A 2, 3, 4, 5, 7 számjegyek egyszeri felhasználásával képezzünk ötjegyű számokat.
(a) Hány számot képezhetünk?
(b) Hány páros van közöttük?
(c) Hány olyan van, amely osztható néggyel?

2, 3, 4, 5, 7 ; ötjegyű szám

(a) $5! \;//\; \boxed{5}\cdot\boxed{4}\cdot\boxed{3}\cdot\boxed{2}\cdot\boxed{1}$ (b) $2\cdot 4! \;//\; \boxed{4}\cdot\boxed{3}\cdot\boxed{2}\cdot\boxed{1}\cdot\boxed{2} \oplus \boxed{4}\cdot\boxed{3}\cdot\boxed{2}\cdot\boxed{1}\cdot\boxed{4}$

(c) $4 \mid \overline{abcde} \Leftrightarrow 4 \mid \overline{de}$ $(a,b,c,d,e \in \{2,3,4,5,7\}) \Rightarrow \overline{de} \in \{24, 32, 52, 72\}$

$\Rightarrow \boxed{3}\cdot\boxed{2}\cdot\boxed{1}\cdot de \Rightarrow \underline{\underline{4\cdot 3!}}$

Hány 5-tel osztható hatjegyű szám képezhető a 0, 1, 2, 3, 4, 5 számokból, ha minden számjegy csak egyszer szerepelhet?

$5 \mid \overline{abcdef}$; $a,b,c,d,e,f \in \{0,1,2,3,4,5\}$, $a \neq 0$: $5\cdot 5!$

Egy tíztagú társaság tagjai között 4 különböző könyvet sorsolnak ki úgy, hogy egy-egy személy csak egy könyvet nyerhet. Hányféleképpen végződhet a sorsolás?

10 fő; 4 különböző könyv; 1 fő - 1 könyv; sorrend számít

$$10\cdot 9\cdot 8\cdot 7 = \frac{10!}{(10-4)!} = V_{10}^{4}$$

Egy műhelyben egy műszak alatt elkészített 500 db zár 4%-a selejtes. Hányféleképpen lehet kiválasztani 10 zárat úgy, hogy a kiválasztottak közül
(a) pontosan 5 selejtes legyen
(b) legalább 2 selejtes legyen

500 zár; 4% selejtes; 10 kiválasztása; sorrend nem számít

(a) 5 selejtes: $\underbrace{500}_{\Sigma}\cdot\underbrace{0{,}04}_{\text{selejtes}} = 20$ selejtes $\Rightarrow \binom{20}{5}\cdot\binom{480}{5}$

(b) legalább 2 selejtes: $500\cdot 0{,}04 = 20$ selejtes

$$\boxed{\text{ÖSSZES ESET} - \text{ROSSZ ESET} = \text{JÓ ESET}}$$

$$\binom{500}{10} - \left(\underbrace{\binom{480}{10}}_{\text{ø selejtes}} + \underbrace{\binom{480}{9}\cdot\binom{20}{1}}_{\text{1 selejtes}}\right) = \text{jó esetek száma}$$

Egy 32 létszámú osztály, amelynek Nagy Pál is tagja, diákbizottságot választ. A bizottság összetétele: 1 titkár és 4 bizottsági tag. Hány olyan eset lehetséges, amikor Nagy Pál
(a) titkára a bizottságnak
(b) nem titkárként tagja a bizottságnak
(c) szerepel a bizottságban

