Revisão: equações diferenciais

August 2024

1 O que é uma equação diferencial?

Uma equação, em geral, expressa uma condição sobre uma variável. Por exemplo: seja N o número de brinquedos vendidos por uma loja. Então, se o lucro dela for dado por $-N^2 + 5N - 6$, a equação

$$-N^2 + 5N - 6 = 0$$

Expressa a condição sobre N para que o lucro seja zero. As soluções $N = 2$, $N = 3$ expressam os números de brinquedos vendidos que satisfazem essa condição de lucro 0.

Uma equação diferencial, analogamente, expressa uma condição sobre as derivadas de uma função. Por exemplo: seja $P(t)$ a população de coelhos em função do tempo. Uma condição interessante sobre populações é que, num modelo simplificado, o crescimento delas é proporcional ao seu tamanho (populações maiores crescem mais rápido). Logo, expressamos essa propriedade (ou lei, ou condição) por meio de uma equação:

$$\frac{dP}{dt} = \alpha P$$

para alguma constante $\alpha > 0$. Note que a solução dessa equação é uma função, não um número. Mais do que isso: assim como na equação dos brinquedos havia mais de uma solução, uma equação diferencial, em geral, tem infinitas soluções. Vamos ver isso na prática:

$$\begin{aligned}
\frac{dP}{dt} &= \alpha P \\
\iff \frac{1}{P}dP &= \alpha dt \\
\iff \ln(P) - \ln(P_0) &= \alpha(t - t_0) \\
\iff \ln(P) &= \alpha t + C \\
\iff P &= Ae^{\alpha t}
\end{aligned}$$

Perceba que a "solução" $P(t) = Ae^{\alpha t}$ tem uma constante, A, que não constava no enunciado. Observando a resolução da equação, percebemos que essa constante nasce das condições iniciais P_0 e t_0 usadas na etapa de integração (uma discussão sobre como lidar com constantes está no apêndice A). Essas condições iniciais não foram informadas pelo enunciado, e cada possível combinação delas resulta em uma solução diferente. Por exemplo: se a população inicial for zero, a solução fica $P(t) = 0$, pois não há como a população aumentar. Se for um número grande, ela terá um A grande, representando um acelerado crescimento. São infinitas soluções possíveis, uma para cada A.

1.1 Um pouco de nomenclatura

Uma equação diferencial é *ordinária* se trata de funções com apenas uma variável. Por exemplo: a equação diferencial da população, acima, é ordinária. A Segunda Lei de Newton de um projétil num fluído viscoso,

$$m\ddot{x} = -k\dot{x}^2$$

também é ordinária: x = x(t) é uma função de uma só variável. Para um contra exemplo, a equação de Laplace para o potencial elétrico no vácuo,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

Não é ordinária, pois expressa a dependência de $V = V(x, y, z)$ em 3 variáveis. No caso, essa é uma equação diferencial parcial, pois tem derivadas parciais.

Chamamos de equação diferencial linear com coeficientes constantes toda equação diferencial que parece um polinômio:

$$b + a_0 y(x) + a_1 \frac{dy}{dx} + a_2 \frac{d^2y}{dx^2} + \cdots + a_n \frac{d^ny}{dx^n} = 0$$

No caso particular em que o termo independente b é zero, dizemos que a equação é homogênea. Se $b \neq 0$, a equação é não-homogênea.

Dizemos que uma solução é geral se engloba todas as possibilidades de solução da equação. Por exemplo: na equação da população, acima, a solução $P = Ae^{\alpha t}$ é a solução geral. Uma solução particular é qualquer solução específica, que diz respeito a apenas uma possibilidade. Por exemplo, $P = 0$, discutida anteriormente, é uma solução particular.

Finalmente, chamamos as informações suplementares que definem as indefinidas da solução geral de "condições de contorno". Por exemplo: a combinação de P_0 e t_0 na população de coelhos define o A da solução geral para algum valor específico. Assim, são as condições de contorno do problema. Isso ficará mais claro adiante.

2 Resolvendo equações homogêneas

O método mais geral para resolver homogêneas é o do chute, que tem um nome chique: ansatz. O ansatz mais comum é de uma solução do tipo $Ae^{\omega t}$ (vamos supor que a equação diferencial é sobre $x(t)$). Depois de formularmos um chute, substituímos ele na equação diferencial para descobrir os valores das constantes (em particular, o valor de ω). Vamos aplicar esse método para resolver a equação de população,

$$\dot{P} = \alpha P.$$

2.1 Equação da população

Ansatz: $P(t) = Ae^{\omega t}$. Substituindo:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(Ae^{\omega t}\right) &= \alpha\left(Ae^{\omega t}\right) \\ \implies A\omega e^{\omega t} &= \alpha A e^{\omega t} \\ \implies \omega &= \alpha \end{aligned}$$

Assim, descobrimos que para o chute estar correto, $\omega = \alpha$, como já tínhamos previsto. Mas fica uma pergunta: como sabemos que o ansatz representa a solução geral? Será que não estamos deixando alguma solução de fora?

