Capitolo 12

Alberi Binomiali

Un Semplice Modello Binomiale

- Il prezzo corrente di un’azione è di $20.
- Tra 3 mesi sarà pari a $22 o a $18.

Prezzo dell’azione = $22

Prezzo dell’azione = $20

Prezzo dell’azione = $18

Un'Opzione Call

- Si consideri una *call* con prezzo d'esercizio di \$21 e scadenza tra 3 mesi.
- Il valore finale della *call* è pari a
  - \$1, se il prezzo finale dell'azione è di \$22;
  - \$0, se il prezzo finale dell'azione è di \$18.

Prezzo dell'azione = \$20
Prezzo dell'opzione = ?

→ Prezzo dell'azione = \$22
Prezzo della *call* = \$1

→ Prezzo dell'azione = \$18
Prezzo della *call* = \$0

Un Portafoglio Privo di Rischio

- Si consideri un portafoglio lungo su Δ azioni e corto su 1 *call*.
- Il suo valore dopo 3 mesi è

$$? \to \begin{cases} \$22\times\Delta - \$1 \\ \$18\times\Delta - \$0 \end{cases}$$

- Il portafoglio è privo di rischio se $\$22 \times\Delta - \$1 = \$18 \times\Delta - \$0$, ossia se $\Delta = 0{,}25$.

Valutazione del Portafoglio

- Il portafoglio privo di rischio è lungo su 0,25 azioni e corto su 1 *call*.
- Il valore del portafoglio tra 3 mesi è pari a

$$\$22 \times 0{,}25 - \$1 = \$4{,}5.$$

- Se il tasso privo di rischio è pari al 12%, il valore del portafoglio oggi è pari a

$$\$4{,}5e^{-0{,}12 \times 0{,}25} = \$4{,}367.$$

Valutazione dell'Opzione

- Il valore corrente del portafoglio, lungo su 0,25 azioni e corto su 1 *call*, è pari a \$4,367.
- Il valore corrente di 0,25 azioni è pari a

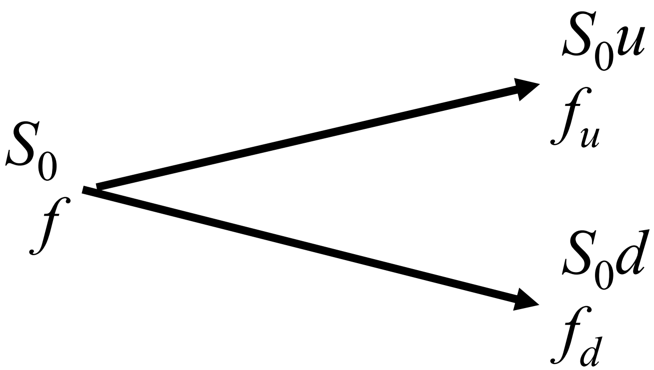
$$0{,}25 \times \$20 = \$5 \ .$$

- Pertanto, il valore corrente della *call* è pari a

$$\$5 - \$4{,}367 = \$0{,}633 \ .$$

Generalizzazione

- Si consideri un titolo, con prezzo corrente S_0, e un'opzione, con prezzo corrente f e scadenza al tempo T, scritta su questo titolo.
- Supponiamo che, da oggi a T, il prezzo dell'azione possa salire a S_0u o scendere a S_0d ($u > 1$, $d < 1$).



Generalizzazione (continua)

- Il valore al tempo T di un portafoglio lungo di Δ azioni e corto di un derivato è pari a

$$S_0 u \Delta - f_u$$

$$S_0 d \Delta - f_d$$

- Il portafoglio è privo di rischio se $S_0 u \times \Delta - f_u = S_0 d \times \Delta - f_d$, ossia se

