

3. feladatsor: Relációk kompozíciója

1. feladat

Legyen $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b, c, d, e, f\}$, $C = \{2, 4, 6, 8\}$ továbbá $R \subseteq A \times B$, $S \subseteq B \times C$,
 $R = \{(1, a), (1, b), (2, c), (2, f), (3, d), (3, e), (3, f)\}$ és $S = \{(a, 2), (a, 4), (c, 6), (c, 8), (d, 2), (d, 4), (d, 6), (f, 8)\}$. Határozza meg az $S \circ R$ kompozíciót.

2. feladat

Legyen $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$; $S, R \subseteq A \times A$. Határozza meg az $S \circ R$ kompozíciót.

- (a) $R = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 1)\}$ és $S = \{(1, 6), (2, 3), (2, 4), (3, 1)\}$
 (b) $R = \{(1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 5), (5, 6), (6, 7)\}$ és $S = \{(1, 2), (1, 4), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (4, 2), (4, 6), (5, 6), (7, 2)\}$
 (c) $R = \{(2, 2), (2, 4), (3, 1), (3, 4), (4, 4), (5, 3)\}$ és $S = \{(2, 6), (3, 7), (5, 1), (5, 6), (5, 8), (6, 2), (7, 7)\}$
 (d) $R = \{(6, 1), (6, 2), (7, 3), (8, 7)\}$ és $S = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (2, 7), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (5, 1), (5, 3), (5, 5), (7, 1), (7, 2)\}$

Kommutatív-e a kompozíció? Határozza meg például az (a) esetben az $R \circ S$ kompozíciót.

3. feladat

Legyenek $R, S \subseteq A \times A$ szimmetrikus relációk. Bizonyítsuk be, hogy $R \circ S$ akkor és csak akkor szimmetrikus, ha $R \circ S = S \circ R$.

4. feladat

Legyen $R, S \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Határozza meg az $S \circ R$ és $R \circ S$ kompozíciót.

- (a) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid 4x = y^2 + 6\}$ és $S = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x - 1 = y\}$
 (b) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = 2y\}$ és $S = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x^3\}$
 (c) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid \frac{1}{x} = y^2\}$ és $S = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid \sqrt{x-2} = 3y\}$
 (d) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 - 6x + 5 = y\}$ és $S = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 = y \wedge 2y = x\}$

5. feladat

Tekintsük a következő relációkat:

$$\rho = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid |x - y| \leq 3\}, \varphi = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid 6x - 1 = 4y + 5\},$$

$$\lambda = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid 4 \mid 2x + 3y\}, \alpha = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid 1, 5x - 1, 5 \leq y\}$$

Határozza meg a következő kompozíciókat.

$$\rho \circ \varphi$$

$$\varphi \circ \lambda$$

$$\varphi^3$$

$$\alpha \circ \rho$$

$$\rho \circ \alpha$$