

### 3. feladatsor: Relációk kompozíciója

#### 1. feladat

Legyen  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $B = \{a, b, c, d, e, f\}$ ,  $C = \{2, 4, 6, 8\}$  továbbá  $R \subseteq A \times B$ ,  $S \subseteq B \times C$ ,  
 $R = \{(1, a), (1, b), (2, c), (2, f), (3, d), (3, e), (3, f)\}$  és  $S = \{(a, 2), (a, 4), (c, 6), (c, 8), (d, 2), (d, 4), (d, 6), (f, 8)\}$ . Határozza meg az  $S \circ R$  kompozíciót.

#### 2. feladat

Legyen  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ ;  $S, R \subseteq A \times A$ . Határozza meg az  $S \circ R$  kompozíciót.

- (a)  $R = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 1)\}$  és  $S = \{(1, 6), (2, 3), (2, 4), (3, 1)\}$   
 (b)  $R = \{(1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 5), (5, 6), (6, 7)\}$  és  $S = \{(1, 2), (1, 4), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (4, 2), (4, 6), (5, 6), (7, 2)\}$   
 (c)  $R = \{(2, 2), (2, 4), (3, 1), (3, 4), (4, 4), (5, 3)\}$  és  $S = \{(2, 6), (3, 7), (5, 1), (5, 6), (5, 8), (6, 2), (7, 7)\}$   
 (d)  $R = \{(6, 1), (6, 2), (7, 3), (8, 7)\}$  és  $S = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (2, 7), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (5, 1), (5, 3), (5, 5), (7, 1), (7, 2)\}$

Kommutatív-e a kompozíció? Határozza meg például az (a) esetben az  $R \circ S$  kompozíciót.

#### 3. feladat

Legyenek  $R, S \subseteq A \times A$  szimmetrikus relációk. Bizonyítsuk be, hogy  $R \circ S$  szimmetrikus akkor és csak akkor, ha  $R \circ S = S \circ R$ .

#### 4. feladat

Legyen  $R, S \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . Határozza meg az  $S \circ R$  és  $R \circ S$  kompozíciót.

- (a)  $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid 4x = y^2 + 6\}$  és  $S = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x - 1 = y\}$   
 (b)  $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = 2y\}$  és  $S = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x^3\}$   
 (c)  $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid \frac{1}{x} = y^2\}$  és  $S = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid \sqrt{x-2} = 3y\}$   
 (d)  $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 - 6x + 5 = y\}$  és  $S = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 = y \wedge 2y = x\}$

#### 5. feladat

Tekintsük a következő relációkat:

$$\rho = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid |x - y| \leq 3\}, \varphi = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid 6x - 1 = 4y + 5\},$$

$$\lambda = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid 4 \mid 2x + 3y\}, \alpha = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid 1, 5x - 1, 5 \leq y\}$$

Határozza meg a következő kompozíciókat.

$$\rho \circ \varphi$$

$$\varphi \circ \lambda$$

$$\varphi^3$$

$$\alpha \circ \rho$$

$$\rho \circ \alpha$$