Mely fák izomorfak a komplementerükkel?

Tudjuk, hogy egy n csúcsú F fa éleinek a száma az n – 1. Ha F izomorf F komplementerével, akkor ez a fa is n csúcsú és n – 1 élszámú. Ezek alapján:

$|E(F)| = n - 1$ és $|E(\overline{F})| = n - 1 \Rightarrow 2 \times (n - 1) = |E(F)| + |E(\overline{F})| = \binom{n}{2} = (n \times (n - 1)) / 2$.

//Használt azonosság: $|E(F)| + |E(\overline{F})| = |E(K_n)| = \binom{n}{2}$, ahol K_n a teljes gráf és $n > 1$.

Ebből az következik, hogy n = 1 vagy n = 4.

Legyen $G = (V, E)$ fagráf, $|V| = n \geq 2$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $2 \cdot f_1 + f_2 \geq n + 2$.

Tudjuk azt, hogy $f_1 + f_2 + \ldots = n$, és a fokszámösszeg $2 \times |E| = 1 \times f_1 + 2 \times f_2 + \ldots$, az n csúcsú fa élszáma pedig $|E| = n - 1$. Ezekből következik, hogy:

$3 \times f_1 + 3 \times f_2 + 3 \times f_3 + 3 \times f_4 + \ldots = 3n$

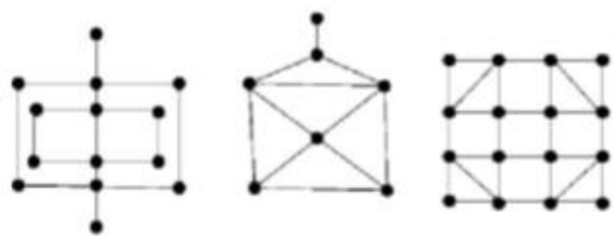
$1 \times f_1 + 2 \times f_2 + 3 \times f_3 + 4 \times f_4 + \ldots = 2 \times (n - 1)$ // szorozzunk f_3-tól kezdve csak 3-mal

$\underline{1 \times f_1 + 2 \times f_2 + 3 \times f_3 + 3 \times f_4 + \ldots \leq 2n - 2}$ // vonjuk ki az első egyenlőségből

$(3 \times f_1 + 3 \times f_2 + 3 \times f_3 + 3 \times f_4 + \ldots) - (1 \times f_1 + 2 \times f_2 + 3 \times f_3 + 3 \times f_4 + \ldots) \geq 3n - (2n - 2)$

$\Rightarrow 2 \times f_1 + 1 \times f_2 \geq n + 2$.

Lerajzolhatóak-e a ceruza felemelése nélkül az alábbi gráfok úgy, hogy minden élet pontosan egyszer húzunk be (=van-e nyílt/zárt Euler vonala a gráfnak)? Igazoljuk állításunk.



Euler-vonal esetén minden élet pontosan egyszer érintünk és be is járjuk a gráfot. Ha visszajutunk a kiindulási pontba, akkor zárt a vonal. Ehhez vagy kell két páratlan fokszámú csomópont, vagy egy sem lehet. Páratlan fokszámú csomópont esetén az egyik a kiinduló- , a másik a végpont lesz. Ilyen az első ábra, ezért nyílt Euler-vonal lesz. A középsőben 4 páratlan fokszámú csúcs van, így abban semmilyen Euler-vonal nincs. Az utolsó esetben pedig 0 darab páratlan fokszámú csúcs van, ezért zárt Euler-vonalat kapunk.

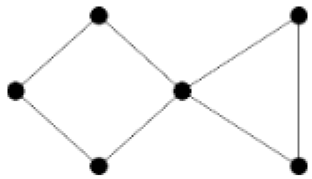
Definíció (Euler-vonal)

Egy gráfban az olyan vonalat, amelyben a gráf minden éle szerepel, Euler-vonalnak nevezzük.

Állítás (Zárt Euler-vonal létezése)

Egy összefüggő véges gráfban pontosan akkor van zárt Euler-vonal, ha minden csúcs foka páros.

Van-e olyan egyszerű gráf, amelyben van zárt Euler-vonal, páros sok csúcsa és páratlan sok éle van?