$$\Delta = \frac{f_u - f_d}{S_0 u - S_0 d}$$

Generalizzazione *(continua)*

- Il valore del portafoglio al tempo T è

$$S_0 u \Delta - f_u \, .$$

- Il valore del portafoglio oggi è

$$(S_0 u \Delta - f_u)\, e^{-rT} \, .$$

- Un'altra espressione per il valore del portafoglio oggi è

$$S_0 \Delta - f \, .$$

- Pertanto $$(S_0 u \Delta - f_u)\, e^{-rT} = S_0 \Delta - f$$

  da cui $$f = S_0 \Delta - (S_0 u \Delta - f_u)\, e^{-rT} .$$

Generalizzazione *(continua)*

- Sostituendo Δ si ottiene

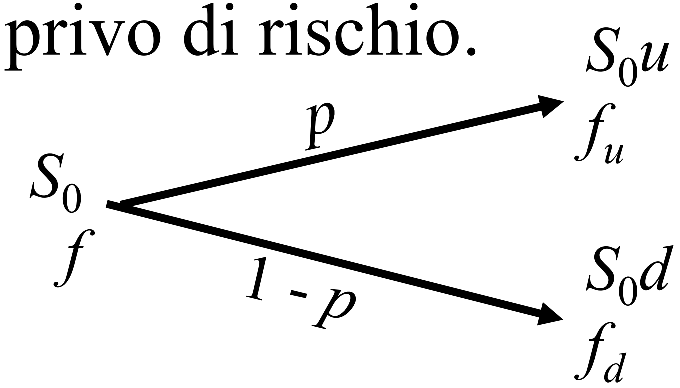
$$f = [p\,f_u + (1 - p)\,f_d]\,e^{-rT}$$

dove

$$p = \frac{e^{rT} - d}{u - d}$$

Valutazione Neutrale verso il Rischio

- Le variabili p e $(1 - p)$ possono essere interpretate come le probabilità di rialzo e di ribasso in un mondo neutrale verso il rischio.
- Il valore di un derivato è pari al suo *payoff* atteso in un mondo neutrale verso il rischio attualizzato in base al tasso privo di rischio.



Valutazione Neutrale verso il Rischio

- Se le probabilità di rialzo e di ribasso sono p e $(1 - p)$, il valore atteso del prezzo dell'azione al tempo T, ossia $E(S_T) = p\, S_0\, u + (1 - p)\, S_0\, d$, risulta uguale a $S_0\, e^{rT}$.
- Pertanto, in un mondo neutrale verso il rischio ci si aspetta che il prezzo dell'azione cresca in base al tasso d'interesse privo di rischio
- In base al principio della valutazione neutrale verso il rischio, possiamo valutare i derivati calcolando il valore atteso del loro *payoff* in un mondo *risk neutral* per poi attualizzarlo in base al tasso privo di rischio

Riesame dell'Esempio Originale

- Riesaminiamo l'esempio:

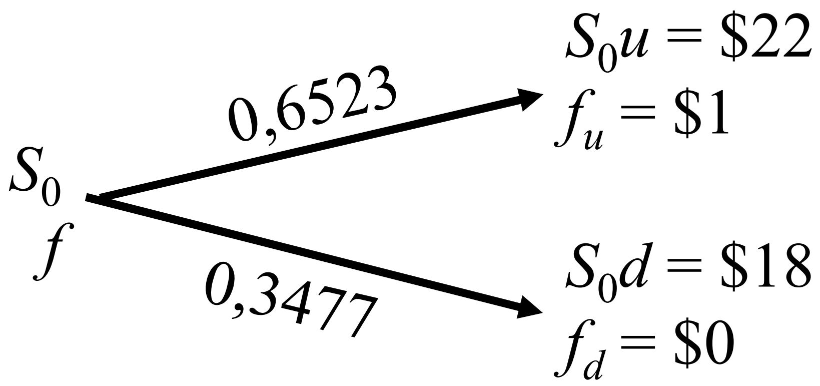
$$
\begin{array}{ccc}
 & & S_0u = \$22 \\
 & \nearrow & f_u = \$1 \\
S_0 & & \\
f & \searrow & S_0d = \$18 \\
 & & f_d = \$0
\end{array}
$$

- Dall'equazione $\$20e^{0,12\times0,25} = \$22p + \$18\times(1-p)$ si ottiene $p = 0,6523$.
- Allo stesso modo, per ottenere p possiamo utilizzare la formula

$$p = \frac{e^{0,12\times0,25} - 0,9}{1,1 - 0,9} = 0,6523$$

Valutazione dell'Opzione

- Dato che



il valore dell'opzione, calcolato in base al principio della valutazione neutrale verso il rischio, è pari a

