Gyökvonás komplex számok körében

Ahogy az egész-, természetes-, racionális- és valós számokon, úgy a komplex számokon is értelmezzük a gyökvonás műveletét. Viszont a komplex szám sajátosságából adódik, hogy nem olyan könnyű itt a dolgunk, mint a hagyományos gyökvonásnál. Ahhoz, hogy komplex számokon gyököt vonhassunk, szükségeltetik egy tételt alkalmaznunk:

Tétel (Gyökvonás komplex számok körében)

Legyen $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $n \in \mathbb{N}^+$. *Ekkor a* z n*-edik gyökei:*

$$w_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right)$$

$k = 0, 1, \ldots, n-1.$

Ezzel a fenti képlettel végezzük el a gyökvonást komplex számokon. Figyeljünk arra, hogy n-edik gyökvonás esetén n darab különböző gyökről beszélünk, melyet k=0, 1, ..., n-1 indexszel látunk el és a képletben is alkalmazzuk ezt a k számot! Természetesen, a képlet használatához szükségeltetik az eredeti komplex szám trigonometrikus jellemzőit – abszolút értékét és argumentumát – ismernünk. Lássunk néhány példát!

−60 második gyöke

$-60 = -60 + 0 \cdot i = z$ $\quad |z| = \sqrt{(-60)^2 + 0^2} = \sqrt{3600} = 60$

$\cos\varphi = -60/60 = -1 \Rightarrow \varphi = 180^\circ$ $\quad b \geq 0$ $\quad k = 0, 1$

$$w_k = \sqrt[2]{60} \cdot \left(\cos\left(\frac{180^\circ + 2 \cdot k \cdot 180^\circ}{2}\right) + i \sin\left(\frac{180^\circ + 2 \cdot k \cdot 180^\circ}{2}\right)\right)$$

A fenti példában második gyökről beszélünk, így n=2, k=0,1, azaz két gyökünk lesz 0-s és 1-es indexszel.

Gyökvonás komplex számok körében

-60 második gyöke

$$\Rightarrow \begin{array}{l} W_0 = \sqrt[2]{60}\cdot(\cos 90^\circ + i\cdot\sin 90^\circ) \\ W_1 = \sqrt[3]{60}\cdot(\cos 270^\circ + i\cdot\sin 270^\circ) \end{array} \checkmark$$

$$W_k = \sqrt[2]{60}\cdot\left(\cos\left(\frac{180^\circ + 2\cdot k\cdot 180^\circ}{2}\right) + i\cdot\sin\left(\frac{180^\circ + 2\cdot k\cdot 180^\circ}{2}\right)\right) \Rightarrow$$

Behelyettesítve a képletbe a két k-t, megkapjuk -60 második gyökeit. Nézzük, mi a helyzet, ha a harmadik gyökét nézzük:

-60 harmadik gyöke $\quad -60 + 0\cdot i = z \quad |z| = 60 \quad \varphi = 180^\circ$

$k \in \{0,1,2\}$

$$W_k = \sqrt[3]{60}\cdot\left(\cos\left(\frac{180^\circ + 2\cdot k\cdot 180^\circ}{3}\right) + i\cdot\sin\left(\frac{180^\circ + 2\cdot k\cdot 180^\circ}{3}\right)\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} W_0 = \sqrt[3]{60}\cdot(\cos 60^\circ + i\cdot\sin 60^\circ) \\ W_1 = \sqrt[3]{60}\cdot(\cos 180^\circ + i\cdot\sin 180^\circ) \\ W_2 = \sqrt[3]{60}\cdot(\cos 300^\circ + i\cdot\sin 300^\circ) \end{array} \checkmark$$

A képlet nem sokat módosult, egyszerűen n=2 helyett n=3-al dolgoztunk, így lett 3 gyökünk k=0,1,2 indexekkel. Behelyettesítve a képletbe pedig megkaptuk a három gyököt.

