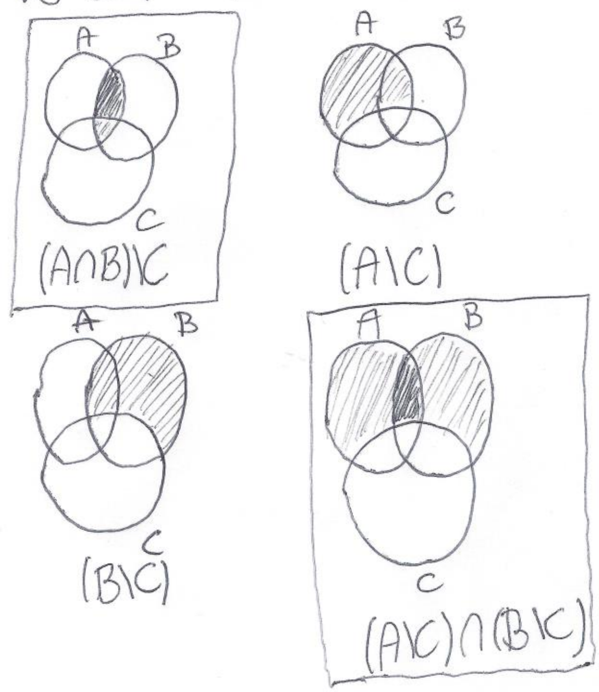
(c) Igazolja, hogy tetszőleges A, B és C halmazok esetén igaz a következő összefüggés: $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$. **3 pont**

$(A \cap B) \setminus C = \{x \mid x \in (A \cap B) \setminus C\} = \{x \mid x \in (A \cap B) \land x \notin C\} =$

$= \{x \mid (x \in A \land x \in B) \land x \notin C\} = \{x \mid (x \in A \land x \notin C) \land (x \in B \land x \notin C)\} =$

$= \{x \mid x \in (A \setminus C) \land x \in (B \setminus C)\} = \{x \mid x \in (A \setminus C) \cap (B \setminus C)\} =$

$= \underline{(A \setminus C) \cap (B \setminus C)}$



Legyen $A = \{1, 2\}, B = \{a, b, c\}$ és $C = \{2, 3, 4\}$. Határozza meg az $A \times A, A \times B$, $A \times A \times B, B \times A, (A \times A) \times B, A \times (A \times B), A \triangle B, A \triangle C$ halmazokat.

$A \times A = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$

$A \times B = \{(1,a),(1,b),(1,c),(2,a),(2,b),(2,c)\}$

$A \times A \times B = \{(1,1,a),(1,1,b),(1,1,c),(1,2,a),(1,2,b),(1,2,c),(2,1,a),(2,1,b),(2,1,c),(2,2,a),(2,2,b),(2,2,c)\}$

$B \times A = \{(a,1),(a,2),(b,1),(b,2),(c,1),(c,2)\}$

$(A \times A) \times B = \{((1,1),a),((1,1),b),((1,1),c),((1,2),a),\ldots\}$

$A \times (A \times B) = \{(1,(1,a)),(2,(1,a)),(1,(1,b)),\ldots\}$

$A \Delta B = \{1,2,a,b,c\}$

$A \Delta C = \{1,3,4\}$

Döntse el, hogy igazak-e a következő egyenlőségek tetszőleges A, B, C halmazokra. Állításait bizonyítsa.

(a) $\overline{A} \cap B = B \setminus A$
(b) $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus B) \cap C$
(c) $(A \cup B) \cap (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \setminus B)$
(d) $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$
(e) $(A \cup B) \setminus A = B$
(f) $(A \cup B) \setminus C = A \cup (B \setminus C)$

• $\overline{A} \cap B = B \setminus A$

$\overline{A} \cap B = \{x \mid x \notin A \wedge x \in B\} = \{x \mid x \in B \setminus A\} = B \setminus A$ ✓

• $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus B) \cap C$

$(A \cap B) \setminus C = \{x \mid x \in (A \cap B) \setminus C\} = \{x \mid x \in A \wedge x \in B \wedge x \notin C\} =$

$= \{x \mid x \in (A \setminus C) \wedge x \in (B \setminus C)\} = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$ ↯

$(A \cap B) \setminus C$ $\quad$ $(A \setminus B) \cap C$

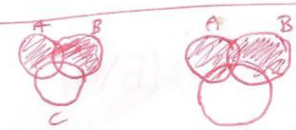
• $(A \cup B) \setminus C = A \cup (B \setminus C)$

$(A \cup B) \setminus C = \{x \mid x \in A \vee B \wedge x \notin C\} = \{x \mid (x \in A \vee x \in B) \wedge$
$\wedge x \notin C\} = \{x \mid (x \in A \wedge x \notin C) \vee (x \in B \wedge x \notin C)\} =$
$= (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$ ↯

• $(A \cup B) \cap (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \setminus B)$

$(A \cup B) \cap (B \setminus A) = \{x \mid x \in A \cup B \wedge x \in B \setminus A\} = \{x \mid (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in B \wedge x \notin A)\} =$
$= \{x \mid x \in B \wedge x \notin A\} = B \setminus A \neq (A \cup B) \setminus (A \setminus B)$ ↯

