UNIVERSITÀ CATTOLICA DEL SACRO CUORE

Sede di Milano

Facoltà di Economia

Corso di Laurea in Economia, finanza e mercati internazionali.

Le Opzioni

Approccio pratico all'analisi delle serie storiche e all'operatività sulle opzioni in python.

Relatore:

Prof.ssa Paola Fandella

Tesi di laurea di:

Gabriele GATTO

N. Matricola: 5215212

Anno Accademico 2024/2025

SOMMARIO

1. INTRODUZIONE

Nel contesto dell'economia e della finanza, e in particolare nel mondo degli investimenti sui mercati finanziari, si assiste a una crescente integrazione tra i classici modelli di analisi quantitativa e tecnologie sempre più sofisticate. In quest'ottica, questa tesi si propone di costruire un ponte tra la teoria economica tradizionale, ampiamente approfondita in ambito accademico, e lo studio di implementazioni informatiche utili alla pratica operativa sui mercati. La conoscenza di questi strumenti di calcolo è ormai considerata imprescindibile per gli analisti finanziari, per questo verranno approfondite tecniche di analisi quantitativa e strategie operative robuste, costruite e testate, grazie a strumenti di calcolo e modelli di *backtesting*. Lo strumento principale che ci permetterà di manipolare ed estrarre le informazioni che ci interessano sarà *python,* un linguaggio di programmazione di alto livello per l'analisi dei dati. L'obiettivo principale di questa tesi è riassumere i concetti chiave per operare in modo consapevole e professionale sui mercati finanziari, coniugando rigorosità analitica e attenta valutazione dei rischi. Ogni concetto teorico viene immediatamente tradotto in strutture algoritmiche python, permettendo di capire nel dettaglio cosa si muove dietro le funzioni algebriche e avere sempre a disposizione delle formule virtuali pronte all'uso.

La struttura della tesi riflette questa duplice focalizzazione *teorico/operativo*, articolandosi in due sezioni principali. La prima, dedicata all'analisi quantitativa e predittiva delle serie storiche, analizza nel dettaglio i rendimenti e riassume le caratteristiche principali di una serie storica, l'applicazione di tecniche di decomposizione stagionale e la verifica della stazionarietà delle serie temporali. In questa parte vengono inoltre analizzati diversi processi stocastici tra i più conosciuti, al fine di testarne le reali capacità predittive. Questi modelli, come il modello ARIMA, modelli a medie mobili e modelli autoregressivi, sono utili a conoscere la materia prima con cui lavora chi opera sui mercati, ovvero le serie dei prezzi di un determinato strumento finanziario. La sezione si conclude con la progettazione di una strategia di *pairs trading* basata sui principi della cointegrazione: tale strategia viene implementata in python e sottoposta a un rigoroso backtesting, per verificare le possibilità di successo della nostra strategia di trading.

La seconda sezione si concentra sulle *opzioni*, uno strumento derivato tra i più scambiati sui mercati finanziari. Viene dapprima presentata la teoria classica dei principali modelli di pricing per le opzioni, spaziando dal modello ad albero binomiale, alla simulazione Monte Carlo fino al modello di Black-Scholes-Merton, costruendo passo per passo gli algoritmi al fine di ottenere dei modelli di pricing in grado di restituire prezzi attendibili. Vale la pena precisare che non sfideremo i grandi teorici nella ricerca dell'*algoritmo perfetto*, ovvero quel modello utopistico che generi profitti costanti nel lungo periodo basandosi solo sull'analisi dei prezzi passati. Questi temi sono al centro del dibattito tra accademici e operatori del settore ormai da decenni, verranno riproposti i modelli più famosi, ma vale la pena anticipare che operare in maniera profittevole nel lungo periodo *battendo il mercato di* riferimento è estremamente complesso, numerosi studi dimostrano l'impossibilità di generare *alfa* con una gestione attiva. Gli algoritmi python offrono una serie di funzioni integrate utili a semplificare il nostro lavoro di indagine sui contratti opzionari, aiutandoci a estrapolare immediatamente le informazioni utili. Parlando di opzioni si affronteranno in maniera approfondita le greche e i rischi esistenti su questi particolari contratti derivati. Si approfondisce inoltre il ruolo delle clearing house, dei market maker e l'uso pratico dell'option chain. A completamento di questa parte, si esaminano i rischi impliciti associati ai derivati e si passano in rassegna diverse strategie operative avanzate, dal delta hedging al gamma scalping, dalla covered call a combinazioni di opzioni come lo straddle e lo strangle, fino ad arrivare a varie forme di spread, come il noto butterfly.

Tutti i codici, i grafici e ciò che troverete su queste pagine, è riassunto in una serie di brevi script python pubblicati online, in modo che possano essere consultabili da chiunque, modificati e migliorati secondo le proprie esigenze. Al QR code riportato in calce sarà possibile scaricare i codici sorgente divisi per capitolo e argomento trattato, gli stessi codici che troveremo nelle prossime pagine, commentati e pronti per essere integrati a qualunque modello. Il progetto è completamente disponibile su Github, sarà dunque possibile (e vi prego di farlo!) proporre modifiche o migliorie al progetto. E' un piccolo progetto che nasce grazie alla disponibilità di materiale gratuito e messo a disposizione online da altri utenti, secondo la logica dell'innovazione *open source.* Con lo stesso spirito, questo progetto vuole essere altrettanto aperto a chiunque voglia interagire:

E' mia opinione che riscrivere a mano, in codice, delle formule finanziarie o delle funzioni che calcolino determinati indici di rischio, i cui valori sono magari già reperibili online, sia estremamente utile. E' fondamentale raggiungere un grado di competenza elevato per costruire degli algoritmi funzionali. Bisogna imparare una lingua con la quale comunicare con la *macchina*, nel nostro caso il linguaggio di programmazione python. Non ci addentreremo nel mondo della programmazione, anche per un neofita dell'informatica, ma con conoscenze basiche in tema investimenti e mercati finanziari, sarà possibile leggere il codice e comprenderne le logiche, anche grazie ai *plot* esplicativi. Cogliamo l'occasione per fornire alcune terminologie utili: *plot* significa *grafico*, come vedremo in python la funzione *plot* serve a richiamare delle rappresentazioni come assi cartesiani, diagrammi, tabelle.

Dal punto di vista metodologico, l'intero elaborato adotta un'impostazione quantitativa sperimentale: i modelli teorici vengono formalizzati matematicamente e subito testati su dati reali mediante simulazioni ed esperimenti computazionali. L'utilizzo intensivo di python e delle sue librerie specializzate in ambito finanziario e statistico costituisce il vero valore aggiunto di questo lavoro. La tesi non si limita a discutere la teoria in astratto, ma ne dimostra l'applicabilità concreta grazie a un connubio di analisi quantitativa e implementazione algoritmica. Tra le pagine chi conosce i mercati riuscirà a visualizzarli e manipolarli con metodi nuovi ed efficaci, diventando realmente operativo con tanti spunti nuovi, oltre a strumenti per testare e migliorare le proprie strategie. Chi conosce i codici scoprirà un nuovo ambito in cui applicare le sue conoscenze, aggiungendo al proprio bagaglio professionale un taglio finanziario operativo di ottimo livello. Nessuna delle pagine che seguono pretende di consegnarti la formula magica del guadagno lineare, ma si vedranno tutti gli strumenti utili a sviluppare un *framework* operativo adattabile, replicabile, utilizzabile ovunque perché sempre disponibile online.

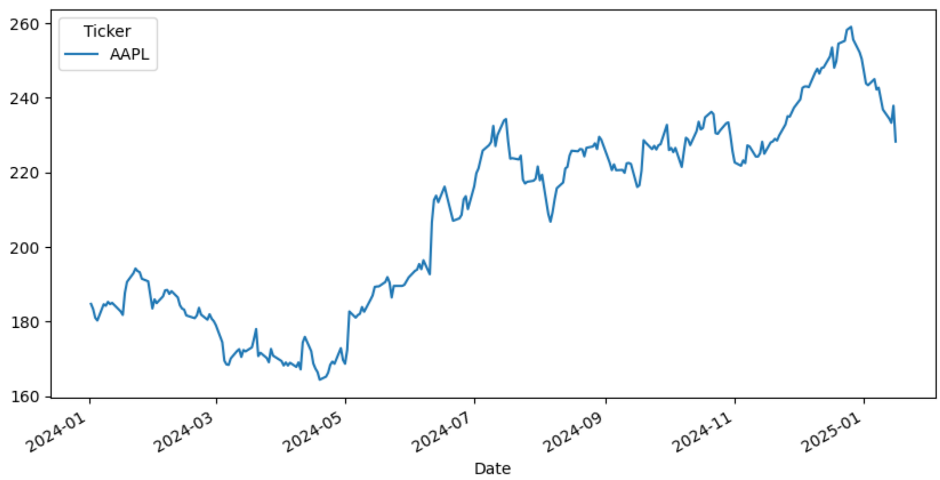
2. L'ANALISI DELLE SERIE STORICHE IN PYTHON.

Python è un linguaggio di programmazione ad alto livello particolarmente diffuso grazie alla sintassi semplice e intuitiva che lo caratterizza. La sua versatilità lo rende perfetto sia per aspiranti sviluppatori che si approcciano per la prima volta alla programmazione, sia per programmatori esperti. Questi ultimi sono una figura professionale molto richiesta specialmente in ambito fintech. L'abilità di manipolare dati in python è funzionale in molti contesti, per chi è abituato a lavorare su fogli di calcolo come excell o si approccia per la prima volta a python con uno scarso background in tema di programmazione, l'apprendimento è agevole e veloce, con la possibilità di implementare modelli più complessi e automatizzare i processi di calcolo. La scalabilità di python lo rende particolarmente adatto allo sviluppo del machine learning e nell'implementazioni di reti neurali per l'artificial intelligence, utili allo studio di *problemi non lineari* (Cardellicchio, s.d.). L'idea alla base di questo lavoro è che la teoria può essere approfondita e fatta propria se si trova un ambiente dove implementare praticamente modelli teorici, adattandoli ai mercati reali. Le informazioni che estrarremo grazie alle nostre analisi permetteranno di prendere una decisione consapevole e giustificata per la costruzione delle nostre strategie. Ulteriori caratteristiche che rendono python particolarmente utile alla manipolazione di dati finanziari come dati di bilancio o serie storiche sono:

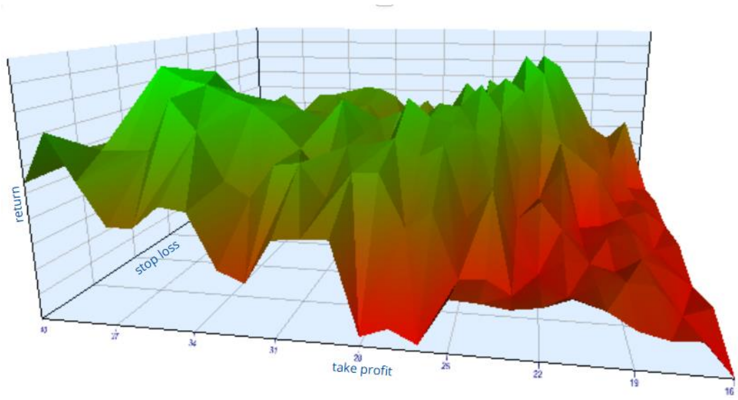
- Le librerie specializzate: il valore aggiunto di python sono le librerie integrate che contengono tutte le funzioni utili alle nostre analisi. Su un linguaggio open source tutta la community ha dato un contributo rilevante per implementare nuove librerie tematiche che contengano una serie di tool per l'analisi statistica dei dati, oppure operazioni algebriche, o ancora strumenti per la rappresentazione grafica. Inoltre alcune librerie permettono di accedere a dati aggiornati in live, anche gratuitamente. Queste librerie vanno installate nel nostro terminale tramite l'operatore *pip* e poi richiamate in ogni template per essere utilizzate durante il lavoro. Tra le librerie più famose, quelle che ci torneranno più utili sono:
    - *Pandas*: per l'analisi di dati dati in formato sequenziale o tabellare, quali serie temporali o dati in array.
    - *Numpy*: per la gestione degli array multidimensionali.
    - *Matplotlib* e *Seaborn*: per le rappresentazioni grafiche.
    - *Yfinance*: per scaricare le serie storiche, le informazioni aziendali o i dati di bilancio per un determinato titolo.
- La grande community è pronta a rispondere, a volte in pochi minuti, a qualunque domanda si ponga sui blog di settore. E' reperibile online un'infinità di informazioni riguardo alla programmazione in python e il materiale gratuito per approfondire è potenzialmente illimitato. Negli anni va inoltre ampliandosi un'ampia letteratura tecnica sul tema.
- La possibilità di implementare Expert Advisor (MetaQuotes, 2018) consente di automatizzare le operazioni di trading sui mercati finanziari. Grazie a specifiche API fornite dai broker, tramite il codice è possibile collegarsi direttamente alla piattaforma di trading, analizzare i dati di mercato e aprire, modificare o chiudere posizioni in modo autonomo, seguendo delle strategie predefinite.

Nel programmare modelli per l'analisi delle serie storiche lavoreremo principalmente con *array*, ovvero matrici, contenenti le serie dei prezzi o dei rendimenti su un determinato arco temporale e timeframe. Se volessimo ad esempio scaricare i prezzi di chiusura *daily* degli ultimi 2 anni per 2 diversi strumenti, otterremmo un array che conterrà i quattro prezzi OHCL (Open, High, Close, Low) per entrambi gli asset, per un totale di 9 colonne (compresa la data) e circa 500 righe (250 giorni di mercati azionari aperti all'anno). Nei sistemi di automazione come gli *expert advisor*, spesso costruiti per operare ad alta frequenza, questi array possono aggiornarsi a ogni tick, quindi svariate volta al secondo, eseguendo in una frazione di secondo e senza fatica una serie infinita di righe di codice. Prendiamo per esempio i prezzi di chiusura daily AAPL nel 2024, l'array avrà dimensione *250x2,* tante righe quanti giorni di trading in un anno, dove ogni riga è composta da data (colonna uno) e rispettivo prezzo di chiusura (colonnna due). Per rappresentare graficamente la serie storica in python avremo bisogno di alcune funzioni disponibili nelle librerie che abbiamo citato precedentemente. La prima parte dello script infatti è dedicata all'importazione di tali librerie. La seconda prevede l'inizializzazione di alcune variabili, che saranno gli input del nostro codice. Nella terza e ultima parte ci sono i comandi di calcolo. La prima variabile di input, che chiamiamo *stocks,* sarà dedicata alla stringa contenente il *ticker* del titolo che intendiamo studiare. In una seconda variabile *datetime,* che chiameremo *start,* la data di partenza del campione temporale che vogliamo analizzare. Non ci serve altro, con *yfinance* (Roussi, 2019) possiamo scaricare subito i prezzi OCHL del periodo selezionato e ne estraiamo solo quelli di chiusura. Vediamo che nelle prime righe sono state richiamate tutte le 4 librerie viste in precedenza. Per importare le librerie usiamo *import*. Alle librerie diamo un alias breve con cui richiamarle, l'alias si attribuisce tramite l'operatore *as.* Stiamo trascurando il timeframe che di default verrà impostato sul daily, ma nei prossimi capitoli vedremo più implicazioni di questa libreria e setteremo in base alle nostre esigenze anche questo parametro. Con un'operazione abbiamo estrapolato il vettore dei dati *close* che ci interessa e lo plottiamo con la funzione *plot*.

```
import pandas as pd       # Importiamo alcune librerie
import yfinance as yf
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from datetime import datetime
from scipy.stats import shapiro, jarque_bera, skew, kurtosis, norm
import statsmodels.api as sm

stocks = ['AAPL']                           # Definiamo il ticker
start = datetime(2024, 1, 1)                  # Data di inizio del record
data = yf.download(stocks, start=start)   # Scarichiamo i dati

close = data.loc[:, "Close"]
close.plot(title="Andamento del prezzo di AAPL")
```



Lo studio degli input del nostro modello, studiando le possibili combinazioni che ne ottimizzano le performance, è un lavoro prioritario per i trader e gli analisti. Infatti in base al setting dei nostri parametri otterremo diversi andamenti della equity line, ovvero della crescita del nostro capitale.. Lo studio delle possibili combinazioni degli input è un processo chiamato *ottimizzazione*. Ad esempio, data una strategia di trading, potremmo ottimizzare stoploss e take profit per trovare la combinazione di questi parametri che massimizza il profitto. L'ottimizzazione su questi due parametri e genera un grafico 3D che evidenzia le aree di maggior successo della strategia, ovvero dove sono presenti i punti più alti e verdi. (MetaQuotes, s.d.) Quei punti hanno coordinate di take profit e stop loss ottimo.



Come sarà chiaro, l'obiettivo di questo capitolo sarà l'introduzione e il test di alcuni modelli statistici predittivi. L'analisi statistica e la manipolazione dei dati storici con python, la creazione e il test dei modelli che vogliono spiegare l'andamento di un titolo, sono temi imprescindibili per conoscere i mercati finanziari, e operare consapevolmente anche su strumenti e mercati più complessi. E' il caso delle opzioni, strumenti derivati il cui valore dipende da quello di un asset sottostante. Lo studio dell'andamento di quest'ultimo è fondamentale per formulare ipotesi sul futuro valore dei contratti opzionali. Qualora il lettore fosse interessato ad approfondire nel dettaglio la programmazione, il web è pieno di risorse preziose. Ad esempio per il nostro lavoro si potrebbe partire dal cercare online informazioni sulle funzioni che andremo a richiamare e sulle quali non avremo modo di soffermarci singolarmente. Da questo momento nelle didascalie di codice non saranno più riportate le righe dedicate alle rappresentazioni grafiche, che invece sono disponibili negli script su github.

2.1 Analisi dei rendimenti.

Il variare dei prezzi permette la definizione dei rendimenti tra due istanti di tempo. Ci bastano due righe di codice per trasformare i prezzi e creare un grafico dei rendimenti, dove studiare e riconoscere da subito alcune caratteristiche importanti della serie, come la volatilità, il valore medio ed eventuali asimmetrie. E' anche possibile, avendo una serie storica abbastanza lunga di dati, calcolare le probabilità con le quali si distribuisce un fenomeno, permettendoci di formulare ipotesi con un certo grado di certezza. Facciamo un esempio, immaginiamo di avere a disposizione la serie storica delle condizioni meteo degli ultimi 5 anni alle isole Bahamas, non sarà possibile prevedere con certezza le condizioni climatiche tra sette giorni, ma possiamo affermare con un certo grado di certezza che le probabilità che nevichi sono molto basse, data la presenza di pochissime nevicate nei registri delle condizioni meteo sulle isole caraibiche. Ovviamente si assume che il sottostante, in questo caso le condizioni meteo passate e future, continuino a mantenere un livello di volatilità costante e pari a quella storica. Ciò significa che le nostre assunzioni risulterebbero falsate in caso ci fossero variabili esterne non prese in considerazione, come il surriscaldamento globale o lo scioglimento dei ghiacciai. E' possibile capire che l'assunzione di volatilità e media costante è molto forte, è una proprietà di poche serie che chiameremo *stazionarietà*. Ripetiamo che non possiamo in nessun modo prevedere il futuro nel breve termine, ma possiamo stabilire con un buon grado di approssimazione, e con determinati livelli di probabilità cosa potrebbe probabilmente succedere o non succedere.

Useremo queste logiche per dividere il campo di variazione in base alla frequenza con cui si sono presentate variazioni. Per fare ciò lavoreremo sui rendimenti dei prezzi, pari a:

- Rendimento semplice :

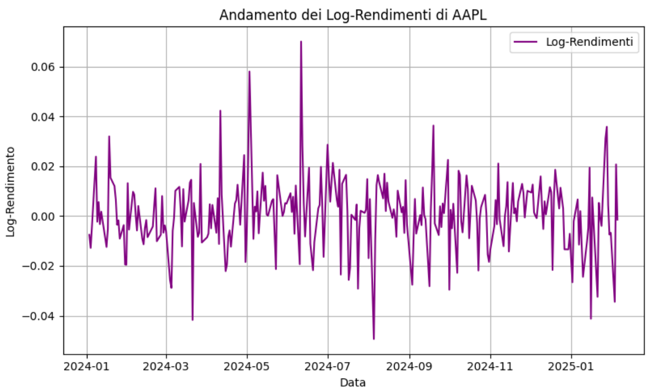
$$r_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}$$

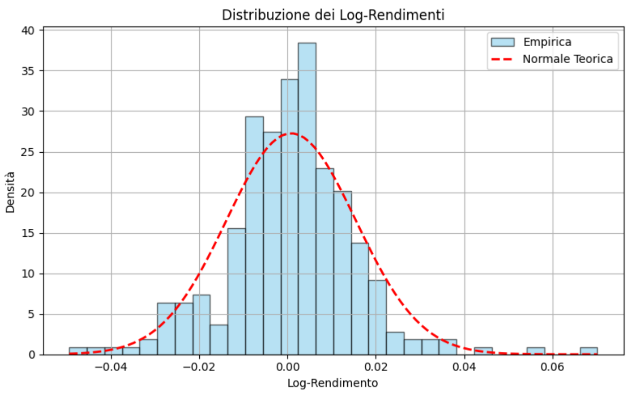
- Rendimento logaritmico, che useremo più spesso per le nostre analisi:

$$r_t = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right)$$

Valutando i rendimenti di una serie storica e plottandone la distribuzione di frequenze in un istogramma noteremo che l'andamento dei prezzi sembra seguire una normale, tendente alla leptocurtica, con media μ e deviazione standard σ. Un risultato importante soprattutto nell'ambito della gestione del rischio, poiché ci permette di determinare la perdita potenziale di un investimento una volta fissata la soglia di riferimento, che chiameremo *livello di fiducia*. Questo parametro ci è utile come riferimento per misurare le probabilità che si verifichino eventi dannosi al nostro capitale, permette il calcolo di numerosi indici particolarmente utili per il monitoraggio dei rischi portafoglio, come il *Value at Risk*. Una volta fissato il livello, la distribuzione normale ci può aiutare a calcolare qual è la probabilità che i prezzi futuri cadano fuori dall'intervallo di fiducia. Il livello di fiducia può essere calcolato in funzione della media (μ) e della deviazione standard (σ), ma soprattutto in base al livello di rischio che l'investitore vuole assumersi. Facendo un esempio delle formulazioni a cui può portarci lo studio della distribuzione dei rendimenti potremmo dire che le possibilità che il nostro sottostante subisca un ribasso superiore al -2% è inferiore all'1%. Bisogna fare molta attenzione, perché se dovessimo ricadere in quell'1% di probabilità, ovvero sulle code della nostra curva di distribuzione, potremmo risultare scoperti e subire gravi perdite. Spesso si tende a costruire strategie operative per scommettere sugli eventi più probabili, contro la rara possibilità che si manifestino eventi estremi. Purtroppo anche questi ultimi accadono, e in questi casi le conseguenze sono disastrose.

```
close = close.squeeze() # Convertiamo in Series perchè è un dataFrame
log_returns = np.log(close).pct_change() #trasforma i prezzi in logaritmi e calcola la variaizone

# Creiamo una Series utilizzando come indice le date (escludendo la prima data)
returns = pd.Series(log_returns, index=close.index[1:])
```





Commentando il codice, la funzione *pct_change()* ha trasformato i valori del nostro array da prezzi in rendimenti e ci ha permesso di studiarne la distribuzione tramite i grafici generati. Facendo una rapida ricerca online si scopre che questa operazione è integrata alla libreria pandas che abbiamo richiamato precedentemente. E' la stessa *pydata* (PyData, s.d.), creatrice della libreria, a definire online tutti i dettagli:

"The pct_change() method returns a DataFrame with the percentage difference between the values for each row and, by default, the previous row.

Which row to compare with can be specified with the periods parameter." (PyData, s.d.)

Sintassi:

dataframe.pct_change(periods, axis, fill_method, limit, freq, kwargs)

Quindi la funzione pct_change ci restituisce la variazione percentuale tra un dato e il precedente. Nel nostro caso i dati sono prezzi precedentemente trasformati con i logaritmi, e le variazioni calcolate saranno rendimenti logaritmici. Abbiamo detto che di default la variazione viene calcolata tra il dato attuale e il precedente. Possiamo cambiare questo meccanismo inserendo il primo parametro, il cosiddetto *shift*. Quante posizioni in dietro nell'array rispetto a quella del dato attuale, si andrà a prendere il dato da usare per calcolare la variazione? Di default il setting attribuisce valore 1, quindi prendendo per esempio un prezzo a t, si andrà al t-1, cioè al prezzo subito precedente per calcolare la variazione percentuale tra i due. Se avessimo messo come *input periods = 2* invece avremmo avuto il rendimento tra il giorno t e il giorno t-2. Notiamo che nel primo caso, la dimensione dell'array iniziale di dati si sarebbe ridotta di 1. Questo perché dato un vettore di n prezzi, per calcolare il rendimento abbiamo sempre bisogno di due dati, dell'attuale e del precedente. Il dato più vecchio quindi non ha un corrispettivo passato con cui confrontarsi per calcolare la variazione, ma è utile solo al dato 2 per calcolare il rendimento successivo.

Nell'analisi della distribuzione di un insieme di dati si possono calcolare degli indici di asimmetria e di curtosi. La simmetria implica che sia possibile dividere la distribuzione in due parti, con i valori simmetricamente distribuiti nelle due code. Il test *skewness* ci dirà se i valori si distribuiscono maggiormente alla destra della media (valore maggiore di zero), o a sinistra (valore minore di zero). Nel nostro caso, AAPL ha mantenuto un trend crescente nell'ultimo anno, ci aspettiamo quindi un'asimmetria della coda alla destra della media, quindi un numero maggiore di rendimenti positivi rispetto a quelli negativi.
La curtosi invece è un indice che misura la forma della nostra curva della distribuzione, se i valori sono maggiormente concentrati vicino alla media la curtosi risulterà positiva e la distribuzione tenderà a essere leptocurtica. Se invece hanno maggior peso i valori nelle code, allora la distribuzione sarà più piatta e seguirà forma platicurtica:

- Indice di curtosi = 0: forma normale
- Indice di curtosi > 0: forma leptocurtica
- Indice di curtosi < 0: forma platicurtica

Abbiamo già detto che la distribuzione dei rendimenti di titoli azionari spesso tende a essere maggiormente appuntita e più alta rispetto a una distribuzione normale, infatti il risultato della statistica calcolata sui rendimenti di AAPL restituisce un valore > 0.

Effettuiamo ora dei test di normalità, in particolare il test di Jarque-Bera e di Shapiro-Wilk. Il primo si basa sull'asimmetria e sulla curtosi precedentemente calcolate. L'ipotesi nulla è verificata se asimmetria e curtosi in eccesso sono nulle. Tale ipotesi viene rigettata per valori di JB troppo grandi.

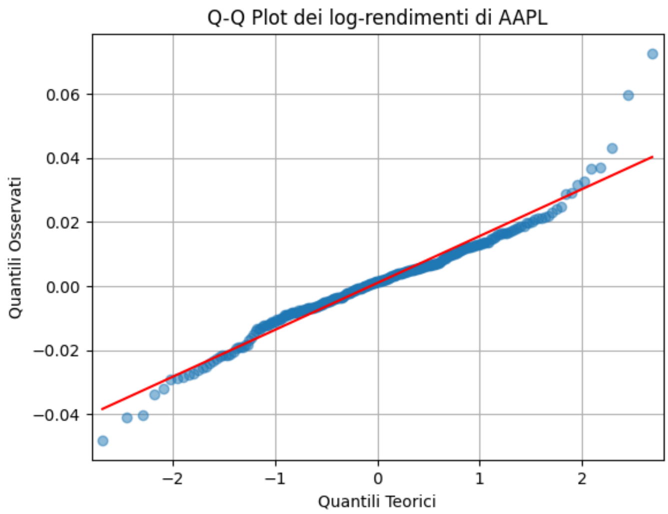
$$JB = \frac{n}{6}\left(S^2 + \frac{(K-3)^2}{4}\right)$$

Con S = indice di asimmetria e K = curtosi.