Tem um jeito muito fácil de saber: o número de indefinidas da solução geral deve ser igual ao grau da derivada mais alta da equação. No caso acima, a derivada mais alta (= de maior grau) é de grau 1, no lado esquerdo da equação. Então a solução geral deve ter uma indefinida; e verificamos que é o caso da nossa solução, pois A é indefinido. Então a solução em que chegamos é geral. Agora resta substituir as condições de contorno. Para isso, precisamos tirar alguma outra informação do problema.

Digamos que no instante $t = \tau$, a população seja $P(\tau) = N$. Para usar essa condição de contorno, basta substituí-la na solução geral:

$$N = Ae^{\alpha\tau} \implies A = Ne^{-\alpha\tau}$$

Assim, descobrimos o valor de A nesse caso em específico, e a solução fica:

$$P(t) = Ne^{\alpha(t-\tau)}.$$

Vamos fazer mais um exemplo.

2.2 Equação de movimento num fluido viscoso

A força que um corpo movendo-se num fluido viscoso sofre é proporcional à sua velocidade. Assim, a segunda lei de Newton fica:

$$m\ddot{x} = -k\dot{x}$$

Se você tentar fazer o ansatz do exercício anterior, irá descobrir que a solução não é geral, pois só terá uma indefinida (e essa equação requer duas). Tente você mesmo! O que acontece é que essa equação só está falando das derivadas; em outras palavras, é como se ela fosse sobre a "variável" $\dot{x}$. Logo, nosso ansatz será sobre essa variável.

Ansatz: $\dot{x}(t) = Ae^{\omega t}$. Substituindo:

$$m\frac{d}{dt}\left(Ae^{\omega t}\right) = -kAe^{\omega t}$$
$$\iff \omega = -\frac{k}{m}$$

Como a equação, se interpretada como sobre $\dot{x}$, tem a maior derivada no grau 1, então esse ansatz representa a solução geral. Agora, para terminar, basta resolver por integração simples

$$\dot{x} = Ae^{-kt/m} \implies x = Ae^{-kt/m} + B$$

Onde foi feita a transformação inócua $-Am/k \mapsto A$. Essa é a solução geral! Nesse exemplo é possível ver com mais clareza o significado das indefinidas: representam informações (dadas pelas condições de contorno!) que, embora não contidas na equação diferencial, devem constar na sua solução. No caso, B representa a posição final (assintótica) do corpo, e A está relacionado à velocidade inicial do corpo, ambas informações ausentes na segunda lei de Newton.

Para exemplificar um problema completo, vamos substituir algumas condições de contorno. Como são duas indefinidas, são necessárias duas equações. Logo, imagine que, pensando sobre o problema (ou lendo no enunciado), concluímos que o corpo começa em $x(0) = S_0$ com velocidade $\dot{x}(0) = v_0$. Substituindo essas condições de contorno, ficamos com:

$$S_0 = A + B$$
$$v_0 = -A\frac{k}{m}$$

E a solução particular fica:

$$x(t) = \frac{v_0 m}{k}\left(1 - e^{-kt/m}\right) + S_0$$

De agora em diante, para sermos mais rápidos, não vamos estudar mais condições de contorno .

2.3 O MHS

Vamos falar muito do MHS ainda, mas já é bom introduzir a sua formulação mais básica. Se a posição de um corpo obedece a equação

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

então dizemos que ele segue um movimento harmônico simples, um MHS. Vamos resolver do jeito que já aprendemos.

Ansatz: $x(t) = Ae^{\alpha t}$. Substituindo:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}\left(Ae^{\alpha t}\right) + \omega^2 Ae^{\alpha t} = 0 \\ \implies A\alpha^2 e^{\alpha t} + \omega^2 Ae^{\alpha t} = 0 \\ \iff \alpha^2 = -\omega^2 \end{aligned}$$

Note que há duas opções para α: ou $\alpha = i\omega$, ou $\alpha = -i\omega$. E agora? Qual escolher? Na realidade, nos deparamos com uma grande propriedade das equações homogêneas.

2.3.1 Sobreposição de soluções

Antes de continuar a resolução do MHS, vamos ver um teorema. Sejam $y_1(x)$ e $y_2(x)$ duas soluções diferentes de uma equação homogênea. Então qualquer combinação linear (isto é, $Ay_1(x) + By_2(x)$, para qualquer A e B, como se fosse uma mistura das duas soluções em qualquer "proporção") também é solução. Você pode verificar isso facilmente substituindo a combinação linear na homogênea e vendo que funciona mesmo.

