(a) Legyen $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Határozza meg a $\left(\frac{1}{a}+a^2\right)^9$ kifejezésben azt a tagot, amely nem tartalmazza az a paramétert.

Tétel (Binomiális tétel)

Adott $x, y \in \mathbb{R}$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k.$$

$$\underbrace{\left(\frac{1}{a}+a^2\right)^9=\sum_{k=0}^{9}\binom{9}{k}\cdot\left(\frac{1}{a}\right)^{9-k}\cdot(a^2)^k=\sum_{k=0}^{9}\binom{9}{k}\cdot(a^{-1})^{9-k}\cdot a^{2k}=\sum_{k=0}^{9}\binom{9}{k}\cdot\underbrace{a^{-9+k}\cdot a^{2k}}_{a^{3k-9}}}_{a^{3k-9}=a^0}$$

$$3k-9=0$$
$$3k=9$$
$$\underline{\underline{k=3}}$$

(b) Határozzuk meg az $(x^7+2x^3)^{27}$ kifejezésben az x^{97} tag együtthatóját.

Tétel (Binomiális tétel)

Adott $x, y \in \mathbb{R}$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k.$$

$$(x^7+2x^3)^{27}=\sum_{k=0}^{27}\binom{27}{k}(x^7)^{27-k}\cdot(2x^3)^k=\sum_{k=0}^{27}\binom{27}{k}x^{189-7k}\cdot 2^k\cdot x^{3k}=\sum_{k=0}^{27}\binom{27}{k}2^k\cdot x^{189-4k}$$

$$189-4k=97$$
$$-4k=-92$$
$$\underline{\underline{k=23}}$$

$$\Longleftarrow$$

x^{97} együtthatója: $\underline{\underline{\binom{27}{23}\cdot 2^{23}}}$

(c) Határozzuk meg az $(x^{11}+5x^4)^{57}$ kifejezésben az x^{417} tag együtthatóját.

Tétel (Binomiális tétel)

Adott $x, y \in \mathbb{R}$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k.$$

$$(x^{11}+5x^4)^{57}=\sum_{k=0}^{57}\binom{57}{k}(x^{11})^{57-k}\cdot(5x^4)^k=\sum_{k=0}^{57}\binom{57}{k}\cdot x^{627-11k}\cdot 5^k\cdot x^{4k}$$

$$=\sum_{k=0}^{57}\binom{57}{k}\cdot 5^k\cdot x^{627-7k}\Longrightarrow 627-7k=417\Leftrightarrow -7k=-210\Leftrightarrow k=30$$

x^{417} együtthatója: $\underline{\underline{\binom{57}{30}\cdot 5^{30}}}$

Mennyi lesz az $(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^{73}$ kifejezésben az
(a) $(x_1)^{10} \cdot (x_2)^{23} \cdot (x_3)^{28} \cdot (x_4)^{12}$
(b) $(x_1)^{9} \cdot (x_2)^{21} \cdot (x_3)^{20} \cdot (x_4)^{23}$
(c) $(x_1)^{52} \cdot (x_2)^{7} \cdot (x_3) \cdot (x_4)^{13}$
(d) $(x_1)^{37} \cdot (x_2)^{11} \cdot (x_3)^{12} \cdot (x_4)^{14}$
tagok együtthatója?

Tétel (Polinomiális tétel)

Tetszőeges r, $n \in \mathbb{N}$ esetén:

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_r)^n = \sum_{i_1+i_2+\ldots+i_r=n} \overbrace{\frac{n!}{i_1! \cdot i_2! \cdot \ldots \cdot i_r!}}^{{}^{i}P_n^{i_1,i_2,\ldots,i_r}} x_1^{i_1} \cdot x_2^{i_2} \cdot \ldots \cdot x_r^{i_r}.$$

