Revisão de férias: Fluxo de calor

Julho 2024

1 Definições

Dado um corpo ou região do espaço qualquer, definimos o fluxo de calor Φ como:

$$\Phi = \frac{Q}{\Delta t}$$

Em outras palavras: o fluxo de calor é o tanto de calor que um corpo/região do espaço troca em um intervalo de tempo. Assim, poderíamos dizer: "o fluxo de calor que entra na minha mão quando eu a coloco na chapa da padaria é muito alto!". Ou: "essa sala recebe um fluxo de calor de 450 kilocalorias por segundo do aquecedor". Ou ainda: "esta panela transmite um fluxo de calor de 300 joules por segundo à sopa que está dentro dela."

Uma boa analogia é: o fluxo de calor é basicamente a mesma coisa que o fluxo de água. O fluxo de água pode estar apenas atravessando o cano, como o fluxo de calor pode somente estar atravessando o condutor. Mas o fluxo de água também pode estar desembocando na minha garrafa d'água, assim como o fluxo de calor pode estar desembocando nos legumes em cima da frigideira.

2 O regime estacionário

Imagine você um pedaço de qualquer coisa, digamos um bloquinho. Suponha que de um lado dele entra um fluxo de calor Φ_1 e que, pelo outro, sai um fluxo Φ_2, como ilustrado na Figure 1. Em outras palavras: de um lado do bloco está entrando, a cada segundo, uma quantidade de calor, e pelo outro lado está saindo uma quantidade diferente. É claro que o bloco vai esquentar (ou esfriar, a depender da relação entre os fluxos): isso é como colocar 2L de água por segundo numa caixa d'água, mas tirar 1L do outro lado; a caixa d'água vai encher.

$$\Phi_1 \longrightarrow \boxed{\text{Treco}} \longrightarrow \Phi_2$$

Figure 1: Um pedaço de qualquer coisa

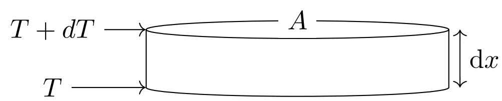

Figure 2: Um condutor bem pequeno

Essa situação é muito ruim pra nós porque signfica que nosso pedaço de qualquer coisa está mudando com o tempo. Conforme o tempo passa, a temperatura dele vai aumentando ou diminuindo — e isso complica muito as contas. Só existe um jeito de evitar esse desastre: se $\Phi_1 = \Phi_2$, isto é, um fluxo $\Phi = \Phi_1 = \Phi_2$ apenas atravessa o bloco. Assim, tiramos calor dele na mesma proporção que damos; em outras palavras, a temperatura do bloquinho fica "estacionada." Chamamos essa situação bem específica de *estado ou regime estacionário*.

Note bem: em nenhum momento eu disse que a temperatura do pedacinho é uniforme ao longo de sua extensão. No regime estacionário, o único requisito é que, em cada ponto, a temperatura seja constante. É possível, em princípio, que as temperaturas estejam uma bagunça dentro dele, cada sub-pedacinho com uma temperatura diferente totalmente maluca, mas se elas estiverem "congeladas" no tempo, então continua sendo um regime estacionário. Chamamos essa distribuição de temperaturas (i.e. a temperatura em função da posição do sub-pedacinho) de *perfil de temperatura*.

3 A Lei de Fourier

Pausa para reflexão: como que a gente faz um fluxo de calor aparecer? Se queremos um fluxo de água, a resposta é simples: assopramos com força em uma ponta do cano, aumentando a pressão nela. Aí a água é empurrada para a outra ponta — conseguimos o fluxo, tudo normal. Mas e o calor? Não conseguimos assoprar ou empurrar a energia térmica...

A Lei de Fourier resolve o problema acima. Ela diz, simplesmente, que o fluxo de calor é proporcional à diferença de temperatura entre o ponto final e o inicial do "cano". Então se quisermos empurrar a energia térmica (= gerar um fluxo de calor) através de uma coisa, a gente aquece uma ponta dela e esfria a outra. Aí o calor vai da ponta quente para a ponta fria e o fluxo aparece!

Vamos colocar contas nisso: imagine um condutor bem pequeno de comprimento dx e seção transversal A, como na Figure 2. Se está passando um fluxo através do condutor, a Lei de Fourier diz que há uma diferença de temperatura entre as faces, digamos dT, como ilustrado. Então a conta fica:

$$\Phi = -kA\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x},$$

onde k é uma constante chamda de *condutividade* e depende do material do condutor.