No caso do MHS, vemos que as nossas duas soluções possíveis são $x_1(t) = Ae^{i\omega t}$ e $x_2(t) = Ae^{-i\omega t}$ (nenhuma delas, você pode observar, geral). Então a composição dessas duas soluções

$$x(t) = Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t}$$

Também é solução (verifique!) e, como tem duas indefinidas, é geral! Manipulando um pouco essa equação, podemos escrevê-la em termos mais usuais:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

Observe que continuamos com duas indefinidas, e a solução continua geral. Chamamos A de amplitude e ϕ de fase inicial.

2.4 MHS amortecido

Um MHS amortecido tem a equação:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Assim, você pode observar que é um MHS normal com um termo de amortecimento viscoso (o 2 multiplicando o γ é para deixar o resultado final mais bonito, não bitole nele). Tente resolver do modo que viu até agora antes de seguir lendo!

Ansatz: $x(t) = Ae^{\alpha t}$. Substituindo:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}\left(Ae^{\alpha t}\right) + 2\gamma\frac{d}{dt}\left(Ae^{\alpha t}\right) + \omega_0^2 Ae^{\alpha t} = 0 \\ \implies \alpha^2 + 2\gamma\alpha + \omega_0^2 = 0 \\ \iff \alpha = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \end{aligned}$$

Note que isso não necessariamente é uma oscilação. Portanto, vamos analisar caso a caso.

2.4.1 $\gamma^2 > \omega_0^2$

Nesse caso, a raiz acima é real e não-nula. Portanto, não temos uma oscilação; o que temos é um movimento que cai exponencialmente:

$$x(t) = e^{-\gamma t} \left(A e^{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t} + B e^{-\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t} \right)$$

Chamamos esse cenário de amortecimento supercrítico.

2.4.2 $\gamma^2 = \omega_0^2$

Nesse caso, note que as duas soluções para α são idênticas. Em outras palavras, sumimos com uma indefinida, e a solução que tínhamos não é mais geral! Acontece que nesse caso específico, surge uma nova solução: $Ate^{-\gamma t}$.

$$A \left(-\gamma e^{-\gamma t} - \gamma \left(e^{-\gamma t} - \gamma t e^{-\gamma t} \right) \right) + 2\gamma A \left(e^{-\gamma t} - \gamma t e^{-\gamma t} \right) + \omega_0^2 \left(Ate^{-\gamma t} \right) = 0,$$

se $\gamma^2 = \omega_0^2$, como você pode verificar. Então a solução geral fica a composição dessa nova com a antiga:

$$x(t) = (A + Bt)\, e^{-\gamma t}$$

Esse é o caso em que o movimento é amortecido mais rapidamente. Chamamos ele de amortecimento crítico.

2.4.3 $\gamma^2 < \omega_0^2$

Nesse caso, a raiz é imaginária e temos uma oscilação cuja amplitude cai exponencialmente:

$$x(t) = e^{-\gamma t} A \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} t + \phi)$$

É claro que a frequência ω de oscilação é:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

3 Equações não-homogêneas

Seja E_H uma equação homogênea e E_{NH} uma equação não-homogênea que é essencialmente idêntica a E_H exceto pelo termo independente b. Seja S a solução geral de E_H, e P qualquer solução particular de E_{NH}. Então a solução geral de E_{NH} é $S + P$. Vamos demonstrar essa afirmação e depois discutiremos suas consequências.

Por concretude, vamos dizer que E_H é dada por

$$0 + a_0 x + a_1 x' + a_2 x'' + a_3 x^{(3)} + \cdots + a_n x^{(n)} = 0.$$

E_{NH} é exatamente a mesma equação, exceto pelo fato de que ao invés do 0 há um número não-nulo b. Se S é solução, então

$$0 + a_0 S + a_1 S' + a_2 S'' + a_3 S^{(3)} + \cdots + a_n S^{(n)} = 0,$$

e se P é solução de E_{NH}, então

$$b + a_0 P + a_1 P' + a_2 P'' + a_3 P^{(3)} + \cdots + a_n P^{(n)} = 0.$$

Muito bem. Vamos substituir $S + P$ em E_{NH} e ver o que acontece:

$$\begin{aligned}
&b + a_0(S+P) + a_1(S+P)' + a_2(S+P)'' + a_3(S+P)^{(3)} + \cdots + a_n(S+P)^{(n)} \\
&= b + (a_0 S + a_0 P) + (a_1 S' + a_1 P') + (a_2 S'' + a_2 P'') + (a_3 S^{(3)} + a_3 P^{(3)}) + \cdots + (a_n S(n) + a_n P^{(n)}) \\
&= (b + a_0 P + a_1 P' + a_2 P'' + a_3 P^{(3)} + \cdots + a_n P^{(n)}) + \\
&\qquad\qquad + (a_0 S + a_1 S' + a_2 S'' + a_3 S^{(3)} + \cdots + a_n S^{(n)}) \\
&= 0 + 0 = 0
\end{aligned}$$

Onde foi usado o fato de que S e P são soluções de suas respectivas equações para chegar à igualdade a zero. Note que isso significa que, de fato, $S + P$ é solução. Mais do que isso: como o número de indefinidas em $S + P$ é o mesmo número de indefinidas em S (pois S é geral e P é particular), também $S + P$ é a solução geral da não-homogênea, como se queria demonstrar.

