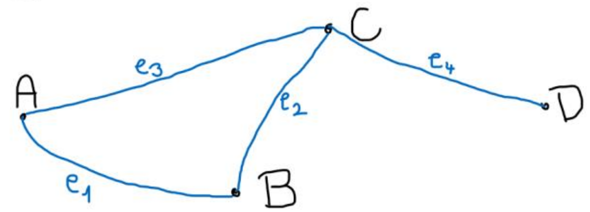
Ábrázoljuk a következő irányítatlan gráfot: $G = (V, E, \varphi)$, $V = \{A, B, C, D\}$, $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, $\varphi = \{(e_1, \{A, B\}), (e_2, \{B, C\}), (e_3, \{A, C\}), (e_4, \{C, D\})\}$. Határozza meg a következőket: $d(A), d(B), d(C), d(D)$. Rajzolja le $\overline{G}$-t. Izomorf-e G és $\overline{G}$?

G:



Definíció (csúcs fokszáma)

A v csúcs fokszámán (vagy fokán) a rá illeszkedő élek számát értjük, a hurokéleket kétszer számolva.
Jelölése: $d(v)$ vagy $deg(v)$.

Definíció (gráf komplementere)

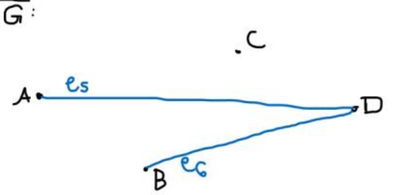
Egy G egyszerű gráf komplementere az a $\overline{G}$ egyszerű gráf, melynek csúcshalmaza megegyezik G csúcshalmazával, és amelyben két csúcs pontosan akkor van összekötve éllel, ha G-ben nincs.

Definíció (gráfok izomorfiája)

A $G = (\varphi, E, V)$ és $G' = (\varphi', E', V')$ gráfok izomorfak, ha léteznek $f: E \to E'$ és $g: V \to V'$ bijektív leképezések, hogy minden $e \in E$-re és $v \in V$-re e pontosan akkor illeszkedik v-re, ha $f(e)$ illeszkedik $g(v)$-re.

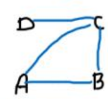
$\cdot d(A) = 2 \quad \cdot d(B) = 2 \quad \cdot d(C) = 3 \quad \cdot d(D) = 1$

$\overline{G}$:

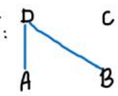


$\cdot$ G és $\overline{G}$ izomorf-e:

G:



$\overline{G}$:



NEM

Bizonyítsuk be, hogy egy gráfban a páratlan fokszámú csúcsok száma mindig páros.

Tétel (Fokszámösszeg)

A $G = (\varphi, E, V)$ gráfra

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|.$$

A fenti tétel alapján, egy adott gráf összes csúcsának fokszámösszege az az élek számainak kétszerese, így ez mindig egy páros szám lesz. Ez azért igaz, mert minden él két csúcsot köt össze. Ezek alapján, a gráf páros fokszámú csúcsainak fokszámainak az összege páros, tehát a maradék fokszámösszeg, amit a gráf páratlan csúcsai adnak ki, az is páros. Páratlan számok összege pedig csak akkor páros, ha páros darab szerepel.

Lehet-e egy 7 pontú egyszerű gráf fokszámsorozata

(a) 4, 4, 3, 3, 2, 2, 1;
(b) 6, 3, 3, 3, 3, 2, 0;
(c) 5, 5, 5, 2, 2, 2, 1;
(d) 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2?

(a) 4, 4, 3, 3, 2, 2, 1:
$2 \nmid (4+4+3+3+2+2+1) \Rightarrow$ ✗

(b) 6, 3, 3, 3, 3, 2, 0:
$2 \mid (6+3+3+3+3+2+0)$ ✓
de $d(\#1) = 6 \wedge |V| = 7 \wedge d(\#7) = 0$
$\Rightarrow$ hurokél az első csúcsnál
$\Rightarrow$ nem egyszerű gráf $\Rightarrow$ ✓

Tétel (Fokszámösszeg)

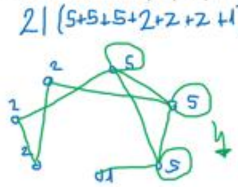
A $G = (\varphi, E, V)$ gráfra

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|.$$

Definíció (hurokél, egyszerű gráf)

Ha egy él egyetlen csúcsra illeszkedik, azt hurokélnek nevezzük.
Ha $e \neq e'$ esetén $\varphi(e) = \varphi(e')$, akkor e és e' párhuzamos élek.
Ha egy gráfban nincs sem hurokél, sem párhuzamos élek, akkor azt egyszerű gráfnak nevezzük.