Il test Shapiro-Wilk invece può restituire valori tra 0 e 1, nel caso di valori molto vicini allo 0 rifiuteremo l'ipotesi nulla che i valori del campione seguano una distribuzione normale. Il *Q-Q plot* è un implementazione grafica che permette di studiare la normalità dei rendimenti confrontando i quantili osservati dei log-rendimenti con quelli teorici di una normale. Se i due combaciano allora la nostra distribuzione segue una normale. Calcolare le nostre statistiche risulta particolarmente semplice grazie alla libreria *scipy* che abbiamo richiamato a inizio codice. Questa libreria è particolarmente utile per il calcolo numerico di derivate e per la risoluzione di *equazioni differenziali ordinarie* (ODE), oltre che per il calcolo di distribuzioni probabilistiche, test statistici, calcolo delle medie e altre analisi statistiche.

```python
### Calcolo delle statistiche
media = returns.mean()
dev_std = returns.std()  # Deviazione standard campionaria
asimmetria = skew(returns)
curtosi = kurtosis(returns)  # Curtosi in eccesso (0 per una normale)

### Test di normalità
shapiro_stat, shapiro_p = shapiro(returns) # Test di Shapiro-Wilk
jb_stat, jb_p = jarque_bera(returns) # Test di Jarque-Bera
```

```
Statistiche dei log-rendimenti di AAPL:
----------------------------------------
Media: 0.000946
Deviazione Standard: 0.014680
Asimmetria (Skewness): 0.357251
Curtosi (Excess Kurtosis): 2.996771

Test di normalità - Shapiro-Wilk:
  Statistica: 0.961827  p-value: 0.000001
Test di normalità - Jarque-Bera:
  Statistica: 108.357320  p-value: 0.000000
```

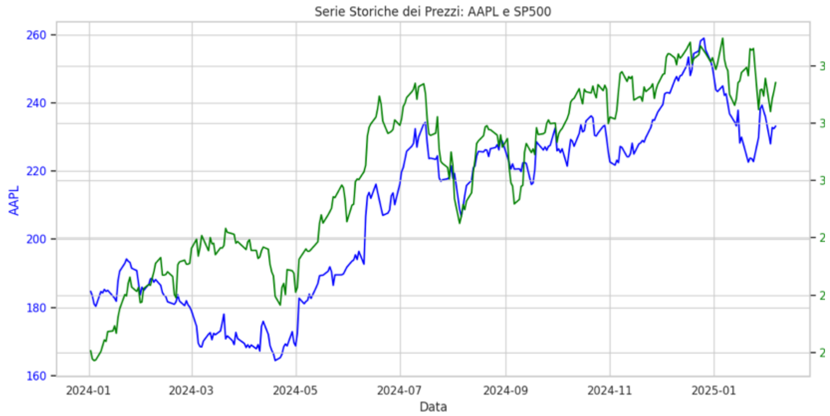


Commentando i risultati che restituisce questo modello, troviamo conferma del fatto che la nostra curtosi è abbastanza alta, indice di forma leptocurtica della distribuzione. Anche le nostre previsioni sull'asimmetria erano esatte, la coda di sinistra raccoglie più dati. Tutto ciò comporta che la distribuzione si avvicina a una normale, ma non la replica perfettamente, come ci dicono i test di normalità e il *Q-Q plot*. Questi esempi dimostrano che la conoscenza di linguaggi come python permettono di avere accesso velocemente a una numerosa serie di possibili implementazioni e analisi. Un'altra analisi utile soprattutto nell'ambito della gestione attiva dei portafogli azionari è la regressione lineare. Implementare un modello di regressione permette di calcolare il rischio del nostro asset in relazione all'andamento del suo indice di mercato di riferimento. Noi andremo a calcolare la regressione tra la variabile dipendete *Y* pari alla serie storica di AAPL e la variabile indipendente X pari alla serie storica dell'indice S&P 500. Otterremo alcune importanti informazioni da questa analisi:

- Misurare il parametro *beta(β)* del modello di regressione significa stabilire come il prezzo di AAPL reagisce a una variazione del prezzo dell'indice. Un beta maggiore di 1 implica una varianza maggiore del prezzo di AAPL, mentre un beta minore di 1 ci dice che AAPL si "muove meno" rispetto al suo mercato di riferimento.
- Per i gestori di portafoglio il beta rappresenta il rischio sistematico e non diversificabile di AAPL, cioè quel livello di rischio da cui non possono liberarsi con la diversificazione.

- Il modello di regressione lineare non è l'ideale per costruire dei modelli predittivi, ma può darci informazioni importanti sulle relazioni tra gli asset che costituiscono un portafoglio.
- Sul modello regressivo si possono effettuare vari test statistici per misurare la significatività della relazione, la bontà del modello (R^2) e individuare eventuali anomalie (eteroschedasticità, non normalità dei residui).

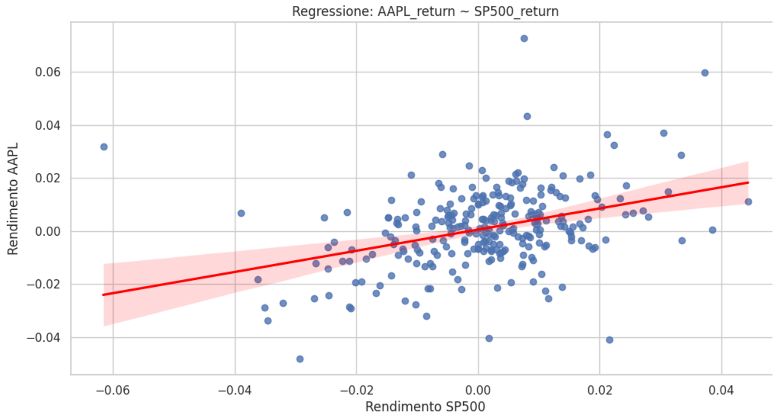
Il grafico su tre assi ci porta a ipotizzare che esista una relazione tra gli andamenti di AAPL e S&P500, ma saranno delle analisi statistiche a confermare o a smentire le nostre ipotesi.



Per costruire il nostro codice lavoreremo con i prezzi di chiusura che abbiamo già estratto per AAPL e andremo a scaricare la serie storica dell'S&P500 sullo stesso timeframe e periodo temporale, in modo da avere due array delle stesse dimensioni. Faccio notare che per scaricare le serie storiche tramite *yfinance* è necessario avere il ticker o l'ISIN di un qualsiasi titolo, in questo caso abbiamo scaricato la serie di un fondo replicante l'indice S&P tramite codice ISIN, mentre al paragrafo precedente i dati venivano estratti tramite un ticker.. Con queste variazioni si vuole dimostrare che ci sono molte strade per raggiungere lo stesso obiettivo, che python permette di maneggiare più operatori contemporaneamente, di sviluppare e personalizzare i nostri progetti secondo le modalità che sentiamo più affini, ogni sviluppatore ha infatti un suo modo di organizzare il codice secondo un suo stile, spesso riconoscibile. Altre funzioni utili: la funzione *dropna()* cancella i valori non disponibili, *squeeze* trasforma in serie il datetime. Una volta in possesso delle due serie storiche dei prezzi si procede al calcolo dei rendimenti logaritmici, che vengono poi inseriti come variabili dipendenti e indipendenti nel nostro modello di regressione. Con *mode.summary* ritorneranno le statistiche e i parametri calcolati dal nostro modello di regressione, uno *scatter plot* ci mostrerà come si sono mossi i rendimenti dei due titoli. Notiamo l'utilizzo di una libreria precedentemente importata di cui non avevamo ancora parlato, *statsmodels.* (Statsmodelw, s.d.)Questa libreria permette di avere classi e funzioni in grado di stimare numerosi indici statistici, come in questo caso i parametri della regressione lineare. Successivamente avremo modo di usarla anche per la scomposizione della serie storica nonché per altre implementazioni.

```python
ticker2 = "IE00B3WJKG14"
AAPL_close = close
SP500_close = yf.download(ticker2, start=start)["Close"].squeeze()

# Calcolo dei rendimenti logaritmici
AAPL_rend = np.log(AAPL_close).pct_change().dropna().squeeze()
SP500_rend = np.log(SP500_close).pct_change().dropna().squeeze()

# Creazione e stima del modello di regressione
X = SP500_rend  # Variabile indipendente
y = AAPL_rend   # Variabile dipendente

X_const = sm.add_constant(X)    # impostiamo la costante
model = sm.OLS(y, X_const).fit()   # riproduciamo il modello

print(model.summary())  #stampiamo i modelli
```

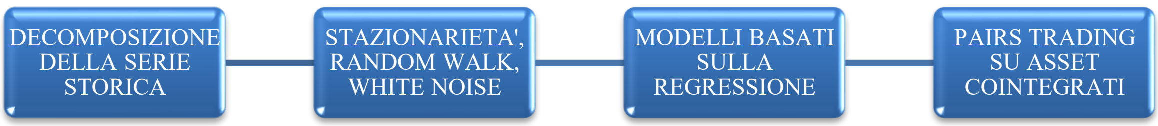
```
                            OLS Regression Results
==============================================================================
Dep. Variable:                   AAPL   R-squared:                       0.141
Model:                            OLS   Adj. R-squared:                  0.138
Method:                 Least Squares   F-statistic:                     44.12
Date:                Thu, 06 Feb 2025   Prob (F-statistic):           1.70e-10
Time:                        22:11:31   Log-Likelihood:                 779.46
No. Observations:                 271   AIC:                            -1555.
Df Residuals:                     269   BIC:                            -1548.
Df Model:                           1
Covariance Type:            nonrobust
================================================================================
                   coef    std err          t      P>|t|      [0.025      0.975]
--------------------------------------------------------------------------------
const            0.0005      0.001      0.648      0.518      -0.001       0.002
IE00B3WJKG14     0.3994      0.060      6.642      0.000       0.281       0.518
==============================================================================
Omnibus:                       40.740   Durbin-Watson:                   2.042
Prob(Omnibus):                  0.000   Jarque-Bera (JB):              162.175
Skew:                           0.528   Prob(JB):                     6.08e-36
Kurtosis:                       6.640   Cond. No.                         72.3
==============================================================================
```



Commentiamo i risultati di questo modello. L'R^2 ha valore 0.141, ciò significa che il modello spiega solo il 14% della varianza dei prezzi di AAPL, facendoci intendere che ci sono altri fattori che influenzano la variabilità di Y che non vengono catturati dalla nostra variabile indipendente. Un valore elevato della *F-statistic* ci indicherebbe che una grande porzione della varianza totale è spiegata dal modello, ma anche qui i risultati sono deludenti con un valore di 44.12. Il p-value molto basso ci porta a rifiutare l'ipotesi nulla e concludere che almeno una delle variabili indipendenti ha un effetto significativo sulla variabile dipendente: non si tratta dell'alfa, che risulta non significativamente diversa da zero, ma del coefficiente beta di valore 0.3994, pari all'aumento medio della variabile AAPL in seguito a un aumento unitario della variabile indipendente S&P500. In virtù di ciò che abbiamo già detto sul coefficiente beta e della sua utilità per la gestione del portafoglio, possiamo assumere che investire in AAPL abbasserebbe la volatilità in un portafoglio composto da altri titoli dell'S&P500. Infine può essere utile un'analisi dei residui, riassunta dalla statistica Durbin-Watson già presente nel report della regressione lineare. Un valore vicino a 2 suggerisce assenza di autocorrelazione, quindi i residui sono indipendenti. Lo studio dei residui avrà con un ruolo fondamentale nella strategia che costruiremo alla fine di questo capitolo.

2.2 L'analisi della serie storica.

Le serie storiche dei prezzi, come abbiamo visto, sono la materia prima su cui lavorano i nostri modelli. Cercheremo di spiegarne l'andamento, di trovare e stimare quelle variabili che ne influenzano il trend. La fase di analisi della serie storica è propedeutica a una seconda fase, quella previsionale, il cui scopo è calcolare possibili valori futuri. Vale la pena dare finalmente una definizione: si definisce serie storica un insieme di numeri, ordinati rispetto al tempo, che esprimono la dinamica di un certo fenomeno. Una parte del mondo accademico si dimostra scettica sulla capacità dell'analisi dei dati di contribuire positivamente alla creazione di modelli predittivi per le serie storiche. Questo principio è giustificato dal frequente fallimento della gran parte dei gestori nel tentativo di sovraperformare il *benchmark*[1] di riferimento. Non entreremo nel dettaglio di questo dibattito, ma assumeremo che si possano trarre risultati utili esercitandosi nella gestione attiva e approfondendo alcuni modelli considerati cardini imprescindibili nella gestione del portafoglio e delle operazioni su derivati. E' facilmente dimostrabile che studiare il passato è utile a sfruttare la proprietà di ciclicità dei mercati, determinati fattori si ripresentano e l'esperienza permette di meglio interpretare il presente e orientarsi per il futuro. Le serie storiche saranno anche la palestra dove allenare i nostri modelli e dove verificarne la robustezza, infatti un buon modello dovrebbe *fittare*, cioè riprodurre con un certo grado di precisione, l'andamento della serie nel passato. Solo successivamente si può testare la capacità del modello di prevedere i valori futuri. Attenzione, come vedremo un modello che fitti perfettamente la serie storica non necessariamente ha capacità predittive sul futuro, questo tipo di problematica è definita *overfitting* (Fornasiero, 2021) e può essere verificata tramite dei test *out of sample*. (Bella, 2021) La padronanza tecnica dei modelli statistici rimane quindi requisito fondamentale per valutare le serie storiche, ma è fondamentale tenere a mente che il fattore umano ha il suo peso sui mercati e porta a delle distorsioni non indifferenti tra i prezzi teorici calcolati dai modelli e quelli effettivamente visibili sui mercati. Noi, come ogni analista quantitativo, siamo interessati a implementare modelli che permettano di aumentare la redditività dei nostri algoritmi di trading. Vogliamo che questi modelli si basino su quantificazioni e assunzioni che non si alimentino su "supposizioni" o "intuizioni", ma sul risultato di analisi statistiche robuste. Nelle nostre analisi passeremo brevemente sui grandi classici dell'econometria, concentrandoci su alcuni modelli che hanno rivoluzionato lo studio delle serie storiche. Nel corso delle prossime pagine seguiremo questo percorso:



Partendo dall'approccio tradizionale, assumeremo che il processo seguito dai prezzi del sottostante sia scomponibile in due parti: una è la parte deterministica che è possibile scomporre a sua volta in componenti di trend, cicliche e stagionali, la seconda è la componente erratica data dall'errore tra i valori previsti del modello e le reali manifestazioni della serie.

$$y_t = dt + \varepsilon_t \qquad\qquad \varepsilon_t \sim WN(0, \partial^2)$$

Nel prossimo paragrafo andremo ad analizzare la parte deterministica, scomponendola e analizzandone le varie componenti. Infatti piuttosto che sperare di individuare tutte le determinanti del movimento della serie, è più semplice analizzarle singolarmente.

2.2.1 Decomposizione STL

Nell'*econometria delle serie storiche* (Hamilton, 1995) James D. Hamilton, noto economista di San Diego,definiva l'andamento dei prezzi di una serie storica come composto da 4 componenti:

- Il trend T.
- La stagionalità S.
- Una parte di errore R.
- Una componente ciclica C.

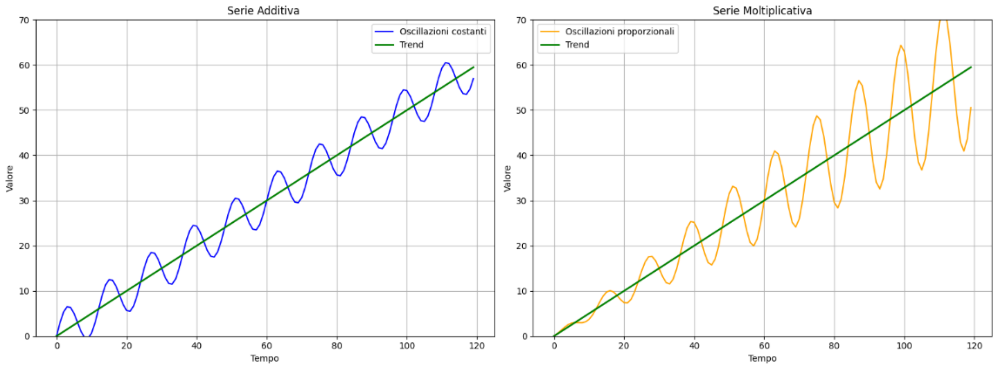
Secondo Hamilton l'andamento del prezzo è soggetto all'influenza di troppe variabili per effettuarne uno studio diretto, ma tramite la parcellizzazione del processo e lo studio delle singole componenti è possibile individuare delle evidenze tipiche di ogni componente e di sfruttarne le combinazioni per effettuare delle

[1] Criterio di confronto, nei mercati azionari il benchmark è l'indice del mercato di riferimento.

previsioni sul prezzo del titolo. Le relazioni tra le varie componenti della serie storica possono essere di due tipi, tipo additivo o tipo moltiplicativo, a seconda del modo in cui ricomponendosi ritornano alla serie originale.

$$Additivo\text{: } Y_t = T_t + S_t + R_t + C_t$$
$$Moltiplicativo\text{: } Y_t = T_t * S_t * R_t * C_t$$

Mentre nel modello additivo le componenti si sommano, e di conseguenza le variazioni nel tempo sono costanti e non dipendono dal livello del trend, un modello moltiplicativo è non lineare, può essere quadratico o esponenziale, e le variazioni non sono quindi costanti, ma bensì proporzionali al trend. Una serie che segua il modello moltiplicativo tenda ad avere una volatilità molto più elevata di una serie additiva a parità di trend.



La decomposizione STL, o per esteso *Decomposition Seasonal and Trend Decomposition using Loess* (Cleveland, 1990), è un valido metodo per individuare le componenti trend e stagionalità. La decomposizione STL si presta particolarmente bene all'analisi di asset che seguano un andamento stagionale. Lo svantaggio di questo modello rispetto gli altri metodi è l'applicabilità ai soli modelli additivi[2]. I vantaggi che lo rendono più apprezzato e statisticamente più robusto rispetto ad altri modelli di scomposizione sono:

- L'utente può monitorare variazioni della componente stagionale, che non resta fissa, ma può variare.
- E' più robusto e meno sensibile alle distorsioni da outlier.

L'algoritmo STL esegue uno smussamento della serie temporale utilizzando il metodo LOESS, un modello non parametrico per le relazioni non lineari, sviluppato in due cicli. Il ciclo minore si muove fra lo smussamento stagionale e di trend mentre il ciclo maggiore minimizza tramite OLS[3] l'entità dei valori erratici. Durante il ciclo interno, la componente stagionale viene calcolata per prima, e poi rimossa al fine di estrapolare la componente di trend tramite interpolazione. Una volta calcolati trend e stagionalità possiamo ottenere la componente erratica per differenze:

$$R_t = Y_t - T_t - S_t$$

Ancora una volta, tramite la libreria *statsmodel* è possibile implementare dei modelli statistici complessi semplicemente richiamandoli con una sola riga di codice. La preparazione dei dati richiede invece un aggiustamento degli indici dei dati per prevenire errori durante l'iterazione. Applicando la decomposizione ai prezzi di chiusura di AAPL abbiamo il grafico diviso in quattro sezioni dove possiamo vedere l'andamento

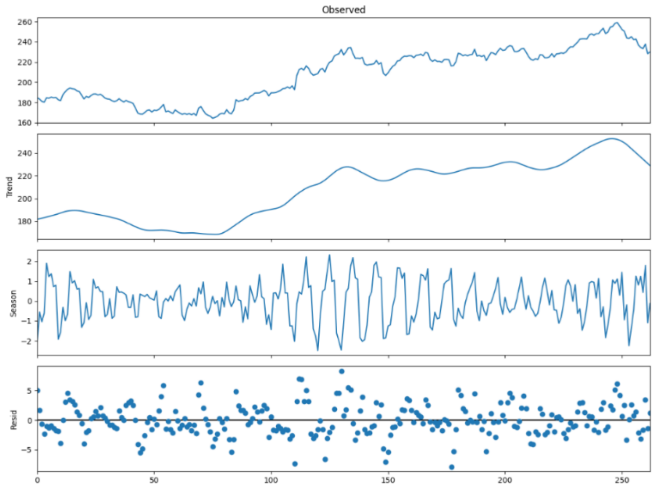
---

[2] Una decomposizione su una serie moltiplicativa può essere ottenuta applicando inizialmente una trasformazione logaritmica dei dati e poi ritrasformando le componenti

[3] Ordinary Least Squares: metodo di ottimizzazione basato sui minimi quadrati degli scostamenti.

delle singole componenti. E' interessante notare come i cicli della componente season possano cambiare di dimensione, con il calcolo combinatorio la funzione aggiorna i periodi della stagionalità a ogni iterazione.

```
from statsmodels.tsa.seasonal import STL

close.index = [i for i in range(close.shape[0])] # aggiustiamo gli indici dei prezzi
res = STL(close,10,13,21).fit() # effettuiamo la scomposizione
```



Per la decomposizione STL solitamente ci sono due dati di input fondamentali: la finestra della componente stagionale, che è il terzo parametro della funzione STL nel nostro codice (di valore 13), e la finestra della componente trend-ciclo, cioè il quarto parametro(di valore 21): il primo parametro è il numero di osservazioni consecutive da utilizzare per la stima della componente trend-ciclo; il secondo rappresenta il numero di anni consecutivi da utilizzare per stimare ogni valore associato alla componente stagionale. Questi due parametri controllano quanto rapidamente le due componenti possono cambiare. Per entrambi è consigliabile scegliere numeri dispari. Valori più bassi permettono un migliore adattamento, con una analisi meno pulita e minor *smoothing* della serie. La scelta dei due parametri di input non è casuale, ci permette di mediare tra l'overfitting della stagionalità e la possibilità di cogliere le variazioni di quest'ultima nel tempo. Come spesso capita agli addetti ai lavori che tentano di automatizzare procedure come questa, la manutenzione dei parametri predefiniti spesso richiede lunghe serie di aggiustamenti e ottimizzazioni in base al tipo di dati a disposizione e alle caratteristiche del singolo strumento oggetto di analisi: la decomposizione STL è considerata uno strumento utile per serie ad alta componente stagionale o ciclica, mentre risulta inefficace sulle serie storiche dei titoli azionari.

2.3 Processi Stocastici e Stazionarietà nelle Serie Temporali.

Per andare avanti nella costruzione di un nostro modello previsionale, dobbiamo confrontarci con alcuni fondamenti dell'analisi delle serie temporali: la stazionarietà, il White Noise e la Random Walks. Questi processi sono la base per comprendere meglio i successivi modelli più avanzati e gli strumenti che presenteremo ritorneranno spesso durante le nostre analisi. Inizieremo con lo studiare serie di dati semplificate, generate ad hoc da noi, allenando così i modelli in ambiente controllato, per poi testarli e implementarli gradualmente fino a poterli integrare in progetti che vogliano operare sui mercati reali. Sebbene queste tipicità si basano su assunzioni irrealistiche, sono le uniche che possono permetterci di effettuare delle previsioni con i nostri modelli. Sarà quindi necessario lavorare le nostre serie per portarle a un certo grado di stazionarietà, dove applicare i nostri modelli con maggiore efficacia.

2.3.1 Stazionarietà

Definiamo stazionaria una serie storica le cui proprietà statistiche non variano nel tempo. In presenza di stazionarietà, sia la media, che la varianza e l'auto-covarianza tra i valori mantengono un livello costante per tutta la serie. La stazionarietà è un assunto fondamentale per l'efficacia dei modelli chiamati *statistici,* come quelli che incontreremo successivamente. Se invece la serie risulta non stazionaria dovremo attuare determinate trasformazioni prima di poter fare delle stime sulla base dei dati della serie. Scontato dire che lavoreremo principalmente con dati che non seguono processi stazionari: le statistiche delle serie storiche variano nel tempo in base a innumerevoli fattori.

L'Augmented Dickey-Fuller (ADF) (Dickey Fuller Test, 1979), dal nome degli omonimi statistici, è un test per verificare la stazionarietà della serie. Esso vaglia l'ipotesi che y_t sia stazionario nelle differenze, contro l'alternativa che sia stazionario attorno ad un processo deterministico. In particolare il Dickey-Fuller è un test di radice unitaria che suppone ε_t incorrelato e omoschedastico. L'omoschedasticità è la proprietà teorizzata da Pearson (Pearson, 1905) di un paniere di variabili aleatorie di avere tutte la stessa varianza finita. Il processo:

$$y_t = dt + \varepsilon_t \qquad\qquad \varepsilon_t \sim WN(0, \partial^2)$$

Con *dt* componente deterministica, può appartenere a due diverse classi di processi stocastici:

- I processi Trend-Stationary: in cui le variazioni di breve seguono un modello a media zero, in cui la componente data dal trend è la preponderante.
- I processi Difference-Stationary: per i quali le differenze prime della variabile y_t ammettono una rappresentazione autoregressiva stazionaria.

Al fine di distinguere in quale classe ricada il processo in analisi si effettua il test ADF, sul nostro record dei prezzi di chiusura di AAPL :

```
from statsmodels.tsa.stattools import adfuller
adfuller(close)
```

Il codice ci restituisce il seguente output:

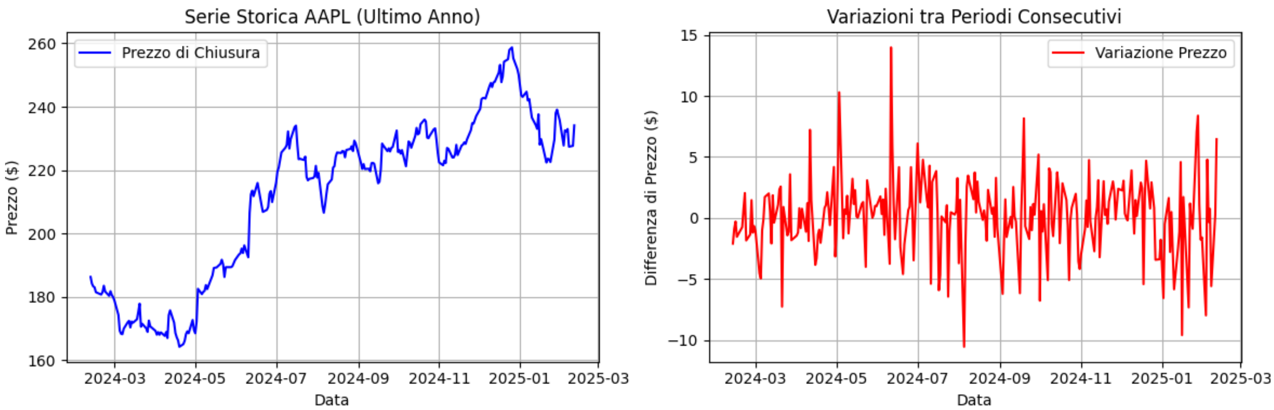
(-0.946058809660998, 0.7724266063679445, 0, 262)

Dove il secondo valore è il p-value, che non essendo minore di 0.05 ci porta a rifiutare l'ipotesi nulla di presenza di stazionarietà. Nulla di nuovo sotto i raggi del sole, la serie è non stazionaria. E' possibile dunque trasformare una serie storica non stazionaria in stazionaria?

Sì, applicando delle trasformazioni di vario tipo:

Trasformazione	Funzione	Formula
Differenza	Effettua una differenza tra un'osservazione e la precedente	TimeSeries.diff()
Logaritmo	Effettua il log per ogni osservazione	numpy.log(TimeSeries)

Radice quadrata	Effettua la radice quadrata per ogni osservazione	numpy.sqrt(TimeSeries)
Radice cubica	Effettua la radice cubica per ogni osservazione	numpy.power(TimeSeries,1/3)



Il grafico a sinistra riporta il prezzo delle azioni AAPL, serie non stazionaria, mentre a destra la serie delle variazioni giornaliere sulla destra risulta stazionaria. Trasformazioni come la differenza o i logaritmi possono aiutare a stabilizzare la varianza di una serie temporale. Per rendere stazionaria una serie è quindi possibile lavorare calcolando le differenze tra osservazioni consecutive. Tale operazione prende il nome di *differenziazione*, e ci sarà utile successivamente, quando trasformeremo le serie storiche per renderle stazionare e per permetterci di applicare i nostri modelli, che, come abbiamo detto, hanno spesso tra le ipotesi fondanti quella di stazionarietà della serie.

2.3.2 White Noise

White noise è il nome che si attribuisce a una sequenza di errori per cui è verificata l'ipotesi di i.i.d (independent identically distributed). Una volta costruito un modello saremo in grado di produrre previsioni sui valori futuri. Se gli scostamenti tra le nostre previsioni e i valori effettivamente rilevati in futuro risultano non correlati tra loro, allora possiamo dire di essere in presenza di un rumore bianco. Analizzare i residui del modello è fondamentale per valutare la bontà del nostro modello. Dei residui che non seguono il white noise segnalano l'incapacità del modello di identificare tutte le variabili che spiegano la varianza della serie. Detto in altre parole, la presenza di correlazione seriale negli errori è un segnale che il modello può essere migliorato, ad esempio includendo nuove variabili o modificando la sua struttura.

