Revisão de férias: integração por partes

July 2024

1 A regra do produto

Sejam $f = f(x)$ e $g = g(x)$ funções. Então a regra da cadeia para derivadas nos diz que:

$$\frac{d}{dx}\left(f(x)g(x)\right) = \frac{df}{dx}g(x) + f(x)\frac{dg}{dx}$$

Ou, em outra notação,

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

A interpretação é a seguinte: se tenho a multiplicação de duas funções, então a taxa de crescimento da multiplicação está relacionada às derivadas das funções, do jeito específico acima descrito.

Como exemplo, vamos aplicar essa regra na seguinte multiplicação:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(x^2\sin(x)\right) &= \frac{dx^2}{dx}\sin(x) + x^2\frac{d\sin(x)}{dx}\\ &= 2x\sin(x) + x^2\cos(x)\end{aligned}$$

2 Integração por partes

Vamos imaginar que queiramos integrar a função $h = h(x)$. Vamos supor ainda mais uma coisa: h é, secretamente, a derivada da multiplicação de duas funções, $h = (fg)'$. Integrando h. temos:

$$\int h(x)dx = \int \left(f(x)g(x)\right)' dx = f(x)g(x) + C$$

Onde a segunda igualdade vem do fato de que a integral é a operação que desfaz a derivada. Vamos analisar ela com mais cuidado: expandindo a expressão do meio com a regra do produto,

$$\begin{aligned}\int \left(f(x)g(x)\right)' dx &= \int f'(x)g(x) + f(x)g'(x)dx\\ &= \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx\\ &= f(x)g(x) + C\end{aligned}$$

Podemos reorganizar isso e suprimir a constante de integração (pois é redundante) para obter a regra em que estamos interessados:

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$$

A fórmula equivalente para integrais definidas pode ser deduzida da mesma maneira, e fica

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx.$$

2.1 Quando usar a integração por partes?

Olhando para a fórmula da integração por partes, percebemos que usá-la é uma boa ideia quando:

1. A integral pode ser interpretada como uma multiplicação;
2. Sabemos integrar uma das funções da multiplicação;
3. Derivar a outra função da multiplicação gera uma integral mais fácil.

No próximo exemplo, ficará mais claro como essa ideia se aplica

2.2 Exemplo resolvido

Queremos achar

$$\int x \sin(x)dx$$

Verificamos que

1. $x \sin(x)$ pode ser escrito como a multiplicação de $x = g(x)$ e $\sin(x) = f'(x)$.
2. Sabemos integrar $f'(x) = \sin(x)$ ($\int \sin(x)dx = -\cos(x) + C$)
3. Derivar $g(x) = x$ facilita nossa vida porque então ficamos com $\int \sin(x)dx$, apenas.

Portanto, vamos usar integração por partes. Note que chamamos as duas partes que, multiplicadas, constituem a integral de $f'(x)$ e $g(x)$; no caso, escolhemos $f'(x)$ para ser a função que sabemos integrar, e $g(x)$ a função que, derivada, facilita nossa vida.

Preparando o terreno para integrar por partes, computamos as versões "derivada" e "normal" das duas funções:

$$f'(x) = \sin(x) \implies f(x) = -\cos(x)$$
$$g(x) = x \implies g'(x) = 1$$

Agora, basta substituir na fórmula da integração por partes:

$$
\begin{aligned}
\int x \sin(x) dx &= x\left(-\cos(x)\right) - \int 1 \cdot \left(-\cos(x)\right) dx \\
&= -x\cos(x) + \sin(x) + C
\end{aligned}
$$