Isso tem uma consequência muito importante: agora sabemos resolver equações não-homogêneas! O método é o seguinte: primeiro ignoramos o termo independente e resolvemos a equação homogênea, achando a solução geral. Depois voltamos a olhar e pensar bastante sobre a equação completa, com o termo independente, até acharmos qualquer soluçãozinha para ela. Aí é só somar as duas soluções. Vamos fazer um exemplo.

A equação de movimento de uma massa presa verticalmente a uma mola é:

$$m\ddot{z} = mg - kz \iff \ddot{z} + \tfrac{k}{m} z - g = 0.$$

Você pode observar que é uma equação não-homogênea, com termo independente $-g$. A equação homogênea, sem o termo independente, fica

$$\ddot{z} + \tfrac{k}{m} z = 0$$

E a solução geral você já sabe: $z(t) = A\cos(\omega t + \phi)$, com $\omega^2 = k/m$. Ótimo, temos a solução geral da homogênea, falta uma particular da equação original. Se você olhar bastante para ela, vai ver que uma solução particular super simples é $z(t) = mg/k$ constante (isto é, se você soltar a massinha bem do ponto de resultante $= 0$, ela fica parada nesse ponto). Você pode verificar que de fato funciona substituindo ela na equação não-homogênea. Então a solução geral fica:

$$z(t) = A\cos(\omega t + \phi) + \frac{mg}{k}$$

Você deve estar pensando: “funciona e tal, muito top; mas como que eu vou tirar uma solução da não-homogênea da cartola?”Na verdade é bem simples!

Uma solução constante vai zerar todas as derivadas. Então nesse caso você só precisa se preocupar com o termo independente e com o termo sem derivada. Em outras palavras, a equação vai ficar:

$$b + a_0 x = 0 \implies x = -\frac{b}{a_0}$$

Que é a solução particular da não-homogênea! Então a dica é escolher uma solução constante e ajeitar ela pra cancelar o termo independente, como na equação acima.

4 MHS, MHS, MHS

O MHS é uma das equações mais importantes da Física. Na verdade, quando se trabalha com Física quântica, com equações horríveis e etcetera, ele acaba sendo a única equação que dá pra resolver analiticamente, sem métodos numéricos. Além disso, ele surge naturalmente quando se quer modelar perturbações em torno de pontos de equilíbrio ou fenômenos de ressonância; então é natural que caia bastante em olimpíadas. Essa seção aprofunda um pouco nessa matéria.

4.1 MHS forçado

Suponha um corpo que está submetido a uma força harmônica além da força restauradora,

$$m\ddot{x} + kx = F\cos(\Omega t).$$

Como resolver essa equação diferencial? Olhando para a demonstração acima sobre a solução de uma equação não-homogênea, percebemos que podemos aplicar o mesmo método neste caso. A solução geral da homogênea, claro, é

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi), \quad \omega^2 = \frac{k}{m}$$

Para a solução particular, naturalmente um chute constante não vai funcionar. Para cancelar o cosseno da força, chutemos um cosseno também:

Ansatz: $x(t) = B\cos(\Omega t)$. Substituindo para achar B:

$$-mB\Omega^2\cos(\Omega t) + kB\cos(\Omega t) = F\cos(\Omega t) \implies B = \frac{F/m}{\omega^2 - \Omega^2}$$

Então a solução geral da equação original vai ser:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi) + \frac{F/m}{\omega^2 - \Omega^2}\cos\Omega t$$

Essa solução é incrível! Note que se $\Omega^2 \approx \omega^2$, isto é, se a frequência da força é próxima da frequência natural de oscilação do corpo, o movimento é dominado pelo termo da direita, que fica muito grande, e a amplitude do movimento fica absurda. Isso tem efeitos extremamente profundos.

Quando você dá um peteleco num copo ou numa taça, som que sai tem uma frequência mais ou menos definida, independente da força do peteleco. Isso acontece porque o peteleo essencialmente implica uma quantidade de energia no copo, que passa a vibrar de forma livre segundo suas equações complicadas. A frequência que você escuta é a frequência de oscilação natural do copo, dada pelas equações complicadas (sendo meio aproximado; na maior parte das situações você tem uma gama de frequências naturais possíveis e você escuta a superposição delas). Se alguém cantar com bastante intensidade nessa frequência natural perto do copo, ele vai ser basicamente forçado por um som oscilando com $\Omega^2 \approx \omega^2$, e, como visto, isso faz a amplitude de vibração do copo crescer muito. Eventualmente, a amplitude é grande o suficiente para quebrar o copo, e aí você tem aqueles vídeos de cantores de ópera quebrando taças. Um fênomeno parecido pode acontecer com construções e até derrubar pontes!