La serie degli errori (o residui), x_t, è una serie temporale della differenza tra un valore osservato e un valore previsto da un modello, in un determinato momento t.
Se y_t è il valore osservato e $\hat{y}_t$ è il valore previsto, definiamo come residui : $x_t = \hat{y}_t - y_t$

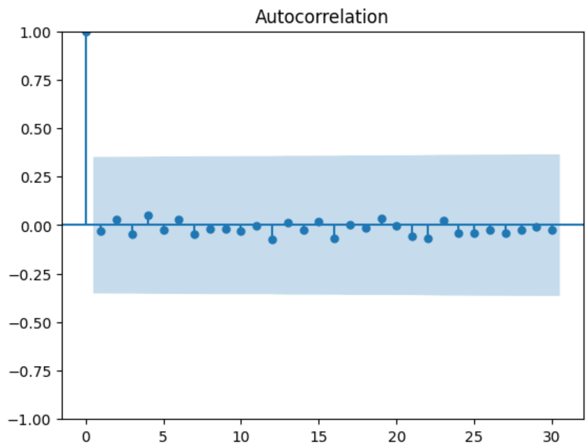
Proprietà di secondo ordine:

$$\mu_w = E(w_t) = 0$$

$$\rho_k = Cor(w_t, w_{t+k}) = \begin{cases} 0 & if\ k \neq 0 \\ 1 & if\ k = 0 \end{cases}$$

Le proprietà di secondo ordine del White Noise sono semplici e non ci dicono molto sul modello. La media delle serie dei residui è pari a zero e c'è assenza di autocorrelazione. Per verificare se siamo in presenza di white noise vale la pena plottare i residui e fare un'analisi di autocorrelazione sul nostro codice. Abbiamo detto che un modello capace di catturare le reali variabili predittive della variabile dipendente dovrebbe restituire dei residui che si distribuiscono come una white noise. Per fare un esempio pratico non possiamo usare direttamente il nostro array c*lose* precedentemente estratto dai prezzi di chiusura di AAPL, in quanto possiamo anticipare che la costruzione di un efficace modello predittivo avrà bisogno di analisi ben più approfondite. Generiamo quindi una serie casuale di residui distribuiti come un white noise. Per farlo generiamo una serie randomica con seed [4]pari a 1, che quindi seguirà una distribuzione normale standardizzata con varianza 1 e media 0. In questo modo saremo certi di avere estrazioni casuali identiche ogni volta che eseguiremo lo script e di conseguenza sarà verificata per definizione l'assenza di autocorrelazione. Una volta costruita una serie in questo modo, non siamo sorpresi nel vedere verificata l'ipotesi di assenza di autocorrelazione, esplicata dal plot sotto. Siamo inoltre in presenza di un processo stazionario, in quanto ogni osservazione non subisce l'influenza delle altre.

```
from statsmodels.tsa.stattools import acf

np.random.seed(1)
whiteNoise = np.random.standard_normal(1000)
acf_coef = acf(whiteNoise)
```



Il White Noise è quindi una condizione utile a definire la bontà del modello tramite lo studio dei *residui.* L'assenza di autocorrelazione è spiegata nel grafico dell'autocorrelazione ACF dall'assenza di valori che escano dalla banda azzurra (tralasciando *X=0* che è pari alla correlazione del primo valore su se stesso), e indica la capacità delle variabili scelte nel modello di spiegare la variabilità della serie e di eliminare qualsiasi correlazione seriale. Nel grafico sopra ottenuto possiamo notare l'assenza di pattern ricorrenti. Se così non fosse, i residui non seguirebbero un white noise *e quindi non avremmo la certezza della bontà di adattamento del modello*. Stiamo esasperando il concetto, che approfondiremo nei paragrafi successivi, che un analisi dei residui è utile non solo a verificare la bontà dei modelli, ma anche a individuare le dinamiche che muovono la componente erratica per la stima dei modelli previsionali. E' l'approccio moderno all'analisi della serie storica, a cui si rifanno molti teorici e trader algortimici, seguendo un approccio che vuole indagare la funzione dell'errore come stabilizzatore infraperiodale, cioè quel fattore che permette di riportare la variabile dipendente y verso l'equilibrio. Come vedremo queste assunzioni sono alla base di alcune strategie di trading, le cosiddette *mean reverting trading strategies* (Pant, 2022). Prima però vale la pena di introdurre la random walk, il processo stocastico che meglio rappresenta le serie storiche dei titoli azionari, in cui i prezzi risultano serialmente correlati.

---

[4] Il seed (in italiano "seme") è un numero intero usato per inizializzare un generatore di numeri casuali. Permette di replicare la generazione della medesima serie.

2.3.3 Random Walk

La traduzione di *random walk* (ovvero “passeggiata casuale”) esprime in modo efficace le proprietà delle serie storiche che seguono questo tipo di andamento. Immaginiamo di fare una passeggiata, e che a ogni passo decidiamo la direzione in modo del tutto casuale. Non abbiamo una meta, né siamo influenzati da fattori esterni: la scelta avviene solo in base al caso. Arrivati a un punto qualsiasi del percorso, diciamo X, conosciamo esattamente tutto ciò che abbiamo fatto per arrivarci: le scelte ai passi precedenti (X-1, X-2, ..., X-t) sono note. Questo garantisce continuità nel cammino: ogni nuova posizione è il risultato della precedente più una variazione casuale. Questo processo, noto come Random Walk, è un esempio classico di processo stocastico non stazionario, perché la sua variabilità aumenta nel tempo, e non esiste una tendenza a tornare verso una media fissa. Il più elementare processo non stazionario di Random Walk può essere così rappresentato:

$$y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t \qquad\qquad \varepsilon_t \sim WN(0, \partial^2)$$

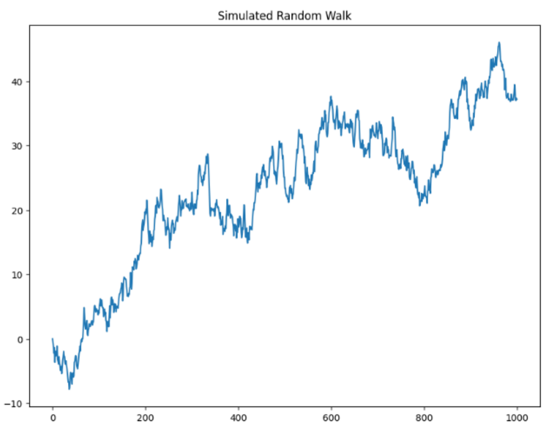
Il processo Random Walk implica una varianza linearmente crescente, che porta la variabile dipendente indefinitamente lontano dai valori iniziali al passare del tempo. Differentemente da altri modelli come quello autoregressivo stazionario, non gode della proprietà di regressione verso la media anche detta mean reversion. Il Random Walk è inoltre un processo dalla memoria lunga, in cui la variabile ε_t avrà un peso costante nelle realizzazioni future della variabile dipendente: uno shock a un istante *t* avrà un effetto persistente sulle realizzazioni future della serie. La random walk è quindi un processo stocastico, una successione di variabili aleatorie, in cui ogni valore dipende dal valore passato e da una componente casuale. Capiamo che la Random Walk è una serie simile sotto molti aspetti alla realtà dei prezzi del mercato. Le proprietà di secondo ordine di una random walk ci danno informazioni più interessanti di quelle del white noise. Nonostante la media di una passeggiata aleatoria sia ancora uguale a zero, la covarianza è in realtà dipendente dal tempo, c’è quindi presenza di autocorrelazione per definizione.

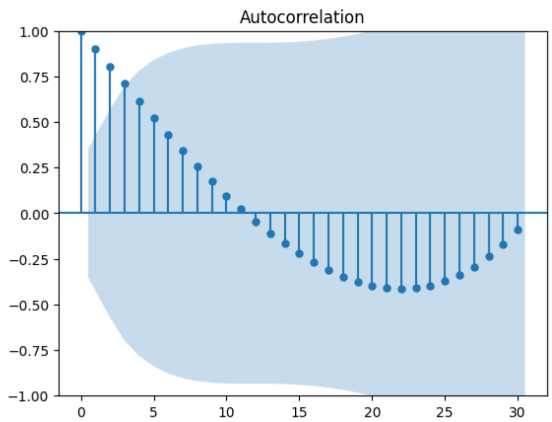
Proprietà di secondo ordine:

$$\mu_w = E(w_t) = 0$$

$$\gamma_k(t) = Cov(x_t, x_{t+k}) = t\sigma^2$$

```
np.random.seed(1)
steps = np.random.standard_normal(1000)
steps[0] = 0
random_walk = np.cumsum(steps)
```





Analizziamo alcune evidenze. Innanzitutto la covarianza cresce al crescere dell’arco temporale, questo rende difficile l’individuazione di un trend. Essendo la random walk una passeggiata casuale in realtà il trend è inconsistente per definizione. Inoltre il correlogramma evidenzia alcuni aspetti tipici di una random walk non stazionaria:

- Forti correlazioni tra valori vicini nel tempo. Ciò accade perché ogni valore dipende dal precedente.
- A differenza di una serie stazionaria dove l'autocorrelazione diminuisce rapidamente (spesso azzerandosi dopo pochi lag), qui il decadimento è lento e persistente.
- Dopo un certo numero di lag, l'autocorrelazione diventa negativa e continua a oscillare, indicando un possibile effetto di "memoria" o persistenza a lungo termine.

Quindi la random walk ci permette di affrontare un problema tipico delle serie storiche reali, cioè serie di cui non conosciamo il modello di generazione e alle quali possiamo solo adattare dei modelli per valutarne il correlogramma. Provando a farlo sulla serie dei prezzi di chiusura di AAPL che abbiamo imparato a conoscere, scopriremmo che i residui di un modello analitico puro sono quasi sempre soggetti ad autocorrelazione, e ciò fa cadere l'ipotesi di bontà dei modelli: il nostro obiettivo sarà trovare un modello predittivo i cui residui non presentino autocorrelazione.

Riassumendo quanto visto sulla stazionarietà, sul white noise e sulla random walk:

Concetto	Perché è Importante?	Cosa Succede se Ignorato?
Stazionarietà	Base per la costruzione di modelli affidabili	Previsioni inaffidabili, regressioni spurie
White Noise	Verifica la bontà del modello tramite l'analisi dei residui	Modelli mal specificati e risultati fuorvianti
Random Walk	Aiuta a comprendere la non-stazionarietà nei dati finanziari	Falsi segnali di predicibilità, modelli inutili

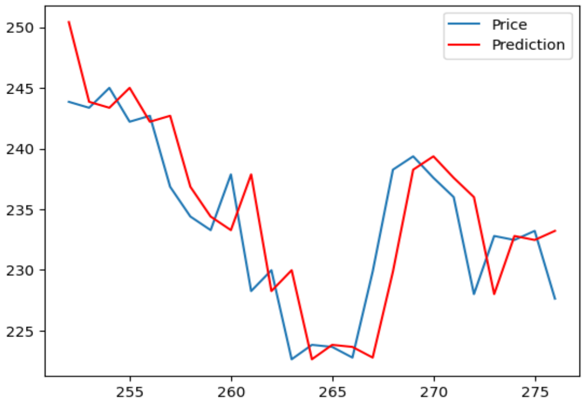
2.4 Costruzione e allenamento dei modelli.

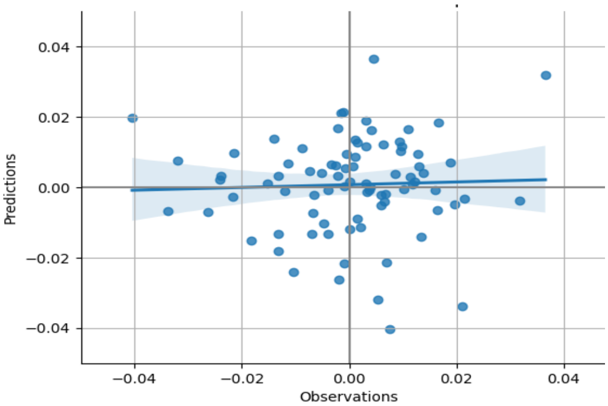
Ora che conosciamo le caratteristiche chiave delle serie storiche, possiamo finalmente provare ad analizzare dei modelli più complessi. Il primo modello base che andremo a ricreare è il *Modello di Persistenza,* un modello molto semplice dove, ponendoci ad un istante t e volendo prevedere l'istante t+1, non faremo altro che prevedere che il prezzo non cambi, rimanendo uguale a quello in t anche nell'istante successivo. Di conseguenza registrando la serie delle nostre previsioni dato un certo arco temporale, otterremo la serie storica originale traslata di un periodo. Confronteremo il prezzo previsto dalla strategia con l'effettivo valore assunto dalla variabile dipendente in quel momento e analizzeremo i residui del modello per verificarne la bontà. Per farlo useremo un primo indicatore della bontà del nostro modello di persistenza: l'errore quadratico medio, o MSE. Questo indice effettua la media dei valori quadratici dei residui della serie originale date le previsioni. Per farlo useremo la funzione *mean_squared_error* dalla libreria *scikit-learn* (Cournapeau, s.d.). Con la radice quadrata dello MSE otteniamo l'RMSE, un indice inversamente correlato alla bontà del modello. Questo parametro ci permette di valutare velocemente l'entità degli errori di previsione, cercheremo i modelli che abbiano i valori di RMSE più bassi e cioè quelli che ottengono stime più accurate:

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=k}^{N}(y_i - \hat{y}_i)^2}$$

Dopo la fase di costruzione di un modello infatti, segue quella di test, fondamentale per valutare nel dettaglio la bontà predittiva della nostra serie. Il miglior campione su cui testare il nostro modello sono gli stessi valori della serie storica utilizzata, ma separati in modo strategico. Una best-practice ampiamente validata dagli analisti consiste nel suddividere il dataset originario in due parti: un 70% dei valori disponibili vengono utilizzati per costruire e allenare il modello, escludendo il restante 30% di valori che invece serviranno a testarne la capacità predittiva. Questo approccio, noto come test *out of sample,* permette di ricreare un ambiente in cui il modello deve elaborare dati nuovi rispetto a quelli su cui è stato costruito, replicando così una condizione più realistica. In questo modo, si può verificare l'efficienza del modello e ridurre il rischio che esso sia costruito per adattarsi troppo fedelmente ai dati che già conosce, perdendo di conseguenza capacità di adattarsi a contesti futuri. Questo fenomeno è noto con il termine *overfitting*. Riassumendo questi concetti, per creare e testare il nostro modello di persistenza abbiamo bisogno di due dataset, uno dove allenare il modello e uno dove testarne la bontà: la soluzione più semplice in presenza di serie storiche è dividere il nostro dataset in due parti, una da studiare per trovare i parametri del modello e una per testarlo. Nel modello di persistenza i valori futuri attesi non necessitano di calcoli complessi, in quanto sono pari al corrispettivo all'istante precedente della stessa serie storica. A tal fine, si costruisce un array che contenga i valori traslati nel tempo e si calcola l'errore quadratico medio (RMSE) sul 70% dei dati più datati. Infine, si utilizza uno *scatter plot* per rappresentare graficamente la relazione tra i rendimenti previsti e quelli realmente osservati nel 30% più recente del dataset.

```python
from sklearn.metrics import mean_squared_error

predictions = close.shift(1).dropna()
RMSE = np.sqrt(mean_squared_error(close[int(len(close) * 0.7)+1:],predictions.iloc[int(len(close) *
0.7):])) # RMSE sul set di allenamento
```





Il modello di persistenza deve essere un punto di partenza per l'analisi dei successivi modelli più complessi che si fondano comunque su una dipendenza tra i valori passati e i valori futuri della serie.

2.4.1 Modello Autoregressivo

Da una prima evoluzione del modello di persistenza nasce il modello autoregressivo, un modello lineare basato sulla regressione dei valori di una serie temporale sui suoi valori precedenti. Come il modello di persistenza questo modello di analisi è valido solo per le serie storiche stazionarie, e si basa sulle manifestazioni precedenti dei prezzi. Se la serie non è stazionaria è necessario applicare tecniche di trasformazione come la differenziazione per renderla stazionaria. Un modello autoregressivo di ordine *n* su una serie stazionaria può essere riscritto come:

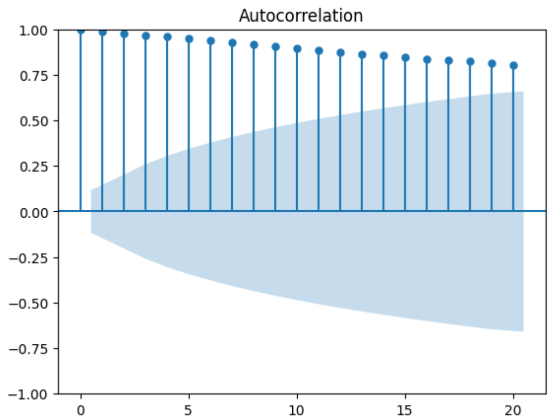
$$y_t = c + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \cdots + \phi_n y_{t-n} + \varepsilon_t$$

Con ε_t che si distribuisce come un rumore bianco, si ipotizza la *i.i.d* dei rendimenti. Una volta fissato l'ordine n, si può ricavare il valore dei parametri tramite il seguente modello di stima dei minimi quadrati:

$$\{\phi_1, \dots, \phi_n\} = argmin \left[\sum_{j=i}^{N} (y(t+j+n) - \sigma(t+j+n)\theta)^2 \right],$$

$$con\ \sigma = [y_{t-1} y_{t-2} \dots y_{t-n}]$$

L'identificazione di un modello AR(*n*) avviene tramite un processo di calcolo iterativo (Fornasiero, 2021), partendo da *n = 1*, si risolve il modello di cui sopra al fine di trovare i parametri, si calcola poi l'errore di predizione e si effettua un test di bianchezza dell'errore (TradingQuant, s.d.). Se il modello è corretto l'errore di predizione è bianco, ma se il test fallisce dobbiamo continuare la ricerca incrementando l'ordine n e ricominciando il processo. Se analizziamo il grafico dei residui ACF invece, ci rendiamo conto immediatamente se la nostra serie risulta autocorrelata. E' il caso delle serie storiche dei prezzi dei titoli quotati.

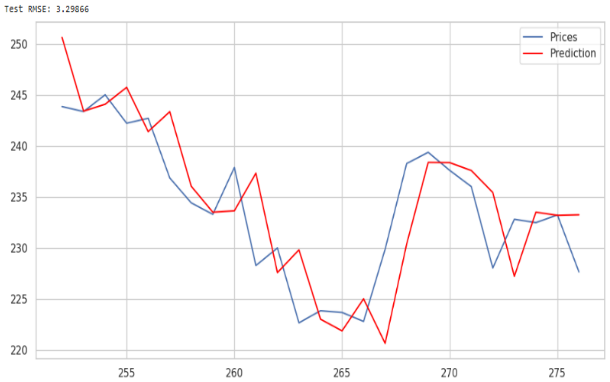


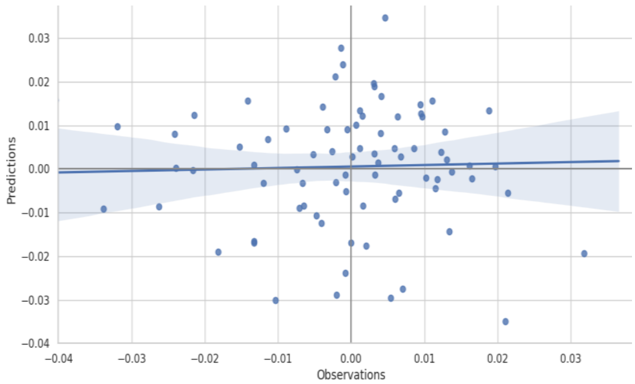
E' opportuno evidenziare come il processo di iterazione introdotto sia facilmente approcciabile su codice grazie agli iterabili in python, cioè oggetti attraverso i quali è possibile la creazione di loop che iterino determinati processi. Lo scorrimento sequenziale degli elementi al loro interno li rende uno strumento adatto ad accedere e manipolare elementi in oggetti o strutture di dati, come gli array multidimensionali delle nostre serie storiche. La più nota struttura di controllo per la programmazione che permetta l'iterazione di una porzione di programma si chiama *ciclo for.*

Nella fase di modellazione ci avvarremo delle modalità di splitting del dataset (Hyndman, 2021) a cui abbiamo accennato. Per la stima del modello di autoregressione sul campione di studio useremo la classe *AutoReg* della libreria statsmodels. Eseguiamo l'iterazione attraverso un ciclo for con numero di iterazioni pari al numero di osservazioni del set di test. Attraverso una validazione *look-forward* a ogni iterazione, viene addestrato un nuovo modello autoregressivo sui dati disponibili fino a quel momento. Il modello fornisce una previsione di un passo temporale in avanti (ossia un solo valore), che viene aggiunta a una lista contenente tutte le previsioni generate. Parallelamente, dal set di test si estrae il valore osservato corrispondente al passo temporale in esame, il quale viene poi integrato nel dataset di addestramento. In questo modo, il modello viene progressivamente aggiornato con dati reali man mano che essi diventano disponibili, simulando il flusso di informazioni che avremmo in un contesto di operatività reale sui mercati finanziari.

Per l'analisi predittiva delle serie temporali con il modello autoregressivo dobbiamo definire il valore del ritardo *lag o shift,* il medesimo della funzione *pct_change*, da usare per la variabile di input. Ricordiamo che essa sarà pari all'ordine del modello autoregressivo: AR(1) prende solo il primo valore, AR(2) anche il secondo. Notiamo che selezionando uguale a 1 questo valore avremo dei risultati molto simili a quelli del modello di persistenza, e l'RSME indicherebbe scarse capacità predittive del modello. Anche nel tracciare il nostro grafico a dispersione troviamo conferma dei nostri sospetti.

```python
from statsmodels.tsa.ar_model import AutoReg

historic = close.iloc[:int(len(close) * 0.7)].to_list()
test = close.iloc[int(len(close) * 0.7):]
predictions = []

for i in range(len(test)):
    model = AutoReg(historic, lags=10)
    model_fit = model.fit()
    pred = model_fit.predict(start=len(historic), end=len(historic), dynamic=False)
    predictions.append(pred[0])
    historic.append(test.iloc[i])

# RMSE sul set di allenamento
RMSE_AR = np.sqrt(mean_squared_error(test, predictions))len(close) * 0.7)+1:], predictions.iloc[int (len(close) * 0.7):]))
```





In sintesi, i modelli autoregressivi offrono un approccio potente per l'analisi del passato, uno strumento che insieme ad altri può rendersi utile per prevedere le serie temporali, soprattutto quelle ad alta componente cicilica o stagionale.

2.4.2 Modelli ARIMA.

Abbiamo imparato come costruire e testare un modello predittivo, ma non siamo stati in grado di formulare un modello che possa realmente supportarci nell'operatività. Sebbene le analisi che svolgiamo possano talvolta sembrare inconcludenti, è essenziale conoscere le logiche dietro alla costruzione di questi modelli se vogliamo operare in modo efficace sui mercati. Per trovare dei risultati più interessanti dobbiamo implementare delle strategie in cui far convergere più concetti tra quelli incontrati finora. E' il caso dei modelli ARIMA, acronimo per AutoRegressive Integrated Moving Average, modelli composti da due componenti: una legata al modello autoregressivo e l'altra all'andamento di una media mobile. Quest'ultima si basa su un indicatore molto usato e probabilmente già conosciuto a chi ha già mosso i primi passi nel mondo dell'analisi tecnica delle serie storiche. In realtà l'implementazione dei modelli ARIMA integra non solo le medie mobili e l'analisi di regressione, ma anche altri temi già trattati, come gli studi sull'autocorrelazione e sulla stazionarietà delle serie. Anche questo modello risulta valido solo per le serie stazionarie, per questo dovremo operare sulla serie storica dei prezzi al fine di renderla stazionaria tramite la differenziazione. Un modello ARIMA può essere analiticamente descritto come:

$$y'_t = c + \phi_1 y'_{t-1} + \cdots + \phi_p y'_{t-p} + \Theta_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + \Theta_q \varepsilon_{t-q} + \varepsilon_t$$

Dove:

- y'_t è la nostra serie differenziata.
- I regressori sono i valori della serie ritardata.
- *p* = è l'ordine della componente autoregressiva.
- *q = è l'*ordine della componente a media mobile.
- *d* = è il numero di differenziazioni effettuate sulla serie.

Questo modello con i suoi parametri è solitamente richiamato, anche nei codici che vedremo, con l'acronimo *ARIMA(p,d,q)* (TradingQuant, s.d.). La bontà del nostro modello risiede dunque nella scelta dei paramtri *p, d* e *q*. Individuare dei valori che permettano di avere delle previsioni quanto più precise dei valori della serie non è affatto semplice, il parametro *d* sarà noto ex ante, e pari al numero di differenziazioni necessarie a ottenere una serie stazionaria. Al contrario *d* e *q* sono più difficilmente individuabili. Può servire a orientarsi sapere che molte delle tipologie di serie che abbiamo già incontrato sono solo manifestazioni particolari di un modello ARIMA:

White noise	ARIMA(0,0,0) senza costante
Random walk	ARIMA(0,1,0) senza costante
Random walk con drift	ARIMA(0,1,0) con costante
Autoregressivo	ARIMA(*p*,0,0)
Media mobile	ARIMA(0,0,*q*)

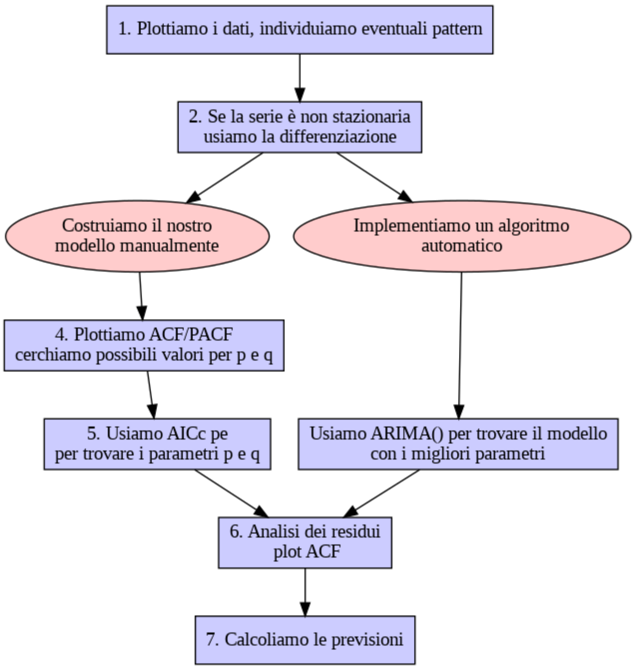
Prima di procedere con l'implementazione del modello ARIMA() nel nostro codice, è utile introdurre alcuni algoritmi che automatizzano la selezione e l'ottimizzazione dei parametri del modello. In particolare, ci concentreremo sulla ricerca della combinazione ottimale dei parametri (*p,d,q*) utilizzando il Criterio di Informazione di Akaike (AIC). Scomporremo il processo di modellazione valutando diversi modelli ARIMA(p,d,q) e selezionando quello che minimizza l'AIC. Questo criterio è ampiamente utilizzato per confrontare modelli statistici: il modello con il valore di AIC più basso è considerato quello che meglio adatta i dati osservati. La formula dell'AIC è così scritta:

$$AIC = 2k - 2\ln(L)$$

Dove *k* è il numero di parametri da stimare, ed *L* è il valore massimo assunto dalla funzione di verosimiglianza del modello. Una variante del modello AIC più efficace per l'analisi con i modelli ARIMA prende il nome di *AICc*:

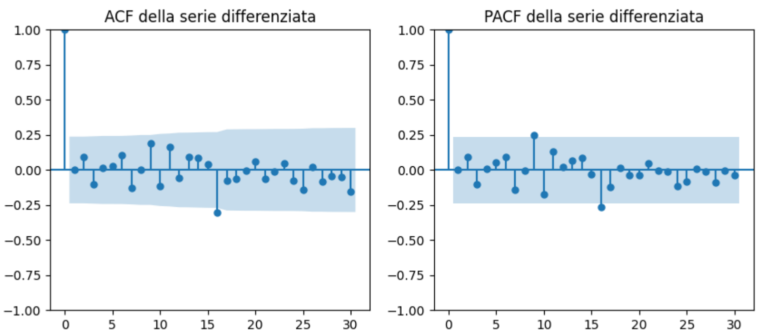
$$AICc = \frac{2(p+q+k+1)(p+q+k+2)}{T+p-q-k-2}$$

Queste formule sono utili individuare i parametri q e p e costruire il modello ottimo. La face successiva all'individuazione dei parametri è quella di test del modello, con rispettiva analisi della bontà predittiva e calcolo delle previsioni. Il procedimento è lo stesso utilizzato per qualunque altro modello, lo schema che seguiremo è dunque questo:



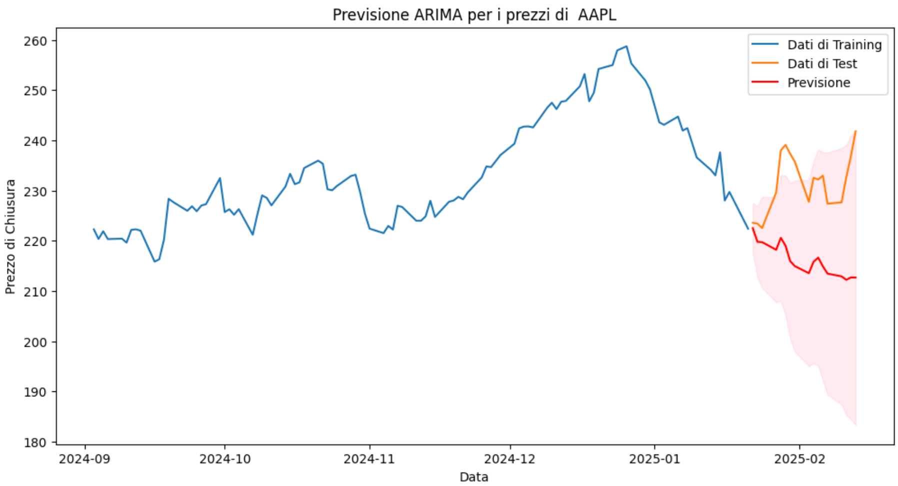
Prima di seguire un passo per volta i passaggi che porteranno a definire il modello, cerchiamo di contestualizzarlo in una strategia per fare in modo che anche un esempio possa essere di spunto per l'operatività pratica. Immaginiamo di voler assumere una posizione rialzista su AAPL perché dai nostri studi riteniamo probabile un rialzo dei prezzi nei prossimi 30 giorni. Vogliamo verificare la possibilità di adattare un modello ARIMA alla serie storica delle azioni AAPL. Per una valutazione di così breve periodo, non sarà necessario prendere la serie storica decennale, in quanto il modello risentirebbe dell'influenza di variabili di lungo periodo. Ricordiamo che il modello ARIMA lavora su serie stazionarie, minore l'arco temporale su cui si andrà a lavorare maggiori sono le probabilità che la serie tenda a stazionare. Guardando il plot degli ultimi 250 giorni di trading, non è facile identificare pattern che possano darci indicazioni utili per il fattore *p*. La serie ovviamente non risulta stazionaria, è dunque necessario applicare una prima differenziazione sui valori. La serie differenziata risulta stazionaria dal test ADF, abbiamo il nostro primo parametro *d = 1*. Per studiare le plausibili combinazioni di *p* e *q* è particolarmente utile la visualizzazione dei grafici *ACF (autocorrelation function)* e *PACF (partial autocorrelation function).* (TradingQuant, s.d.) Individuare evidenze di autocorrelazione infatti permetterebbe immediatamente di cogliere l'ordine del modello autoregressivo, il parametro *p*.

```
# Differenziazione
close_diff = close.diff().dropna()
result_diff = adfuller(close_diff)

plot_acf(close_diff, lags=30, ax=axes[0])
plot_pacf(close_diff, lags=30, ax=axes[1])
```



Guardando l'analisi ACF ci rendiamo conto che il primo valore che sembra superare le bande è il nono. Testare molteplici combinazioni dei parametri p e q è fondamentale per trovare un modello previsionale efficiente, vale la pena tentare il calcolo di un modelllo ARIMA con parametro $p = 9$. Implementiamo un ARIMA (9,1,9) sul 70% dei nostri dati, per poi testarlo sul restante 30%. Analizziamo prima il codice, poi guardiamo la rappresentazione grafica della serie e delle previsioni sul 30% del set e commentiamo l'esito del test per poter esprimere un giudizio complessivo sulla bontà del modello.

```
# Fit del modello ARIMA sui dati di training
order = (9,1,9)  # (p, d, q)
model = ARIMA(train, order=order)
model_fit = model.fit()

# Previsione: utilizziamo il modello ARIMA per prevedere il periodo di test
forecast_steps = len(test)  # il numero di previsioni
forecast_result = model_fit.get_forecast(steps=forecast_steps)
forecast_mean = forecast_result.predicted_mean
```



Il grafico consente di formulare immediatamente una prima valutazione, il modello non sembra in grado di catturare con precisione il movimento dei prezzi. Nel report in output al modello ARIMA, riportato in calce, vi sono calcolati diversi indici. Nella prima parte le informazioni generali del modello: la variabile oggetto d'analisi (*AAPL*), il numero di osservazioni nel record (*96,* ricordiamo essere il 75% della nostra serie totale), i parametri del modello (*ARIMA (9,1,9)*) e la data in cui viene eseguita l'analisi. *Log-likelihood* è l'indicatore di log-verosimiglianza, valori negativi bassi indicano modelli migliori. Abbiamo già commentato il codice AIC, mentre il BIC sebbene molto simile al codice AIC si discosta dal suo valore penalizzando la presenza di troppe variabili nel modello. In questo caso sia AIC che BIC sono troppo alti e la loro differenza denota che abbiamo considerato un numero troppo alto di variabili per il nostro modello. Molti coefficienti non sono statisticamente significativi (p-value > 0.05), il che suggerisce che il modello potrebbe essere troppo complesso o presentare problemi dovuti all'overfitting. Sarebbe più efficace testare dei modelli con parametri p e q dai valori più bassi.

```
Sintesi del modello ARIMA adattato sui dati di training:
                               SARIMAX Results
==============================================================================
Dep. Variable:                   AAPL   No. Observations:                   96
Model:                 ARIMA(9, 1, 9)   Log Likelihood                -227.437
Date:                Thu, 13 Feb 2025   AIC                            492.873
Time:                        19:11:34   BIC                            541.397
Sample:                             0   HQIC                           512.480
                                 - 96
Covariance Type:                  opg
==============================================================================
                 coef    std err          z      P>|z|      [0.025      0.975]
------------------------------------------------------------------------------
ar.L1         -0.1891      0.626     -0.302      0.762      -1.415       1.037
ar.L2         -0.4978      0.405     -1.231      0.218      -1.291       0.295
ar.L3         -0.5146      0.684     -0.752      0.452      -1.855       0.826
ar.L4         -0.4981      0.492     -1.013      0.311      -1.462       0.466
ar.L5          0.2571      0.589      0.436      0.662      -0.897       1.412
ar.L6          0.2288      0.328      0.698      0.485      -0.414       0.871
ar.L7          0.0659      0.323      0.204      0.838      -0.567       0.699
ar.L8          0.4323      0.295      1.467      0.143      -0.145       1.010
ar.L9          0.5589      0.336      1.662      0.097      -0.100       1.218
ma.L1          0.2160      1.440      0.150      0.881      -2.606       3.037
ma.L2          0.6138      0.587      1.046      0.296      -0.536       1.764
ma.L3          0.4605      1.034      0.445      0.656      -1.566       2.487
ma.L4          0.9152      2.141      0.428      0.669      -3.281       5.111
ma.L5         -0.3356      0.955     -0.351      0.725      -2.208       1.537
ma.L6          0.0737      0.809      0.091      0.927      -1.512       1.660
ma.L7          0.0395      0.796      0.050      0.960      -1.521       1.600
ma.L8         -0.2505      0.490     -0.511      0.609      -1.211       0.710
ma.L9         -0.4924      1.107     -0.445      0.656      -2.661       1.677
sigma2         6.3119     10.314      0.612      0.541     -13.903      26.527
===================================================================================
Ljung-Box (L1) (Q):                   0.04   Jarque-Bera (JB):                 0.43
Prob(Q):                              0.84   Prob(JB):                         0.81
Heteroskedasticity (H):               1.10   Skew:                            -0.15
Prob(H) (two-sided):                  0.78   Kurtosis:                         2.88
===================================================================================
```

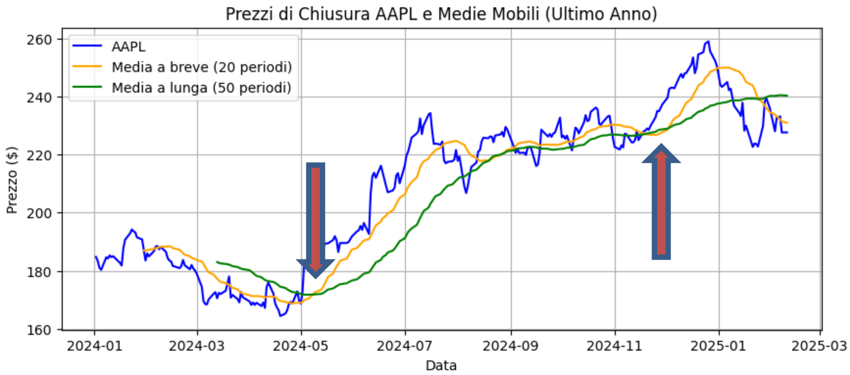
. Vale anche la pena dare uno sguardo all'analisi dei residui, che contiene molte informazioni utili:

- Ljung-Box test = p-value sotto la soglia del 5%, suggerisce una possibile autocorrelazione residua.
- Jarque-Bera test = i residui seguono una distribuzione normale, è un buon segno per il modello.
- Eteroschedasticità = nessuna evidenza di eteroschedasticità.
- Skewness = I residui hanno una leggera asimmetria negativa.
- Curtosi = Un valore vicino a 3 indica che i residui tendono alla distribuzione leptocurtica.

Siamo arrivati a stabilire con certezza che il modello ARIMA(9,1,9) non è un buon modello, ma non dobbiamo rimanere delusi, abbiamo già diversi parametri su cui lavorare per migliorare. Riducendo infatti p e q al valore di 2, il modello restituisce valori migliorativi. Testare un buon numero di combinazioni degli input ci permetterà di raggiungere risultati sempre più soddisfacenti.

2.4.3 Medie Mobili

Nel modello ARIMA, il parametro q riflette l'ordine dell'indicatore delle medie mobili, un elemento fondamentale che non abbiamo ancora approfondito. Le medie mobili sono un indicatore molto popolare tra i trader discrezionali e algoritmici, utilizzate per la costruzione di indicatori come il ribbon, MACD, condor, nonchè delle *Bande di Bollinger*, indicatore che useremo nel prossimo capitolo per costruire una strategia di trading. La media mobile a *n periodi* è un indicatore che restituisce la media aritmetica di un intervallo mobile di *n* valori della serie. E' un intervallo di dimensioni fisse, ma che si muove calcolandosi lungo tutta la serie. Data una serie storica calcolare la serie della media mobile significa creare un array con i valori della media dei precedenti prezzi della serie originale. Esistono molti tipi di media mobile, il più comune è quello che abbiamo citato, il simple moving average (SMA), ma esiste anche l'exponential moving average (EMA), la Weighted Moving Average e numerose altre varianti; dentro i file caricati nel cloud di GitHub è disponibile solo il codice per il calcolo del SMA, dal quale sarà semplice ricostruire le altre tipolgie. Le medie mobili sono strumenti chiave nell'analisi tecnica perché permettono di isolare il trend dalla componente di volatilità, e talvolta di anticiparne le inversioni. Se la media mobile a breve rompe dal basso verso l'alto la media mobile a lunga siamo in presenza di un segnale rialzista, viceversa in presenza di un segnale ribassista.



Anche l'exponential moving average è molto diffusa, si usa un coefficiente di smorzamento che assegna maggior peso agli ultimi dati, rendendo l'indicatore più reattivo. La scelta del periodo e del tipo di media dipende dalla strategia di trading e da quanto siamo interessati ai movimenti di lungo o breve periodo. Ovviamente le medie mobili sono da utilizzare in combinazione ad altri indicatori per poter essere realmente efficaci nel fornirci segnali utili per l'ingresso a mercato.

2.5 Pairs Trading

Il *pairs trading* (TradingQuant, s.d.) è una strategia di trading quantitativo che lavora su coppie di asset che godono della proprietà *mean-reverting.* Questa proprietà implica un'intrinseca tendenza dei prezzi a tornare verso la media di lungo periodo in seguito a momentanei disallineamenti di prezzo. Questa strategia venne teorizzata a metà degli anni '80 da un team di analisti quantitativi della nota banca d'affari Morgan Stanley, guidati da un giovane italiano di nome Nunzio Tartaglia. L'intuizione della squadra di Tartaglia è semplice: speculando sulla convergenza verso la media, dati due asset correlati, si può comprare l'asset sottovalutato e vendendo quello sopravvalutato, abbattendo il rischio di mercato e ottenendo un portafoglio le cui performance non dipendono dalla direzione del trend.

Alla base del pairs trading c'è infatti l'idea che individuando coppie di titoli o contratti derivati su sottostanti che mostrino un'elevata correlazione storica, in condizioni normali, dovremmo osservare un movimento sincrono dei prezzi dei due strumenti. Quando il rapporto di prezzo tra i due asset si discosta in modo eccessivo dalla media, per shock di mercato, notizie economiche o esplosioni di volatilità, viene generato un *open signal*, il semaforo verde per entrare a mercato: si acquista l'asset relativamente più economico, che consideriamo sottovalutato, e si vende allo scoperto quello più caro, verosimilmente sopravvalutato. L'operazione si chiude non appena lo spread rientra entro soglie prefissate, generando un guadagno dalla convergenza dei prezzi. La teoria mean reverting quindi rende possibile speculare sulle distorsioni di prezzi di titoli appartenenti alla stessa categoria, andando per esempio ad analizzare tutte le potenziali coppie di titoli date le componenti di un indice di mercato.

Malgrado la *market neutrality*, il pairs trading è comunque esposto a diversi rischi: rischio idiosincratico, ovvero rischio di movimenti non sincroni dei due asset; rischio di ampio bid-ask spread, e quindi maggiori costi impliciti; rischio di modello, che le assunzioni su cui basiamo la nostra strategia si rivelino errate per un qualsiasi errore nelle analisi. Per contenere questi fattori, si applicano regole di *money management* e stringenti backtest. E' fondamentale fare numerose operazioni a basso capitale per osservare come opera il nostro modello sul mercato reale, e non puntare sul singolo trade vincente. Abbiamo molti strumenti che possono aiutarci a coprirci dal rischio di forti oscillazioni come lo stop loss, o impostando *alert* che ci avvertano se le condizioni di mercato dovessero subire importanti inversioni. Tutelare il proprio capitale è sempre la priorità quando si opera sui mercati.

Riassumiamo rapidamente i vari passaggi per costruire un modello operativo sulla base del principio di pair trading su asset con proprietà mean-reverting. Innanzitutto immaginiamo di avere le serie storiche dei prezzi di due titoli, P^y e P^x e di volerne valutare l'utilità per una strategia del tipo pairs trading. Per applicare correttamente il modello, in primis lavoreremo con i log-prezzi, che ci permettono di trasformare una serie da moltiplicativa ad additiva, stabilizzare la varianza relativa e ricavare i rendimenti logaritmici facendo delle semplici differenze:

$$Y_t = \ln({P_t}^y) \qquad X_t = \ln({P_t}^x)$$

$$\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1}$$

$$\Delta X_t = X_t - X_{t-1}$$

A questo punto è fondamentale verificare la stazionarietà delle serie dei prezzi che stiamo analizzando. A tal fine, impiegheremo test statistici già visti, come il test augmented Dickey-Fuller. E' importante ribadire che data una serie abbastanza lunga dei prezzi di un qualunque titolo, essa risulterà sicuramente non stazionaria, ma vale comunque la pena fare il nostro test ADF per confermare questa tesi. L'ADF sulle differenze, invece, ci permette di rigettare l'ipotesi nulla: siamo in presenza di una serie stazionaria. Se invece i rendimenti dovessero risultare non stazionari sarebbero necessarie ulteriori trasformazioni o sarebbe impossibile implementare correttamente la nostra strategia. A questo punto, riprendendo le nostre due serie dei log-prezzi, si applica il test di Engle-Grager per trovare coppie di asset che risultino cointegrate. Questo test prevede di calcolare la regressione lineare sulle due possibili combinazioni dati sui prezzi ($Y \sim X$ e viceversa) e studiare la serie dei residui risultanti. Se il test rigetta la radice unitaria, la combinazione lineare dei due asset è stazionaria e i due asset risultano cointegrati.

Abbiamo finalmente una serie stazionaria, data dai residui della nostra regressione, sulla quale fare le nostre analisi: la serie dei residui. I due asset da cui siamo partiti risultano cointegrati e con una strategia attiva potremo operare su di essi grazie ai segnali dati dal nostro algoritmo. Un'apertura avviene quando lo spread si allontana di più di un certo multiplo della deviazione standard dalla sua media; la chiusura scatta quando ritorna entro un secondo multiplo, di solito inferiore. Il pairs trading ha avuto particolarmente successo anche grazie all'avvento della tecnologia e del trading algoritmico, che sono particolarmente adatti all'implementazione di strategie a parametri fissi. Attenzione, *parametri fissi* non significa che il modello non abbia bisogno di essere monitorato. Ogni strategia, anche la più efficace, ha bisogno di essere ritestata, e la bontà dei parametri deve essere periodicamente valutata per adattarsi alle nuove condizioni del mercato. Come abbiamo imparato, non esiste un bot in grado di generare profitti all'infinito in autonomia, ed è bene che non venga mai scoperto nulla di simile, o sarebbe la fine del mercato per come lo conosciamo.

L'ultima cruciale analisi è quella del backtesting, utile a testare l'efficacia della strategia: si misurano metriche come rendimento cumulato, Sharpe ratio, drawdown massimo e tasso di operazioni vincenti. Bisogna includere costi di transazione, slippage e possibili gap di prezzo per ottenere stime realistiche. Solo un'analisi rigorosa su più cicli di mercato (rialzista, laterale, ribassista) consente di calibrare i parametri in modo ottimale. In un contesto di trading automatico ad alta frequenza, un motore di execution rapida gestisce l'apertura e la chiusura di centinaia di posizioni al giorno, mantenendo uno stretto controllo sullo spread in tempo reale.

Seguiranno ora i quattro paragrafi in cui approfondiremo nel dettaglio tutti i passaggi che costituiscono le analisi preliminari, la costruzione e il test di una strategia di pairs-trading:

- Studieremo prima i fondamenti teorici della teoria della cointegrazione applicata alle serie storiche.
- Impareremo come identificare le coppie di titoli adatte a un'implementazione delle strategie mean-reverting.

- Costruiremo una strategia sui residui, ovvero sullo spread tra l'andamento dei prezzi di Y e la componente comune individuata dalla regressione, che ci fornisca dei precisi segnali di ingresso o uscita a mercato.
- Testeremo sul passato la nostra strategia per verificare se è in grado di portare dei profitti o meno.

2.5.1 Teoria della Cointegrazione.

Dallo studio dei vecchi modelli abbiamo intuito che l'assenza di stazionarietà è tipica delle serie storiche dei titoli azionari, e ciò rende impossibile l'attuazione di molti dei modelli che abbiamo incontrato fino a questo momento. La cointegrazione si pone un obiettivo preciso, combinare due serie storiche al fine di ottenere una sola serie che possa godere delle caratteristiche della stazionarietà: su quest'ultima sarà possibile applicare i nostri modelli di predittivi, per ottenre segnali di trading in base ai quali operare sui due asset originali. Siamo dunque arrivati alla definizione di cointegrazione: date le serie storiche non stazionarie di due titoli, se è possibile formare una *combinazione lineare* di queste due serie per produrre una nuova serie stazionaria, allora queste due serie storiche si dicono cointegrate. Una volta trovati panieri di titoli cointegrati sarà possibile implementare delle strategie mean-reverting che consentono di creare serie temporali stazionarie "sintetiche" per un'ampia gamma di strumenti:

La cointegrazione è un caso raro ma rilevante che si verifica in ambito econometrico quando combinazioni lineari di variabili non stazionarie non risultano integrate dello stesso ordine, ma presentano un ordine di integrazione inferiore a quello delle serie di partenza. Se esiste una combinazione lineare che sia stazionaria le variabili si dicono cointegrate grazie ai movimenti di lungo periodo presenti in ciascuna di esse. È presente una relazione di equilibrio statico tra le variabili da cui la loro dinamica non può discostarsi troppo. (Proietti, 2011)

Generiamo due serie random walk per fare un esempio dell'analisi di cointegrazione. Partiamo dalla tendenza di fondo z_t, e da quella genereremo le nostre serie temporali y_t e x_t . Lo facciamo perché vogliamo creare due titoli che risultino cointegrati, e questo è possibile appunto se le due serie hanno una componente comune, in questo caso z_t. Ovviamente per questa analisi tornano utili i concetti commentati in precedenza:

$$z_t = z_{t-1} + w_t \qquad \textit{con } w_t \textit{ rumore bianco e discreto.}$$

Quindi generiamo le due serie storiche che inglobino la componente zeta:

$$x_t = pz_t + w_{x,t}$$

$$y_t = qz_t + w_{y,t}$$

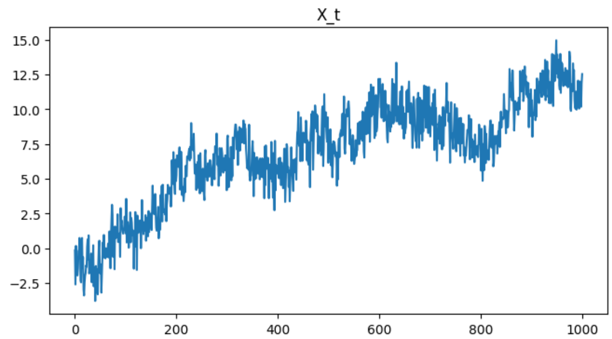
entrambe le serie condividono il processo z ma in quantità p e q differenti. Ponendo il processo lineare a $ax_t + by_t$ otteniamo il seguente processo:

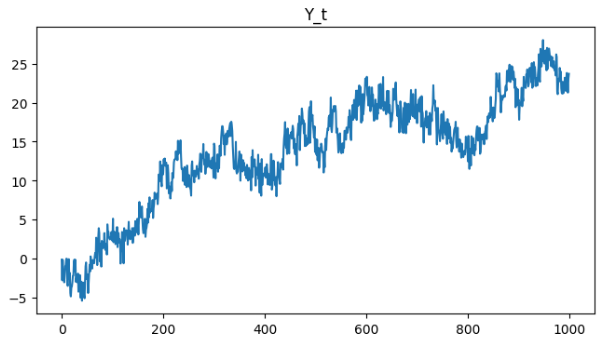
$$\alpha x_t + by_t = \alpha(pz_t + w_{x,t}) + b(qz_t + w_{y,t})$$

$$= (\alpha p + bq)z_t + \alpha w_{x,t} + bw_{y,t}$$

Abbiamo ottenuto una serie che è stazionaria per $(\alpha p + bq) = 0$. Per essere più pragmatici, usiamo dei valori numerici e proviamo a risolvere la nostra equazione. Ponendo p = 0.3 e q = 0.6 ad esempio ci accorgeremmo che la condizione di stazionarietà è rispettata per a = 2 e b = −1. Di conseguenza possiamo dire che x_t e y_t sono cointegrati per a = 2 e b = -1. Verifichiamo in codice se ciò è verificato. Avevamo già costruito un processo random walk z che può fungere da base comune per costruire le due serie x e y:

```python
# creiamo la nostra random walk di partenza
np.random.seed(1)
steps = np.random.standard_normal(1000)
steps[0] = 0
random_walk = np.cumsum(steps)

# stabiliamo i parametri p e q
p=0.3
q=0.6

# creiamo due serie random walk con la stessa componente z = random walk e con errore WN
z = random_walk
eps = np.random.standard_normal(1000)

x_t = p*z + eps
y_t = q*z + eps
```





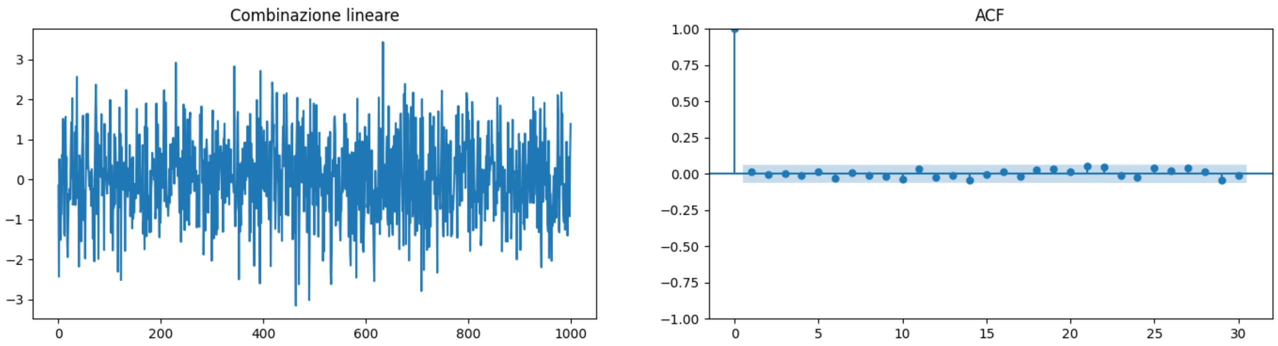
Possiamo notare la somiglianza dell'andamento delle serie, questo è normale in quanto x_t e y_t condividono la stessa struttura di camminata casuale di zt. Calcoliamo ora la combinazione lineare usando a = 2 e b = −1 ed effettuiamo le nostre analisi sulla stazionarietà della nuova serie ottenuta.

```python
a = 2
b = 1
comb = a*x_t - b* y_t  # combinazione lineare
```

Dove *comb* non è altro che il valore ε_t ottenuto dalla formulazione inversa di $Y_t = a - bX_t - \varepsilon_t$. . La cointegrazione infatti, dati i coefficienti calcolati dalla regressione tra i due asset, è così spiegata:

$$comb = X_t - a - bY_t$$

Secondo questa formulazione due serie risultano cointegrate se la serie dei residui ottenuti dal modello di regressione lineare si dimostrano stazionari, che è un altro modo, più funzionale alla nostra strategia, di vedere il concetto di cointegrazione. Infatti la serie *comb* così ottenuta rappresenta lo spread cointegrato, ovvero il residuo ottenuto dalla regressione che annulla il trend comune. In altre parole, rappresenta la differenza tra i prezzi osservati e quelli previsti da una relazione stazionaria di lungo periodo.



La serie dei residui cointegrati è evidentemente stazionaria, come dimostrato anche dall'analisi ACF, non sono evidenti autocorrelazioni sistemiche. Inoltre, il test di Dickey-Fuller aumentato conferma con una valore molto basso del p-value la stazionarietà. Siamo dunque in presenza di due serie cointegrate, dalla cui combinazione lineare è nata una nuova serie stazionaria dove adattare i nostri modelli.

2.5.2 Test CADF e modello Engle-Grager: individuare coppie di titoli cointegrati.

Abbiamo utilizzato i test statistici augmented dickey-fuller per verificare la stazionarietà della serie, ma ciò di cui abbiamo bisogno date le serie storiche dei due titoli, è il parametro di regressione beta β, anche detto hedge-ratio, che è fondamentale per isolare e annullare il fattore comune di esposizione al mercato. In questo articolo descriviamo la procedura chiamata *cointegrated augmented dickey-fuller* (CADF) o *modello di Engle-Grager,* che ci aiuta a identificare il coefficiente beta β per mezzo delta regressione delle due serie. Il grande limite del CADF è che l'indice beta, cioè la pendenza della regressione, è calcolato sulla relazione tra due variabili, ma non siamo in grado di definire ex-ante quale delle due variabili sia quella da porre dipendente e quale quella indipendente. Infatti il test è scomponibile in due fasi, prima si effettuano le regressioni lineari, e poi con il test ADF determineremo quale delle due regressioni ci riporta alla serie stazionaria e quindi quale delle due variabili scegliere come dipendente e indipendente.

Andiamo a lavorare finalmente con due serie di prezzi, prendendo due titoli potenzialmente cointegrati e immaginiamo di voler verificare la presenza di questa condizione. E' il caso ad esempio di due ETF sugli indici principali di Canada e Australia, due paesi la cui economia è fortemente influenzata dall'andamento dei prezzi delle serie prime. Questa tendenza comune sembra evidente dalla rappresentazione grafica delle due serie, ma necessitiamo di un'analisi per chiarire i nostri dubbi.

