Az $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y^2 = 2 - x - x^2\}$ relációra határozza meg a $\{0\}$ halmaz képét és teljes inverz képét. Mely $A \subseteq \mathbb{R}$ halmazokra lesz $R(A)$, illetve $R^{-1}(A)$ egyelemű?

$R(\{0\}) = \{ y \mid y^2 = 2 - 0 - 0^2 \} = \{ y \mid y^2 = 2 \} = \pm\sqrt{2}$

$R^{-1}(\{0\}) = \{ x \mid 0^2 = 2 - x - x^2 \} = \{ x \mid -x^2 - x + 2 = 0 \}$

$x1,2 = \frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\times(-1)\times 2}}{2\times(-1)} = \frac{1\pm\sqrt{1+8}}{-2} = \frac{1\pm 3}{-2} \Rightarrow R^{-1}(\{0\}) = \{ -2; 1 \}$

Ha R(A) egyelemű, az azt jelenti, hogy y egyetlen értéket vesz fel. Ez csak akkor lehetséges, ha y = -y, így y-nak 0-nak kell lennie. Vagyis olyan x-eket kell választanunk, amiket behelyettesítve y nulla lesz. Nos, a fenti $R^{-1}(\{0\})$ elemei tökéletesek lesznek. Azaz ha A = { -2; 1 }, akkor R(A) egyelemű lesz, a 0 fog benne szerepelni.

Ha $R^{-1}(A)$ egyelemű, akkor x egyetlen értéket vesz csak fel.

$y^2 = 2 - x - x^2$ esetén ahhoz, hogy x egyetlen értéket vehessen fel, x-nek 0-nak kell lennie, hiszen ez az egyetlen olyan eset, amikor az x-hez tartozó y érték nem állítható elő más x értékkel. Így az $y^2 = 2$ egyenlet megoldásai azok az y értékek, amelyek esetén x egy értéket vesz fel, így A = { $\pm\sqrt{2}$ } és $R^{-1}(A)$ egyelemű lesz, a 0 fog benne szerepelni.

Bizonyítsuk be, hogy minden reláció, amely egyszerre szimmetrikus és antiszimmetrikus, egyúttal tranzitív is.

Legyen R reláció X-en. Ekkor azt mondjuk, hogy

R szimmetrikus, ha $\forall x,y \in X : x R y \Rightarrow y R x$,

és R antiszimmetrikus, ha $\forall x, y \in X : (x R y \wedge y R x) \Rightarrow x = y$.

Ezek alapján, ha a kettő egyszerre teljesül, akkor x = y, azaz csak reflexív elemekből áll az R reláció. Ilyenkor teljesül a tranzitivitás, hiszen a $\forall x, y, z \in X : (x R y \wedge y R z) \Rightarrow x R z$ szabály x = y = z esetén úgy módosul, hogy $\forall x \in X : (x R x \wedge x R x) \Rightarrow x R x$, ami pedig igaz. Így bizonyosságot nyert, hogyha egy reláció egyszerre szimmetrikus és antiszimmetrikus, akkor tranzitív is.

Bizonyítsuk be, hogy minden nemüres reláció, amely egyszerre irreflexív és szimmetrikus, az nem lehet tranzitív.

Ha egy R reláció X-en értelmezve irreflexív, akkor $\forall x \in X : \neg x \, R \, x$, ha pedig szimmetrikus, akkor $\forall x,y \in X : x \, R \, y \Rightarrow y \, R \, x$. A kettő egyszerre fennállhat, hiszen a $\neg x \, R \, x$ szabály nem zárja ki az (x,y) - (y,x) párokat, amennyiben $x \neq y$. Viszont a tranzitivitás már nem lehetséges, mert akkor a fenti (x,y) – (y,x) pároshoz (ahol $x \neq y$) szükség lenne egy (x,x) reflexív párhoz, hogy igaz legyen a tranzitivitás. Viszont ekkor már nem irreflexív a relációnk, hanem reflexív. Így ha egy reláció egyszerre irreflexív és szimmetrikus, akkor nem lehet tranzitív is.

Legyen $f \subseteq A \times A$ reláció. Bizonyítsuk be, hogy $f = f^{-1}$ akkor és csak akkor teljesül, ha $f \subseteq f^{-1}$.

Az f relációnk valamilyen szabály alapján adott x értékhez adott y értéket/értékeket rendel. Az f^{-1} relációnk valamilyen szabály alapján adott y értékhez adott x értéket/értékeket rendel. Ha a két reláció egyenlő, az azt jelenti, hogy a két függvény értelmezési tartománya és értékkészlete megegyezik. Ezek alapján a két függvénynek ugyanazokat a párokat kell tartalmaznia, ezért kell, hogy $f \subseteq f^{-1}$ teljesüljön.