Isso também pode ser aplicado a circuitos. Todo fio tem uma capacitância e uma indutância inerentes, o que significa que linhas de transmissão têm frequências naturais de oscilação. Quando mandamos um sinal por esses fios, estamos forçando a voltagem neles com uma gama de frequências muito estranhas (todo sinal pode ser interpretado como a sobreposição de várias ondas harmônicas de diferentes frequências). Então, pelas equações acima, as frequência que vão ser reforçadas são aquelas próximas da frequência natural do fio. Ou seja, isso vai acabar distorcendo e sujando seu sinal, mesmo que ele seja apenas uma tensão constante (pois sempre vai ter ruído com alguma componente de frequência próxima à natural do fio, e ela pode acabar sendo amplificada).

O motivo da amplitude nesse tipo de oscilação ficar muito grande, para além das equações, é que a força fica arranjada de tal modo que sempre está fazendo trabalho positivo no corpo. É possível ver isso com a potência: $P = \vec{F} \cdot \vec{v}$ sempre tem o mesmo sinal já que $\vec{F}$ e $\vec{v}$, por terem a mesma frequência, têm o mesmo sentido em todos os instantes. Isso significa que, quando $\Omega^2 = \omega^2$, o corpo está absorvendo o máximo de energia possível, pois sempre está sofrendo trabalho. Podemos aplicar essa ideia numa cacetada de coisas! Por exemplo: os átomos e moléculas também têm frequências naturais (embora com significado um pouco diferente da interpretação da Física clássica). Se você jogar um fóton cuja frequência casa com essa natural, ele vai ser absorvido, enquanto fótons com outras frequências não terão absorção tão grande. Cientistas das mais diversas áreas usam esse fênomeno para determinar a composição/estrutura das coisas, de estrelas até remédios, ao observar as faixas escuras que o objeto estudado deixa no espectro eletromagnético da luz. Para saber mais sobre isso, recomendo o livro *The Feynman Lectures on Physics I*, capítulo 21, de graça no site da Caltech.

Para finalizar, um pouco de tecnicalidades: quando $\Omega^2 = \omega^2$, dizemos que a força está em ressonância com o corpo (e já vi extenderem essa palavra para dizer simplesmente que uma frequência é igual a outra). Ah, e quando você tem um termo de amortecimento na equação, continua existindo uma frequência natural com a qual é possível ressoar, mas a amplitude não fica infinita como nesse caso que estávamos vendo. Resolva a equação amortecida para ver com seus próprios olhos!

4.2 MHS e a energia

Em alguns casos, principalmente naqueles com vários corpos ou várias forças, pode ser mais fácil escrever a energia do sistema do que escrever as equações de força ou de torque (que foram os tipos de equações que vimos até agora). Então seria muito bom ver como fica a equação da energia do MHS para conseguirmos cobrir esse caso.

Em geral, a equação do MHS sem amortecimento (afinal, estamos trabalhando com energia!) é:

$$\ddot{q} + \omega^2 q + b = 0$$

Onde q é uma coordenada (pode ser ângulo, raio, posição horizontal, etc.). Multiplicando por $\dot{q}$, temos

$$\begin{aligned} \ddot{q}\dot{q} + \omega^2 q\dot{q} + b\dot{q} &= 0 \\ \iff \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{q}^2}{2}\right) + \omega^2 \frac{d}{dt}\left(\frac{q^2}{2}\right) + b\frac{dq}{dt} &= 0 \\ \iff \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{q}^2}{2} + \omega^2\frac{q^2}{2} + bq\right) &= 0 \\ \iff \frac{\dot{q}^2}{2} + \omega^2\frac{q^2}{2} + bq &= E \end{aligned}$$

Onde E é uma constante. Você pode observar que E é a energia do sistema, isto é, a equação final é a energia de um sistema que segue o MHS. Essa derivação é interessante pois expõe a ambiguidade na escolha da energia: repare que poderíamos escolher qualquer valor constante para E que a equação da energia corresponderia à mesma equação dinâmica (a com $\ddot{q}$). Isso significa que o valor exato de E não impacta na solução do problema, e sempre podemos somar ou subtrair uma constante em seu valor que continuará o mesmo problema. Portanto, para deixar isso mais claro, escrevemos a equação:

$$\frac{\dot{q}^2}{2} + \omega^2\frac{q^2}{2} + bq + c = E$$

Assim, se você escrever uma equação da energia, e conseguir manipular ela para assumir o formato acima, é bem direto ler a frequência natural dela. Vamos fazer um exemplo.

