

5. feladatsor: Komplex számok algebrai és trigonometrikus alakja

1. feladat

Végezzük el a következő műveleteket a komplex számok halmazán.

$$\sqrt{-16} \qquad \sqrt{-25} \qquad (2i)^2 \qquad 2i + 5i \qquad \frac{4i}{2i}$$

2. feladat

Legyen $z \in \mathbb{C}$, $z = -2 + 7i$. Adja meg a z komplex szám következő jellemzőit.

$$\operatorname{Re} z \qquad \operatorname{Im} z \qquad -z \qquad \bar{z} \qquad |z|$$

3. feladat

Végezzük el a következő műveletet az algebrai alak felhasználásával: $\frac{4 + 3i}{(2 - i)^2}$

4. feladat

Oldja meg a következő egyenletet a komplex számok halmazán: $\frac{x + i - 3i\bar{x}}{x - 4} = i - 1$

5. feladat

Határozza meg azt a $z \in \mathbb{C}$ komplex számot, amelyre teljesül hogy

$$\left| \frac{z - 3}{2 - \bar{z}} \right| = 1 \wedge \operatorname{Re} \left(\frac{z}{2 + i} \right) = 2$$

6. feladat

Legyen $z \in \mathbb{C}$, $z = 2 + 5i$. Adja meg a z komplex szám abszolút értékét és argumentumát. Szemléltesse a z komplex számot a Gauss-számsíkon.

7. feladat

Határozza meg a következő komplex számok trigonometrikus alakját.

- | | |
|---|----------|
| (a) $1 + i$ | (e) $4i$ |
| (b) $-\sqrt{3} + i$ | (f) i |
| (c) $\frac{9}{2} - \frac{9\sqrt{3}}{2}i$ | (g) 10 |
| (d) $-\frac{\sqrt{14}}{2} - \frac{\sqrt{14}}{2}i$ | |

8. feladat

Végezze el a következő műveleteket a trigonometrikus alak felhasználásával.

$$(a) \left(\frac{9}{2} - \frac{9\sqrt{3}}{2}i \right) \left(-\frac{\sqrt{14}}{2} - \frac{\sqrt{14}}{2}i \right)$$

$$(b) \left(-\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i \right) \left(\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{3}i \right)$$

$$(c) \frac{-\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i}{\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{3}i}$$

$$(d) \left(\frac{5\sqrt{3}}{12} - \frac{5}{12}i \right)^{10}$$

$$(e) \left(-\frac{\sqrt{10}}{2} - \frac{\sqrt{10}}{2}i \right)^{15}$$

$$(f) \left(\frac{5}{2} - \frac{5\sqrt{3}}{2}i \right)^{23}$$

$$(g) (1+i)^8 \cdot (5\sqrt{3} - 5i)^3$$

$$(h) \left(\frac{\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i}{-\frac{5\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2}i} \right)^{12}$$

$$(i) \left(1 - \frac{\sqrt{3}-i}{2} \right)^{24}$$

9. feladat

Végezze el a következő gyökvonásokat a komplex számok halmazán.

$$(a) -60 \text{ második gyöke}$$

$$(b) -60 \text{ harmadik gyöke}$$

$$(c) 1 - \sqrt{3}i \text{ hatodik gyöke}$$

$$(d) -7\sqrt{3} + 7i \text{ ötödik gyöke}$$

$$(e) -\frac{7}{2} + \frac{7}{2}i \text{ nyolcadik gyöke}$$

$$(f) -6\sqrt{3} + 6i \text{ második gyöke}$$

$$(g) \frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)^8}{(1+i)^5} \text{ hetedik gyöke}$$

10. feladat

A trigonometrikus alak segítségével számítsa ki z értékét trigonometrikus és algebrai alakban is, majd adja meg az összes olyan w komplex számot trigonometrikus alakban, melyekre $w^3 = z$, ahol

$$z = \frac{(2 + 2\sqrt{3}i)^{10}}{(-1 + i)^{83}}.$$

11. feladat

Írjuk fel algebrai alakban a $z = \frac{(1+i)^8}{(1-\sqrt{3}i)^6}$ komplex számot.