$(A \cup B) \cap (B \setminus A)$ $\quad$ $(A \cup B) \setminus (A \setminus B)$



$(A \cup B) \setminus C$ $\quad$ $A \cup (B \setminus C)$

• $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$

$(A \cap B) \setminus C = \{x \mid x \in A \cap B \wedge x \notin C\} = \{x \mid (x \in A \wedge x \in B) \wedge x \notin C\} = \{x \mid (x \in A \wedge x \notin C) \wedge$
$\wedge (x \in B \wedge x \notin C)\} = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$ ✓

• $(A \cup B) \setminus A = \{x \mid (x \in A \vee x \in B) \wedge x \notin A\} = \{x \mid x \in B\} = B$

Legyen $A = \{1,2,3,4\}$ és $B = \{5,6,7,8,9\}$. Tekintsük a következő $\rho \subseteq A \times B$ binér (kétváltozós) relációt: $\rho = \{(1,5),(1,6),(1,7),(3,6),(3,9),(4,5),(4,7),(4,9)\}$.

(a) Határozza meg a ρ reláció értelmezési tartományát és értékkészletét.

(b) Rajzolja meg a reláció gráfját.

(c) Legyen $H_1 = \{1,2,3\}$ és $H_2 = \{4\}$. Határozza meg a ρ reláció H_1 illetve H_2 halmazra való leszűkítését.

(d) A következő relációk közül melyek lehetnek a ρ reláció kiterjesztései?

$\rho_1 = \{(1,5),(1,6),(1,7),(2,2),(2,4),(3,6),(3,9),(4,3),(4,5),(4,7),(4,9)\} \subseteq \{1,2,3,4\} \times \{2,3,4,5,6,7,8,9\}$

$\rho_2 = \{(1,5),(1,6),(1,7),(3,6),(3,8),(4,5),(4,6),(4,7),(4,9)\} \subseteq \{1,2,3,4\} \times \{5,6,7,8,9\}$

$\rho_3 = A \times B$

$\rho_4 = B \times A$

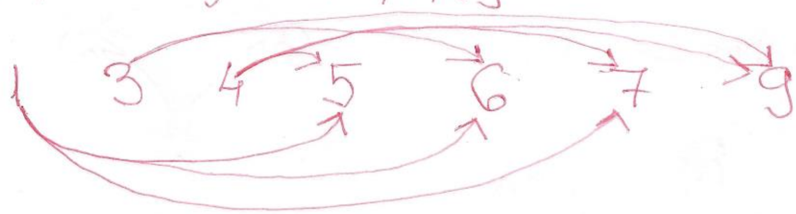
(e) Határozza meg a ρ reláció inverzét, $\rho(\{1,2\})$ képet és $\rho^{-1}(\{5,6\})$ inverz képet.

$A = \{1,2,3,4\}; B = \{5,6,7,8,9\}; \rho \subseteq A \times B;$

$\rho = \{(1,5),(1,6),(1,7),(3,6),(3,9),(4,5),(4,7),(4,9)\}$

• $D_\rho = \{1,3,4\}$ • $R_\rho = \{5,6,7,9\}$

•



• $H_1 = \{1,2,3\}; H_2 = \{4\}$ $\rho|_{H_1} = \{(1,5),(1,6),(1,7),(3,6),(3,9)\}$

$\rho|_{H_2} = \{(4,5),(4,7),(4,9)\}$

• ρ_1 ✓; ρ_2 ✗ $(3,9)$; ρ_3 ✓; ρ_4 ✗ • $\rho^{-1} \subseteq B \times A$; $\rho^{-1} = \{(5,1),(5,4),(6,1),(6,3),(7,1),(7,4),(9,3),(9,4)\}$

$\rho(\{1,2\}) = \{5,6,7\}$

$\rho^{-1}(\{5,6\}) = \{1,4,3\}$

Legyen $\rho \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ és $\rho = \{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid a = 2b\}$. Határozza meg a ρ reláció értelmezési tartományát, értékkészletét, inverzét, $\rho(\{3,4,...,10\})$ képet és a ρ leszűkítését $\{1,2,...,6\}$-ra.

$\rho \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$; $\rho = \{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid a = 2b\}$

$D_\rho = \mathbb{Z}$; $R_\rho = \mathbb{Z}$; $\rho^{-1} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $\rho^{-1} = \{(b,a) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid a = 2b\}$;

$\rho(\{3,4,...,10\}) = \{2,3,4,5\}$; $\rho|_{\{1,2,...,6\}} = \{(2,1),(4,2),(6,3)\}$

Konstruáljon az $\{1,2,3,4\}$ halmazon olyan relációt, amely
(a) reflexív és nem irreflexív
(b) antiszimmetrikus és nem szimmetrikus
(c) szimmetrikus és nem antiszimmetrikus
(d) szimmetrikus és antiszimmetrikus
(e) nem szimmetrikus és nem antiszimmetrikus
(f) reflexív és trichotóm
(g) nem reflexív, nem tranzitív, nem szimmetrikus, nem antiszimmetrikus, nem trichotóm

(a) $R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$
(b) $R = \{(1,2),(1,1)\}$
(c) $R = \{(1,2),(2,1)\}$
(d) $R = \{(1,1),(2,2)\}$
(e) $R = \{(1,1),(1,2),(2,3)\}$
(f) $R = \{(1,1)\}$
(g) $R = \{(1,1),(1,2),(2,3),(2,1)\}$