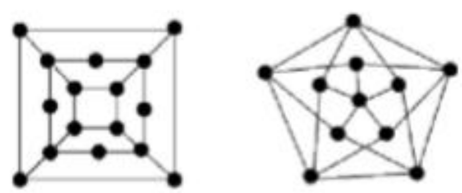


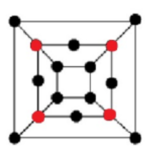
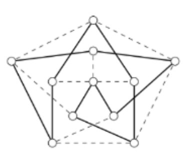
Igen, van.

Mutassuk meg, hogy ha egy gráfban van Hamilton-kör, akkor bárhogyan töröljük egyetlen élét, a maradék gráf összefüggő. Mi a helyzet, ha él helyett egy csúcsot törlünk?

A Hamilton-kör azt jelenti, hogy a csomópontok egyszeri érintésével be lehet járni a gráfot és visszajutunk a kiindulási csomópontba. Vagyis csak ezeket az éleket megtartva egy kört kapunk. Ha most törlünk ezen a körön kívül egy élet, az nyilván nem befolyásolja az összefüggőséget. Ha a körből törlünk egy élet, akkor is még mindig összefüggő marad, mert bármely két pont között van két út, és csak az egyiket tudjuk megszüntetni a kör miatt.
Ha egy csúcsot törlünk a körből, a maradék szintén összefüggő marad.

Van-e az alábbi gráfoknak Hamilton-köre (útja)? Igazoljuk állításunk.



Az első gráfban tudok olyan 4 pontot megválasztani, amikor 4-nél több komponensre esik szét a gráf, míg a másodiknál nem, abban Hamilton-kör található.

Definíció (Hamilton-út, Hamilton-kör)

Egy gráfban az olyan utat, amelyben a gráf minden csúcsa szerepel, Hamilton-útnak nevezzük.
Egy gráfban az olyan kört, amelyben a gráf minden csúcsa szerepel, Hamilton-körnek nevezzük.

Szükséges feltétel Hamilton-kör létezésére: Ha egy Hamilton-kört tartalmazó gráfból k csúcsot kitörlünk (a belőle kiinduló élekkel együtt), akkor a maradék gráfnak legfeljebb k komponense van.
Szükséges feltétel Hamilton-út létezésére: Ha egy Hamilton-utat tartalmazó gráfból k csúcsot kitörlünk (a belőle kiinduló élekkel együtt), akkor a maradék gráfnak legfeljebb k + 1 komponense van.

Egy hotelbe 100 fős társaság érkezik, akik közül kezdetben bármely két ember jóban van egymással. Esténként egyetlen nagy kerek asztal köré ül le mindenki. Sajnos egy vacsora alatt az egymás mellé került emberek örökre összevesznek egymással. A társaság minden vacsora előtt úgy ül le, hogy a szomszédjaival jóban legyen. Ha ez lehetetlen, akkor minden résztvevő aznap este hazamegy. Mutasd meg, hogy legalább 25 éjszakát a hotelben tud tölteni a társaság!

Az i. napi vagyora előtti állapothoz rendeljünk egy G_i gráfot, amelynek csúcsai az emberek, élei pedig, a még jó kapcsolatoknak felelnek meg. A társaság akkor marad még egy éjszakára, ha G_i-ben van Hamilton-kör. A G_i gráfból úgy nyerjük G_{i+1}-et, hogy egy Hamilton-körének éleit töröljük, vagyis minden csúcs fokát kettővel csökkentjük. Mivel a kezdeti gráf egy K_{100}, ezért minden csúcs foka kezddetben 99. Az eddigiek alapján G_i-ben a csúcsok foka $99 - 2(i-1)$ lesz. Ez a 25. napra 51, tehát Dirac-tétel miatt lesz még Hamilton-kör G_{25}-ben, vagyis az állítást igazoltuk.

Tétel (Dirac-tétel)

Ha a $G = (\varphi, E, V)$ egyszerű gráfra $|V| > 2$, és minden csúcsának a foka legalább $|V|/2$, akkor van Hamilton-köre.