}+\frac{2b-a}{5}\cdot i\right) = \frac{2a+b}{5} = 2 \Leftrightarrow 2a+b=10 \Leftrightarrow \underline{\underline{10-2a=b}}$$

$$\left|\frac{z-3}{2-\overline{z}}\right| = \frac{|z-3|}{|2-\overline{z}|} = 1 \Leftrightarrow |z-3| = |2-\overline{z}| \Leftrightarrow |a+b\cdot i-3| = |2-a+bi| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |(a-3)+b\cdot i| = |(2-a)+bi| \Leftrightarrow \sqrt{(a-3)^2+b^2} = \sqrt{(2-a)^2+b^2} \underset{/()^2}{\Leftrightarrow} (a-3)^2+b^2 =$$

$$= (2-a)^2+b^2 \underset{/-b^2}{\Leftrightarrow} (a-3)^2 = (2-a)^2 \Leftrightarrow a^2-6a+9 = 4-4a+a^2 \Leftrightarrow$$

$$\underset{/-a^2}{\Leftrightarrow} -6a+9 = 4-4a \underset{/+4a}{\Leftrightarrow} -2a+9=4 \underset{/-9}{\Leftrightarrow} -2a=-5 \underset{/:-2}{\Leftrightarrow} \underline{a=5/2}$$

$$\Rightarrow b = 10-2\cdot a = 10-2\cdot(5/2) = 10-2\cdot\frac{5}{2} = 10-5 = \underline{5}$$

$$z = a+bi = \underline{\underline{\frac{5}{2}+5i}}$$

Legyen $z \in \mathbb{C}, z = 2 + 5i$. Adja meg a z komplex szám abszolút értékét és argumentumát. Szemléltesse a z komplex számot a Gauss-számsíkon.

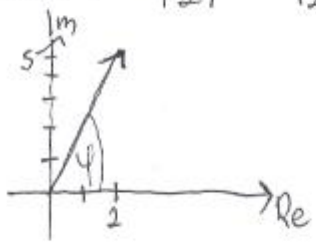
$z \in \mathbb{C};\ z = 2 + 5 \cdot i$

$|z| = |2+5i| = \sqrt{2^2+5^2} = \sqrt{4+25} = \sqrt{29}$

$\arg(z) = \arg(2+5i) = \varphi$

$z = |z| \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi) = \sqrt{29} \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi) = 2 + 5i$

$\cos\varphi = \frac{Re(z)}{|z|} = \frac{2}{\sqrt{29}};\ \sin\varphi = \frac{Im(z)}{|z|} = \frac{5}{\sqrt{29}} \Rightarrow \underline{\underline{\varphi \simeq 68{,}2^\circ}} = \arg(z)$



Határozza meg a következő komplex számok trigonometrikus alakját.

(e) $4i$ (g) 10

$0 + 4 \cdot i = r \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi) = z$

$r = |z| = \sqrt{4^2} = 4$

$\underbrace{\cos\varphi = a/|z| = 0/4 = 0 \quad \text{és } b \geq 0}_{}$

$\varphi = 90^\circ \quad 4i = 4 \cdot (\cos 90^\circ + i \cdot \sin 90^\circ)$

$10 + 0 \cdot i = r \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi) = z$

$r = |z| = \sqrt{10^2} = 10$

$\underbrace{\cos\varphi = a/|z| = \frac{10}{10} = 1 \quad \text{és } b \geq 0}_{}$

$\varphi = 0^\circ \quad 10 = 10 \cdot (\cos 0^\circ + i \cdot \sin 0^\circ)$

Végezze el a következő műveleteket a trigonometrikus alak felhasználásával.