A equação da energia de um corpo pendurado por uma mola de comprimento natural L é:

$$\frac{m\dot{z}^2}{2} + k\frac{(z-L)^2}{2} - mgz = E$$

Reescrevendo:

$$\frac{\dot{z}^2}{2} + \frac{k}{m}\frac{z^2}{2} - (\frac{k}{m}L + g)z + \frac{k}{m}\frac{L^2}{2} = \frac{E}{m}$$

Comparando essa equação com a que vimos mais cedo, afirmamos de cara que $\omega^2 = k/m$, como se esperava.

4.3 Tudo é um MHS

Na subseção anterior, vimos que um MHS obedece um potencial quadrático. Porém, nem todo potencial é quadrático! — agora tenta explicar isso para quem escreveu o enunciado pedindo para você achar a frequência de pequenas oscilações de uma órbita circular. Afinal, uma órbita tem a equação de energia:

$$\frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r} = E$$

Onde L é o momento angular dela (se você estudou mecânica celeste, sabe que é constante). Como resolver o exercício mesmo assim? O segredo está em "pequenas oscilações": vamos usar série de Taylor para fazer uma aproximação. Como o potencial que queremos é quadrático, vamos fazer uma aproximação de segunda ordem em volta do R original da órbita, $r = R + \delta$, $1 \gg |\delta|$. Assim, $\dot{r} = \dot{\delta}$, pois R é constante (é a órbita original). A equação então fica:

$$\frac{m\dot{\delta}^2}{2} + \frac{L^2}{2m(R+\delta)^2} - \frac{GMm}{(R+\delta)} = E$$

A aproximação que usaremos é a binomial, cuja série é:

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + \dots$$

Portanto, fatorando o R na energia e aplicando a aproximação, obtemos:

$$\frac{m\dot{\delta}^2}{2} + \frac{L^2}{2mR^2}\left(1 - 2\frac{\delta}{R} + 3\frac{\delta^2}{R^2}\right) - \frac{GMm}{R}\left(1 - \frac{\delta}{R} + \frac{\delta^2}{R^2}\right) = E$$

Agora você pode reorganizar e manipular tudo direitinho, mas o caminho mais rápido é só dizer que

$$\omega^2 = \underbrace{\frac{\text{O que multiplica } q^2}{\text{O que multiplica } \dot{q}^2}}_{\text{No caso de energia}} = \underbrace{\frac{\text{O que multiplica } q}{\text{O que multiplica } \ddot{q}}}_{\text{No caso de torque ou força}}$$

Assim, a gente só faz metade do trabalho:

$$\frac{m\dot{\delta}^2}{2} + \left(\frac{3L^2}{2mR^4} - \frac{GMm}{R^3}\right)\delta^2 + \text{coisas irrelevantes} = E$$

E a frequência de oscilação fica

$$\omega = \sqrt{\frac{\frac{3L^2}{2mR^4} - \frac{GMm}{R^3}}{m/2}}$$

Existem muitos exercícios que seguem esse roteirinho: escreva a equação dinâmica (= torque ou força) ou de energia, faça aproximação até a ordem correta (dinâmica

$\rightarrow$ primeira ordem, energia $\rightarrow$ segunda ordem), e extraia a frequência da equação. Por isso, seguem algumas aproximações úteis para olimpíadas:

$$\begin{aligned}
\text{Útil para gravidade, rotações e ângulos: } & \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \cdots \\
\text{Útil para gravidade, rotações e ângulos: } & \sin(x) = x + \cdots \\
\text{Útil para órbitas, cargas e problemas gerais: } & (1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + \cdots \\
\text{Estranho, mas pode surgir: } & \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots \\
\text{Estranho, mas pode surgir: } & e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots
\end{aligned}$$

5 Equações diferenciais parciais

Por um grande azar do destino, pode ser que caia no seu colo uma equação diferencial sobre uma função de várias variáveis, chamada de *equação diferencial parcial*, como a equação do calor de Fourier em uma dimensão[1]:

$$\frac{\partial}{\partial t}T(x,t) = \alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2}T(x,t); \quad T(0,t) = T(L,t) = 0, \quad T(x,0) = T_0$$

(As coisas depois do ponto e vírgula são condições de contorno — mantém-se dois lados com temperaturas fixas iguais, e iniciamos o experimento com temperatura uniforme). Se cair um treco desses, é esperado que o enunciado te ajude a resolver com vários sub-itens. Mas você estuda Física e quer vaga na IPhO, então vamos ver por cima como resolver isso.

A grande estratégia é chutar uma solução com uma carinha específica. Se funcionar, aplicamos as condições de contorno. Aí invocamos um teorema da matemática que diz que se a solução funciona e obedece as condições de contorno, então é a solução correta.