(c) 5, 5, 5, 2, 2, 2, 1:
$2 \mid (5+5+5+2+2+2+1)$

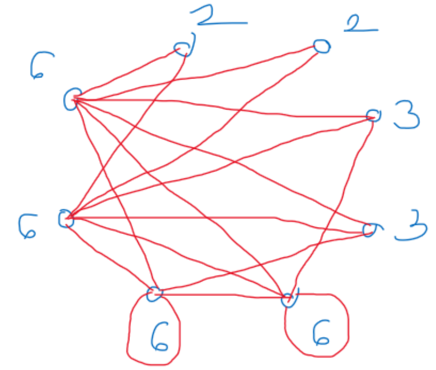


// A 3 darab ötfokos csúcs között 3 él,
// azaz 6 fok megy. A maradék 15 - 6 = 9
// él a másik 4 csúcsba mehet. De ezek száma
// 2 + 2 + 2 + 1 = 7, ami kevesebb, mint a 9.

(d) 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2:
$2 \mid 7 \cdot 2$

Van-e olyan 8 pontú gráf, melyben a csúcsok fokai rendre 6,6,6,6,3,3,2,2? És egyszerű gráf?

6, 6, 6, 6, 3, 3, 2, 2



Az alábbi ábra példa egy nem egyszerű gráfra, de vajon van-e egyszerű gráfra is ilyen? Ha van ilyen, akkor van komplementere is 1,1,1,1,4,4,5,5 fokszámsorozattal. Ennél a komplementer-gráfnál, a nem elsőfokú csúcsokra jut 18 fokszám, ebből 12 elmegy a köztük futható 6 élre. A maradék 6 fok a fenálló 4 elsőfokú csúcsra jut. Vagyis 2 fok – azaz 1 él – kimarad a játékból. Emiatt nem lehet egyszerű gráfunk.

(a) Bizonyítsuk be, hogy véges, egyszerű gráfban létezik 2 különböző pont, melyek fokszáma egyenlő.

Bizonyítsuk be indirekt módon:

Legyen G - V csúcshalmazzal és E élhalmazzal - egy egyszerű, véges gráf, ahol n jelöli a csúcsok számát (|V|), m pedig az élek számát (|E|)!
Azt állítjuk, hogy nincs két olyan G-beli csúcs, amelyek fokszáma azonos (kvantorokkal: $\forall u, v \in V: deg(u) \neq deg(v)$).

Mivel G egy egyszerű gráf, a legnagyobb fokszám, amit egy G-beli csúcs birtokolhat, az n-1 , mivel minden G-gráfbeli csúcs össze lehet kötve az összes többi csúccsal (nem feltétlen van így, de lehetséges). Így minden V-beli v csúcsra igaz, hogy $0 \leq deg(v) \leq n-1$, és így n darab lehetséges fokszám van, ami az egyes V-beli v-khez tartozhat, tegyük ezeket egy D halmazba: $D = \{0,1,2,...,n-1\}$!
Mivel n darab csúcs van és n-féle fokszám, valamint G nem tartalmazhat két azonos fokszámú csúcsot, egyértelmű hozzárendelés látszik V és D halmazok közt, azaz egy V-beli csúcshoz egy D-beli fokszám tartozik, ahogy egy D-beli fokszám egy V-beli csúcshoz van hozzárendelve. Azonban, ez azt is jelenti, hogy lesz egy olyan csúcs V-ben, ami 0 fokszámú, míg egy másik n-1 fokszámmal rendelkezik, ami lehetetlen, hiszen ha van egy izolált csúcs, akkor nincs olyan csúcs, ami önmagán kívül az összes csúcsot elérné, márpedig az n-1 fokszám pontosan ezt jelenti.
Ezek szerint, vagy 0-s fokszámú csúcs nem szerepel G-ben, vagy n-1-es fokszámú csúcs nem szerepel G-ben. Viszont ez azt is jelenti, hogy legalább eggyel kevesebb elemet tudunk a D halmazból V-hez társítani úgy, hogy a csúcsok száma V-ben nem változott. Ezek alapján, arra a logikus döntésre jutunk, hogy az állításunk hamis, mert lesz olyan D-beli fokszám, ami több V-beli csúcshoz fog tartozni, és így bármilyen véges és egyszerű gráfra igaz, hogy létezik 2 olyan, egymástól különböző csúcsa, melyek fokszáma megegyezik. $\square$