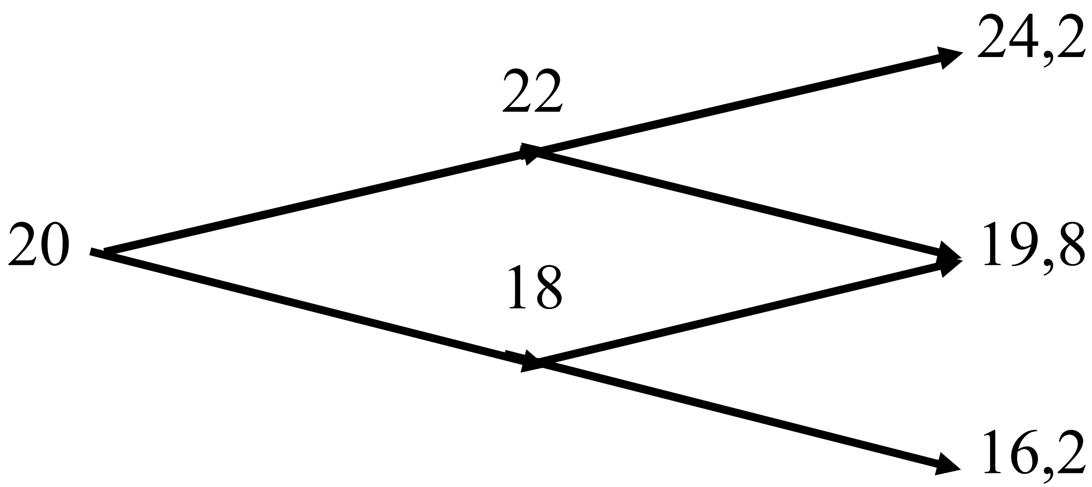
$$e^{-0,12\times 0,25} \times (0,6523 \times \$1 + 0,3477 \times \$0) = \$0,633 .$$

Tasso di Rendimento Atteso

- Quando si valuta un'opzione in termini dell'azione sottostante le probabilità di rialzo e di ribasso del modo reale sono irrilevanti.
- Ne segue che anche il tasso di rendimento atteso dell'azione è irrilevante.

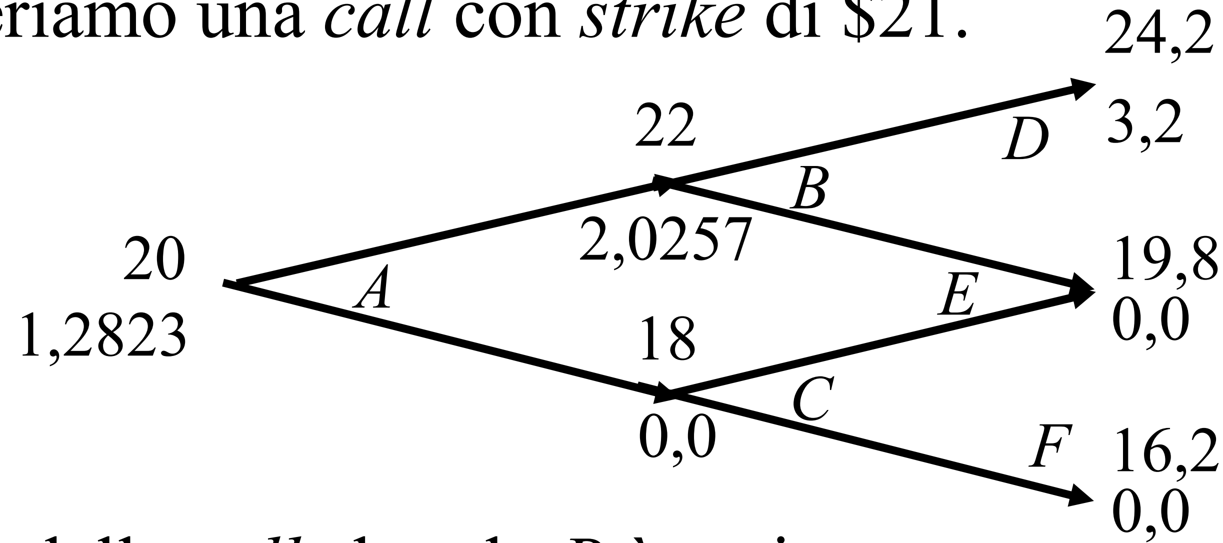
Un Esempio a Due Stadi

- Il prezzo del titolo parte da \$20 e in ciascuno dei due intervalli di tempo può salire o scendere del 10 per cento.
- Ogni intervallo è di 3 mesi e r = 12%.