(b) $\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{3}i\right)$ (f) $\left(\frac{5}{2}-\frac{5\sqrt{3}}{2}i\right)^{25}$ (h) $\left(\frac{\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i}{-\frac{5\sqrt{3}}{2}+\frac{5}{2}i}\right)^{12}$

$$\underbrace{\left(-\frac{3\cdot\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}\cdot i\right)}\cdot\underbrace{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{3}\cdot i\right)}=*$$

$r=\sqrt{\frac{9\cdot 3}{4}+\frac{9}{4}}=3$ $r=\sqrt{\frac{3}{9}+\frac{1}{9}}=\frac{2}{3}$

$\cos\varphi=-\frac{3\cdot\sqrt{3}}{2\cdot 3}=\frac{-\sqrt{3}}{2}$ $\cos\varphi=\frac{\sqrt{3}}{3}\Big/\frac{2}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{3}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$b<0$ $b\geq 0$

$\varphi'=150^\circ$ $\varphi=2\pi-\varphi'=210^\circ$ $\varphi=30^\circ$

$$=\left(3\cdot(\cos 210^\circ+i\cdot\sin 210^\circ)\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot(\cos 30^\circ+i\cdot\sin 30^\circ)\right)=$$
$$=\left(3\cdot\frac{2}{3}\right)\cdot\left(\cos(210+30)^\circ+i\cdot\sin(210+30)^\circ\right)=$$
$$=2\cdot(\cos 240^\circ+i\cdot\sin 240^\circ)$$

$$\underbrace{\left(\frac{5}{2}-\frac{5\cdot\sqrt{3}}{2}i\right)}^{25}=\left(5\cdot(\cos 300^\circ+i\cdot\sin 300^\circ)\right)^{25}=*$$

$r=\sqrt{\frac{25+25\cdot 3}{4}}=\sqrt{25}=5$

$\cos\varphi=\frac{5}{2\cdot 5}=1/2;\ b<0\Rightarrow\varphi'=60^\circ$

$\varphi=2\pi-\varphi'=300^\circ$

$$*=5^{25}\cdot\left(\cos(25\cdot 300)^\circ+i\cdot\sin(25\cdot 300)^\circ\right)=$$
$$=5^{25}\cdot(\cos 300^\circ+i\cdot\sin 300^\circ)$$

$25\cdot 300^\circ=7500^\circ=20\cdot 360^\circ+300^\circ$

$$\left(\frac{\frac{3}{2}+\frac{3\cdot\sqrt{3}}{2}\cdot i}{-\frac{5\cdot\sqrt{3}}{2}+\frac{5}{2}\cdot i}\right)^{12}=\left(\frac{3\cdot(\cos 60^\circ+i\cdot\sin 60^\circ)}{5\cdot(\cos 150^\circ+i\cdot\sin 150^\circ)}\right)^{12}=*$$

$$\left(\frac{z}{w}\right)^{12}\quad z: r=3;\ \cos\varphi=\tfrac{1}{2},\ b>0\Rightarrow\varphi=60^\circ$$

$$w: r=5;\ \cos\varphi=-\frac{\sqrt{3}}{2},\ b>0\Rightarrow\varphi=150^\circ$$

$$*=\left(\frac{3}{5}\right)^{12}\cdot\left(\cos(60-150)^\circ+i\cdot\sin(60-150)^\circ\right)^{12}=$$

$$=\left(\frac{3}{5}\right)^{12}\cdot(\cos(270\cdot 12)^\circ+i\cdot\sin(270\cdot 12)^\circ=$$

$$=(3/5)^{12}\cdot(\cos 0^\circ+i\cdot\sin 0^\circ)$$

$$270^\circ\cdot 12=360^\circ\cdot 9$$

(e) $\left(-\frac{\sqrt{10}}{2}-\frac{\sqrt{10}}{2}i\right)^{15}$ (g) $(1+i)^8\cdot\left(5\sqrt{3}-5i\right)^3$ (i) $\left(1-\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{24}$

$$\left(\underbrace{-\frac{\sqrt{10}}{2}-\frac{\sqrt{10}}{2}i}\right)^{15}=\left(\sqrt{5}\cdot(\cos 225^\circ+i\cdot\sin 225^\circ)\right)^{15}=$$

$$r=\sqrt{\frac{10+10}{4}}=\sqrt{5}$$

$$\cos\varphi=\frac{-\sqrt{10}}{2\cdot\sqrt{5}}=\frac{-\sqrt{2}}{2};\ b<0\Rightarrow \varphi'=135^\circ$$

