

A -1 -nek két darab egész kitevőjű hatványa van: -1 és 1 .

Az i -nek 4 van: $i, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1$. Innentől kezdve ismétlődik: $i^5 = i, i^6 = i^2 = -1$, stb. *Négyesével* periodikus, csak a kitevő négyes maradéka számít. Képletben: ha $n = 4q + r$, akkor $i^n = i^r$ (mert $i^{4q} = (i^4)^q = 1$).

Hasonlóan $-i$ hatványai $-i, (-i)^2 = -1, (-i)^3 = i, (-i)^4 = 1$. Ezek is négyesével ismétlődnek.

Definíció (K1.5.7)

A $0 \neq z \in \mathbb{C}$ *rendje* az egész kitevős hatványainak a száma. Ez pozitív egész, vagy a ∞ szimbólum. Jele: $o(z)$.

Tehát $o(-1) = 2, \quad o(i) = 4, \quad o(-i) = 4$.

A z komplex szám akkor és csak akkor egységgyök, ha van olyan pozitív egész n , hogy $z^n = 1$. Ha $z = (r, \varphi)$, akkor tehát $1 = (r, \varphi)^n = (r^n, n\varphi)$, és ez akkor és csak akkor teljesül, ha $r = 1$ (hiszen r egy nemnegatív valós szám, és valamilyen k egész számmal $n\varphi = k2\pi$, azaz $\varphi = k \frac{2\pi}{n}$).

Egy egységgyök primitív n -edik egységgyök, ha n -edik egységgyök, de semmilyen, n -nél kisebb m -re nem m -edik egységgyök, vagyis a legkisebb olyan pozitív egész n , amely kitevős hatványa 1 . Egy egységgyök rendje az az n , amelyre primitív n -edik egységgyök.

Egy primitív n -edik egységgyök az n -nel osztható, és csak az n -nel osztható m pozitív egész számokra m -edik egységgyök, ami azt is jelenti, hogy ha a komplex szám valamilyen pozitív egész n -re n -edik egységgyök, akkor az n valamilyen pozitív egész m osztójára primitív m -edik egységgyök. Az előbbieket alapján csak azt az n -et adjuk meg, amely n -re az adott szám primitív n -edik egységgyök, feltéve, hogy egységgyök.

Az alábbi számok közül melyek egységgyökök, mennyi ezek rendje, milyen n -re lesznek ezek n -edik egységgyökök, illetve primitív n -edik egységgyökök?

(a) 1

(b) -1

(c) i

(d) $1+i$

(e) $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$

(a) 1: • $1^1 = 1 \Rightarrow 1.$ egységgyök

• $\nexists n \in \mathbb{N}^+ : (1 > n \wedge 1^n = 1) \Rightarrow$ primitív 1. egységgyök

$$o(z) = o(1) = 1$$

(b) -1: • $(-1)^2 = 1 \Rightarrow 2.$ egységgyök

• $(-1)^1 \neq 1 \Rightarrow \nexists n \in \mathbb{N}^+ : (n < 2 \wedge (-1)^n = 1) \Rightarrow$ primitív 2. egységgyök

$$o(z) = o(-1) = 2$$

(c) i : • $i^2 = -1 \Rightarrow i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1 \Rightarrow 4.$ egységgyök

• 4 pozitív egész osztói: 1, 2, 4 $\Rightarrow \nexists n \in \mathbb{N}^+ : (n < 4 \wedge i^n = 1) \Rightarrow$ primitív 4. egységgyök

$$o(z) = o(i) = 4$$

(d) $1+i$: • $1+i = (r, \varphi) = (\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}) \Rightarrow |1+i| = \sqrt{2} = r \neq 1 \Rightarrow$ nem egységgyök

// $1 = (r, \varphi)^n = (r^n, n \cdot \varphi) \Leftrightarrow r = 1$

$$o(z) = o(1+i) = \infty$$

(e) $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$: • $\frac{1+i}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (1+i) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}) = (1, \frac{\pi}{4}) \Rightarrow r = 1$

• $n \cdot \varphi = k \cdot 2\pi \Rightarrow (n \cdot \frac{\pi}{4} = k \cdot 2\pi \Leftrightarrow n = 8k (n \in \mathbb{N}^+, k \in \mathbb{Z}))$

• $\nexists n \in \mathbb{N}^+ : (0 < n \wedge (\frac{1+i}{\sqrt{2}})^n = 1) \Rightarrow$ primitív 8. egységgyök

$\left. \begin{array}{l} n = 8 \cdot 1 = 8 \\ \frac{1+i}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot i \end{array} \right\} 8. \text{ egységgyök}$

$$o(z) = o(1+i/\sqrt{2}) = 8$$

Hányféleképpen lehet sorba rakni 1, 2, 3 illetve 5 különböző karaktert?