Valutazione di una Call

- Consideriamo una *call* con *strike* di \$21.



- Il valore della *call* al nodo *B* è pari a

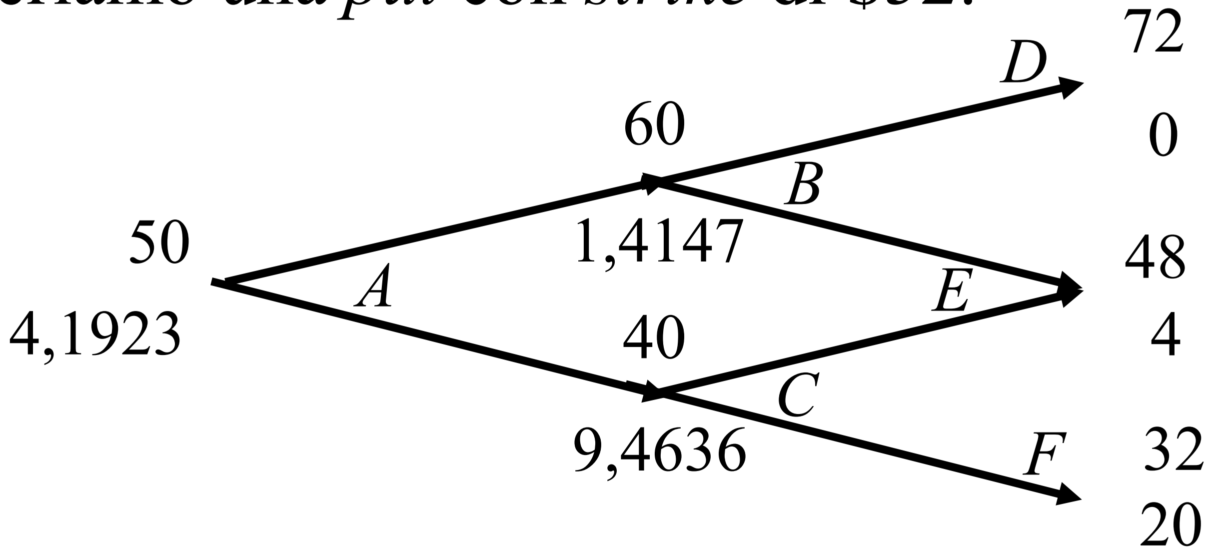
  $e^{-0,12\times0,25}(0,6523\times\$3,2+0,3477\times\$0) = \$2,0257$.

- Il valore della *call* al nodo *A* è pari a

  $e^{-0,12\times0,25}(0,6523\times\$2,0257+0,3477\times\$0)=\$1,2823$.

Valutazione di una Put

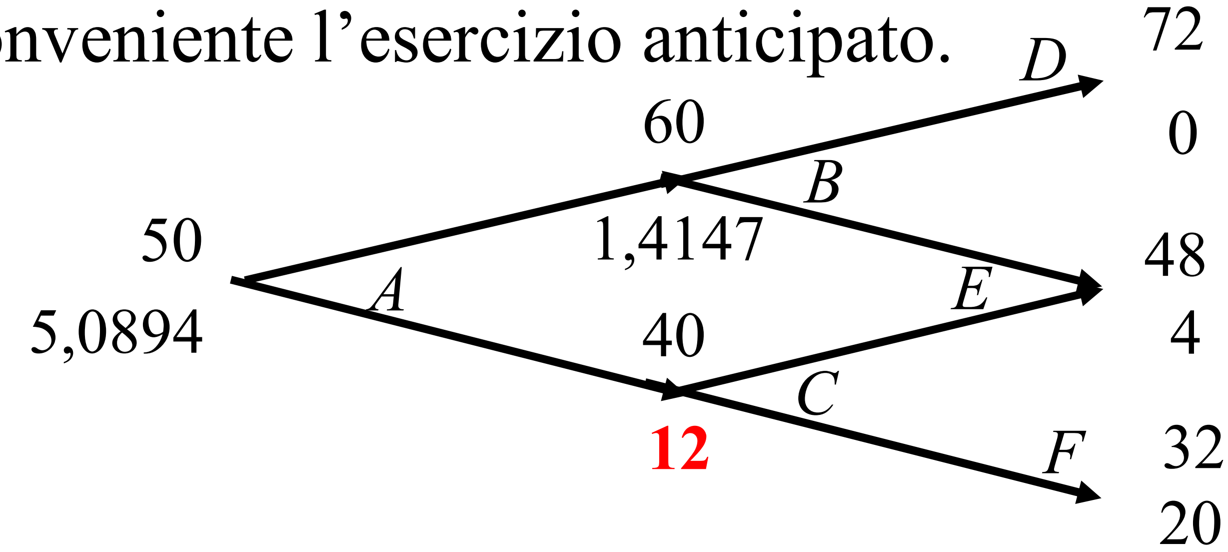
- Consideriamo una *put* con *strike* di \$52.