$$\varphi=2\cdot\pi-\varphi'=$$

$$=225^\circ$$

$$=\sqrt{5}^{15}\cdot\left(\cos(15\cdot 225)^\circ+i\cdot\sin(15\cdot 225)^\circ\right)=$$

$$=5^{\frac{15}{2}}\cdot(\cos 135^\circ+i\cdot\sin 135^\circ)$$

$$//\ 15\cdot 225^\circ=3375^\circ=360^\circ\cdot 9+135^\circ$$

$$(1+i)^8\cdot(5\cdot\sqrt{3}-5\cdot i)^3 = 2^4\cdot 10^3\cdot(\cos 450^\circ + i\cdot\sin 450^\circ) =$$

$$(1+i)^8 = \left(\sqrt{2}\cdot(\cos 45^\circ + i\cdot\sin 45^\circ)\right)^8 =$$

$$= 2^4\cdot(\cos 180^\circ + i\cdot\sin 180^\circ)$$

$$(5\cdot\sqrt{3}-5\cdot i)^3 = \left(10\cdot(\cos 330^\circ + i\cdot\sin 330^\circ)\right)^3 =$$

$$= 10^3\cdot(\cos 270^\circ + i\cdot\sin 270^\circ)$$

$$= 16000\cdot(\cos 90^\circ + i\cdot\sin 90^\circ)$$

$$\left(1-\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{24} = \left(\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\frac{1}{2}\cdot i\right)^{24} = *$$

$$r = \sqrt{1-\sqrt{3}+3/4+1/4} = \sqrt{2-\sqrt{3}}$$

$$\cos\varphi = \frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}} = \frac{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}} = \frac{2-\sqrt{3}}{2\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2};\ b<0 \Rightarrow \varphi' = 58{,}83^\circ \quad \varphi = 301{,}17^\circ$$

$$\overset{*}{=} \sqrt{2-\sqrt{3}}^{\,24}\cdot\left(\cos(24\cdot 301{,}87)^\circ + i\cdot\sin(24\cdot 301{,}87)^\circ\right) =$$

$$= (2-\sqrt{3})^{12}\cdot(\cos 28^\circ + i\cdot\sin 28^\circ)$$

Végezze el a következő gyökvonásokat a komplex számok halmazán.

(d) $-7\sqrt{3} + 7i$ ötödik gyöke

(e) $-\frac{7}{2} + \frac{7}{2}i$ nyolcadik gyöke

(f) $-6\sqrt{3} + 6i$ második gyöke

(g) $\dfrac{\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^8}{(1+i)^5}$ hetedik gyöke

$-7\cdot\sqrt{3} + 7i$ ötödik gyöke

$n = 5 \qquad r = 14$

$k = 0, 1, \ldots, 4 \qquad \cos\varphi = \frac{-\sqrt{3}}{2}; \; b>0 \Rightarrow \varphi = 150°$

$W_k = \sqrt[5]{14}\cdot\left(\cos(30° + 72\cdot k) + i\cdot\sin\left(\frac{150° + 2\cdot k\cdot 180°}{5}\right)\right)$

$W_0 = \sqrt[5]{14}\cdot(\cos 30° + i\cdot\sin 30°)$

$W_1 = \sqrt[5]{14}\cdot(\cos 102° + i\cdot\sin 102°)$

$W_2 = \sqrt[5]{14}\cdot(\cos 174° + i\cdot\sin 174°)$

$W_3 = \sqrt[5]{14}\cdot(\cos 246° + i\cdot\sin 246°)$

$W_4 = \sqrt[5]{14}\cdot(\cos 318° + i\cdot\sin 318°)$

$-\frac{7}{2}+\frac{7}{2}i$ nyolcadik gyöke

$n=8$

$k=0,1,\dots,7$

$r=\sqrt{\frac{49+49}{4}}=\sqrt{\frac{98}{4}}=\sqrt{\frac{49}{2}}$

$\cos\varphi=-\frac{7}{2}/\frac{7}{\sqrt{2}}=-\frac{7}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{7}=-\frac{\sqrt{2}}{2};\ b>0$