A carinha que normalmente você vai querer chutar, incluindo nesse caso, é de uma solução com as variáveis separadas:

$$T(x,t) = \chi(x)\tau(t)$$

Onde χ e τ são funções da posição e do tempo, respectivamente. Aplicando na equação do calor:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t}\chi(x)\tau(t) = \alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2}\chi(x)\tau(t) \\
\iff & \chi(x)\frac{d\tau(t)}{dt} = \alpha\tau(t)\frac{d^2\chi(x)}{dx^2} \\
\iff & \frac{1}{\tau(t)}\frac{d\tau(t)}{dt} = \alpha\frac{d^2\chi(x)}{dx^2}\frac{1}{\chi(x)}
\end{aligned}$$

[1] Essa seção é fortemente inspirada no artigo da Wikipedia "Heat Equation"(clique aqui para ler)

Como de um lado da equação só há coisas com dependência no tempo, e do outro só há coisas com dependência na posição, concluímos que ambos devem ser iguais a uma constante κ:

$$\frac{1}{\tau(t)}\frac{d\tau(t)}{dt} = \kappa$$
$$\alpha\frac{d^2\chi(x)}{dx^2}\frac{1}{\chi(x)} = \kappa$$

A solução da equação de cima você já cansou de ver: $\tau(t) = Ae^{\kappa t}$. A equação de baixo é um pouco mais delicada. A solução dela você também sabe:

$$\chi(x) = Be^{x\sqrt{\kappa/\alpha}} + Ce^{-x\sqrt{\kappa/\alpha}}$$

Se $\kappa > 0$, você pode verificar que as condições de contorno impõe $B = C = 0$ (pois a função exponencial real é bijetora), que não presta. Se $\kappa = 0$, a gente tem uma função linear (olhe para a equação diferencial que o motivo ficará mais claro), anulando de novo a solução pelas condições de contorno. Assim, $\kappa < 0$ e a solução fica igual a um MHS (!!!):

$$\chi(x) = D\cos(x\sqrt{-\frac{\kappa}{\alpha}} + \phi)$$

Impondo a primeira condição de contorno,

$$D\cos(\phi) = 0$$
$$D\cos(L\sqrt{-\frac{\kappa}{\alpha}} + \phi) = 0$$

A primeira significa que $\phi = n\pi + \pi/2$, o que é a mesma coisa que fazer $\phi \mapsto 0$ e $\cos \mapsto \sin$. A segunda equação, junto com a anterior, impõe $L\sqrt{-\kappa/\alpha} = n\pi$. Logo $\kappa = -n^2\pi^2\alpha/L^2$. Note que temos uma solução diferente para cada n natural possível. Como a equação original é homogênea, podemos sobrepor todas essas soluções, e obtemos por enquanto:

$$T(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\chi_n(x)\tau_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty}E_n\sin(\frac{n\pi}{L}x)e^{-n^2\pi^2\alpha t/L}$$

Agora falta definir as constantes E_n. Para isso, vamos analisar o instante $t = 0$, e precisaremos usar um conceito matemático avançado que não será demonstrado certinho, mas está justificado intuitivamente no apêndice B:

$$E_n = \frac{2}{L}\int_0^L T(x,0)\sin(\frac{n\pi}{L}x)dx$$

No nosso caso, $T(x,0) = T_0$, e a equação dá $E_n = -2T_0\left(\cos\left(\pi n\right) - 1\right)/\pi n$, ou em outras palavras, $E_{\text{par}} = 0$ e $E_{\text{ímpar}} = 4T_0/(\pi \cdot \text{ímpar})$. Finalmente, então, depois de aplicar essa última condição de contorno, obtemos a solução final:

$$T(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4T_0}{\pi(2n+1)} \sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{L}x\right) e^{-(2n+1)^2\pi^2\alpha t/L}$$

Como essa solução funciona e obedece às condições de contorno, ela é **A** solução correta.

Você pode ver graficamente esse resultado, que é a evolução do perfil de temperatura de uma barra, neste link (basta variar o valor de t com o slider): `https://www.desmos.com/calculator/aldpypis0c`

A Lidando com constantes

Quando lidamos com constantes indefinidas, as seguintes operações são válidas:

$$\begin{aligned} A + B &= A \\ AB &= A \\ A/B &= A \\ e^A &= A \\ \sin(A) &= A \end{aligned}$$

Etcetera, pois se A e B são indefinidas e constantes, então também o produto e a soma entre elas é uma indefinida e constante, bem como funções de A e B. Como são variáveis indefinidas, podemos trocar o nome delas para o que quisermos (em particular, para o nome delas mesmo, como nas operações acima, embora tenha se evitado fazer isso nesta revisão).

