Az alábbi számok közül melyek egységgyökök, mennyi ezek rendje, milyen n-re lesznek ezek n-edik egységgyökök, illetve primitív n-edik egységgyökök?

(a) 1 (b) -1 (c) i

(d) $1+i$ (e) $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$

A z komplex szám akkor és csak akkor egységgyök, ha van olyan pozitív egész n, hogy $z^n = 1$. Ha $z = (r, \varphi)$, akkor tehát $1 = (r, \varphi)^n = (r^n, n\varphi)$, és ez akkor és csak akkor teljesül, ha $r = 1$ (hiszen r egy nemnegatív valós szám, és valamilyen k egész számmal $n\varphi = k2\pi$, azaz $\varphi = k\frac{2\pi}{n}$.

Egy egységgyök primitív n-edik egységgyök, ha n-edik egységgyök, de semmilyen, n-nél kisebb m-re nem m-edik egységgyök, vagyis a legkisebb olyan pozitív egész n, amely kitevős hatványa 1. Egy egységgyök rendje az az n, amelyre primitív n-edik egységgyök.

Egy primitív n-edik egységgyök az n-nel osztható, és csak az n-nel osztható m pozitív egész számokra m-edik egységgyök, ami azt is jelenti, hogy ha a komplex szám valamilyen pozitív egész n-re n-edik egységgyök, akkor az n valamilyen pozitív egész m osztójára primitív m-edik egységgyök. Az előbbiek alapján csak azt az n-et adjuk meg, amely n-re az adott szám primitív n-edik egységgyök, feltéve, hogy egységgyök.

(a) 1: • $1^1=1 \Rightarrow$ 1. egységgyök
• $\nexists n\in\mathbb{N}^+: (1>n \wedge 1^n=1) \Rightarrow$ primitív egységgyök

(b) -1: • $(-1)^2=1 \Rightarrow$ 2. egységgyök
• $(-1)^1\neq 1 \Rightarrow \nexists n\in\mathbb{N}^+: (n<2 \wedge 1^n=1) \Rightarrow$ primitív 2. egységgyök

(c) i: • $i^2=-1 \Rightarrow i^4=(i^2)^2=(-1)^2=1 \Rightarrow$ 4. egységgyök
• 4 pozitív egész osztói: 1,2,4 $\Rightarrow \nexists n\in\mathbb{N}^+: (n<4 \wedge 1^n=1) \Rightarrow$ primitív 4. egységgyök

(d) $1+i$: • $1+i=(r,\varphi)=(\sqrt{2},\frac{\pi}{4}) \Rightarrow |1+i|=\sqrt{2}=r\neq 1 \Rightarrow$ nem egységgyök
// $1=(r,\varphi)^n=(r^n,n\cdot\varphi) \Leftrightarrow r=1$

(e) $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$: • $\frac{1+i}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot(1+i)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2},\frac{\pi}{4})=(1,\frac{\pi}{4}) \Rightarrow r=1$
• $n\cdot\varphi=k\cdot 2\pi \Rightarrow (n\cdot\frac{\pi}{4}=k\cdot 2\pi \Leftrightarrow n=8k\ (n\in\mathbb{N}^+, k\in\mathbb{Z}))$
• $\nexists n\in\mathbb{N}^+: (8>n \wedge 1^n=1) \Rightarrow$ primitív 8. egységgyök

$n=8\cdot 1=8$;
$\frac{1+i}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot i$
8. egységgyök

Hányféleképpen lehet sorba rakni 1, 2, 3 illetve 5 különböző karaktert?

Ismétlés nélküli permutáció $n!$, n elem lehetséges sorrendje (sorrend számít, egy elem (pontosan) egyszer).

karakterek sorba rakása

$\underline{1} = 1!$ $\quad \underline{2} \cdot \underline{1} = 2 \cdot 1 = 2!$

a

a b

b a

$\underline{3} \cdot \underline{2} \cdot \underline{1} = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3!$

abc acb bac bca cab cba

$\underline{5} \cdot \underline{4} \cdot \underline{3} \cdot \underline{2} \cdot \underline{1} = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5!$

Definíció (permutáció)

Egy A véges halmaz egy permutációja egy olyan, A elemeiből álló sorozat, amely A minden elemét *pontosan egyszer* tartalmazza. (Úgy is mondhatjuk, hogy A elemeinek egy lehetséges sorrendje.)

Tétel (Permutációk száma)

Egy n elemű halmaz permutációinak száma:

$$P_n = n! = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$$

($n!$ kiolvasva: n faktoriális).

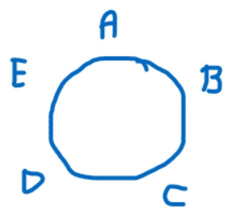
(a) Egy irodalmi esten 5 vers hangzik el. Hányféleképpen követhetik a versek egymást?