Vamos analisar a equação com calma:

1. O sinal de menos aparece porque o fluxo de calor é no sentido contrário da diferença de temperatura, ou seja, do mais quente para o mais frio.
2. Quanto maior a diferença de temperatura, maior o fluxo de calor que vai fluir através do condutor.
3. Quando maior a área do condutor, maior o fluxo que vai fluir, pois assim ele oferece menos resistência à passagem do calor.
4. Quanto maior seu comprimento, menor o fluxo de calor, porque oferece mais resistência ao fluxo.

Essa equação para condutores bem pequenos é bastante geral: mesmo que o regime não seja estacionário, a cada instante ela é válida. Por exemplo: em um regime não estacionário, a diferença de temperatura entre as duas pontas vai mudar com o passar do tempo. A Lei de Fourier, então, nos diz que o fluxo também vai mudar com o passar do tempo, acompanhando a diferença de temperatura de modo proporcional: se a diferença de temperatura aumentar, ele também aumenta; se diminuir, ele também diminui.

O caso mais interessante para olimpíadas, entretanto, é o estacionário. Se estivermos nele, conseguimos analisar condutores que não sejam pequenos! Vamos imaginar um grande condutor, como na Figure 3. Podemos pensar que ele é a mesma coisa que vários condutores grudados, um em cima do outro, como ilustrado. Como queremos ver o caso estacionário, vamos dizer que o fluxo através de cada pequeno condutor é o mesmo:

$$\begin{gathered}\Phi_1 = \Phi_2 \\ \Phi_2 = \Phi_3 \\ \Phi_3 = \Phi_4 \\ \vdots\end{gathered}$$

Em outras palavras:

$$\Phi = -kA\frac{\mathrm{d}T_1}{\mathrm{d}x_1} = -kA\frac{\mathrm{d}T_2}{\mathrm{d}x_2} = -kA\frac{\mathrm{d}T_3}{\mathrm{d}x_3} = -kA\frac{\mathrm{d}T_4}{\mathrm{d}x_4} = \dots$$

Podemos usar um truque matemático para simplificar isso. O truque é: $a/b = c/d = (a+c)/(d+b)$ (ou seja, se duas frações são iguais, então a fração que é a soma em cima e em baixo das duas também é igual ao mesmo valor). Ou seja:

$$\Phi = -kA\left(\frac{\mathrm{d}T_1 + \mathrm{d}T_2 + \mathrm{d}T_3 + \mathrm{d}T_4 + \dots}{\mathrm{d}x_1 + \mathrm{d}x_2 + \mathrm{d}x_3 + \mathrm{d}x_4 + \dots}\right)$$

Mas a soma das diferenças de temperatura é só a diferença total! E a soma dos pequenos comprimentos é o comprimento total, também. Então, fincalmente, chegamos na fórmula mais importante:

$$\Phi = -kA\frac{\Delta T}{L}$$

Que é basicamente a fórmula para comprimentos pequenos, mas para comprimentos grandes. Note que ela só funciona para o regime estacionário.

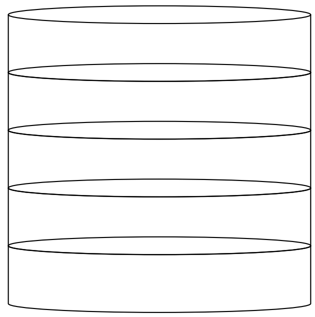

Figure 3: Um condutor grande

4 O perfil de temperatura no caso estacionário

Como o fluxo é o mesmo ao longo de todo o condutor, temos a equação levemente mais geral:

$$\Phi = -kA\frac{T(x) - T(x_0)}{x - x_0}$$

Ou seja: podemos imaginar qualquer subdivisão do condutor que quisermos, e a Lei de Fourier continua válida (pois uma subdivisão de um condutor em regime estacionário também é um condutor em regime estacionário). Reescrevendo a equação, temos:

$$T(x) = -\frac{\Phi}{kA}x + (\frac{\Phi}{kA}x_0 + T(x_0))$$

Ou seja: a temperatura é uma função linear ao longo do condutor, isto é, segue uma linha reta em função da temperatura.