Andiamo subito a effettuare l'analisi di regressione per ottenere il coefficiente beta, ricordando che non sarà subito palese quale dei due asset sia la variabile dipendente e quale quella dipendente. Per questo è necessario fare lo studio della regressione per entrambe le combinazioni:

```
                            OLS Regression Results
==============================================================================
Dep. Variable:                    EWC   R-squared:                       0.921
Model:                            OLS   Adj. R-squared:                  0.921
Method:                 Least Squares   F-statistic:                 1.742e+04
Date:                Sat, 15 Feb 2025   Prob (F-statistic):               0.00
Time:                        18:51:09   Log-Likelihood:                -2043.8
No. Observations:                1499   AIC:                             4092.
Df Residuals:                    1497   BIC:                             4102.
Df Model:                           1
Covariance Type:            nonrobust
==============================================================================
                 coef    std err          t      P>|t|      [0.025      0.975]
------------------------------------------------------------------------------
const          3.1346      0.125     25.146      0.000       2.890       3.379
EWA            1.4385      0.011    132.001      0.000       1.417       1.460
```

```
                            OLS Regression Results
==============================================================================
Dep. Variable:                    EWA   R-squared:                       0.921
Model:                            OLS   Adj. R-squared:                  0.921
Method:                 Least Squares   F-statistic:                 1.742e+04
Date:                Sat, 15 Feb 2025   Prob (F-statistic):               0.00
Time:                        18:51:09   Log-Likelihood:                -1437.0
No. Observations:                1499   AIC:                             2878.
Df Residuals:                    1497   BIC:                             2889.
Df Model:                           1
Covariance Type:            nonrobust
==============================================================================
                 coef    std err          t      P>|t|      [0.025      0.975]
------------------------------------------------------------------------------
const         -1.1192      0.095    -11.798      0.000      -1.305      -0.933
EWC            0.6402      0.005    132.001      0.000       0.631       0.650
```

Notiamo che entrambe le regressioni forniscono coefficienti beta statisticamente significativi, anche se sono due valori molto diversi. Sarà quindi necessario approfondire la nostra analisi calcolando l'ADF sui residui delle due regressioni per determinare quale dei due modelli è in grado di fornirci il rapporto di copertura ottimale.

```
ADFULLER TEST
(-3.213305639494583, 0.0192273000265534, 3, 1495, {'1%': -3.434731647915545, '5%': -2.8634752174058944, '10%': -2.5678002869095424}, -468.2164381825146)
(-3.1117492671299654, 0.025695820536558906, 10, 1488, {'1%': -3.434752296229329, '5%': -2.8634843303184447, '10%': -2.5678051396295816}, -1617.1460376397686)
```

I p-value che risultano dall'analisi ADF sono entrambi minori del livello di 5%., possiamo quindi rifiutare l'ipotesi nulla di assenza di stazionarietà e confermare che siamo in presenza di due asset cointegrati in entrambe le combinazioni. Per scegliere il nostro hedge ratio, useremo i risultati della regressione che ha come variabile indipendente l'ETF EWC, in quanto l'analisi di stazionarietà su quella serie è quella che porta il valore del p-value più basso. Senza entrare nel dettaglio di un codice iterativo e facilmente costruibile con l'opportuno aiuto dell'*artificial intelligence*, basti sapere che nella repository github è costruito un piccolo motore di calcolo (PairsTrd_MatrxCointegrazione.ipynb) che permette di inserire una serie di ticket come imput, e calcolare:

- La stazionarietà con il test ADF sulle singole serie di log-prezzi e poi dei rendimenti logaritmici.
- Le regressioni per tutte le possibili combinazioni, prenderne i residui e calcolare il test ADF ritornando combinazioni che restituiscono minor p-value.

=== TEST ADF SUI SINGOLI ASSET ===

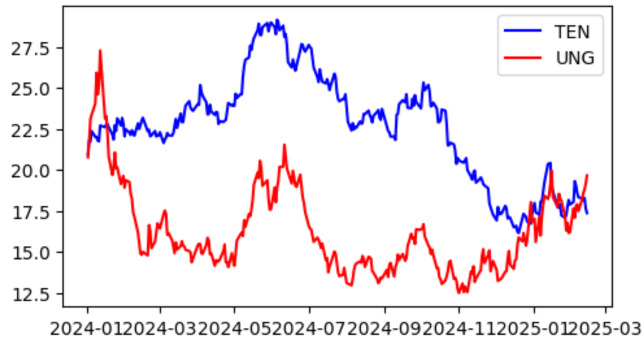
Ticker	ADF_prezzi	ADF_pValue_prezzi	ADF_rendimenti	ADF_pValue_rendimenti
AAPL	-0.8643	0.7995	-19.5151	0.0
MSFT	-1.3575	0.6025	-20.3803	0.0
AMZN	-1.0247	0.7441	-31.4617	0.0
NVDA	0.0438	0.9620	-32.1010	0.0
ENEL.MI	-1.3230	0.6186	-18.1907	0.0
INTC	-0.7464	0.8344	-30.1916	0.0
RIOT	-1.8890	0.3373	-20.7682	0.0
BBD	-2.0044	0.2847	-32.2629	0.0

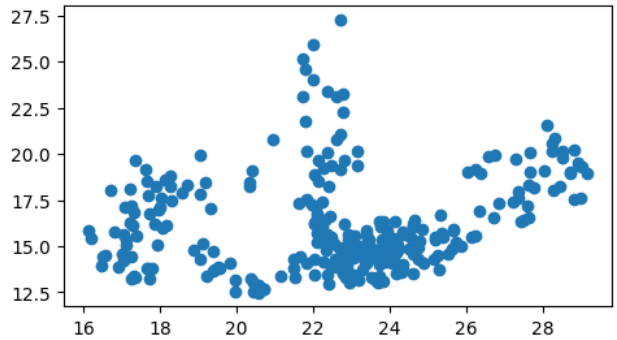
=== ENGLE-GRANGER ===

Y_ticker	X_ticker	Beta	ADF_stat_eps	p_value_eps	crit_1%	crit_5%	crit_10
INTC	RIOT	0.2753	-3.9333	0.0018	-3.436887	-2.864426	-2.56830
RIOT	INTC	3.3997	-3.6056	0.0057	-3.436887	-2.864426	-2.56830
AMZN	ENEL.MI	0.4255	-3.4985	0.0080	-3.436887	-2.864426	-2.56830
AMZN	AAPL	-0.5351	-3.0714	0.0287	-3.436887	-2.864426	-2.56830
ENEL.MI	AMZN	1.1722	-2.9957	0.0353	-3.436893	-2.864429	-2.56830
AMZN	RIOT	-0.1298	-2.8084	0.0571	-3.436887	-2.864426	-2.56830
AAPL	RIOT	0.2155	-2.7766	0.0617	-3.436887	-2.864426	-2.56830

2.5.3 Strategia Mean-Reverting e Bande di Bollinger

Abbiamo visto nelle ultime analisi come individuare coppie di asset che risultino cointegrate, e come estrapolarne il coefficiente beta β. Queste serie godono per definizione delle proprietà di ritorno alla media e si prestano alla speculazione con strategie mean-reverting. Ora è il momento di costruire una strategia basata su queste assunzioni, e successivamente verificare la possibilità di generare profitti da questa strategia tramite dei backtest in *Datatrader*, una piattaforma opensource di backtesting per strategie speculative sui mercati azionari. Per la nostra strategia attenzioneremo le serie storiche di due titoli tra i quali possiamo immaginare esista un rapporto di cointegrazione: prenderemo la serie daily dei prezzi di chiusura delle azioni Tenaris (ticker:TEN), maggior produttore e fornitore a livello globale di tubi e servizi per l'esplorazione e la produzione di petrolio e gas, e i prezzi di chiusura daily di un ETF sul Gas Naturale (ticker:UNG). L'ipotesi sottostante è che esista una relazione tra l'andamento di questi due asset, in quanto l'andamento dei prezzi del gas condiziona in modo importante il business della costruzione di impianti e gasdotti da parte di Tenaris. Il primo passo per la costruzione della nostra strategia è verificare tramite la procedura Engle-Granger che le due serie risultino cointegrate, per ottenere subito la serie dei residui del modello di regressione che isola il fattor comune.





Le due serie storiche sul grafico a sinistra sembrano effettivamente mostrare alcuni comportamenti analoghi nell'andamento dei prezzi, anche il grafico a dispersione sembra indicare una correlazione positiva: la prima impressione è che esista un'influenza comune del prezzo del gas sull'andamento dei due titoli, ma rimangono dubbi sulla reale esistenza di una correlazione strutturale tra i due asset, dubbi che solo un analisi statistica può dissipare.

```
Risultati regressione TEN.MI ~ UNG:
                            OLS Regression Results
==============================================================================
Dep. Variable:                 TEN.MI   R-squared:                       0.083
Model:                            OLS   Adj. R-squared:                  0.080
Method:                 Least Squares   F-statistic:                     26.22
Date:                Sat, 12 Apr 2025   Prob (F-statistic):           5.56e-07
Time:                        17:14:54   Log-Likelihood:                -606.48
No. Observations:                 292   AIC:                             1217.
Df Residuals:                     290   BIC:                             1224.
Df Model:                           1
Covariance Type:            nonrobust
==============================================================================
                 coef    std err          t      P>|t|      [0.025      0.975]
------------------------------------------------------------------------------
const         12.2525      0.706     17.366      0.000      10.864      13.641
UNG            0.2169      0.042      5.121      0.000       0.134       0.300
==============================================================================
Omnibus:                     4125.172   Durbin-Watson:                   0.022
Prob(Omnibus):                  0.000   Jarque-Bera (JB):               25.641
Skew:                           0.125   Prob(JB):                     2.71e-06
Kurtosis:                       1.570   Cond. No.                         104.
==============================================================================
```

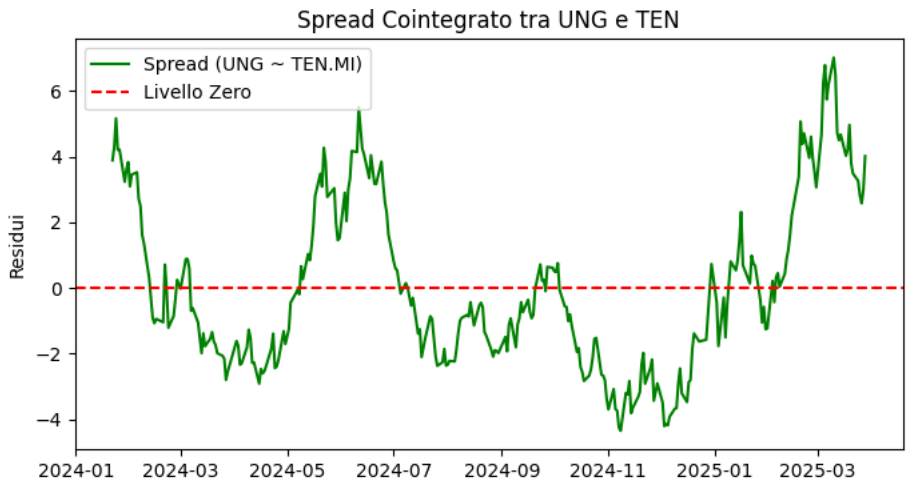
```
Risultati regressione UNG ~ TEN.MI:
                            OLS Regression Results
==============================================================================
Dep. Variable:                    UNG   R-squared:                       0.083
Model:                            OLS   Adj. R-squared:                  0.080
Method:                 Least Squares   F-statistic:                     26.22
Date:                Sat, 12 Apr 2025   Prob (F-statistic):           5.56e-07
Time:                        17:14:54   Log-Likelihood:                -689.21
No. Observations:                 292   AIC:                             1382.
Df Residuals:                     290   BIC:                             1390.
Df Model:                           1
Covariance Type:            nonrobust
==============================================================================
                 coef    std err          t      P>|t|      [0.025      0.975]
------------------------------------------------------------------------------
const         10.3924      1.190      8.730      0.000       8.049      12.735
TEN.MI         0.3823      0.075      5.121      0.000       0.235       0.529
==============================================================================
Omnibus:                       21.870   Durbin-Watson:                   0.062
Prob(Omnibus):                  0.000   Jarque-Bera (JB):               22.462
Skew:                           0.635   Prob(JB):                     1.33e-05
Kurtosis:                       2.516   Cond. No.                         127.
==============================================================================
```

Test ADF per i residui della regressione TEN.MI ~ UNG:	Test ADF per i residui della regressione UNG ~ TEN.MI:
Statistic ADF: -1.5400220242627727	Statistic ADF: -2.125701423531314
p-value: 0.5136283702233955	p-value: 0.23430628537911008

Date le due analisi di regressione dobbiamo ricrederci, il valore superiore al 5% del p-value indica che non possiamo respingere l'ipotesi nulla di presenza di una radice unitaria, non esistono combinazioni lineari di queste due serie storiche in grado di restituirci una serie dei residui stazionaria: questi due asset dunque non sembrano statisticamente cointegrati. Nonostante ciò, proseguiremo con il nostro esempio assumendo di aver verificato con esito positivo la cointegrazione tra questi due asset, prenderemo dunque per buoni i residui ottenuti dalle nostre analisi e li useremo per implementare una strategia mean-reverting. Questa scelta può sembrare controintuitiva, nell'esempio precedente avevamo trovato due ETF le cui serie storiche risultavano cointegrate, ma ci sono una serie di motivi per i quali è utile prepararsi a operare anche in situazioni come questa:

- È utile costruire un esempio a fini didattici anche su due titoli non cointegrati. Il fatto che questi particolari asset non godano di questa proprietà non significa che non si possano trovare casi di cointegrazione sui mercati, come i due ETF nell'esempio precedente. La cointegrazione è una proprietà rara, dobbiamo quindi essere pronti a operare anche in situazioni in cui la cointegrazione non è verificata, poichè molte delle nostre analisi avranno un riscontro negativo, ma non per questo lavorarci sopra è inutile, bensì è un'occasione da cogliere per prendere dimestichezza con questi processi e affinare i nostri modelli.
- Come è successo in questo caso, molte volte durante le nostre analisi ci sembrerà di intuire una relazione positiva tra due titoli, ma la cointegrazione non troverà riscontro nelle statistiche: questo perché gli indicatori sono funzione degli input che ricevono, la stessa analisi su altri periodi della serie avrebbe potuto dare risultati differenti[5]. Fondamentale è adattare le nostre scelte in base ai dati e non viceversa, le nostre assunzioni possono essere dettate dall'istinto, ma ora che abbiamo tutti gli strumenti sarebbe irrazionale non verificarne la fondatezza statistica.
- E' quindi utile capire come muoversi nei casi di impossibilità di rifiutare l'ipotesi nulla, come vedremo nel backtest ciò non toglie che sia ancora possibile attuare delle strategie efficaci su questi due titoli.

Comunque dobbiamo fare una scelta per procedere con il nostro esempio, un valore ADF più negativo e un p-value più basso indicano una maggiore stazionarietà dei residui ottenuti dal modello $UNG \sim TEN$, quindi UNG sarà la nostra variabile dipendente e TEN la nostra variabile indipendente. Visualizziamo dunque la serie dei residui così ottenuti:



Questa serie rappresenta i residui della regressione $UNG \sim TEN$, se fosse stata costruita da due asset cointegrati, godrebbe per definizione delle proprietà di stazionarietà e di mean-reverting, ma come abbiamo detto questo non è verificato nel nostro caso. Ora necessitiamo di un sistema capace di generare dei segnali di trading, per questo ci avvarremo di uno strumento molto conosciuto soprattutto agli analisti tecnici: parliamo delle *bande di bollinger*, un indicatore che si basa sul calcolo della media mobile e della deviazione standard. Questo indicatore è rappresentabile sui grafici come un canale dentro il quale si muovono i prezzi della serie oggetto della nostra analisi. I confini del canale, detti *bande*, sono definiti tramite la media mobile traslata verso l'alto e verso il basso di una quantità data da un prodotto scalare della deviazione standard. Il canale così formatosi, racchiude al suo interno i movimenti della serie storica del sottostante, ed è tanto più ampio quanto maggiore sarà la deviazione standard. Maggiore volatilità porterà a bande più larghe e viceversa. Le bande di

---

[5] La stessa analisi svolta nel paragrafo precedente, non darebbe esito positivo se si prendessero le serie più recenti dei due ETF (EWC,EWA).

bollinger ci danno dei segnali nel momento in cui distorsioni portano i residui a toccare le bande, momento in cui ci sono maggiori possibilità che l'andamento della serie subisca un'inversione tornando verso la media:

- Se i residui sono superiori alla banda superiore: significa che il valore della variabile dipendente è maggiore di quanto non sia spiegato dal modello di regressione stimato. Ciò significa che la variabile dipendente risulta sopravvalutata rispetto alla variabile indipendente; di conseguenza andremo short sull'asset sopravvalutato e long su quello sottovalutato.
- Se i residui sono minori della banda inferiore: al contrario è un segnale che la variabile dipendente è sotto il suo livello atteso dato dalla relazione con la variabile indipendente; e quindi andremo long sulla variabile dipendente, che risulta sottovalutata, e long su quella indipendente.

Al netto di ciò che possiamo osservare nella rappresentazione grafica delle bande di boolinger, abbiamo bisogno di replicare in codice la medesima logica. In questo compito è utile lavorare con un parametro standardizzato che definiremo *z-score*. Lo z-score sarà costruito in modo che all'interno inglobi una componente di trend data dalla media mobile, e una componente di volatilità, data dalla deviazione standard.

$$z_{score} = \frac{prezzo\ attuale - media\ mobile}{deviazione\ standard}$$

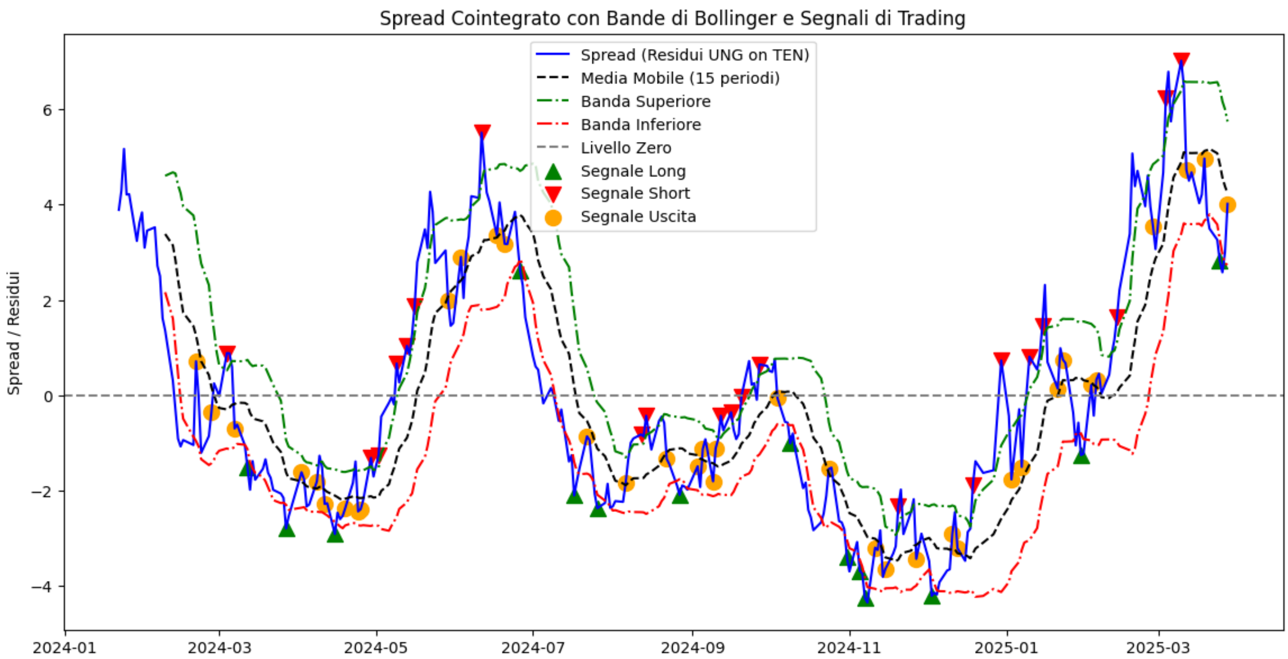
Quest'ultima, al denominatore, pondera le distorsioni del prezzo attuale dalla media: una grande variazione dello spread potrebbe essere giustificata da un rialzo notevole della volatilità e non da un disallineamento dei prezzi, proprio come le bande sul grafico si allargano a un rialzo della volatilità anche questa replica analitica delle bande di bollinger diventa meno reattiva ai movimenti del sottostante in caso di un aumento della deviazione standard. Il nostro codice dovrà verificare per ogni nuovo livello di prezzo se il suo z-score cade o meno dentro due soglie che dovremo definire ex ante, e che stabiliranno la reattività dei nostri segnali di trading. Chiameremo queste soglie z_{exit} e z_{entry}. Una volta scelti i livelli soglia, il nostro modello confronterà lo z_{score} di ogni nuovo prezzo restituendo eventuali segnali di apertura/chiusura trade:

Entrata long	$z_{score} < -z_{entry}$
Entrata short	$z_{score} > z_{entry}$
Chiusura long	$z_{score} \geq -z_{exit}$
Chiusura short	$z_{score} \leq -z_{exit}$

Guardiamo ora come risulta il grafico dei nostri residui, con le bande di bollinger, e i relativi segnali di trading dati certi parametri di input:

- $z_{entry} = 1{,}5$.
- $z_{exit} \ = 0{,}5$.
- $lookback\ period = 15$ periodi.
- $moltiplicatore\ scalare\ della\ deviazione\ standard$ = 1,2.

Le bande di bollinger, e il nostro z-score di conseguenza, si servono del calcolo di una media e di una deviazione standard mobili calcolate sui valori passati della serie, per questo è necessario per entrambe definire una finestra temporale del numero *N* ultimi periodi da prendere in considerazione per i calcoli: attenzione, se N è troppo piccolo risente delle distorsioni di breve periodo e saremo maggiormente soggetti a falsi segnali, se troppo grande invece sarà in ritardo nel segnalarci eventuali inversioni del trend. Nel nostro esempio lavoreremo con una media mobile e una varianza calcolate sugli ultimi 15 prezzi (parametro *lookback=15*). Il moltiplicatore scalare della deviazione standard invece definisce la larghezza delle bande, infatti a un aumento della volatilità la differenza tra le bande risulta più ampia (come nel gennaio 2025), viceversa risulterà più stretta (come nell'aprile 2024). Questo grafico risulta costruito con un codice che ha il solo fine la rappresentazione grafica, ed è costruito ex-post, non illudiamoci quindi che tale codice sia utile per operare in *live* sui mercati.



Le curve verde e rossa indicano rispettivamente le bande inferiori e superiori, mentre i triangoli verdi e rossi i segnali di entrata long e short. Come si può notare i triangoli rossi si concentrano sulla banda superiore (UNG risulta sopravvalutato), mentre quelli verdi sulla banda inferiore (UNG risulta sottovalutato). Guardiamo quindi solo alcune parti del codice che sono più interessanti, come questa funzione zscore_signal che, dato il livello di z-score attuale e i livelli preimpostati di soglia inseriti nella classe *self*, calcola in base alle regole viste precedentemente se per ogni nuovo prezzo di mercato lo z-score genera un segnale di trading. Eventuali segnali danno il via all'operatività della nostra strategia.

```python
def zscore_signal(self, zscore, event):
    """
    Dato uno zscore negli input:
    Se non siamo già a mercato valuterà se aprire una posizione
    Se siamo già a mercato valuta se uscire dalla posizione.
    """
    # Se non siamo a mercato
    if self.invested is None:
        if zscore < -self.entry_z:      # Entrata Long
            print("LONG: %s" % event.time)
            self.go_long_units()
            self.invested = "long"
        elif zscore > self.entry_z:     # Entrata Short
            print("SHORT: %s" % event.time)
            self.go_short_units()
            self.invested = "short"
    # Se siamo a mercato
    if self.invested is not None:
        if self.invested == "long" and zscore >= -self.exit_z:
            self.go_short_units()      # Uscita long
            self.invested = None
        elif self.invested == "short" and zscore <= self.exit_z:
            self.go_long_units()       # Uscita short
            self.invested = None
```

Per sviluppare in python una strategia di questo calibro, che tenga conto di tutti i fattori che abbiamo visto e che sia in grado di operare in autonomia sui mercati, è necessario possedere delle competenze nell'ambito dello sviluppo e della programmazione che non si ha la pretesa di affrontare in questo volume. Con l'aiuto dell'intelligenza artificiale e grazie alla grande disponibilità di materiale didattico online e strumenti open source, la costruzione di questi modelli è possibile anche per i neofiti. Uno strumento che ho trovato particolarmente utile è *Datatrader* (TradingQuant, s.d.), un framework libero utile soprattutto per effettuare precisi backtest. Su GitHub si trova la repository di questa piattaforma con una guida per importarla e per utilizzarla al meglio. Sui blog più seguiti non è difficile trovare script costruiti secondo famose strategie di trading. E' sufficiente cambiare alcuni input (ticker, dataframe, soglie di deviazione standard e lookback period) per generare un dettagliato report sulla potenziale redditività di tale strategia. Affidandoci a questi modelli *precostruiti* non otterremo la personalizzazione e la conoscenza completa del codice, bisogna fidarsi della correttezza dei modelli di calcolo scritti dall'autore. D'altra parte trovare parte del lavoro "già fatta" può aiutarci a concentrarci sugli aspetti che consideriamo sensibili. Se dovessimo guardare all'organizzazione di un team che voglia operare attivamente sui mercati avvalendosi di sofisticati strumenti tegnologici, la scelta più funzionale è la costruzione di una coppia di figure complementari: lo sviluppatore e l'analista finanziario. Questi professionisti collaborano e devono essere in grado di comunicare per lavorare allineati a determinati obiettivi.

2.5.4 Backtest della strategia in Datatrader.

Prima di testare su Datatrader la nostra strategia, dobbiamo essere consapevoli del rischio di overfitting a cui ci esponiamo testando la strategia sulla stessa serie che abbiamo analizzato per settare i nostri parametri. Avevamo già parlato del rischio di overfitting, e di come può dar luogo a perdite ingenti. Ora facciamo altre precisazioni meramente operative, che sono fondamentali i trader e gli aspiranti programmatori, dove semplici errori possono farci perdere tempo prezioso. (Cesarini, 2017)

- Compatibilità dei dati: il rischio è che il formato e la composizione dei dati delle serie storiche non siano compatibili con il software di backtest. E' il caso di Datatrader, per importare le serie storiche, i file devono con i dati devono essere inseriti in CSV all'intero di una cartella di nome Data. Essendo datatrader in inglese, cercherà la colonna con intestazione uguale a *Close,* dove crede di trovare i prezzi di chiusura. Se excell, o il data-provider, dovesse fornirci un CSV con le intestazioni delle colonne in italiano, il nostro backtester andrebbe certamente in errore. Ancor più fastidioso, è l'errore dato dalla punteggiatura: noi italiani usiamo la virgola per i decimali, mentre nel resto del mondo è uso comune usare il punto. Per questi motivi ho creato, e caricato all'interno della repository GitHub, il file CSVconverter.ipynb, che lavora la serie (disponibili per ogni sstrumento gratuitamente su Investing.com o YahooFinance) per renderla compatibile con Datatrader trasformando le intestazioni delle colonne e trasformando il punto in virgola per i decimali.

```
Data,"Ultimo","Apertura","Massimo","Minimo","Vol.","Var. %"
11.04.2025,"184,87","179,93","185,77","178,15","48,71M","2,01%"
10.04.2025,"181,22","185,44","186,87","175,85","68,30M","-5,17%"
09.04.2025,"191,10","172,12","192,65","169,93","116,80M","11,98%"
08.04.2025,"170,66","185,23","185,90","168,57","87,71M","-2,62%"
07.04.2025,"175,26","162,00","183,41","161,38","109,33M","2,49%"
04.04.2025,"171,00","167,15","178,14","166,00","123,16M","-4,15%"
03.04.2025,"178,41","182,99","184,13","176,92","95,55M","-8,98%"
02.04.2025,"196,01","187,66","198,34","187,66","5
01.04.2025,"192,17","187,86","193,93","187,20","4
```

PRIMA

```
Date,Open,High,Low,Close,Volume,Adj Close
2025-04-11,179.93,185.77,178.15,184.87,48710000,2.01
2025-04-10,185.44,186.87,175.85,181.22,68300000,-5.17
2025-04-09,172.12,192.65,169.93,191.1,116800000,11.98
2025-04-08,185.23,185.9,168.57,170.66,87710000,-2.62
2025-04-07,162.0,183.41,161.38,175.26,109330000,2.49
2025-04-04,167.15,178.14,166.0,171.0,123160000,-4.15
2025-04-03,182.99,184.13,176.92,178.41,95550000,-8.98
2025-04-02,187.66,198.34,187.66,196.01,536800
2025-04-01,187.86,193.93,187.2,192.17,41270000
```

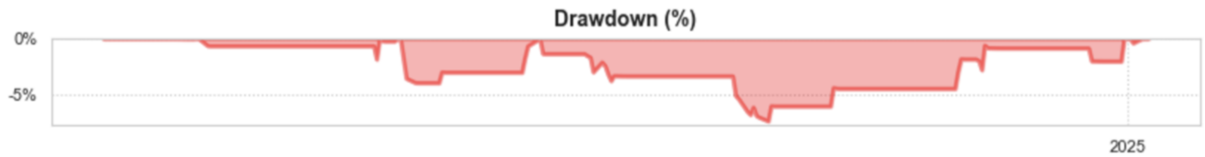
DOPO

- Inoltre va considerato che spesso nei dati che stiamo lavorando potrebbero esserci valori mancanti, alcune date (o posizioni) esistono in una serie. ma sono assenti (o NaN) nell'altra, la pulizia dei dati è necessaria per un risultato efficiente e per la scorrevolezza dell'analisi, per questo sempre nel file CSVconverter.ipynb è implementata anche una parziale pulizia per allineare le date: se non sono disponibili per entrambi gli asset i prezzi per una qualunque data, la stringa di quest'ultima viene rimossa dal record.