- Il valore della *put* al nodo *A* è pari a $e^{-2\times0{,}05\times1}$ $(0{,}6282^2\times\$0+2\times0{,}6282\times0{,}3718\times\$4+\$0{,}3718^2\times\$20)$ $= \$4{,}1923$.

E se la Put è Americana?

- Se la *put* è americana, si deve verificare a ogni nodo se è conveniente l’esercizio anticipato.



- Al nodo *C*, l’opzione non esercitata vale $9,4636 e $12 in caso di esercizio anticipato. In questo caso l’esercizio anticipato conviene .

Delta

- Il Delta (Δ) è il rapporto tra la variazione del prezzo dell'opzione e la variazione del prezzo dell'azione sottostante.
- Il valore del Δ varia da nodo a nodo.

Scelta di u e d

- Un modo per far sì che la volatilità sia coerente con quella del processo è quello di porre

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

$$d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

  dove σ è la volatilità e Δt è la lunghezza dell'intervallo temporale.

- Questo è l'approccio seguito da Cox, Ross e Rubinstein.

Teorema di Girsanov

- Quando passiamo da un mondo con un certo insieme di attitudini verso il rischio a un mondo con un altro insieme di attitudini verso il rischio, cambiano i tassi di crescita attesi delle variabili, ma restano inalterate le volatilità.
- Questa è un’illustrazione di un importante risultato generale noto come «teorema di Girsanov» (*Girsanov’s theorem*).
- Possiamo quindi stimare la volatilità nel mondo reale e utilizzarla nel mondo neutrale verso il rischio.

Opzioni su Altre Attività

- Nel caso delle opzioni scritte su indici azionari, valute e *futures*, la procedura di costruzione degli alberi resta invariata, fatta eccezione per il calcolo di p.

Probabilità di Rialzo

- La probabilità di rialzo è pari a

$$p = \frac{a - d}{u - d}$$

dove

$a = e^{r\Delta t}$ (titoli che non pagano dividendi);

$a = e^{(r-q)\Delta t}$ (indici azionari);

$a = e^{(r-r_f)\Delta t}$ (valute estere);

$a = 1$ (*futures*).

Alberi Binomiali e Formula BSM

- Il valore corrente della *call* è pari a

$$c = e^{-rT} \sum_{j=0}^{n} \frac{n!}{(n-j)!\,j!} p^j (1-p)^{n-j} \max(S_0 u^j d^{n-j} - K, 0)$$

- La *call* è *in the money* se $j > \alpha$, dove $\alpha = \dfrac{n}{2} - \dfrac{\ln(S_0 / K)}{2\sigma\sqrt{T/n}}$.
- Pertanto $c = e^{-rT}(S_0 U_1 - K U_2)$, dove

$$U_1 = \sum_{j>\alpha} \frac{n!}{(n-j)!\,j!} p^j (1-p)^{n-j} u^j d^{n-j}$$

$$U_2 = \sum_{j>\alpha} \frac{n!}{(n-j)!\,j!} p^j (1-p)^{n-j}.$$

Alberi Binomiali e Formula BSM

- L'espressione per U_1 equivale a

$$U_1 = e^{rT} \sum_{j>\alpha} \frac{n!}{(n-j)!\,j!} (p^*)^j (1-p^*)^{n-j},$$

dove $p^* = \dfrac{pu}{pu + (1-p)d}$.

- Ora U_1 e U_2 possono essere entrambi valutati con la distribuzione binomiale.
- Non resta che prendere il limite di c per $n \to \infty$ e utilizzare il risultato secondo cui la distribuzione binomiale tende a quella normale.