Ha egy véges egyszerű gráf nem összefüggő, akkor a komplementere összefüggő lesz-e?

Ha egy véges gráf nem összefüggő, akkor legalább két komponense van.
Jelölje a gráf csúcshalmazát **V**, és legyen az egyik komponens csúcsainak halmaza **X ⊆ V**.
Ekkor a gráfban **X** és **V \ X** halmazok között nem megy él, és mivel a gráfnak legalább két komponense van,ezért sem **X**, sem **V \ X** halmaz nem üres, azaz **∃ v ∈ X, ∃ w ∈ V \ X**.
A gráf komplementerében **X** minden eleme **V \ X** halmaz minden elemével össze van kötve éllel (hiszen a gráfban ezek nem lehetnek összekötve).
Igazoljuk végül, hogy a komplementerben létezik út **X** minden eleméből **X** minden elemébe, és **V \ X** minden eleméből **V \ X** minden másik elemébe is!
V \ X halmaz bármely két eleme össze van kötve **v** csúccsal, és így van közöttük kettő élű út.
Hasonlóan, **X** halmaz bármely két eleme össze van kötve **w** csúccsal, és így van közöttük kettő élű út.

(a) Igaz-e, hogy ha egy gráf bármely két pontja között van séta, akkor út is van?

Definíció (séta)

Legyen $G = (\varphi, E, V)$ egy gráf, $n \in \mathbb{N}$. Egy G-beli n hosszú séta v_0-ból v_n-be egy

$$v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, v_{n-1}, e_n, v_n$$

sorozat, ahol

- $v_j \in V \quad \forall\, 0 \leq j \leq n$-re,
- $e_k \in E \quad \forall\, 1 \leq k \leq n$-re,
- $\varphi(e_m) = \{v_{m-1}, v_m\} \quad \forall\, 1 \leq m \leq n$-re.

Ha $v_0 = v_n$, akkor zárt sétáról beszélünk, különben nyílt sétáról.

Definíció (vonal)

Ha a sétában szereplő élek mind különbözőek, akkor vonalnak nevezzük. Az előzőeknek megfelelően beszélhetünk zárt vagy nyílt vonalról.

Definíció (út)

Ha a sétában szereplő csúcsok mind különbözőek, akkor útnak nevezzük.

Igaz, hiszen a két pont közötti legrövidebb sétában nem lehet pontismétlődés, hiszen ha egy pontot többször is érintenénk, akkor a két érintése közötti részt nyugodtan elhagyhatnánk a sétánkból, s továbbra is a két pont közötti sétát kapnánk. Így, mivel a séta garantáltan különböző csúcsok összekötését eredményezi, így ez út is.

(b) Mutassuk meg, hogy ha a-ból vezet út b-be, és b-ből c-be, akkor a-ból is vezet c-be!

Legyen az a-ból b-be vezető út: a, e_1, v_2, e_2, v_3, e_3, …, v_6, e_6, b !
Legyen a b-ből c-be vezető út: b, e_7, v_8, e_8, v_9, e_9, …, v_{12}, e_{12}, c !
Látjuk, hogy az egyik út abban a csúcsban végződik, ahol a másik kezdődik. Nos, hogyha az a-ból induló utat a b csúcsban nem befejezzük, hanem a b-ből induló útra áttérve folytatjuk, akkor bejárhatjuk mindkét utat és a-ból vezet így séta c-be, ésha az a) részfeladat szűkítési módszerét használjuk, akkor kapunk egy sétát is a-ból c-be.

Rajzoljuk le az összes (páronként nem izomorf) 3, 4 és 5 csúcsú fát.

Definíció (fa)

Egy gráfot fának nevezünk, ha összefüggő és körmentes.