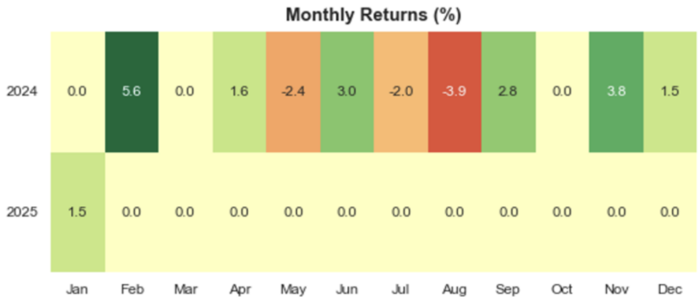
Abbiamo finalmente tutti gli elementi necessari a generare il nostro backtest, Datatrader riceverà gli input e restituirà un report contenente vari indici di performance, grafici e statistiche. Tramite questo report potremo studiare nel dettaglio la performance della nostra strategia e replicare il backtest studiando come diverse combinazioni di input possano generare diversi profilo rischio/rendimento. Il framework di backtesting di Datatrader permette di scegliere tra un gran numero di implementazioni differenti, potremo personalizzare il layout del nostro report in modo da visualizzare esattamente le informazioni di cui necessitiamo. Nel nostro caso, vogliaamo un'analisi diretta ed efficace, per il nostro report basteranno quattro componenti:

- *Equity Line*: mostra le variazioni del nostro capitale nel tempo, partendo da un valore di riferimento pari a 1. Qui si vede che la strategia rimane pressoché stabile nella prima parte, con alcuni rialzi che portano la curva a un massimo intorno a 1.10 (*10%* di rendimento), poi un lento calo e infine un rimbalzo fino a livello a 1.12: il risultato finale è un incremento complessivo del *+12%* (Total Return), che possiamo reputare un ottimo risultato per un periodo di poco più di un anno. Fondamentale non lasciarsi ingannare dal profitto totale, se analizzato singolarmente ci dice ben poco sulla reale efficacia della strategia. Non possiamo quantificare quanto il successo di queste operazioni sia attribuibile alla capacità predittiva del nostro modello, e quanto invece abbia influito il caso.

- *Drawdown* (Gandolfi, 2018): come ci si poteva aspettare, la situazione appare meno rosea guardando lo storico del drawdown, che ha raggiunti picchi fino a quasi il *-10%*, restando in area negativa per la maggior parte del 2024. Questo indicatore è pari alla differenza fra il picco di equity più recente e il livello corrente del controvalore, finchè l'area rossa è positiva il trader è sotto gli ultimi massimi che aveva ottenuto con la strategia. Il grafico del drawdown in una utopistica strategia ideale dovrebbe mantenersi fisso al livello zero, se esistesse si tratterebbe di una strategia capace di far crescere il nostro capitale a un tasso costante, senza mai l'ombra di un ritracciamento.



- *Monthly/Yearly returns*: una heatmap mensile, dove ogni cella mostra il rendimento percentuale di un singolo mese, Nel 2024 si osservano alcuni mesi altamente positivi (gennaio *+5.0%*, febbraio *+5.6%*), seguiti da mesi negativi (maggio *-2.4%*, giugno *-3.0%*, luglio *-2.0%*) e di nuovo rialzi (ottobre *+3.8%*, novembre *+1.5%*). Nel 2025, la strategia appare con un rendimento positivo a gennaio (*+1.5%*). Complessivamente, questi numeri ci riportano ai total return annui, pari a circa *+10%* per il 2024 e *+1.5%* per il 2025.



- Infine la parte più importante, quella delle *analisi quantitative*, divise in tre aree: tabella *Curve* con gli indici di rischio e performance, la tabella *Trade* con i dettagli dell'operatività, e la tabella *Time* con le statistiche suddivise per dataframe.

Curve	
Total Return	12%
CAGR	11.86%
Sharpe Ratio	1.31
Sortino Ratio	1.30
Annual Volatility	8.85%
R-Squared	0.27
Max Daily Drawdown	7.42%
Max Drawdown Duration	139
Trades per Year	24.9

Trade	
Trade Winning %	58%
Average Trade %	0.92%
Average Win %	3.75%
Average Loss %	-3.05%
Best Trade %	10.39%
Worst Trade %	-7.16%
Worst Trade Date	TBD
Avg Days in Trade	0.0
Trades	24

Time	
Winning Months %	77%
Average Winning Month %	1.98%
Average Losing Month %	-2.75%
Best Month %	5.63%
Worst Month %	-3.85%
Winning Years %	100%
Best Year %	10.06%
Worst Year %	1.54%

Cosa possono dirci i dati di questo report? Dalla equity line e dal drawdown rileviamo che la strategia non ha seguito un andamento di crescita regolare, ma piuttosto ha subito forti oscillazioni al ribasso; anche la heatmap evidenzia questo fattore, i rendimenti risultano estremamente variabili. Per approfondire ulteriormente e trovare le informazioni più preziose, abbiamo bisogno delle statistiche che Datatrader ha calcolato per noi. Commentiamo i risultati ottenuti e valutiamo in maniera definitiva la bontà della strategia.

CURVE

Il total return indica la performance cumulata sull'intero orizzonte di backtest, da 1 a circa 1.12, ovvero il *12%.* Essendo questo dato valido su tutto l'orizzonte temporale, può essere annualizzato tramite il calcolo del CAGR, (Gandolfi, 2018) in questo caso l'*11.86%* annuo. Ovviamente il periodo di backtest è troppo breve, questo tipo di analisi andrebbe implementata su anni di storico dati, 14 mesi non sono sufficienti. Sharpe ratio è un indice di rischio/rendimento che tiene conto della deviazione standard, per cui livelli maggiori di 1 sono considerati favorevoli, come quindi nel nostro caso. Lo stesso vale per l'indice di Sortino, che tiene conto anche della distribuzione dei rendimenti. La volatilità annua è del 8.85%, valore non particolarmente basso, né particolarmente alto.
Fondamentale invece l'indice r-squared, anche detto Coefficiente di determinazione. Questo indice ci spiega quanto la nostra strategia è riuscita a catturare del comportamento dei sottostanti, un valore di 0.27 è piuttosto basso, suggerendo bassa capacità del modello di generare profitti. Detto in parole povere, questo indice ci sta suggerendo che siamo stati più fortunati che bravi. Il max daily drawdown riportato è del *7.42%.* Questo significa che, dal picco più alto fino al punto più basso, la strategia ha perso fino al 7.42% prima di riprendersi. La max drawdown duration (139 giorni) indica per quanti giorni la strategia è rimasta al di sotto del picco precedente prima di superarlo, giorni particolarmente duri per un qualunque investitore. Infine trades per year indica quante operazioni sono state effettuate annualmente in una media annuale. Come possiamo anticipare,

nella tabella Trade vedremo il numero totale delle operazioni effettuate nei 14 mesi della strategia, pari a 34 in totale.

TRADE

Il trade winning ci dice che il 58% delle nostre operazioni si è rivelato profittevole, non è un numero particolarmente alto, si potrebbe decisamente fare di meglio, anche se può essere talvolta la conseguenza di una scelta strategica (può avere senso se si volesse operare ad alta frequenza con stop-loss stretti e take-profit larghi). Ogni trade ha reso in media il 0.92%,:

1. Contando solo i soli trade vincenti si ha un profitto medio del 3.75% per ogni trade.
2. Contanto invece solo i trade in perdita si ha una perdita media di 3.05%. a trade.

Il miglior trade in assoluto come guadagno percentuale ha reso il 10.39% mentre il peggior trade ci ha fatto perdere ben il 7.8%. Quest'ultimo valore ci dimostra che il rischio a cui siamo esposti per il singolo trade può essere anche significativo. Potrebbe essere utile implementare ulteriori cautele, usando strumenti come stop loss che non permetta di lasciar correre troppo le perdite. Il nostro modello sembra avere difficoltà a restituirci la data del peggior trade e i giorni medi di durata delle operazioni, probabilmente perché le operazioni tendevano ad aprirsi e chiudersi anche intraday.

TIME

Il winning month è pari alla percentuale di mesi chiusi in profitto sul totale dei mesi su cui il backtest viene implementato. L'average winning month indica il rendimento medio dei mesi positivi, al contrario l'average losing month la perdita media nei medi in negativo. Il mese più profittevole ha reso il 5.63%, mentre il peggiore il -3.85%. Nel 100% degli anni di backtest la strategia ha restituito rendimenti positivi, anche se il 2024 ha contribuito ovviamente maggiormente in valore assoluto (10.06%) rispetto al 2025 (1.54%).

2.6 Conclusioni sulle strategie discrezionali.

Per concludere la nostra analisi, dobbiamo essere cauti nel valutare questa strategia, sebbene il profitto finale sia positivo e di valore interessante, questo è stato ottenuto in pochi trade, quando sarebbe auspicabile avere un campione più ampio di operazioni da analizzare prima di poter esprimere un parere. Un buon 42% (1 – trade winning ratio) delle nostre operazioni realizzano perdite, anche ingenti (fino al 7.16% come abbiamo visto dal worst trade). Questi fattori incidono sulla redditività media delle operazioni, pari a 0.92% per trade, un tasso appena positivo che sarebbe facilmente abbattuto in presenza di commissioni. Affronteremo il tema commissioni quando parleremo di broker e operatività sui mercati di opzioni. Possiamo concludere che l'arco temporale oggetto di analisi è troppo breve, avremo bisogno di ampliare la nostra analisi su un periodo molto più lungo per cogliere la reale redditività del modello sui mercati reali.

Siamo arrivati al termine di questa prima parte del testo dove abbiamo acquisito i fondamentali dello studio statistico delle serie storiche. Siamo partiti con un analisi delle serie storiche in python, lo studio dei rendimenti e della loro distribuzione. Successivamente abbiamo scomposto delle serie storiche, scoprendo che esiste una componente di lungo periodo, che abbiamo chiamato trend, una componente stagionale e una componente erratica. Abbiamo poi simulato la creazione di varie serie storiche studiandone le caratteristiche e le tipologie che meglio rappresentano l'andamento dei prezzi dei titoli sui mercati. Poi i primi modelli predittivi basati sullo studio della serie, gli indicatori tecnici e lo studio delle relazioni tra gli asset. Abbiamo visto quanto è difficile prevedere i prezzi delle serie storiche azionarie basandosi su modelli statistici puri, ma siamo arrivati a costruire un modello di pairs-trading molto complesso e che può stimolare i più curiosi a perfezionarsi e cogliere opportunità di squilibrio sui mercati. Le competenze acquisite fin qui sono fondamentali per effettuare determinate valutazioni sull'andamento dei prezzi dei titoli, ma nell'operatività diretta sui titoli azionari si è esposti a rischi notevoli e difficilmente neutralizzabile se non tramite la diversificazione. Queste problematiche possono essere affrontate con maggiore efficacia tramite gli strumenti derivati, in particolare i contratti opzionali. Introduciamo quindi, le vere protagoniste delle prossime pagine di questo testo: le opzioni.

3. LE OPZIONI.

L'operatività proposta nel capitolo due prevede la compravendita ad alta frequenza direttamente sui titoli azionari. Un'alternativa estremamente valida è data dagli strumenti derivati. Questi complessi contratti permettono di personalizzare i profili di rischio delle nostre strategie e di operare sui mercati con maggiore consapevolezza. Chi compra un'opzione limita i suoi rischi di perdita rinunciando a una porzione di potenziali profitti. Chi invece acquista direttamente il sottostante si espone totalmente al rischio di mercato, aumentando l'aleatorietà dei risultati della strategia che si sta implementando. Le opzioni hanno anche altri vantaggi, come la possibilità di operare a leva: con piccoli importi ci si può esporre a grandi profitti. L'intermediazione della clearing house ci permette di annullare il rischio d'insolvenza della controparte tutelandoci tramite un sistema a margini che approfondiremo successivamente. Le opzioni sono strumenti estremamente versatili, combinate tra loro permettono di investire non solo sull'andamento del sottostante, ma anche su potenziali variazioni dei parametri macro, come la volatilità o il tasso free risk. L'alto livello di liquidità dei contratti derivati garantisce, come vedremo, un servizio di maggiore qualità per tutti gli attori che operano sul marcato. Mercati come il Chicago Board Option Exchange sono altamente regolamentati e i volumi di scambi in opzioni superano 7 milioni di contratti scambiati al giorno. Il valore delle opzioni è scomponibile in una serie di variabili, la cui influenza è possibile studiare e analizzare nel dettaglio. Questo permette di costruire strategie che permettono di speculare sui singoli fattori di rischio. Principalmente approfondiremo due classi di strategie di trading speculativo:

- un trading direzionale volto a sfruttare i movimenti di prezzo.
- un trading di volatilità, che specula su variazioni repentine della volatilità percepita sui mercati.

Anche in questo caso concentreremo le nostre analisi sul mercato azionario, operando con opzioni che abbiano sottostante pari a indici di mercato o azioni singole. I contratti opzionali solitamente controllano un numero definito di azioni. Prendendo ad esempio le più grandi aziende americane, le cui opzioni quotano sul CBOE, il lotto sottostante è solitamente di 100 azioni. Per trovare la quantità di sottostante controllata da opzioni su titoli quotati sulla borsa italiana è sufficiente andare nella sezione Lotti Minimi Opzioni su Azioni del sito ufficiale della borsa.

Lotti Minimi Opzioni su Azioni

SOTTOSTANTE	LOTTO MINIMO
A2a	5.000
Acea	500
Amplifon	500
Anima Holding	500
Ariston Holding	500
Azimut	500
Banca Generali	100
Banca Ifis	100
Banca Mediolanum	500
Banca Monte Paschi Siena	1.000

Se le operazioni di acquisto di opzione sono effettuate *naked*, ovvero senza nessun'altra attività in portafoglio che possa influenzare il payoff finale della nostra strategia, la valutazione del rischio a scadenza è agevolata dalla perdita massima definita ex-ante. Il costo della nostra strategia è pari al solo prezzo che stiamo pagando per l'opzione, moltiplicato per il numero di azioni controllate dal contratto. Escludendo commissioni o eventuali margini definiti dal broker, quella è la cifra che ci viene addebitata nel momento dell'acquisto delle opzioni. Immaginiamo di aver acquistato un opzione call europea su AAPL (Apple Inc. quotata sul NASDAQ). Se il prezzo del sottostante dovesse crescere da 5 a 10, registrando un aumento del 100% del proprio valore, e ponendo uguale a 1 il prezzo pagato per la singola opzione, si otterrebbe un guadagno pari a :

$$(10 - 5) * 100 - 1 * 100 = 400.$$

Una crescita del 100 % del prezzo del sottostante ci ha permesso un ritorno del 400 % sul nostro capitale, grazie alla leva intrinseca di questi strumenti. Notiamo inoltre la presenza del moltiplicatore 100, in quanto le opzioni AAPL sono quotate sul CBOE, e quindi il contratto prevede un lotto sottostante di 100 azioni.

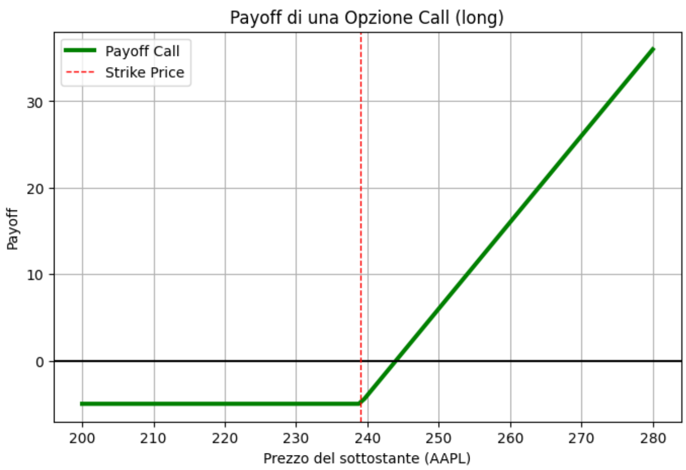
E' arrivato il momento di sfruttare python per generare alcuni grafici che siano esplicativi del payoff a scadenza delle opzioni. Avremo sull'asse delle ordinate gli utili e sull'asse delle ascisse il livello di prezzo del sottostante. Il payoff dell'acquisto un opzione call, ad esempio, ha due segmenti:

- Sotto lo strike price il payoff è costante e pari al premio negativo che stiamo pagando.
- Sopra lo strike il payoff diventa una linea crescente.

$$Max\,\{\,prezzo\ attuale\ -\ strike\ price, 0\}\ -\ premio$$

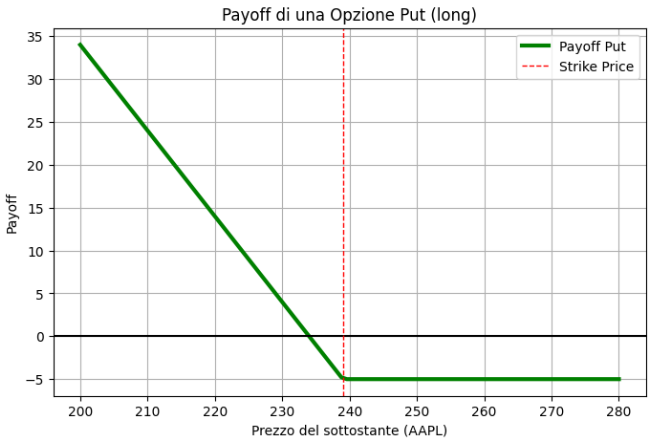
Dati degli input (strike e premio) possiamo riprodurre facilmente questa condizione in codice per ottenere il nostro payoff a scadenza per ogni livello di prezzo.

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Parametri dell'opzione
strike_price = 239  # Prezzo d'esercizio (strike)
premio = 5          # Premio dell'opzione in euro

# Range di prezzi del sottostante (AAPL)
underlying_prices = np.linspace(200, 280, 100)  # Prezzi del sottostante da 200 a 280

# Calcolo del payoff della call
payoff = np.maximum(underlying_prices - strike_price, 0) - premio
```



Ovviamente il payoff di una put è simmetrico sull'asse verticale rispetto al payoff di una call, in quanto andremo in the money solo in presenza di eventuali ribassi del prezzo del sottostante. E' semplice modificare il nostro codice per avere un nuovo payoff grafico in the money per valori più bassi dello strike.

```
# Calcolo del payoff della put
payoff = np.maximum(strike_price - underlying_prices, 0) - premio
```



Oltre alla raffigurazione dei possibili risultati in base al prezzo del sottostante a scadenza, è fondamentale studiare anche i fattori di rischio a cui si è soggetti durante l'operatività sui contratti derivati. Infatti il contratto opzionale può essere scambiato durante la sua vita residua, il valore del premio varia in base ai rischi a cui si è esposti e alla probabilità che si possa ottenere un profitto acquistando l'opzione.

3.1 Greche

La misurazione dei diverti tipi di rischio su cui si è esposti durante l'operatività con opzioni prendono il nome di *greche* (Gandolfi, 2018), il cui monitoraggio è essenziale per il pricing delle opzioni, per il risk management del nostro portafoglio e per valutare in maniera consapevole l'influenza dei dati macro sulle nostre strategie. Una strategia direzionale sarà maggiormente esposta al rischio di mercato, mentre una strategia di volatilità sarà più esposta a variazioni della volatilità implicita. In questa tabella vediamo riassunte le greche e i loro effetti sul prezzo di un'opzione, divise per tipologia di opzioni stesse:

Fattori di rischio	Call Europea	Put Europea	Call americana	Put Americana
Prezzo sottostante	+	-	+	-
Strike price	-	+	-	+
Vita residua	?	?	+	+
Volatilità	+	+	+	+
Risk-free	+	-	+	-
Dividendi	-	+	-	+

3.1.1 Delta

Il delta è l'indicatore di sensibilità che lega il prezzo del derivato al prezzo del sottostante. Infatti il delta di un'opzione è la misura della variazione del prezzo dell'opzione a un cambio unitario del prezzo del sottostante. In termini matematici il delta è la derivata parziale del prezzo dell'opzione rispetto al sottostante. In simboli algebrici:

$$\Delta_{call} = \frac{\partial C}{\partial S} = N(d1)$$

$$\Delta_{put} = \frac{\partial P}{\partial S} = N(d1) \text{ -1}$$

Con $d_1 = \frac{log\left[\frac{S(t)}{K}\right]+\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)*\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$

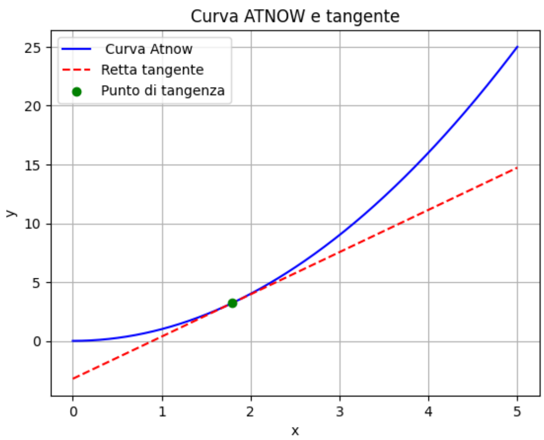
Proviamo a calcolare il delta di una call o una put, a partire da alcuni parametri noti di una ipotetica opzione. Nell'implementazione python, il codice si.norm.cdf(d1) rappresenta la funzione di ripartizione cumulativa (CDF) della normale standard, ovvero *N(d1)*.

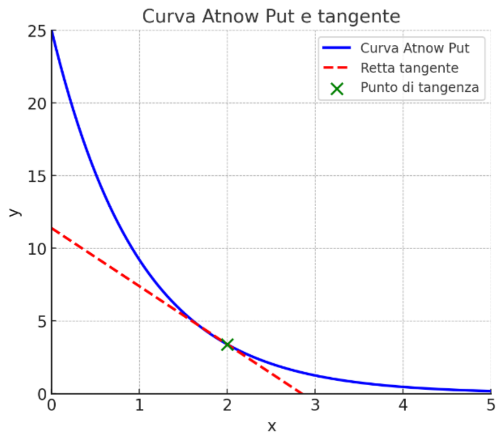
```
import numpy as np
import scipy.stats as si

# Parametri dell'opzione
S = 100       # Prezzo attuale del sottostante
K = 100       # Prezzo di esercizio (strike)
r = 0.05      # Tasso di interesse privo di rischio (5%)
T = 1         # Tempo alla scadenza (in anni)
sigma = 0.2   # Volatilità implicita (20%)

# Calcolo di d1
d1 = (np.log(S / K) + (r + 0.5 * sigma**2) * T) / (sigma * np.sqrt(T))

# Delta della call e della put
delta_call = si.norm.cdf(d1)          # N(d1)
delta_put = si.norm.cdf(d1) - 1       # N(d1) - 1
```

Facciamo ora un esempio pratico prendendo alcuni dati dal mercato. E' possibile infatti calcolare il delta anche in modo empirico, ovvero osservando come reagisce il prezzo della nostra opzioni a variazioni del prezzo del sottostante. Consideriamo a un periodo *t* una call sull'indice Dax, scadenza giugno 2025. Il prezzo ad oggi del sottostante è 14.300, e il prezzo della call è pari a 0,80. E' necessario avere il dato del premio a *t+1*, per vedere come movimenti del sottostante possano aver influito sul prezzo della call. Notiamo che il sottostante a *t+1* si è portato sul livello 4.320, mentre il prezzo della call è salito fino a 1. Abbiamo quindi tutti i dati per calcolare il nostro delta empirico:

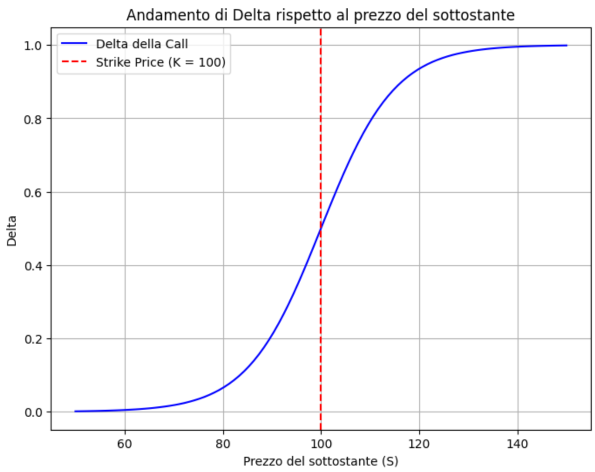
$$\Delta \cong \frac{variazione\ del\ prezzo\ della\ call}{variazione\ del\ prezzo\ del\ sottostante} = \frac{(c_{t+1} - c_t)}{(S_{t+1} - S_t)} = \frac{(1 - 0{,}8)}{(4.310 - 4.300)} = \frac{0{,}2}{10} = 2\%$$

Il risultato di questo esempio ci dice che una variazione di 1 del valore del sottostante porterà il prezzo della nostra opzione a crescere del 2%. La formula che abbiamo visto è capace di approssimare con una certa precisione il nostro delta, ma la massima precisione può essere raggiunta tramite il calcolo della derivata prima della funzione di prezzo della call rispetto al sottostante, che è anche pari alla pendenza della tangente alla curva del valore *Atnow.* Guardando il nostro grafico notiamo che la pendenza della tangente, e quindi il delta, sarà positivo per le opzioni call e negativo per le opzioni put. Essendo la misura di una pendenza sarà inoltre compreso tra 0 e 1 per una call, e tra 0 e -1 per una put. Infatti nel caso di una put l'aumentare del prezzo del sottostante comporta un ribasso del valore dell'opzione. Il valore assoluto del delta è spesso tradotto come la possibilità che la nostra opzione scada ITM, lo dimostra il fatto che la tangente della curva atnow di un opzione DITM tende a infinito, indifferentemente che sia put o call.

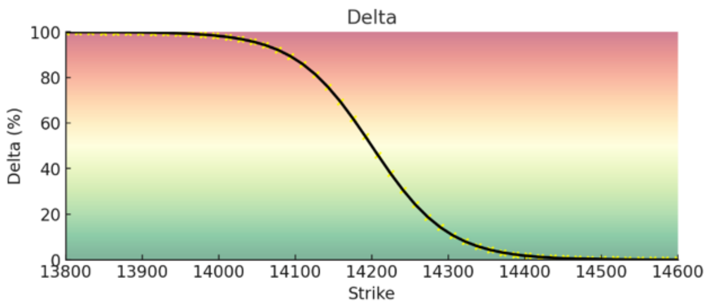




Questi due grafici sono esplicativi dell'influenza del prezzo del sottostante sul valore dell'opzione. Un'opzione call molto OTM avrà un delta molto basso, e una tangente che tende a zero, una variazione unitaria del prezzo del sottostante influenzerebbe ben poco la *moneyness* dell'opzione. Al contrario un'opzione molto ITM avrà un delta tendente a 1, quindi per una variazione unitaria dell'opzione abbiamo un pari ritorno nel valore dell'opzione. Ricordiamo inoltre che ciò si collega al valore intrinseco di cui gode l'opzione ITM. Nel momento in cui siamo ATM invece il delta è di circa 0,5. Un movimento del prezzo in una direzione o nell'altra potrebbe portarci a essere ITM o OTM, è quindi il momento in cui c'è massima attenzione sul movimento del sottostante.



La prossima immagine è utile in ambito operativo, indica il valore del delta per opzioni con diverso strike price dato il prezzo attuale del sottostante sul mercato. Nel nostro esempio il sottostante ha un prezzo di 14.200, una call con strike molto più basso significa comprare opzioni DITM e con delta molto alto. Viceversa in caso di strike molto elevati, il delta sarà molto basso



Il delta è un coefficiente chiave non solo nel trading su opzioni, ma anche nella gestione del portafoglio, grazia alla capacità di stimare l'esposizione ai movimenti dei prezzi sul mercato (Ronchini, 2014). Il grande limite del delta è che esso si modifica ogni qualvolta ci sono variazioni del prezzo del sottostante. I grafici analizzati restano validi per un dato prezzo, ma un successivo movimento del sottostante può modificare la sensibilità del prezzo della nostra opzione, rendendo necessario un ricalcolo della nostra esposizione e il realtivo ribilanciamento del portafoglio. Possiamo quindi desumere che la precisione del delta nel prevedere la variazione del prezzo dell'opzione è tanto più precisa quanto piccola è la variazione subita dal prezzo del sottostante, il delta porta a risultati fuorvianti in presenza di maggiore volatilità del sottostante. Essendo una derivata prima, quindi una tangente, il delta non riesce ad approssimare variazioni più ampie sulla curva Atnow, che invece è convessa. Per ottenere delle stime più precise abbiamo bisogno di correggere il nostro delta integrando il coefficiente gamma.

3.1.2 Gamma

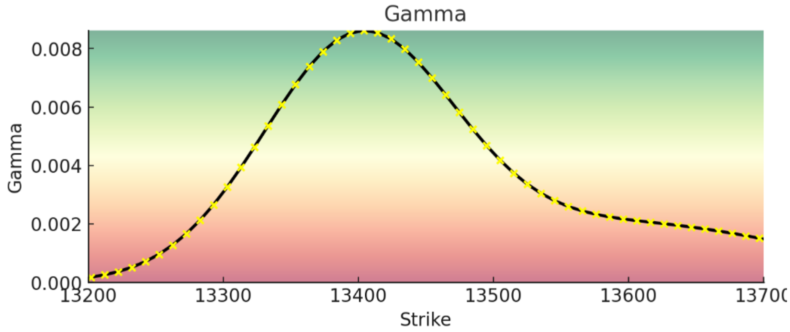
Il gamma a differenza del delta e dei successivi coefficienti di sensibilità non indica la variazione del prezzo dell'opzione rispetto a un parametro, ma misura la variazione di uno dei parametri stessi al variare del prezzo del sottostante. Il gamma viene calcolato come la derivata prima del prima del delta sul sottostante, il delta invece abbiamo visto essere la derivata prima del prezzo dell'opzione sul sottostante. Possiamo quindi dire che il gamma può anche essere calcolato come la derivata seconda del prezzo dell'opzione al variare del sottostante. Quindi nel caso di una call abbiamo:

$$\gamma = \frac{\partial \Delta}{\partial S} = \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} = \frac{N'(d_1)}{S * \sigma * \sqrt{t}}$$

Dove $N'(d_1)$ è la pdf della normale standard calcolata in d_1. Proviamo a ricostruire anche questa greca nel nostro codice, con dei parametri fittizi.