Ismétlés nélküli permutáció $n!$, n elem lehetséges sorrendje (sorrend számít, egy elem (pontosan) egyszer).

karakterek sorba rakása

$$\boxed{1} = 1! \quad \boxed{2} \cdot \boxed{1} = 2 \cdot 1 = 2!$$

a a b
 b a

$$\boxed{3} \cdot \boxed{2} \cdot \boxed{1} = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3!$$

abc acb bac bca cab cba

$$\boxed{5} \cdot \boxed{4} \cdot \boxed{3} \cdot \boxed{2} \cdot \boxed{1} = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5!$$

Definíció (permutáció)

Egy A véges halmaz egy **permutációja** egy olyan, A elemeiből álló sorozat, amely A minden elemét *pontosan egyszer* tartalmazza. (Úgy is mondhatjuk, hogy A elemeinek egy lehetséges sorrendje.)

Tétel (Permutációk száma)

Egy n elemű halmaz permutációinak száma:

$$P_n = n! = n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$$

($n!$ kiolvasva: n faktoriális).

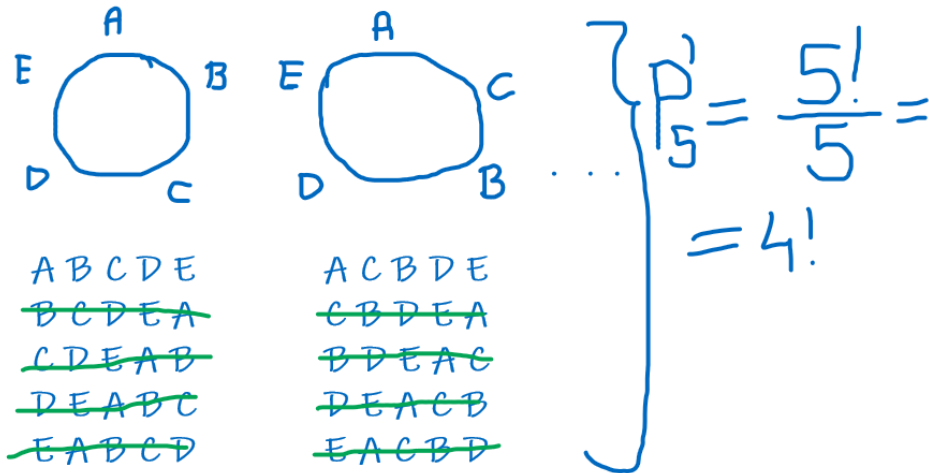
(a) Egy irodalmi esten 5 vers hangzik el. Hányféleképpen követhetik a versek egymást?

5 vers; sorrend számít;
egy vers egyszer hangzik el

$$\boxed{5} \cdot \boxed{4} \cdot \boxed{3} \cdot \boxed{2} \cdot \boxed{1} = 5! = P_5$$

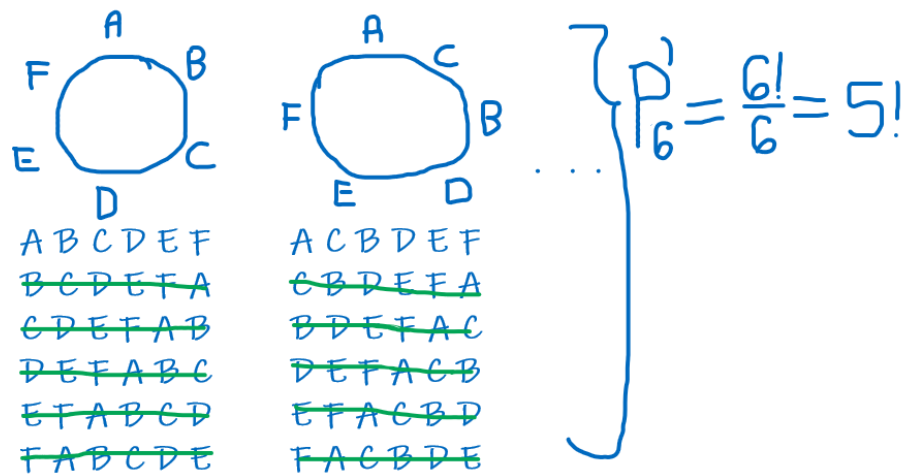
- (d) Hogyan változik az (a)-(b) kérdésben a lehetőségek száma, ha a résztvevőket egy kerekasztalhoz ültetjük?