$\Rightarrow \varphi=135^\circ$

$$W_k=\sqrt[8]{\frac{49}{2}}\cdot\left(\cos\left(\frac{135+2\cdot180\cdot k}{8}\right)^\circ+i\cdot\sin\left(\frac{135}{8}+45\cdot k\right)\right)$$

$$W_0=\sqrt[8]{\frac{49}{2}}\cdot\left(\cos\left(\frac{135}{8}\right)^\circ+i\cdot\sin\left(\frac{135}{8}\right)^\circ\right)$$

$$W_1=\sqrt[8]{\frac{49}{2}}\cdot\left(\cos\left(\frac{495}{8}\right)^\circ+i\cdot\sin\left(\frac{495}{8}\right)^\circ\right)$$

$$W_2=\sqrt[8]{\frac{49}{2}}\cdot\left(\cos\left(\frac{855}{8}\right)^\circ+i\cdot\sin\left(\frac{855}{8}\right)^\circ\right)$$

$$W_3=\sqrt[8]{\frac{49}{2}}\cdot\left(\cos\left(\frac{1215}{8}\right)^\circ+i\cdot\sin\left(\frac{1215}{8}\right)^\circ\right)$$

$$W_4=\sqrt[8]{\frac{49}{2}}\cdot\left(\cos\left(\frac{1575}{8}\right)^\circ+i\cdot\sin\left(\frac{1575}{8}\right)^\circ\right)$$

$$W_5=\sqrt[8]{\frac{49}{2}}\cdot\left(\cos\left(\frac{1935}{8}\right)^\circ+i\cdot\sin\left(\frac{1935}{8}\right)^\circ\right)$$

$$W_6=\sqrt[8]{\frac{49}{2}}\cdot\left(\cos\left(\frac{2295}{8}\right)^\circ+i\cdot\sin\left(\frac{2295}{8}\right)^\circ\right)$$

$$W_7=\sqrt[8]{\frac{49}{2}}\cdot\left(\cos\left(\frac{2655}{8}\right)^\circ+i\cdot\sin\left(\frac{2655}{8}\right)^\circ\right)$$

$-6\cdot\sqrt{3}+6i$ második gyöke

$n=2 \quad r=\sqrt{4\cdot 36}=12$

$k=0,1 \quad \cos\varphi=-\frac{\sqrt{3}}{2};\ b>0,0 \Rightarrow \varphi=150^\circ$

$W_k=\sqrt[2]{12}\cdot\left(\cos\left(\frac{150+2\cdot 180\cdot k}{2}\right)^\circ+i\cdot\sin\left(75+180\cdot k\right)^\circ\right)$

$W_0=\sqrt{12}\cdot\left(\cos 75^\circ+i\cdot\sin 75^\circ\right)$

$W_1=\sqrt{12}\cdot\left(\cos 255^\circ+i\cdot\sin 255^\circ\right)$

$\dfrac{\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^8}{(1+i)^5}$ hetedik gyöke

$\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^8=\left(1\cdot\left[\cos 60^\circ+i\cdot\sin 60^\circ\right]\right)^8=$

$=\left(\cos(8\cdot 60)^\circ+i\cdot\sin(8\cdot 60)^\circ\right)=\cos 120^\circ+i\cdot\sin 120^\circ$

$(1+i)^5=\left(\sqrt{2}\cdot\left(\cos 45^\circ+i\cdot\sin 45^\circ\right)\right)^5=$