31 fő + NP; 1 titkár + 4 biz. tag; 5 fő kiválasztása

(a) NP titkár

$\binom{1}{1}\cdot\binom{31}{4}$

(b) NP tag, de nem titkár

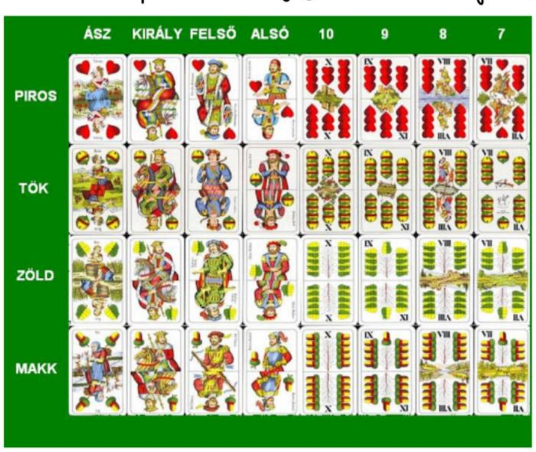
$\binom{31}{1}\cdot\binom{30}{3}\cdot\binom{1}{1}$

(c) NP tag

$\binom{31}{4}\cdot\binom{1}{1}$

Egy 32 lapos magyarkártya-csomagból egyszerre kiveszünk 5 lapot. Hány olyan húzás lehetséges, ahol a kihúzott lapok között
(a) csak piros fordul elő
(b) pontosan 1 piros van
(c) van piros
(d) 2 piros és 3 zöld van
(e) minden szín előfordul
(f) pontosan 1 ász és 4 piros található
(g) mind ász vagy piros

32 lapos magyarkártya; 5 lap húzása egyszerre
↳ ∅ sorrend



(a) csak piros: $\binom{8}{5}$

(b) egy piros: $\binom{8}{1}\cdot\binom{24}{4}$

ÖSSZES − ROSSZ

(c) van benne piros: $\binom{32}{5}-\binom{24}{5}$ v $\binom{8}{1}\cdot\binom{31}{4}$

(d) két piros és három zöld: $\binom{8}{2}\cdot\binom{8}{3}$

(e) minden szín van benne: $\binom{8}{1}\cdot\binom{8}{1}\cdot\binom{8}{1}\cdot\binom{8}{1}\cdot\binom{28}{1}$

(f) egy ász és négy piros: $\left(\binom{1}{1}\cdot\binom{7}{3}\cdot\binom{21}{1}\right)+\left(\binom{7}{4}\cdot\binom{3}{1}\right)$

(g) csak ász vagy piros: $\binom{10}{5}$

//kizáró vagy

Hányféleképpen lehet 24 egyforma golyót 8 különböző dobozba szétosztani úgy, hogy
(a) a dobozokba akár 0 golyó is kerülhet
(b) minden dobozban legyen legalább 1 golyó
(c) minden dobozban legyen legalább 2 golyó

24 azonos golyó
8 különböző doboz

(a) $\binom{31}{7}$ (b) $\binom{23}{16}$ v. $\binom{23}{7}$ (c) $\binom{15}{8}$

Az 52-lapos francia kártyában 4 ász és 4 király van. Szétosztjuk a lapokat úgy, hogy 4 játékosnak 13-13 lapot adunk. Hányféle olyan szétosztás lehetséges, melyek során a 4 játékos mindegyikének 1-1 ász és 1-1 király jut, ha a játékosok sorrendjét megkülönböztetjük?

$$\underline{\underline{4! \cdot 4! \cdot \frac{44!}{(11!)^4}}}$$

- 1-1 ász 4 főre: $4!$
- 1-1 király 4 főre: $4!$
- a maradék lapok sorrendje: $44!$
- ∅ sorrend a 11-es felosztáson belül: $\frac{1}{(11!)^4}$

Legyen $n, k \in \mathbb{N}$. Igazolja a következő azonosságokat:

(a) $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

$$\frac{(n+1)!}{k! \cdot (n-k+1)!} = \frac{n!}{(k-1)! \cdot (n-k+1)!} + \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \quad // : n!$$

$$\frac{n+1}{k! \cdot (n-k+1)!} = \frac{1}{(k-1)! \cdot (n-k+1)!} + \frac{1}{k! \cdot (n-k)!} \quad // \cdot k!$$

$$\frac{n+1}{(n-k+1)!} = \frac{k}{(n-k+1)!} + \frac{1}{(n-k)!} \quad // \cdot (n-k+1)!$$