Természetesen, „hagyományos” komplex számon is értelmezünk gyökvonást, nézzünk erre is egy példát:

$-6\cdot\sqrt{3} + 6\cdot i$ második gyöke $\quad |z| = \sqrt{36\cdot 3 + 36} = 12$

$\cos\varphi = -6\cdot\sqrt{3}/12 \Rightarrow \varphi = 150^\circ \quad k = 0,1$

$b > 0$

$$W_k = \sqrt[2]{12}\cdot\left(\cos\left(\frac{150^\circ + 2\cdot k\cdot 180^\circ}{2}\right) + i\cdot\sin\left(\frac{150^\circ + 2\cdot k\cdot 180^\circ}{2}\right)\right)$$

Adott a komplex szám, kiszámítottuk az abszolút értékét, az irányszögét és már fel is tudtuk írni a képletet n=2 és k=0,1 esetén.

$-6\cdot\sqrt{3} + 6\cdot i$ második gyöke

$$\Rightarrow \begin{array}{l} W_0 = \sqrt[2]{12}\cdot(\cos 75^\circ + i\cdot\sin 75^\circ) \\ W_1 = \sqrt{12}\cdot(\cos 255^\circ + i\cdot\sin 255^\circ) \end{array} \checkmark$$

$$W_k = \sqrt[2]{12}\cdot\left(\cos\left(\frac{150^\circ + 2\cdot k\cdot 180^\circ}{2}\right) + i\cdot\sin\left(\frac{150^\circ + 2\cdot k\cdot 180^\circ}{2}\right)\right)$$

A megfelelő k számokkal behelyettesítve pedig megkaptuk a két gyököt. Zárásképp pedig nézünk meg egy nagyobbik gyökös számpéldát:

$-\frac{7}{2}+\frac{7}{2}i$ nyolcadik gyöke

$n=8$

$k=0,1,\ldots,7$

$r=\sqrt{\frac{49+49}{4}}=\sqrt{\frac{98}{4}}=\sqrt{\frac{49}{2}}$

$\cos\varphi=-\frac{7}{2}\Big/\frac{7}{\sqrt{2}}=-\frac{7}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{7}=-\frac{\sqrt{2}}{2};\ b>0$

$\Rightarrow \varphi=135^\circ$

$$W_k=\sqrt[8]{\frac{49}{2}}\cdot\left(\cos\left(\frac{135+2\cdot180\cdot k}{8}\right)^\circ+i\cdot\sin\left(\frac{135}{8}+45\cdot k\right)^\circ\right)$$

$$W_0=\sqrt[8]{\frac{49}{2}}\cdot\left(\cos\left(\frac{135}{8}\right)^\circ+i\cdot\sin\left(\frac{135}{8}\right)^\circ\right)$$

$$W_1=\sqrt[8]{\frac{49}{2}}\cdot\left(\cos\left(\frac{495}{8}\right)^\circ+i\cdot\sin\left(\frac{495}{8}\right)^\circ\right)$$

$$W_2=\sqrt[8]{\frac{49}{2}}\cdot\left(\cos\left(\frac{855}{8}\right)^\circ+i\cdot\sin\left(\frac{855}{8}\right)^\circ\right)$$

$$W_3=\sqrt[8]{\frac{49}{2}}\cdot\left(\cos\left(\frac{1215}{8}\right)^\circ+i\cdot\sin\left(\frac{1215}{8}\right)^\circ\right)$$

$$W_4=\sqrt[8]{\frac{49}{2}}\cdot\left(\cos\left(\frac{1575}{8}\right)^\circ+i\cdot\sin\left(\frac{1575}{8}\right)^\circ\right)$$

$$W_5=\sqrt[8]{\frac{49}{2}}\cdot\left(\cos\left(\frac{1935}{8}\right)^\circ+i\cdot\sin\left(\frac{1935}{8}\right)^\circ\right)$$

$$W_6=\sqrt[8]{\frac{49}{2}}\cdot\left(\cos\left(\frac{2295}{8}\right)^\circ+i\cdot\sin\left(\frac{2295}{8}\right)^\circ\right)$$

$$W_7=\sqrt[8]{\frac{49}{2}}\cdot\left(\cos\left(\frac{2655}{8}\right)^\circ+i\cdot\sin\left(\frac{2655}{8}\right)^\circ\right)$$

Ahogy látjuk, nem feltétlenül kapunk egész számokat a szögek értékére, de ettől még helyesek az értékek. Utolsó megjegyzésként annyit tennék, hogy ahogy az látható, az egyes gyökök szögei közti eltérés állandó, ennek az értéke pedig: **2×180° / n**.