$=\left(2^{5/2}\cdot\left(\cos 225+i\cdot\sin 225^\circ\right)\right)$

$$\frac{\cos 120^\circ + i\cdot\sin 120^\circ}{2^{5/2}\cdot(\cos 225^\circ + i\cdot\sin 225^\circ)} =$$

$$= 2^{-5/2}\cdot\left(\cos(-105)^\circ + i\cdot\sin(-105)^\circ\right) =$$

$$= 2^{-5/2}\cdot\left(\cos 255^\circ + i\cdot\sin 255^\circ\right)$$

$n=7$ $\quad r = 2^{-5/2}$

$k=0,1,\dots,6$ $\quad \varphi = 255^\circ$

$$W_k = \sqrt[7]{\frac{1}{2^{5/2}}}\cdot\left(\cos\left(\frac{255+2\cdot180\cdot k}{7}\right)^\circ + i\cdot\sin\left(\frac{255+2\cdot180\cdot k}{7}\right)^\circ\right)$$

$$W_0 = \sqrt[7]{2^{-5/2}}\cdot\left(\cos\left(\frac{255}{7}\right)^\circ + i\cdot\sin\left(\frac{255}{7}\right)^\circ\right)$$

$$W_1 = \sqrt[7]{2^{-5/2}}\cdot\left(\cos\left(\frac{615}{7}\right)^\circ + i\cdot\sin\left(\frac{615}{7}\right)^\circ\right)$$

$$W_2 = \sqrt[7]{2^{-5/2}}\cdot\left(\cos\left(\frac{975}{7}\right)^\circ + i\cdot\sin\left(\frac{975}{7}\right)^\circ\right)$$

$$W_3 = \sqrt[7]{2^{-5/2}}\cdot\left(\cos\left(\frac{1335}{7}\right)^\circ + i\cdot\sin\left(\frac{1335}{7}\right)^\circ\right)$$

$$W_4 = \sqrt[7]{2^{-5/2}}\cdot\left(\cos\left(\frac{1695}{7}\right)^\circ + i\cdot\sin\left(\frac{1695}{7}\right)^\circ\right)$$

$$W_5 = \sqrt[7]{2^{-5/2}}\cdot\left(\cos\left(\frac{2055}{7}\right)^\circ + i\cdot\sin\left(\frac{2055}{7}\right)^\circ\right)$$

$$W_6 = \sqrt[7]{2^{-5/2}}\cdot\left(\cos\left(\frac{2415}{7}\right)^\circ + i\cdot\sin\left(\frac{2415}{7}\right)^\circ\right)$$

A trigonometrikus alak segítségével számítsa ki z értékét trigonometrikus és algebrai alakban is, majd adja meg az összes olyan w komplex számot trigonometrikus alakban, melyekre $w^3 = z$, ahol $z = \dfrac{\left(2+2\sqrt{3}i\right)^{10}}{(-1+i)^{83}}$.

$$z = \frac{(2+2\cdot\sqrt{3}\cdot i)^{10}}{(-1+i)^{83}} = \frac{(r_1\cdot(\cos\varphi_1 + i\cdot\sin\varphi_1))^{10}}{(r_2\cdot(\cos\varphi_2 + i\cdot\sin\varphi_2))^{83}} = \frac{(4\cdot(\cos 60^\circ + i\cdot\sin 60^\circ))^{10}}{(\sqrt{2}\cdot(\cos 135^\circ + i\cdot\sin 135^\circ))^{83}} = *$$

$$r_1 = |2+2\cdot\sqrt{3}\cdot i| = \sqrt{4+4\cdot 3} = 4 \qquad \cos\varphi_1 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi_1 = 60^\circ$$

$$r_2 = |-1+i| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \qquad \cos\varphi_2 = \frac{-1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \varphi_2 = 135^\circ$$

$$* = \frac{4^{10}\cdot(\cos 600^\circ + i\cdot\sin 600^\circ)}{\sqrt{2}^{83}\cdot(\cos(6075)^\circ + i\cdot\sin(6075)^\circ)} = \frac{4^{10}(\cos 240^\circ + i\cdot\sin 240^\circ)}{\sqrt{2}^{83}\cdot(\cos 315^\circ + i\cdot\sin 315^\circ)} =$$