5 versmondó; sorrend számít;
kerekasztal; 1 ember - 1 szavazás



// ciklikus permutáció = $\frac{n!}{n}$

6 ember; sorrend számít;
kerekasztal; 1 ember - 1 ülőhely



// ciklikus permutáció = $\frac{n!}{n}$

Hányféleképpen lehet sorba rakni

(a) 3 piros, 1 kék és 1 fehér

(b) 3 piros, 2 kék és 1 fehér
golyót?

3 piros golyó, 1 kék golyó, 1 fehér golyó

[5] [4] [3] [2] [1]

PIROS PIROS PIROS KÉK FEHÉR
PIROS KÉK PIROS PIROS FEHÉR

PIROS PIROS
↗ ↘

PIROS PIROS

Tétel (Ismétléses permutációk száma)

k_1 darab első típusú, k_2 második típusú, ..., k_m m -edik típusú elem lehetséges sorrendjét az elemek egy **ismétléses permutációjának** nevezzük, és ezek száma $n = k_1 + k_2 + \dots + k_m$ esetén

$${}_n P_n^{k_1, k_2, \dots, k_m} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_m!}.$$

$${}_5 P_5^{3,1,1} = \frac{5!}{3! \cdot 1! \cdot 1!} = \frac{5!}{3!} = \underline{\underline{20}}$$

3 piros golyó, 2 kék golyó, 1 fehér golyó

$$\begin{aligned} {}_6 P_6^{3,2,1} &= \frac{6!}{3! \cdot 2! \cdot 1!} = \frac{\cancel{6} \cdot \cancel{5} \cdot \overset{2}{\cancel{4}} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1} \cdot \cancel{1}} = \\ &= 6 \cdot 5 \cdot 2 = \underline{\underline{60}} \end{aligned}$$

Hány különböző ötjegyű számot lehet felírni az

(a) 1, 2, 3, 4, 5

(b) 1, 1, 2, 3, 4

(c) 1, 1, 2, 2, 2

számjegyek felhasználásával? (Minden számjegyet pontosan annyiszor kell felhasználni ahányszor a felsorolásban szerepel.)

$$(a) 1, 2, 3, 4, 5 \quad 5! = P_5$$

$$(b) 1, 1, 2, 3, 4 \quad \frac{5!}{2!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60 = {}^iP_5^{2,1,1,1}$$

$$(c) 1, 1, 2, 2, 2 \quad \frac{5!}{2! \cdot 3!} = 5 \cdot 2 = 10 = {}^iP_5^{2,3}$$

Egy futóversenyen 15 tanuló vesz részt. Hányféleképpen alakulhat az első 3 hely sorsa, ha tudjuk hogy nem lesz holtverseny?

15 tanuló - 3 hely;
sorrend számít; \emptyset holtverseny

$$\boxed{15} \cdot \boxed{14} \cdot \boxed{13} = 15 \cdot 14 \cdot 13 = \frac{15!}{12!} = \frac{15!}{(15-3)!} = V_{15}^3$$

Definíció (variáció)

Legyen A egy halmaz és $k \in \mathbb{N}^+$. Az A elemiből képezhető k hosszúságú sorozatokat, melyek A bármely elemét *legfeljebb egyszer* tartalmazzák, az A halmaz k -ad osztályú *variációinak* nevezzük.

Tétel (Variációk száma)

Legyen $k \in \mathbb{N}^+$. Egy n elemű halmaz k -ad osztályú variációinak száma:

$$V_n^k = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = n! / (n-k)!$$

ha $k \leq n$ és 0 egyébként.