```
import numpy as np
import scipy.stats as si

# Parametri dell'opzione
S = 100       # Prezzo attuale del sottostante
K = 100       # Prezzo di esercizio
r = 0.05      # Tasso di interesse (5%)
T = 2/12      # Tempo alla scadenza (in anni: 2 mesi)
sigma = 0.2   # Volatilità (20%)

# Calcolo di d1
d1 = (np.log(S / K) + (r + 0.5 * sigma**2) * T) / (sigma * np.sqrt(T))

# Calcolo del Gamma
gamma = si.norm.pdf(d1) / (S * sigma * np.sqrt(T))
```

Parlando del delta avevamo già accennato alla sua imprecisione nelle stime delle variazioni del prezzo del sottostante. Il gamma riesce a correggere in parte queste distorsioni. Il gamma di una call comprata e di una call venduta allo stesso strike, a differenza del delta, presentano valore uguale. All'interno dell'equazione BSM il delta risulta ponderato per il gamma, la valutazione del delta, in presenza di gamma molto alto, potrebbe trarci in inganno: il gamma ci sta dicendo che una variazione del sottostante causa a un altrettanto veloce variazione del delta. Monitorare questi fattori di rischio si rivela di fondamentale importanza nel momento in cui si attuano strategie di copertura, in cui occorre coprire il delta tenendo in considerazione anche la possibilità che possa variare. In particolare il gamma ha la capacità di misurare la differenza esistente tra l'andamento effettivo e l'andamento stimato del delta, o, in altri termini, l'errore di stima compiuto dall'uso del solo delta. Per chi compra opzioni l'effetto gamma risulta sempre positivo, per chi vende negativo. Questo grafico, come quello del delta, misura il gamma per ogni possibile strike dato il prezzo del sottostante. Come è possibile notare il gamma è più elevato quando l'opzione è ATM.

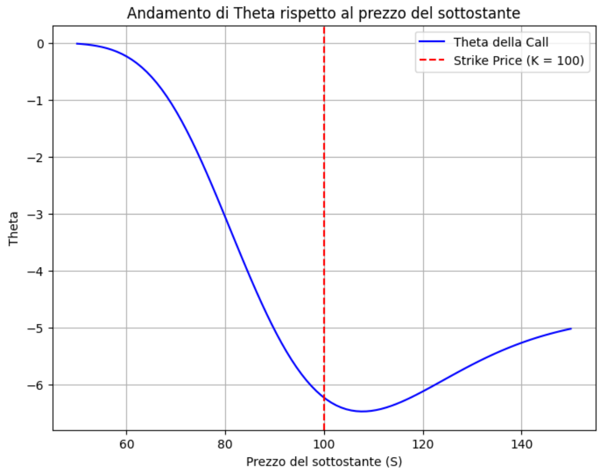


Il delta cerca di stimare in modo lineare la variazione del prezzo dell'opzione a variazioni del sottostante, ma tra le due variabili esiste una relazione non lineare e quindi necessitiamo del gamma per ponderarne la stima. Il prezzo dell'opzione calcolato solo tenendo conto del delta non è sufficientemente preciso, ma bisogna integrare il gamma tramite relazioni come questa:

$$\Delta c(o\ \Delta p) \cong \Delta * \ \Delta S + \frac{1}{2} * \ \Gamma * \ \Delta$$

3.1.3 Theta

Il coefficiente di sensibilità Theta misura la sensibilità del prezzo dell'opzione al passare del tempo o, meglio, al ridursi della vita residua del derivato. Nel contesto del modello Black-Scholes, che si riferisce a opzioni europee,l'avvicinarsi della scadenza è un elemento che influenza negativamente la performance per il compratore di opzioni.. Anche per le opzioni americane si osserva un comportamento simile, ma la possibilità di esercizio anticipato può modificarne la dinamica. Il theta è massimo quando siamo DITM, mentre tende a zero quando siamo DOTM. Per questi motivi il coefficiente Theta viene anche definito *declino temporale* (theta decay). Come mostrato nel grafico, il Theta è più negativo (cioè più penalizzante per chi compra) quando l'opzione è ATM, e diminuisce quando ci si allontana dallo strike.



È fondamentale capire che il theta non decade linearmente. Nelle fasi iniziali, il tasso di decadimento temporale è relativamente lento, ma man mano che l'opzione si avvicina alla scadenza il decadimento accelera rapidamente: le opzioni perdono valore a un ritmo crescente man mano che si avvicinano alla data di scadenza. Un'opzione con scadenza tra un anno non perderà valore tanto velocemente quanto un'opzione con scadenza tra pochi giorni.

Le formule analitiche (Gandolfi, 2018) per il calcolo del theta sono:

$$\Theta_{\text{call}} = -\frac{S * N(d1) * \sigma}{2 * \sqrt{t}} - r * X * \ e^{-r*T} * N(d2)$$

$$\Theta_{\text{put}} = -\frac{S * N(d1) * \sigma}{2 * \sqrt{t}} + r * X * e^{-r*T} * N(d2)$$

Dove d_1 e d_2 sono rispettivamente pari a $d_1 = \frac{log\left[\frac{S(t)}{K}\right]+\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)*t}{\sigma\sqrt{t}}$ e $d_2 = d_1 - \sigma * \sqrt{t}$.

Mentre $N(d_1)$:

$$N(d_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{(d_1)^2}{2}}$$

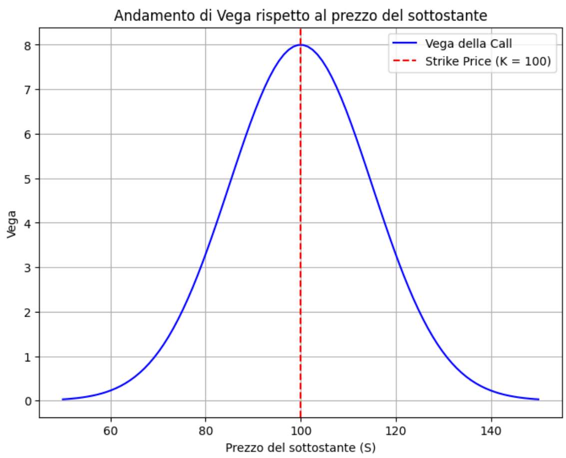
È importante notare che il decadimento temporale influisce solo sul valore estrinseco delle opzioni, quello che abbiamo definito come valore temporale. Infatti abbiamo visto che al passare del tempo la curva atnow andrà a coincidere perfettamente con il payoff dell'opzione a scadenza.

3.1.4 Vega

Il Vega esprime la sensibilità del prezzo di un'opzione a variazioni della volatilità del sottostante. Se il vega è molto alto il valore della nostra opzione reagisce maggiormente alle variazioni della volatilità. Abbiamo anticipato che un valore alto della volatilità del sottostante giova agli acquirenti di opzioni call o put, mentre è sempre negativo per chi vende. Il vantaggio portato dal vega agli acquirenti di opzioni è dovuto dell'asimmetria del payoff delle opzioni: un aumento della volatilità per l'acquirente di una call (put) può portare a una perdita massima pari al premio nel caso di un ribasso (rialzo) del prezzo, al contrario in caso di variazioni al rialzo (al ribasso) il profitto è potenzialmente illimitato. Quindi i benefici potenziali di un aumento della volatilità sono maggiori dei rischi, date le perdite massime pari al premio. A parità di condizioni, il valore delle opzioni aumenta al crescere della volatilità allo stesso modo sia per le call che per le put, quindi il vega è uguale tra le due tipologie di opzioni.

Analiticamente la formula del vega è così integrata all'interno dell'equazione di Black-Scholes-Merton:

$$Y_{call/put} = \frac{\partial c/p}{\partial \sigma} = S * \sqrt{T * N(d_1)}$$

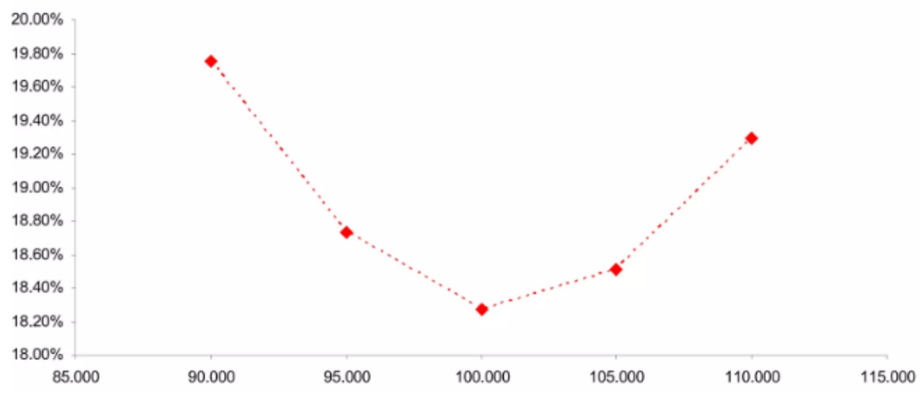


Come possiamo notare il vega di una call segue una forma a campana di Gauss, raggiunge valori molto alti quando siamo vicino allo strike, mentre resta basso quando siamo deep in/out the money. Questa forma spiega il peso della volatilità nel determinare il valore dell'opzione, che diventa massima vicino lo strike price. Infatti la volatilità diventa un elemento decisivo allo strike, dove una piccola variazione può fare la differenza tra un opzione che verrebbe esercitata o meno.

Quando vedremo le formule alla base delle formulazioni di Black-Schole-Merton vedremo la volatilità rappresentata dal sigma, simbolo con cui tipicamente si esprime la deviazione standard calcolata sui prezzi storici del titolo. Per la valutazione del prezzo attuale delle opzioni però, il vega ottenuto tramite rielaborazioni della volatilità passata non può esserci d'aiuto, abbiamo bisogno di trovare una stima sulla volatilità attesa, che tuttavia non è semplice individuare. Molti trader si affidano ad alcuni strumenti quotati che possano dare indicazioni sulla volatilità attesa sul mercato[6]. Il Vega è quindi una greca particolare rispetto alle altre, perché non può basarsi sui dati storici: un modello predittivo che si basa unicamente sulle serie storiche dei prezzi non riesce ad anticiparne i movimenti. Nel contesto dei mercati di opzioni non ci riferiremo più alla volatilità intesa come deviazione standard della serie storica, ma di *volatilità implicita*, cioè quella derivabile dai prezzi di mercato delle opzioni, che riflettono anche le aspettative degli operatori. Per questo motivo il Vega è un punto di rottura tra la teoria dei modelli di pricing, e la realtà dei mercati, dove fattori esogeni possono invalidare qualunque assunzione di partenza. Cercheremo attraverso una sorta di formula inversa dell'equazione di BSM di isolare il vega, ottenendo così la volatilità implicita quotata sui mercati. La volatilità ottenuta è quella che se inserita nel modello restituisce il prezzo delle opzioni sul mercato, quindi quella che il mercato considera *fair* in un dato momento. Questa volatilità così ottenuta ingloba notizie o eventi avversi attesi come guerre o crisi geopolitche (La Stampa, 2020), ma anche l'aspettativa di variazioni del prezzo dovute ai cicli economici settoriali. In generale la volatilità implicita è in grado di darci una misura del sentiment del mercato sulla futura volatilità di un dato sottostante, è determinante per un trader che voglia valutare se un'opzione è sopravvalutata o sottovalutata rispetto alla volatilità storica, se esistono dei cicli di volatilità e come sfruttarli.

Assumeremo che il prezzo dell'opzione osservabile sul mercato sia già equo, poiché abbiamo gli altri input possiamo calcolare la volatilità. Se andassimo ad analizzare sui mercati la volatilità implicita in base al prezzo di esercizio, ovvero allo strike, per un dato prezzo del sottostante, otterremo il cosiddetto *volatility smile*. (Gandolfi, 2018). Negli anni passati la manifestazione di questo fenomeno fu ricondotta alla minore liquidità di alcune tipologie di opzioni che giustificava prezzi più elevati e quindi una volatilità implicita maggiore. Un'altra spiegazione di questo fenomeno, relativamente alle opzioni *OTM*, lo riconduceva all'effetto lotteria che induceva gli operatori ad acquistare questo tipo di opzioni facendone salire il prezzo. La possibilità cioè di poter ritrarre ampi payoff spendendo piccole somme di denaro attraeva maggiori investitori. Spiegazioni più recenti riconducono l'effetto *smile* all'esistenza di due caratteristiche nella distribuzione a scadenza dei prezzi del sottostante; esse sono:

- la presenza di code spesse (*fat tails*).
- l'esistenza di asimmetrie (*skew*).



[6] Il VIX index è considerato lo strumento che meglio imita l'andamento della volatilità attesa. E' anche chiamato *indice della paura*, per la sua sensibilità a notizie e shock esogeni al mercato.

Un medoto basato sull'iterazione per calcolare una stima della nostra volatilità implicita è quello di Newton-Raphson, anche chiamato metodo delle tangenti (Tiberti, 2015). Questo modello nasce per approssimare funzioni del tipo $f(x) = 0$ a radice unitaria. E' dimostrabile che usando come funzione ricorrente

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_{n-1})}$$

La successione di x_n converge velocemente alla radice, cioè a quel valore di x che riporta uguale a zero la funzione. L'idea che svilupperemo anche nel codice è la seguente, è possibile stimare x_i che risolva la funzione $f(x_i) = 0$ partendo da una stima iniziale di x e generando un numero k di iterazioni in cui la funzione viene approssimata dalla sua tangente. Il fattore x_{i+1} sarà dato dall'intercetta della tangente e dell'asse x generata dall'approssimazione al punto precedente. La soluzione viene trovata dopo un certo numero di iterazioni che ci avvicinano progressivamente al valore radice della nostra funzione (nel nostro caso il valore della volatilità implicitamente espressa dal prezzo di mercato dell'opzione). Nell'operativo è utile sapere che la volatilità implicita di qualsiasi opzione è convertibile in volatilità giornaliera dividendo per la radice quadrata di 252 (giorni di trading in un anno).

Per avviare il ciclo viene inizializzato un valore nell'intorno di quello atteso della soluzione e attraverso passi successivi si ottengono dei valori candidati per il parametro di volatilità. Il valore finale si ottiene quando il prezzo di output non è abbastanza vicino al prezzo rilevabile sul mercato. Creiamo dunque una funzione *vol_implicita* che ha come ultimi tre input la stima iniziale, la tolleranza tramite la quale verificheremo la convergenza, e il numero massimo di iterazioni che andrà a riproporre il nostro ciclo. Molti degli argomenti trattati in questo codice non sono stati ancora introdotti, è quindi preferibile passare oltre e ritornarci quando affronteremo il modello di Black-Scholes-Merton (Black, 1973), dove richiameremo il modello di Newton-Raphson.

```
import math
import scipy.stats as stats

def Vol_Imp(prezzo_opzione,strike_price,giorni_scadenza,S0,rf,type='call',stima_iniziale=0.2,tolleranza=1e-5,Iter=100):

# Definiamo le costanti
giorni_scadenza=math.sqrt(giorni_scadenza/365.0)
d1=(math.log(S0/strike_price)+((rf+0.5*stima_iniziale**2)*(giorni_scadenza/365.0)))/(stima_iniziale*giorni_scadenza)

# Processo iterativo
for i in range(Iter):
d1=(math.log(S0/strike_price)+((rf+0.5*stima_iniziale**2)*(giorni_scadenza / 365.0)))/(stima_iniziale*giorni_scadenza)
d2=d1 - stima_iniziale * giorni_scadenza

if type == 'call':
prezzo_opzione_teorico = S0*stats.norm.cdf(d1)-strike_price*math.exp(-rf*(giorni_scadenza/365.0)) * stats.norm.cdf(d2)
elif type == 'put':
prezzo_opzione_teorico = strike_price*math.exp(-rf*(giorni_scadenza/365.0))*stats.norm.cdf(-d2)-S0*stats.norm.cdf(-d1)

vega = S0 * giorni_scadenza * stats.norm.pdf(d1)

# Calcoliamo la prossima ipotesi per la volatilità implicita
next_guess = stima_iniziale + (prezzo_opzione - prezzo_opzione_teorico) / vega

# Controlliamo la convergenza
if abs(next_guess - stima_iniziale) < tolleranza:
return next_guess

stima_iniziale = next_guess
raise ValueError("Il calcolo della volatilità implicita non è convergente")
```

La velocità implicità è quindi l'unico parametro libero nel modello di Black-Scholes-Merton, è un valore che i trader devono monitorare costantemente per valutare la loro esposizione alle oscillazioni della volatilità. E' empiricamente dimostrato che la volatilità implicita è solitamente sovrastimata rispetto alla volatilità che si verifica effettivamente sui mercati. I motivi possono essere molteplici, come l'avversione generale al rischio e una maggiore richiesta per la compensazione del rischio di coda.

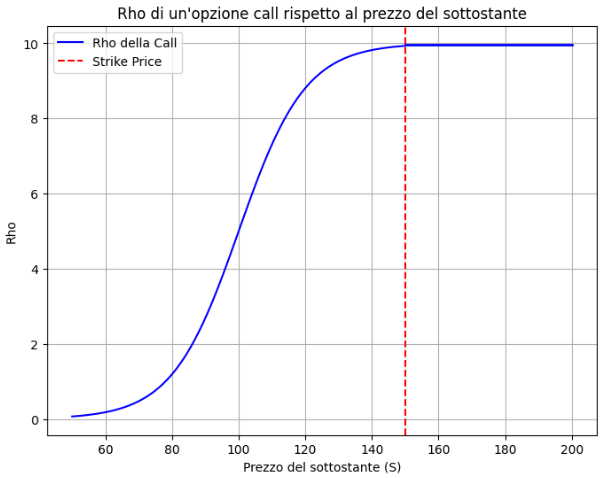
3.1.5 Rho

Il rho esprime la variazione del prezzo dell'opzione al variare del tasso risk-free. Tra le greche è il coefficiente che ha minor impatto sul valore delle opzioni, soprattutto se si opera su opzioni a breve/medio termine. Sappiamo che un rialzo dei tassi porta solitamente a un ribasso dei mercati azionari, ciò incide sul prezzo del sottostante e di conseguenza sul valore dell'opzione. Analiticamente:

$$\rho_{call} = \frac{\Delta c}{\Delta r} = X * T * \ e^{-r*T} * N(d_2)$$

$$\rho_{put} = \frac{\Delta p}{\Delta r} = -X * T * \ e^{-r*T} * N(-d_2)$$

Il rho assume valori molto alti quando si è DITM, molto bassi quando si è DOTM, e ha valore positivo per le call e negativo per le put. Un rialzo dei tassi ceteris paribus riduce il valore attuale dei flussi futuri garantiti dal possesso del sottostante, di conseguenza i mercati azionari soffrono in periodi di tassi alti e anche i contratti opzionali risentono della presenza di politiche restrittive. In generale il rischio di esporsi a variazioni dei tassi d'interesse è generalmente trascurato dai trader di opzioni, a meno che non si operi su scadenze veramente lunghe.



Dato lo studio di questi fattori appena visti, si può pensare che sia semplice identificare un modello matematico che sia in grado di ridarci il prezzo di un'opzione combinando le varie greche in un'unica equazione. La costruzione di modelli efficaci per il pricing delle opzioni è una sfida ancora aperta sia tra gli accademici che tra gli addetti ai lavori, ma il modello di maggior precisione si è raggiunto con la creazione dell'equazione Black-Scholes-Merton:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS\frac{\partial C}{\partial S} + \frac{\partial C}{\partial t} = rC$$

Questa funzione si studierà nel dettaglio più avanti in questo testo, ma la anticipiamo perché isola tutte le variabili che influenzano il prezzo dell'opzione, permettendoci di studiare i singoli coefficienti:

$$\sigma^2 S^2 \Gamma + rS\Delta + \Theta = rC$$

In queste equazioni sono racchiusi tutti gli elementi che spiegheranno l'aumentare o il diminuire del prezzo dell'opzione, potremo individuare e monitorare i rischi, coprirci da un possibile aumento della volatilità o dagli effetti di un ribasso del sottostante, o speculare sull'andamento dei singoli coefficienti. Procederemo spiegando nel dettaglio il rischio intrinseco che viene misurato dalle singole greche, successivamente le fonderemo a formare l'equazione finale del modello di pricing di Black-Scholes-Merton.

3.2 Modelli di pricing

Per studiare i principali modelli per il pricing dei derivati (Gandolfi, 2018), è indispensabile adottare fin da subito un'importante ipotesi che rimarrà valida in tutte le successive implementazioni: ipotizzeremo che l'investitore sia neutrale al rischio. Tale ipotesi implica che l'investitore non richieda un premio aggiuntivo rispetto al tasso privo di rischio per i propri investimenti. La neutralità al rischio consente di valutare qualsiasi attività finanziaria attualizzando i flussi attesi al tasso risk-free, per cui il valore attuale di un investimento corrisponde al suo valore atteso a scadenza opportunamente attualizzato. Questa semplificazione rende inequivocabile la valutazione delle opzioni o di altri derivati, il tasso di rendimento atteso dalle azioni o il tasso di attualizzazione dei flussi attesi di un qualsiasi strumento non dipenderà dalla propensione al rischio dell'investitore, ma sarà sempre pari al tasso risk-free.

Dopo aver definito tutti i vari fattori di rischio che influenzano il prezzo di un'opzione, è ora di formulare alcuni modelli più complessi in grado di restituirci il valore teorico delle nostre opzioni tenendo conto di tutte le variabili approfondite ai capitoli precedenti. I modelli per il pricing delle opzioni che andremo ad analizzare sono tre: il pricing con *Alberi Binomiali*, il modello *Monte-Carlo* e il modello *Black-Scholes-Merton*. Questi modelli hanno alcuni fattori in comune:

- L'assunzione di neutralità al rischio dell'investitore e assenza di opportunità di arbitraggio sui mercati.
- Cercano di replicare l'andamento aleatorio del sottostante, secondo un processo stocastico (solitamente un moto geometrico browniano).
- Convergenza numerica dei risultati dei tre modelli: Il modello binomiale, all'aumentare degli step, converge esattamente alla formula di Black-Scholes-Merton; analogamente, aumentando il numero di sentieri simulati dal modello Monte Carlo, anch'esso approssima lo stesso valore teorico.

Il modello considerato migliore, al fine di spiegare il prezzo di un'opzione, è il modello Black-Scholes-Merton, che richiameremo spesso con l'acronimo BSM. Questo modello valse il premio Nobel per l'economia ai tre economisti[7] che lo idearono ed è considerato il principe per il pricing delle opzioni e per lo studio degli strumenti derivati. Svilupperemo degli script in python che permettano di quantificare il prezzo degli strumenti derivati, un'analisi da affiancare a quella svolta al capitolo due sull'andamento del sottostante. Proprio durante lo studio delle serie storiche abbiamo incontrato la definizione formale di moto geometrico Browniano, che torna a esserci utile:

$$dX = adt + bdz$$

Dove dz è la componente stocastica che aggiunge rumore all'andamento della componenente deterministica adt, che puo essere anche trascritta come:

$$dX = X_0\mu dt + bdz$$

- *X0* è il prezzo dell'attività o di una variabile nel tempo *t=0.*
- a è il drift, ovvero il tasso di crescita atteso μ.
- b è la volatilità dei rendimenti.
- dz è la componente stocastica generata dal processo di Wiener.
- dt è la variazione infinitesimale del tempo.

Sia il metodo Binomiale che il metodo di Monte Carlo traspongono nel discreto il processo di Wiener. Questi modelli pervengono ai prezzi delle opzioni ricostruendo degli scenari aleatori, ovvero imponendo ai prezzi

[7] Merton fu insignito del premio Nobel per l'Economia assieme a Scholes nel 1997. Fisher Black, era scomparso prematuramente nel 1995.

azionari delle random walks governate da un moto geometrico Browniano trasposto nel discreto. La trasposizione è attuabile tramite la seguente formula.

$$\Delta X = a\Delta t + b\Delta z$$

Dove $\Delta z = \varepsilon\sqrt{\Delta t}$ è la componente che aggiunge rumore all'andamento della variabile *S0,* con ε estrazione da una funzione di densità di una variabile casuale normale standardizzata. Questo fattore ci sarà utile per generare un numero di *N* sentieri casuali e per costruire il modello Monte-Carlo.

Secondo le formulazioni di cui sopra, i processi di Wiener generalizzati trasposti nel discreto hanno:

- Drift rate = a
- Variance rate = b^2

I processi di wiener così visti, con drift rate e variance rate costanti e indipendenti dal prezzo corrente del sottostante, non si prestano particolarmente bene alla valutazione delle serie storiche. Più adatto è il *processo di Ito*, un particolare tipo di processo di Wiener generalizzato, caratterizzato da parametri drift rate e variance rate che sono funzioni del valore corrente della variabile aleatoria *S0* e del tempo t:

- Drift rate = *a(S0 , t)*
- Variance rate = $b^2(S0, t)$

I processi di Ito si prestano a spiegare l'andamento della nostra variabile aleatoria S0, sia nel continuo:

$$S0 = a(x,t)dt + b(x,t)dz$$

Che trasposto al tempo discreto:

$$S0 = a(x,t)\Delta t + b(x,t)\Delta z$$

Abbiamo quindi tutti gli elementi per costruire la nostra random walk che governa il prezzo di un'azione che non stacca dividendi e che abbia le seguenti caratteristiche:

- Segue un processo di Ito: drift rate e variance rate funzioni del prezzo corrente e del tempo
- E' coerente con il rendimento percentuale che denominiamo μ e la volatilità dei rendimenti σ, entrambe variabili costanti in termini percentuali e indipendenti dal prezzo dell'azione.

Quindi se il nostro intento è calcolare il valore di un derivato $G(S0, t)$ dipendente quindi dal tempo e dal processo stocastico di S0 che abbiamo assunto seguire un processo di Ito:

$$dS0 = \mu S0dt + \sigma S0dz$$

Ci serve sapere che anche il valore del derivato segue un processo di Ito:

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial S0}\mu S0 + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial S0^2}\sigma^2 S0^2\right)dt + \frac{\partial G}{\partial S0}\sigma S0dz$$

con dz che segue lo stesso processo di Wiener presente all'interno del processo che governa il prezzo dell'azione sottostante. Anche in questo caso $\frac{\partial G}{\partial S0}\sigma S0dz$ aggiunge "rumore" ossia variabilità al sentiero seguito da *G*. Trasposto nel discreto il valore del nostro derivato è pari a:

$$\Delta G = \left(\frac{\partial G}{\partial S0}\mu S0 + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial S0^2}\sigma^2 S0^2\right)\Delta t + \frac{\partial G}{\partial S0}\sigma S0\Delta z$$

Ora sappiamo che il prezzo di un'opzione ΔG si distribuisca in modo normale con media pari a $\left(\frac{\partial G}{\partial S0}\mu S0 + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial S0^2}\sigma^2 S0^2\right)\Delta t$ e deviazione standard pari a $\left(\frac{\partial G}{\partial S0}\sigma S0\sqrt{\Delta t}\right)$:

$$\Delta G \sim N\left(\left(\frac{\partial G}{\partial S0}\,\mu S0+\frac{\partial G}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial S0^2}\sigma^2 S0^2\right)\Delta t\,,\,\left(\frac{\partial G}{\partial S0}\right)^2\,\sigma^2 S0^2\Delta t\right)$$

Con:

- Drift rate : $\left(\frac{\partial G}{\partial S0}\,\mu S0+\frac{\partial G}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial S0^2}\sigma^2 S0^2\right)$
- Variance rate: $\left(\frac{\partial G}{\partial S0}\right)^2\,\sigma^2 S0^2$

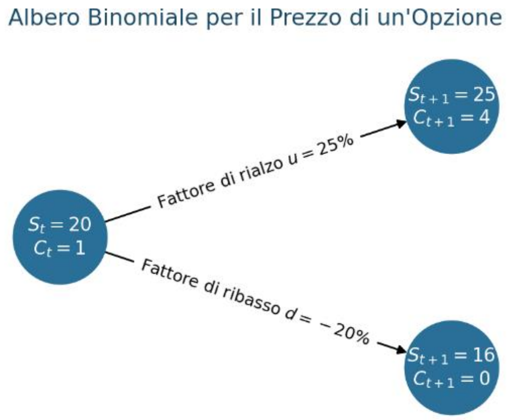
Queste analisi preliminari ci hanno permesso di comprendere come risalire dal moto geometrico Browniano che controlla il prezzo di un sottostante, e di conseguenza anche il prezzo del derivato. Vediamo ora come applicare queste teorie nell'operatività con il fine ultimo di risalire al prezzo le nostre opzioni, risolvendo le nostre equazioni fondanti tramite dei fogli di calcolo che costruiremo in python. Grazie a queste tecniche, è possibile tradurre in calcoli rigorosi gli andamenti stocastici dei sottostanti e ottenere valutazioni coerenti e replicabili dei derivati.

3.2.1 Alberi Binomiali

Il modello degli alberi binomiali di Cox, Ross e Rubinstein o modello CRR è un'analisi multi periodale sui diversi sentieri che il prezzo del sottostante della nostra opzione potrebbe seguire dal giorno di sottoscrizione alla scadenza. Studiando i possibili andamenti del sottostante sarà semplice calcolare il possibile payoff a scadenza della nostra opzione, che, come sappiamo, dipende dal prezzo a scadenza del titolo. Una volta ottenuti una serie di *g* possibili valori della nostra opzione a scadenza, grazie al principio di neutralità al rischio, sarà possibile attualizzarli al tasso risk-free e ponderarli per le possibilità relativa ad ognuno, avvalendoci dello studio della distribuzione. Per semplificazione, la nostra analisi si svolgerà su opzioni che non prevedono lo stacco di dividendi. Questo modello sviluppa l'andamento del sottostante secondo un approccio binomiale:

- Si suddivide la vita residua T dell'opzione in n periodi di uguale durata.
- Da ogni nodo di prezzo partiranno solo due rami, identificativi di due possibili movimenti, il prezzo ad ogni stadio potrà solo salire di un certo fattore di rialzo o scendere di un certo fattore di ribasso.
- A ogni stadio il numero di nodi aumenta di uno.
- Assumeremo che la struttura a termine dei tassi sia piatta e che sia possibile investire al tasso risk-free per qualsiasi intervallo temporale.

Il modello CRR si rivela particolarmente utile per la valutazione di opzioni americane, le quali possono essere esercitate in qualsiasi momento prima della scadenza. Costruiremo il nostro albero partendo da un prezzo X, nel nostro caso il prezzo attuale del sottostante S0, dal quale si diramano i primi due rami, ovvero i due possibili scenari: il prezzo con probabilità *p* aumenta di un certo fattore di rialzo *u* , e con probabilità *1-p* scende con un certo fattore di ribasso *d*. Dai due nuovi nodi ottenuti partiranno altrettanti rami, alcuni dei quali si incontrano nel centro, il nostro albero viene popolato dai possibili valori del sottostante nel tempo futuro, immaginando che esso segua una random walk. Vediamo un esempio esemplificato di albero binomiale per una call con strike 21 e prezzo 1, per un sottostante attualmente quotato a 20. Gli alberi con solo due rami, sono anche chiamati alberi a uno stadio:



L'albero binomiale è diviso in n stadi, ciascuno di lunghezza $\Delta t = \frac{T}{n}$ dove *T* è il tempo mancante alla scadenza dell'opzione, ogni stadio porterà a una nuova diramazione dei rami. Entrambe le variazioni, di rialzo e ribasso, verranno calcolate in base alla volatilità e al tempo mancante a scadenza. Grazie all'assunzione di neutralità al rischio, il fattore di rialzo *u* può essere approssimato tramite questa formula:

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

Mentre il fattore di ribasso *d*:

$$d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} = \frac{1}{u}$$

In un mondo neutrale verso il rischio la possibilità di rialzo di un'opzione p e il prezzo dell'opzione viene così calcolata:

$$p = \frac{a - d}{u - d}$$

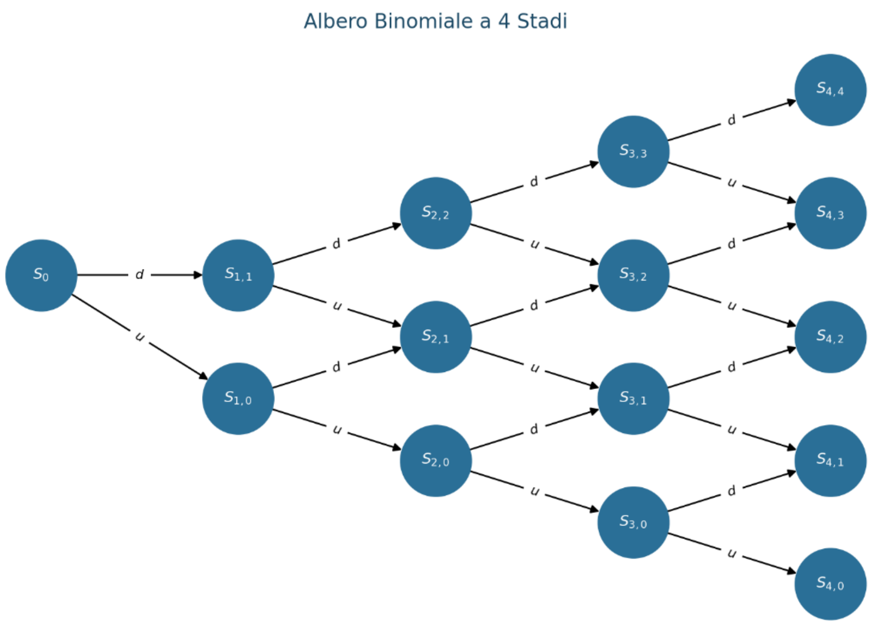
$$c = e^{-rT} * [p * f_u + (1 - p) + f_d]$$

Dove $a = e^{r\Delta t}$ viene definito fattore di crescita, ed f_u ed f_d sono i valori attualizzati delle opzioni a scadenza nei due possibili scenari. Tornando all'esempio del nostro albero a uno stadio, ipotizzando scadenza a tre mesi e tasso risk free pari al 3% possiamo calcolare il valore della nostra opzione:

$$p = \frac{(e^{0.05*3/12} - 0.80)}{(1.25 - 0.80)} = 0.4724$$

$$c = e^{-0.05*3/12} * [0.4724 * 4 + (1 - 0.4724) * 0] = 1.866127012$$

Andando a confrontarci con un contesto pratico, sappiamo che è impossibile assumere che il nostro prezzo possa assumere solo due possibili movimenti in un determinato arco temporale, per questo ramifichiamo quanto più possibile il nostro albero con i sentieri generati dalla nostra random walk.



Analizziamo ora passo per passo come è possible implementare in python queste formule, creando un modello iterativo che possa calcolare il valore della nostra opzione. E' utile creare delle funzioni che potremo richiamare a ogni occorrenza, mantenendo dei dati inseribili manualmente come input, in modo da poter studiare le variazioni ceteris paribus a variazioni dei singoli imput. La prima funzione utile è quella che implementa le formule appena viste: una funzione *UD_albero_binomiale* che restituisca il fattore di rialzo, di ribasso e la probabilità di un rialzo. Useremo la libreria numpy che abbiamo già incontrato per manipolare dati numerici e creare un albero a N stadi.