$$= \frac{4^{10}}{2^{\frac{83}{2}}}\cdot\left(\cos(240^\circ - 315^\circ) + i\cdot\sin(240-315)^\circ\right) = 2^{-21,5}\cdot(\cos 285^\circ + i\cdot\sin 285^\circ) =$$

$$= 2^{-21,5}\cdot(\cos 285^\circ + i\cdot\sin 285^\circ) = \underbrace{2^{-21,5}\cdot(\cos 285^\circ + i\cdot\sin 285^\circ)}_{\text{trigonometrikus alak}} =$$

$$= \underbrace{8{,}73\cdot 10^{-8} - 3{,}26\cdot 10^{-7} i}_{\text{algebrai alak}}$$

z 3-dik gyökei:

$$w_0 = \sqrt[3]{2^{-21,5}}\cdot\left(\cos\left(\frac{285^\circ}{3} + \frac{2\cdot 0\cdot\pi}{3}\right) + i\cdot\sin\left(\frac{285^\circ}{3} + \frac{2\cdot 0\cdot\pi}{3}\right)\right) =$$

$$= 2^{-21,5}\cdot(\cos(35^\circ) + i\cdot\sin(135^\circ)) = 2^{-21,5}\cdot(\cos 95^\circ + i\cdot\sin 95^\circ)$$

$$w_1 = \sqrt[3]{2^{-21,5}}\cdot\left(\cos\left(\frac{285^\circ}{3} + \frac{2\cdot 1\cdot\pi}{3}\right) + i\cdot\sin\left(\frac{285^\circ}{3} + \frac{2\cdot 1\cdot\pi}{3}\right)\right) = 2^{-21,5}(\cos 215^\circ + i\cdot\sin 215^\circ)$$

$$w_2 = \sqrt[3]{2^{-21,5}}\cdot\left(\cos\left(\frac{285^\circ}{3} + \frac{2\cdot 2\cdot\pi}{3}\right) + i\cdot\sin\left(\frac{285^\circ}{3} + \frac{2\cdot 2\cdot\pi}{3}\right)\right) = 2^{-21,5}(\cos 335^\circ + i\cdot\sin 335^\circ)$$

Írjuk fel algebrai alakban a $z = \dfrac{(1+i)^8}{(1-\sqrt{3}i)^6}$ komplex számot.

$$z = \frac{(1+i)^8}{(1-\sqrt{3}\cdot i)^6} = \frac{\left(r_1\cdot(\cos\varphi_1 + i\cdot\sin\varphi_2)\right)^8}{\left(r_2\cdot(\cos\varphi_2 + i\cdot\sin\varphi_2)\right)^6} = \frac{\left(\sqrt{2}\cdot(\cos 45^\circ + i\cdot\sin 45^\circ)\right)^8}{\left(2\cdot(\cos 60^\circ + i\cdot\sin 60^\circ)\right)^6}$$

$r_1 = |1+i| = \sqrt{2}$ $\quad \cos\varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \varphi_1 = 45^\circ$

$r_2 = |1-\sqrt{3}i| = 2$ $\quad \cos\varphi_2 = \frac{1}{2}, b<0 \Rightarrow \varphi_2' = 60^\circ \Rightarrow \varphi_2 = 300^\circ$

$$= \frac{\sqrt{2}^8\cdot(\cos(45\cdot 8)^\circ + i\cdot\sin(45\cdot 8)^\circ)}{2^6\cdot(\cos(300\cdot 6)^\circ + i\cdot\sin(1800^\circ))} =$$

$$= \frac{2^4\cdot(\cos 360^\circ + i\cdot\sin 360^\circ)}{2^6\cdot(\cos 360^\circ + i\cdot\sin 360^\circ)} = 2^{4-6}\cdot\left(\cos(360-360)^\circ + i\cdot\sin(360-360)^\circ\right) =$$

$$= 2^{-2}\cdot(\cos 0^\circ + i\cdot\sin 0^\circ) = \frac{1}{2^2}\cdot(1+i\cdot 0) = \frac{1}{4} + 0\cdot i = \frac{1}{4}$$

A sík mely geometriai transzformációjának felelnek meg a következő leképzések?