B Série de Fourier, intuitivamente

É muito comum pensarmos em vetores $\vec{v}$ como a soma de suas componentes em uma determinada base, como $v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath} + v_z\hat{k}$, ou $v_r\hat{r}$, ou $v_z\hat{z} + v_\rho\hat{\rho}$, etc. A ideia é que $\vec{v}$ fica escrito como a soma de múltiplos de vetores mais simples (como $\hat{\imath}$). Quando fazemos o produto escalar entre dois vetores escritos em forma de componentes, temos;

$$\begin{aligned} \vec{v} \cdot \vec{u} =& (v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath} + v_z\hat{k}) \cdot (u_x\hat{\imath} + u_y\hat{\jmath} + u_z\hat{k}) \\ =& v_x u_x \hat{\imath}\cdot\hat{\imath} + v_x u_y \hat{\imath}\cdot\hat{\jmath} + v_x u_z \hat{\imath}\cdot\hat{k} \\ &+ v_y u_x \hat{\jmath}\cdot\hat{\imath} + v_x u_y \hat{\jmath}\cdot\hat{\jmath} + v_x u_z \hat{\jmath}\cdot\hat{k} \\ &+ v_z u_x \hat{k}\cdot\hat{\imath} + v_z u_y \hat{k}\cdot\hat{\jmath} + v_z u_z \hat{k}\cdot\hat{k} \end{aligned}$$

Se os vetores da base $\{\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{\jmath}\}$ fossem tortinhos, o produto escalar entre cada um deles teria um valor diferente e estranho. Mas como são ortogonais, qualquer produto escalar cruzado dá 0 e o resto dá 1. Assim, o produto acima simplifica para o que você já sabe:

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = v_x u_x + v_y u_y + v_z u_z$$

Na verdade, podemos até definir as componentes em termos de produtos escalares:

$$v_x = \vec{v} \cdot \hat{i}, \quad \text{etc.}$$

A ideia que vamos explorar agora é a de expressar também funções como somas de múltiplos de funções mais simples, isto é, escrever funções em termos de uma determinada base $\{\phi_i(x)\}$:

$$f(x) = C_0\phi_0(x) + C_1\phi_1(x) + C_2\phi_2(x) + C_3\phi_3(x) + \cdots$$

Para isso, como você acabou de ver, é super interessante definir o "produto escalar"(rigorosamente, o produto interno) $f \cdot g$ entre duas funções f, g de domínio $[a, b]$. Existem vários jeitos, mas um bom e útil é:

$$f \cdot g = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

Nesse caso, para pegar as componentes de f na base $\{\phi_i(x)\}$, fazemos;

$$C_n = \int_a^b f(x)\phi_n(x)dx$$

Como era de se esperar. Seria muito legal se a nossa base fosse ortogonal e bonitinha como a base $\{\hat{i}, \hat{j}, \hat{j}\}$ dos vetores, isto é,

$$\begin{aligned} \phi_n \cdot \phi_m &= 0, \quad \text{se } n \neq m; \\ \phi_n \cdot \phi_m &= k, \quad \text{se } n = m, \text{ para algum número } k. \end{aligned}$$

Porque aí o produto escalar $f \cdot g$ ficaria super molinho de computar. Por sorte, alguém já pensou bastante nisso e chegou a conclusão que seno e cosseno resolvem o problema:

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} \sin(nx)\sin(mx)\,dx = 0 \quad \text{para } n \neq m \\ &\int_0^{2\pi} \sin(nx)\sin(mx)\,dx = \pi \quad \text{quando } n = m \neq 0 \\ &\int_0^{2\pi} \cos(nx)\cos(mx)\,dx = 0 \quad \text{para } n \neq m \\ &\int_0^{2\pi} \cos(nx)\cos(mx)\,dx = \pi \quad \text{quando } n = m \neq 0 \\ &\int_0^{2\pi} \sin(nx)\cos(mx)\,dx = 0 \quad \text{para todos } n, m \end{aligned}$$

Onde n, m são inteiros (existem casinhos óbvios quando $n = m = 0$ que não estão cobertos para não ficar muita coisa).

Assim, as nossas funções ficam escritas como:

$$f(x) = C_0 + \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(nx) + B_n \sin(nx)$$

E as nossas componentes são dadas pelas fórmulas:

$$C_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)dx$$
$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)dx$$
$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)dx$$

A gente chama esse jeito em componentes de escrever f de *série de Fourier*, e as componentes (os múltiplos das funções harmônicas) representam "quanto"de cada frequência está em f. Esse jeito de escrever funções só funciona para funções periódicas (para funções não-periódicas, tem drogas mais fortes como a transformada de Fourier), mas se você restringir seu domínio, como é o caso do exemplo que chamou esse apêndice (lembra dele?), fica tudo bem. Aliás, você deve ter percebido que o exemplo acabou dando uma resposta em termos de séria de Fourier, e usamos justamente as fórmulas acima para determinar a constante (os termos cossenoidais morreram naturalmente antes).

No caso específico do exemplo, a fórmula usada não foi exatamente essa porque o "período"da função não era exatamente 2π, então ela sofreu uma mudancinha de escala (verifique-a!).

Enfim, esse apêndice não é muito rigoroso, então não leve a ferro e fogo. É mais para dar uma introdução intuitiva, como o título dele indica.