(a) $(x_1)^{10} \cdot (x_2)^{23} \cdot (x_3)^{28} \cdot (x_4)^{12}$: ${}^{i}P_{73}^{10,23,28,12} = \underline{\underline{\frac{73!}{10! \cdot 23! \cdot 28! \cdot 12!}}}$ $(10+23+28+12=73)$

(b) $(x_1)^{9} \cdot (x_2)^{21} \cdot (x_3)^{20} \cdot (x_4)^{23}$: ${}^{i}P_{73}^{9,21,20,23} = \underline{\underline{\frac{73!}{9! \cdot 21! \cdot 20! \cdot 23!}}}$ $(9+21+20+23=73)$

(c) $(x_1)^{52} \cdot (x_2)^{7} \cdot (x_3)^{1} \cdot (x_4)^{13}$: ${}^{i}P_{73}^{52,7,1,13} = \underline{\underline{\frac{73!}{52! \cdot 7! \cdot 1! \cdot 13!}}}$ $(52+7+1+13=73)$

(d) $(x_1)^{37} \cdot (x_2)^{11} \cdot (x_3)^{12} \cdot (x_4)^{14}$: $37+11+12+14 \neq 73 \Rightarrow \underline{\underline{0}}$

Egy felmérés során 100 embert megkérdeztek, hogy milyen forrásból szerzi a híreket. A következő válaszokat adták: tévéből 65, rádióból 38, újságból 39, tévéből és rádióból 20, tévéből és újságból 20, rádióból és újságból 9 illetve tévéből, rádióból és újságból 6. Hányan vannak akik a felsoroltak közül egyik forrásból sem szerzik a híreket?

100 ember; TV − 65, Ú − 39, TV és Ú − 20, R − 38, TV és R − 20, R és Ú − 9, TV és R és Ú − 6, $\emptyset = ?$

Tétel (Szita-formula)

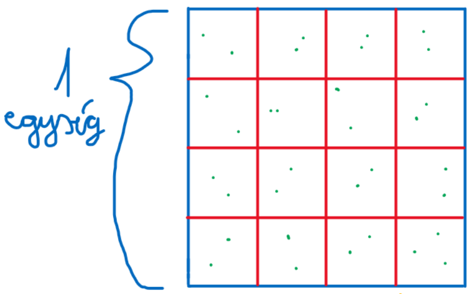
Legyenek $A_1, A_2, \ldots, A_n$ véges halmazok. Ekkor

$$\left|\bigcup_{i=1}^n A_i\right| = \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| \mp \ldots$$

$|A| = 100$ $|T| = 65$ $|R| = 38$ $|U| = 39$
$|T \cap R| = 20$ $|T \cap U| = 20$ $|R \cap U| = 9$
$|T \cap R \cap U| = 6$ $|N| = ?$

$$|N| = |A| - \left((|T|+|R|+|U|) - (|T \cap R| + |T \cap U| + |R \cap U|) + (|T \cap R \cap U|)\right) =$$
$$= 100 - \left((\underbrace{65+38+39}_{142}) - (\underbrace{20+20+9}_{49}) + (6)\right) = 100 - 142 + 49 - 6 = 149 - 148 = \underline{\underline{1}}$$

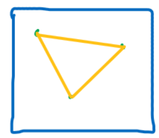
(c) Bizonyítsuk be, hogy ha egy egység oldalú négyzetben felveszünk 33 tetszőleges pontot, akkor mindig lesz köztük 3 olyan, amelyek által meghatározott háromszög területe nem nagyobb, mint $\frac{1}{32}$.



Skatulya-elv

Ha n darab gyufásdobozunk és $n+1$ gyufaszálunk van, akkor akárhogyan rakjuk bele az összes gyufát a skatulyákba, valamelyikben legalább kettő gyufa lesz.

n db négyzet, 2n+1 db pont => 1 négyzetben biztosan 3 db pont lesz



$T_{\triangle} < \frac{1}{32}$ egység^2 $\blacksquare$