(a) $z \mapsto 3z + 2$

(b) $z \mapsto (1+i)z$

(c) $z \mapsto 1/\overline{z}$

Az (a) a **z** háromszoros nyújtásával kapott komplex számnak a valós tengely irányában való 2-vel való eltolásával kapott komplex szám.

A (b) a **z** $\sqrt{2}$ -szeresre nyújtott, $\pi/4$ szöggel való elforgatásával kapott komplex szám.

A (c) komplex szám a **z** origó-középpontú, egységsugarú körre való inverziója.

A Gauss-számsíkon egy négyzet középpontja a $K = 1 + 2i$ illetve egyik csúcsa az $A = 5 + 4i$ komplex számnak megfelelő pontban van. Határozza meg a négyzet többi csúcsának megfelelő komplex számokat.

Ennek a négyzetnek az origó a középpontja, az egyik csúcsa pedig A’ = A – K = 4 + 2i. Ezt a csúcsot kell elforgatni 90º-kal három alkalommal, így kapjuk meg a maradék 3 csúcsot, szóval háromszor megszorzom a (1 × (cos90º + i × sin90º)) komplex számmal. Ezek alapján:

- B’ = (A’) × i = -2 + 4i => B = B’ + K = -1 + 6i;
- C’ = (B’) × i = -2 + 4i => C = C’ + K = -3;
- D’ = (C’) × i = 2 – 4i => D = D’ – K = 3 – 2i.

Legyen z, w két különböző komplex szám! Írja fel az őket összekötő szakasz felezőpontját, valamint annak a két szabályos háromszögnek a harmadik csúcsát, illetve súlypontját, melyeknek z, w csúcsai!

A felezőpont F = 0.5 × (z + w), a harmadik lehetséges csúcsok pedig v és u, ami a z pontból indul és a w – z vektor ±π/3 szöggel való elforgatásával nyert vektor végpontjai:

$$v = z + (w-z)\varepsilon_1^{(6)} = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)w = z\overline{\varepsilon_1^{(6)}} + w\varepsilon_1^{(6)}$$

$$u = z + (w-z)\overline{\varepsilon_1^{(6)}} = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)w = z\varepsilon_1^{(6)} + w\overline{\varepsilon_1^{(6)}},$$

, ahol $\varepsilon_1^{(6)} = 1 \times (\cos 60^o + i \times \sin 60^o)$ egy hatodik egységgyök. Használjuk azt a képletet a súlypont meghatározásához, amihez a, b és c szükséges (S = (a+b+c)/3):

$$S_v = \frac{z+w+v}{3} = \frac{z+w+\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z+\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)w}{3} = \left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}i\right)z+\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}i\right)$$

$$S_u = \frac{z+w+u}{3} = \frac{z+w+\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z+\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)w}{3} = \left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}i\right)z+\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}i\right).$$

Forgassa el síkban a $\begin{bmatrix} 2 \\ -2\sqrt{3} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ vektort (a) 34 (b) -176 fokkal.

z = 4 × (cos300º + i × sin300º) => z' = 4 × (cos334º + i ×sin334º) ~ 3.6 – 1.75i.

z = 4 × (cos300º + i × sin300º) => z' = 4 × (cos124º + i ×sin124º) ~ -2.23 + 3.32i.

Mutassuk meg, hogy ha $\varepsilon^4 = i$, akkor $4 \mid o(\varepsilon)$!

$1 \times (\cos(4\times\alpha) + i \times \sin(4\times\alpha)) = (1 \times (\cos(\alpha) + i \times \sin(\alpha)))^4 = \varepsilon^4 = i = 1 \times (\cos 90^o + i \times \sin 90^o)$
=> ε = 1 × (cos(22.5 + k ×90)º + i × sin(22.5 + k ×90)º), ahol k = {0,1,2,3}. Ha o(ε) = n, akkor
n × (22.5 + k ×90)º = l × 2 × 180º , ahol l egy egész szám => n×(1 + 4k) = 16l => 16 | n és 4 | 16 => 4 | n.