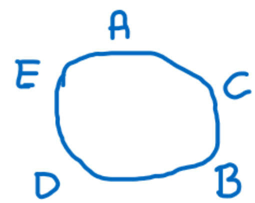
5 vers, sorrend számít,
egy vers egyszer hangzik el

$\underline{5} \cdot \underline{4} \cdot \underline{3} \cdot \underline{2} \cdot \underline{1} = 5! = P_5$

(d) Hogyan változik az (a)-(b) kérdésben a lehetőségek száma, ha a résztvevőket egy kerekasztal-hoz ültetjük?

5 versmondó; sorrend számít;
kerekasztal; 1 ember – 1 szavalás





. . .

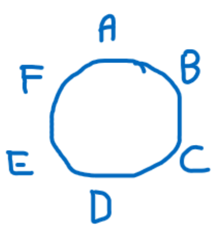
A B C D E
~~B C D E A~~
~~C D E A B~~
~~D E A B C~~
~~E A B C D~~

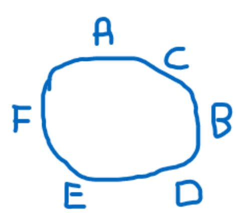
A C B D E
~~C B D E A~~
~~B D E A C~~
~~D E A C B~~
~~E A C B D~~

$$P_5' = \frac{5!}{5} = 4!$$

// ciklikus permutáció $= n!/n$

6 ember; sorrend számít;
kerekasztal; 1 ember – 1 ülőhely





. . .

A B C D E F
~~B C D E F A~~
~~C D E F A B~~
~~D E F A B C~~
~~E F A B C D~~
~~F A B C D E~~

A C B D E F
~~C B D E F A~~
~~B D E F A C~~
~~D E F A C B~~
~~E F A C B D~~
~~F A C B D E~~

$$P_6' = \frac{6!}{6} = 5!$$

// ciklikus permutáció $= n!/n$

Hányféleképpen lehet sorba rakni
(a) 3 piros, 1 kék és 1 fehér
(b) 3 piros, 2 kék és 1 fehér
golyót?

3 piros golyó, 1 kék golyó, 1 fehér golyó

$$\boxed{5}\cdot\boxed{4}\cdot\boxed{3}\cdot\boxed{2}\cdot\boxed{1}$$

PIROS PIROS

PIROS PIROS

PIROS PIROS PIROS KÉK FEHÉR
PIROS KÉK PIROS PIROS FEHÉR

Tétel (Ismétléses permutációk száma)

k_1 darab első típusú, k_2 második típusú, ..., k_m m-edik típusú elem lehetséges sorrendjét az elemek egy *ismétléses permutációjának* nevezzük, és ezek száma $n = k_1 + k_2 + \ldots + k_m$ esetén

$$^{i}P_n^{k_1,k_2,\ldots,k_m} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_m!}.$$

$$^{i}P_5^{3,1,1} = \frac{5!}{3!\cdot 1!\cdot 1!} = \frac{5!}{3!} = 5\cdot 4 = 20$$

3 piros golyó, 2 kék golyó, 1 fehér golyó

$$^{i}P_6^{3,2,1} = \frac{6!}{3!\cdot 2!\cdot 1!} = \frac{6\cdot 5\cdot \cancel{4}^{2}\cdot \cancel{3\cdot 2\cdot 1}}{\cancel{3\cdot 2\cdot 1}\cdot \cancel{2}\cdot 1\cdot 1} =$$

$$= 6\cdot 5\cdot 2 = 60$$

Hány különböző ötjegyű számot lehet felírni az
(a) 1, 2, 3, 4, 5
(b) 1, 1, 2, 3, 4
(c) 1, 1, 2, 2, 2
számjegyek felhasználásával? (Minden számjegyet pontosan annyiszor kell felhasználni ahányszor a felsorolásban szerepel.)

(a) 1,2,3,4,5 $5! = P_5$

(b) 1,1,2,3,4 $\frac{5!}{2!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60 = {}^iP_5^{2,1,1,1}$

(c) 1,1,2,2,2 $\frac{5!}{2! \cdot 3!} = 5 \cdot 2 = 10 = {}^iP_5^{2,3}$

Egy futóversenyen 15 tanuló vesz részt. Hányféleképpen alakulhat az első 3 hely sorsa, ha tudjuk hogy nem lesz holtverseny?

15 tanuló – 3 hely;
sorrend számít; ∅ holtverseny

$\boxed{15} \cdot \boxed{14} \cdot \boxed{13} = 15 \cdot 14 \cdot 13 = \frac{15!}{12!} = \frac{15!}{(15-3)!} = V_{15}^3$

Definíció (variáció)

Legyen A egy halmaz és $k \in \mathbb{N}^+$. Az A elemiből képezhető k hosszúságú sorozatokat, melyek A bármely elemét *legfeljebb egyszer* tartalmazzák, az A halmaz k-ad osztályú variációinak nevezzük.