Hányféleképpen lehet 20 tanuló között 6 különböző könyvet kiosztani, ha mindegyikük legfeljebb egy könyvet kaphat?

20 tanuló - 6 könyv
különböző könyvek \Rightarrow sorrend; 1 tanuló - 1 könyv

$$V_{20}^6 = \frac{20!}{(20-6)!} = \frac{20!}{14!} = 20 \cdot 19 \cdot \dots \cdot 15$$

Az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 számjegyek felhasználásával hány ötjegyű szám készíthető ha

- (a) mindegyik számjegy csak egyszer használható fel
- (b) mindegyik számjegy többször felhasználható

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8

(a) egyszer használható fel

ötjegyű szám: $\frac{8!}{3!} = \underline{\underline{56 \cdot 120}} = V_8^5$

(b) többször használható fel

Definíció (ismétléses variáció)

Legyen A egy halmaz és $k \in \mathbb{N}^+$. Egy, az A elemiből készíthető k hosszúságú sorozatokat az A halmaz k -ad osztályú **ismétléses variációinak** nevezzük.

Tétel (Ismétléses variációk száma)

Legyen $k \in \mathbb{N}^+$. Egy n elemű k -ad osztályú **ismétléses variációinak száma:**

$$iV_n^k = n^k.$$

$$iV_8^5 = \underline{\underline{8^5}}$$

Egy tesztben 30 kérdés mindegyikéhez ötféle választ adtak meg, amelyek közül a válaszadónak pontosan egyet kell megjelölni. Hányféleképpen lehet kitölteni a tesztet?

30 kérdés - 5 válaszlehetőség

$$C_{30}^5 = 5^{30}$$

Hányféleképpen lehet 20 tanuló között 6 egyforma könyvet szétosztani, ha mindegyikük legfeljebb egy könyvet kaphat?

20 tanuló - 6 egyforma könyv;
1 tanuló - 0/1 könyv

Definíció (kombináció)

Legyen $k \in \mathbb{N}$. Az A halmaz k elemű részhalmazait az A halmaz k -ad osztályú kombinációinak nevezzük.

Tétel (Kombinációk száma)

Legyen $k \in \mathbb{N}$. Egy n elemű halmaz k -ad osztályú kombinációinak száma

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

ha $k \leq n$ (és 0 egyébként).

$$C_{20}^6 = \binom{20}{6} = \frac{20!}{6! \cdot (20-6)!} = \underline{\underline{\frac{20!}{6! \cdot 14!}}}$$

Hányféleképpen lehet kitölteni egy ötöslottó-szelvényt?

ötöslottó-szelvény kitöltése
 5 húzás - 90 szám - \emptyset ismétlés - \emptyset sorrend

$$C_{90}^5 = \binom{90}{5} = \frac{90!}{5! \cdot 85!} = 43949268$$

Egy 32-lapos kártyacsomagból 6 lapot húzunk. Hányféleképpen alakulhat a húzás eredménye ha

- (a) a kihúzott lapok sorrendje is számít
- (b) a kihúzott lapok sorrendje nem számít

32 lap - 6 húzás

(a) \checkmark sorrend

$$V_{32}^6 = \frac{32!}{26!}$$

(b) \emptyset sorrend

$$C_{32}^6 = \binom{32}{6} = \frac{32!}{6! \cdot 26!}$$

Hányféleképpen lehet 28 gyerek között 4 almát szétosztani, ha egy gyerek több almát is kaphat?

28 gyerek - 4 alma - \checkmark ismétlődés

Definíció (ismétléses kombináció)

Legyen $k \in \mathbb{N}$. Egy A halmazból k -szor választva, ismétléseket is megengedve, de a sorrendet figyelmen kívül hagyva, az A halmaz k -ad osztályú ismétléses kombinációit kapjuk.

Tétel (Ismétléses kombinációk száma)

Egy n elemű halmaz k -ad osztályú ismétléses kombinációinak száma:

$${}^i C_n^k = \binom{n+k-1}{k}.$$

$${}^i C_{28}^4 = \binom{28+4-1}{4} = \binom{31}{4} = \frac{31!}{4! \cdot 27!}$$