Tétel (Variációk száma)

Legyen $k \in \mathbb{N}^+$. Egy n elemű halmaz k-ad osztályú variációinak száma:

$$V_n^k = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = n!/(n-k)!$$

ha $k \leq n$ és 0 egyébként.

Hányféleképpen lehet 20 tanuló között 6 különböző könyvet kiosztani, ha mindegyikük legfeljebb egy könyvet kaphat?

20 tanuló – 6 könyv

különböző könyvek ⇒ √ sorrend; 1 tanuló – 1 könyv

$$V_{20}^{6} = \frac{20!}{(20-6)!} = \frac{20!}{14!} = \underline{\underline{20 \cdot 19 \cdot \ldots \cdot 15}}$$

Az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 számjegyek felhasználásával hány ötjegyű szám készíthető ha
(a) mindegyik számjegy csak egyszer használható fel
(b) mindegyik számjegy többször felhasználható

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8

(a) egyszer használható fel

ötjegyű szám: $\frac{8!}{3!} = \underline{\underline{56 \cdot 120}} = V_{8}^{5}$

(b) többször használható fel

Definíció (ismétléses variáció)

Legyen A egy halmaz és $k \in \mathbb{N}^{+}$. Egy, az A elemiből készíthető k hosszúságú sorozatokat az A halmaz k-ad osztályú ismétléses variációinak nevezzük.

Tétel (Ismétléses variációk száma)

Legyen $k \in \mathbb{N}^{+}$. Egy n elemű k-ad osztályú ismétléses variációinak száma:

$$^{i}V_{n}^{k} = n^{k}.$$

$$^{i}V_{8}^{5} = \underline{\underline{8^{5}}}$$

Egy tesztben 30 kérdés mindegyikéhez ötféle választ adtak meg, amelyek közül a válaszadónak pontosan egyet kell megjelölni. Hányféleképpen lehet kitölteni a tesztet?

30 kérdés - 5 válaszlehetőség

$${}^{i}V_5^{30} = 5^{30}$$

Hányféleképpen lehet 20 tanuló között 6 egyforma könyvet szétosztani, ha mindegyikük legfeljebb egy könyvet kaphat?

20 tanuló - 6 egyforma könyv;
1 tanuló - 0/1 könyv

Definíció (kombináció)

Legyen $k \in \mathbb{N}$. Az A halmaz k elemű részhalmazait az A halmaz k-ad osztályú kombinációinak nevezzük.

Tétel (Kombinációk száma)

Legyen $k \in \mathbb{N}$. Egy n elemű halmaz k-ad osztályú kombinációinak száma

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

ha $k \leq n$ (és 0 egyébként).

$$C_{20}^{6} = \binom{20}{6} = \frac{20!}{6! \cdot (20-6)!} = \underline{\underline{\frac{20!}{6! \cdot 14!}}}$$

Hányféleképpen lehet kitölteni egy ötöslottó-szelvényt?

ötöslottó-szelvény kitöltése

5 húzás – 90 szám – Ø ismétlés – Ø sorrend

$$C_{90}^{5} = \underline{\underline{\binom{90}{5}}} = \frac{90!}{5! \cdot 85!} = 43949268$$

Egy 32-lapos kártyacsomagból 6 lapot húzunk. Hányféleképpen alakulhat a húzás eredménye ha
(a) a kihúzott lapok sorrendje is számít
(b) a kihúzott lapok sorrendje nem számít

32 lap – 6 húzás

(a) ✓ sorrend

$$V_{32}^{6} = \frac{32!}{26!}$$

(b) Ø sorrend

$$C_{32}^{6} = \binom{32}{6} = \frac{32!}{6! \cdot 26!}$$

Hányféleképpen lehet 28 gyerek között 4 almát szétosztani, ha egy gyerek több almát is kaphat?

28 gyerek – 4 alma – ✓ ismétlődés

Definíció (ismétléses kombináció)

Legyen $k \in \mathbb{N}$. Egy A halmazból k-szor választva, ismétléseket is megengedve, de a sorrendet figyelmen kívül hagyva, az A halmaz k-ad osztályú ismétléses kombinációit kapjuk.

Tétel (Ismétléses kombinációk száma)

Egy n elemű halmaz k-ad osztályú ismétléses kombinációinak száma:

$$^{i}C_n^k = \binom{n+k-1}{k}.$$

$$^{i}C_{28}^{4} = \binom{28+4-1}{4} = \binom{31}{4} = \frac{31!}{4! \cdot 27!}$$