```
def UD_albero_binomiale(T,r,N,sigma):
  dt= (T/N)*1/365             # dt sarà la lunghezza dei periodi T/N espressa in anni
  a = np.exp(r * dt)          # fattore di accelerazione
  u = np.exp( sigma * np.sqrt(dt))      # fattore di rialzo
  d = 1/u                               # fattore di rialzo
  q = (a - d) / (u - d)                 # prob. di rialzo
  return u,d,q
```

Il nostro albero è popolato dai valori ottenuti da una serie successive di rialzi e di ribassi. Una volta in possesso di p grazie alla *distribuzione binomiale* possiamo calcolare la probabilità di j rialzi e di I ribassi, dati gli n stadi, popolando così il nostro albero con le possibilità che ogni scenario si manifesti:

$$\frac{n!}{(n-j)!\,j!}\,p^j(1-p)^{n-j}$$

Questa formula della distribuzione binomiale dove n è il numero di prove, j numero di successi e p probabilità di successo, calcola la possibilità di avere j successi su n prove. E' semplice da implementare in python, soprattutto grazie alla libreria math già integrata nelle librerie standard di python:

```
import math

def probabilita_binomiale(n, k, p):
    probabilita = math.comb(n, k) * (p**k) * ((1 - p)**(n - k))
    return probabilita
```

Le librerie si rivelano sempre utili, *math.comb(n,k)* ci permette di calcolare velocemente il coefficiente binomiale (pari al numero di combinazioni semplici date da n elementi della classe k) richiesto per calcolare la distribuzione binomiale.

$$\frac{n!}{(n-j)!\,j!}$$

Per il nostro codice preferiremo usare una tecnica alternativa all'uso della distribuzione binomiale, implementando una serie di cicli for che ci saranno utili anche per la rappresentazione del nostro albero binomiale dentro un grafico cartesiano. Ricordo che risultano tagliate nel testo le parti di codice utili alla rappresentazione grafica, che invece risultano sul codice sorgente allegato nella repository.

La formula che popola l'albero lavora con due cicli for annidati che calcolano i diversi livelli del sottostante con i rialzi e j ribassi, trovando tutte le diverse combinazioni. Il risultato è un albero bionomiale che sarà possibile visualizzare, che si estende per t giorni, diviso in N passi temporali, che ci restituirà alla fine i possibili valori del sottostante a scadenza. Il fattore T è calcolato con i seguenti parametri:

- $t =$ tempo rimanente a scadenza in giorni
- $N =$ periodi temporali per gli stati dell'albero binomimiale
- *1/365* = fattore di annualizzazione in anni grazie al prodotto con *1/365*

```
def albero_binomiale(t, S0, r, N, u, d, q):
    """
    Funzione per generare e visualizzare un albero binomiale dei prezzi di un sottostante.

    Parameters:
    - t: Tempo di scadenza in giorni.
    - S0: Prezzo iniziale del sottostante, nonchè il prezzo iniziale.
    - r: Tasso di interesse privo di rischio.
    - N: Numero di passi temporali.
    - u: Fattore di rialzo.
    - d: Fattore di ribasso.
    - q: Probabilità di rialzo.
    - opttype: Tipo di opzione call o put.
    """
    T=(t/N)*1/365

    # Creazione dell'albero dei prezzi del sottostante
    S = np.zeros((N + 1, N + 1))  # Albero dei prezzi
    S[0, 0] = S0

    # Popolazione dell'albero dei prezzi del sottostante
    for i in range(1, N + 1):       # i = numero rialzi
        for j in range(i + 1):      # j = numero ribassi
            S[j, i] = S0 * (u**(i - j)) * (d**j)  # output finale per ogni nodo

    return S
```

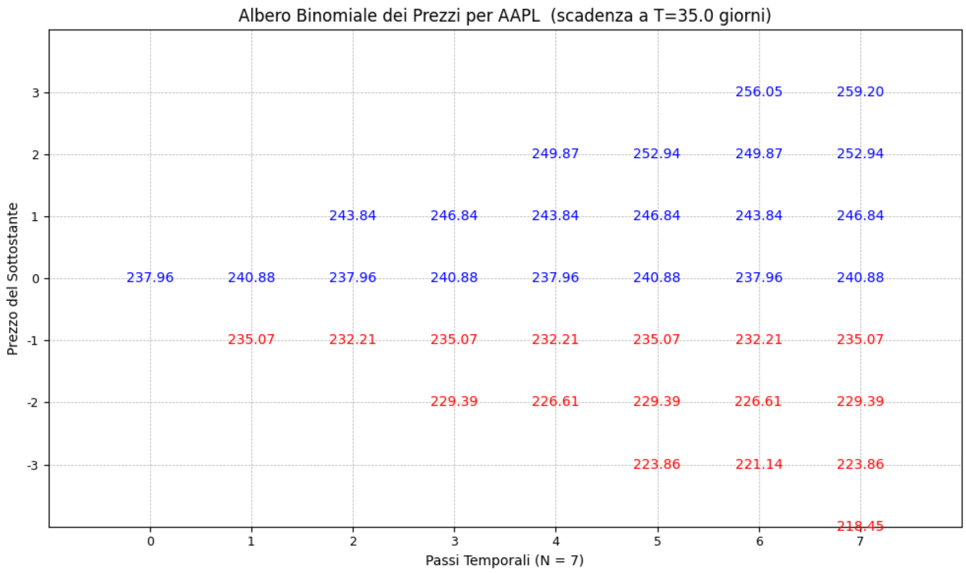
L'array S è inizialmente un vettore di zeri, di dimensione uguale agli stati che vogliamo rappresentare ($N+1$). L'array viene poi popolato dai vari sentieri, a partire da quello con andamento costantemente positivo, che riempie la prima riga. Quelli che vediamo nella prima riga sono quindi i prezzi che avrebbe avuto il sottostante a ogni nodo temporale se avesse avuto un rialzo ad ogni stadio. Nella seconda riga invece abbiamo il primo valore pari a zero in quanto il valore di partenza è sempre quello in posizione 1:1, ma nella seconda colonna abbiamo il valore che risulta da un primo ribasso, e a seguire tutti rialzi. Nella terza riga abbiamo due zeri, quindi due ribassi e al terzo valore il risultato finali dei due ribassi. Infine l'ultima riga conterrà solo l'ultimo valore diverso da zero, e sarà il prezzo finale dopo N ribassi.

237,96	240,88	243,84	245,84	249,87	252,94	256,05	259,20
0,00	235,07	237,96	240,88	243,84	246,84	249,87	252,94
0,00	0,00	232,21	235,07	237,96	237,96	243,84	246,84
0,00	0,00	0,00	229,39	235,07	232,21	237,96	240,88
0,00	0,00	0,00	0,00	226,61	226,61	232,21	235,07
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	223,39	226,61	229,39

0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	221,14	223,86
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	218,45

Andiamo fare un esempio prendendo i dati direttamente dal mercato reale. Scegliamo un titolo, scriviamone il nome o l'ISIN nel ticker, scegliamo un numero di stadi e impostiamo risk-free e la data di scadenza che rappresenta quanto lontano vogliamo andare con la nostra previsione, il resto verrà calcolato automaticamente grazie alle due funzioni che abbiamo creato. La volatilità verrà calcolata sui prezzi di chiusura degli ultimi 30 giorni. La rappresentazione grafica dell'albero è riportata successivamente:

```
ticker = 'AAPL '      # ticker del titolo
T = 35              # giorni a scadenza
r = 0.025         # tasso risk free
N = 7       # numero stadi

data = yf.download(ticker, period='1y', interval='1d')
prezzi_chiusura = data['Close'].values
v = prezzi_chiusura[-T:]

var = np.std(v) * 0.01   # deviazione standard degli ultimi T giorni (volatilità)
S0 = prezzi_chiusura[-1]   # ultimo prezzo

# calcoliamo il fattore di rialzo, di ribasso e la probabilità di rialzo
u,d,q = UD_albero_binomiale(T,r,N,var)

# calcoliamo e rappresentiamo l'albero
s = albero_binomiale(T,S0,r,N,u,d,q)
```



Sul codice non c'è niente da dire che non sia già stato detto, la volatilità è calcolata sugli ultimi 30 giorni, ma sappiamo che è spesso un dato che ai trader piace analizzare nel dettaglio e impostare manualmente, quindi ho ritenuto fosse meglio lasciarla fuori dai processi automatizzati. Ora possiamo finalmente calcolare il valore atteso delle opzioni sulla base delle probabilità ottenute dalla distribuzione binomiale:

Per le opzioni call:

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{n!}{(n-j)!\,j!}\, p^j (1-p)^{n-j} * Max[\, S_0 \gamma^j \theta^{n-j} - strike,\ 0]$$

Per le opzioni put:

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{n!}{(n-j)!\,j!}\, p^j (1-p)^{n-j} * Max[\,strike - S_0 \gamma^j \theta^{n-j},\ 0]$$

E infine andando ad attualizzare il valore atteso a scadenza per la call e la put, otterremo la nostra valutazione del prezzo delle opzioni secondo il metodo binomiale. Ricordiamo che stiamo assumendo la neutralità al rischio dell'investitore, attualizzeremo tutti i flussi al tasso risk-free.

$$c = e^{-rT} \sum_{j=0}^{n} \frac{n!}{(n-j)!\,j!}\, p^j (1-p)^{n-j} * Max[\,S_0 \gamma^j \theta^{n-j} - strike,\ 0]$$

$$p = e^{-rT} \sum_{j=0}^{n} \frac{n!}{(n-j)!\,j!}\, p^j (1-p)^{n-j} *\ Max[\,strike - S_0 \gamma^j \theta^{n-j},\ 0]$$

Con il nostro codice e le funzioni precedentemente costruite abbiamo tutti gli ingredienti per comporre il nostro codice. Inseriamo i nostri input, tutti dati esogeni o precedentemente calcolati. Facciamo la solita trasformazione del tempo a scadenza in anni e creiamo un codice di attualizzazione dei flussi. Con un ciclo for attualizziamo tutti i possibili payoff, ponderandoli per la possibilità che si manifestino (grazie alla funzione probabilità_binomiale che abbiamo precedentemente conosciuto). Infine sommiamo i nostri valori attuali, ottenendo il valore finale della nostra call. Il consiglio quando si approcciano questi modelli, oltre all'analisi minuziosa di ogni singola riga di codice, è quello di "giocare" con i dati di input, per verificare empiricamente e trovare un riscontro alle proprie assunzioni.

```python
# Funzione per calcolare il valore atteso di un'opzione call o put

def opzione_binomiale(p, u, d, S0, T, K, r, n, type="call"):
    """
    Calcola il valore atteso di un'opzione call o put con il modello binomiale.
    Restituisce il valore atteso dell'opzione, attualizzato al tasso risk-free.

    Parameters:
    p : probabilità di rialzo (probabilità di successo).
    u : fattore di rialzo.
    d : fattore di ribasso.
    S0 : prezzo iniziale.
    T : giorni a scadenza.
    K : strike price.
    r : tasso d'interesse risk-free.
    n : numero di passi (step) nel modello binomiale.
    tipo_opzione : tipo dell'opzione (call o put).
    """

    # passo temporale in anni
    dt=T/252

    # Fattore di attualizzazione
    att = math.exp(-r * dt)

    # Calcolare il valore atteso
    valore_atteso = 0
    for j in range(n+1):

        prezzo_j = S0 * (u**j) * (d**(n-j))

        if type == "call":
            payoff = max(prezzo_j - K, 0)
        elif type == "put":
            payoff = max(K - prezzo_j, 0)
        else:
            raise ValueError("Errore: digitare type")

        # Aggiungere al valore atteso
        valore_atteso += probabilità_binomiale(n,j,p) * payoff

    # Attualizzare il valore atteso
    valore_atteso *= att

    return valore_atteso
```

Nonostante il modello ad alberi binomiali abbia introdotto un nuovo approccio per i modelli di pricing, si basa su assunzioni irrealistiche che destano non pochi dubbi sull'affidabilità delle previsioni:

- Variabilità binaria del modello, sappiamo che ogni movimento può assumere solo due tipi di valori, pari ai fattori *u* e *d.*
- L'arbitrarietà nello stabilire i valori di *u* e *d.*
- Scarsa considerazione nel modello della volatilità attesa.
- A parità di giorni a scadenza *T*, la scelta del parametro *n,* può generare risultati molto diversi.

Ai limiti del modello binomiale si è cercato di reagire con l'implementazione dei modelli di Montecarlo e BSM.

3.2.2 Simulazione Monte-Carlo (moto browniano-weiner)

Il metodo Monte-Carlo è una tecnica per l'analisi statistica che utilizza la simulazione di processi casuali per risolvere problemi matematici complessi. Questo modello è implementabile solo se si dispone di strumenti di calcolo avanzati che permettano calcoli iterativi. In ambito finanziario questo modello è impiegato per lo studio delle serie storiche e di conseguenza anche per la valutazione dei derivati. Questi modelli permettono di risolvere la principale difficoltà del modello binomiale, ovvero l'assunzione iniziale del movimento binomiale, in cui ci sono solo due movimenti possibili per il sottostante, pari a un fattore di rialzo e di ribasso fissi. Sappiamo in realtà che l'andamento del sottostante può assumere molte traiettorie diverse. Tale limitazione viene risolta dal metodo Monte-Carlo attraverso un numero *g* di simulazioni di una random walk, ognuna composta da n stadi della durata $dt = \frac{T}{n}$, estraendo campioni pseudocasuali di moto geometrico Browniano. Anche per questo metodo ricordiamo che riteniamo valida l'assunzione di neutralità al rischio dell'investitore. Per generare *g* sentieri di *S0* in un mondo neutrale al rischio, lavoreremo con la seguente formula:

$$S0\left(e^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)dt+\sigma\varepsilon(i)\sqrt{dt}}\right)^n$$

Dove $\varepsilon(i)$ è la i-esima estrazione casuale dalla funzione di densità di una variabile casuale normale standardizzata, *N(0,1).* Questa funzione, anche nel nostro codice, ci permetterà di generare sentieri sempre diversi, da un nodo si può partire in qualunque direzione. Una volta in possesso dei valori finali del sottostante potremo:

- Calcolare il valore campionario finale del derivato per ogni sentiero generato:
  - Per le call: $\max\left[S0\left(e^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)dt+\sigma\varepsilon(i)\sqrt{dt}}\right)^n - K, 0\right]$
  - Per le put: $\max\left[K - S0\left(e^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)dt+\sigma\varepsilon(i)\sqrt{dt}}\right)^n, 0\right]$
- Calcolare la media aritmetica dei valori finali dei campioni:
  - Per le call: $\frac{1}{g}\sum_{i=1}^{g}[\,S0\left(e^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)dt+\sigma\varepsilon(i)\sqrt{dt}}\right)^n - K, 0]$
  - Per le put: $\frac{1}{g}\sum_{i=1}^{g}[K - S0\left(K - e^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)dt+\sigma\varepsilon(i)\sqrt{dt}}\right)^n, 0]$
- Attualizzare il valore finale medio al tasso risk-free. Otteniamo così le formule finali del modello Monte-Carlo:
  - Per le call: $e^{-rT}\,\frac{1}{g}\sum_{i=1}^{g}[\,S0\left(e^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)dt+\sigma\varepsilon(i)\sqrt{dt}}\right)^n - K, 0]$

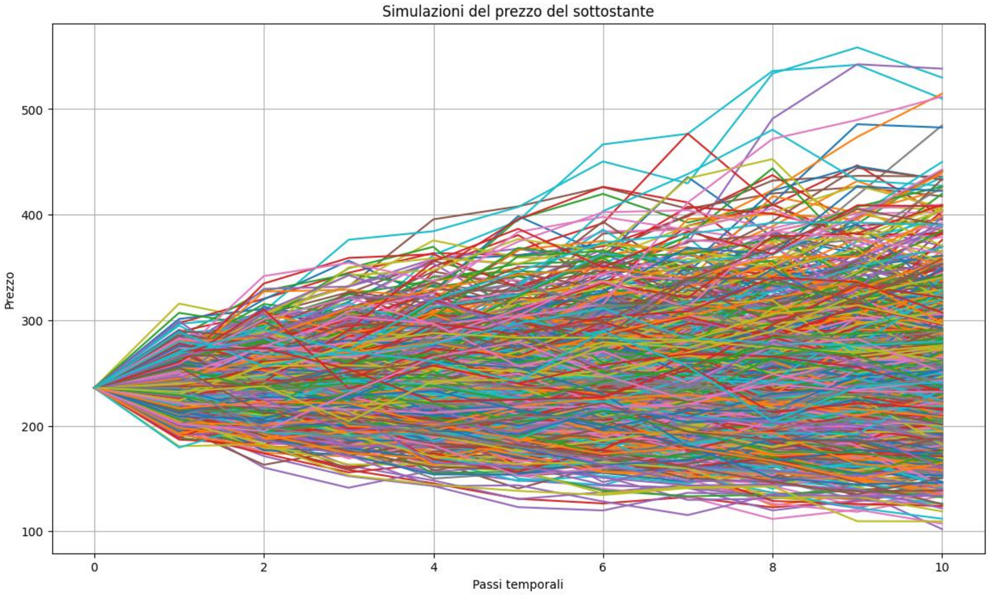
- Per le put: $e^{-rT}\frac{1}{g}\sum_{i=1}^{g}[K - S0\left(K - e^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)dt+\sigma\varepsilon(i)\sqrt{dt}}\right)^n, 0]$

Andiamo a mettere tutto sul codice. Il processo non è così differente da quello che abbiamo incontrato per la creazione degli alberi binomiali; le formule, le librerie e le funzioni saranno le stesse. Abbiamo sempre due cicli for nidificati. Creiamo la nostra funzione personalizzata *metodoMontecarlo* che ci ritorna il prezzo dell'opzione secondo gli input inseriti e l'array dei prezzi a ogni N stadio che serve per la rappresentazione grafica dell'andamento del sottostante:

```
def metodoMonteCarlo(T,S0,K,r,N,g,var,type = "Call") :

  prezzi = np.zeros((g, N + 1)) # inizializziamo la matrice dei prezzi
  prezzi[:, 0] = S0

  dt=T/N * 1/365

  if type == "Call" :

    # popoliamo la matrice dei prezzi
    for i in range(g):
      for t in range (1, N+1):
        epsilon_i = np.random.normal(0, 1)    #generiamo la nostra variabile casuale dalla normale standardizzata
        prezzi[i, t] = prezzi[i, t-1] * ((math.exp((r - ((var**2)/2)) * dt) + (var * epsilon_i * math.sqrt(dt)))**N)

    Valori_finali_opzione = []
    for i in range(g):
      Valore_finale_opzione = max(prezzi[i,N] - K,0)  # ci interessano solo i prezzi finali del sottostante per calcolare il valore dell'opzione
      Valori_finali_opzione.append(Valore_finale_opzione)

    valore_opzione_call = np.mean(Valori_finali_opzione) * np.exp(-r*T/365)

    return(prezzi, valore_opzione_call)

  elif type == "Put" :

    for i in range(g):
      for t in range (1, N+1):
        epsilon_i = np.random.normal(0, 1)    #generiamo la nostra variabile casuale dalla normale standardizzata
        prezzi[i, t] = prezzi[i, t-1] * ((math.exp(((r - (var**2)/2) * dt) + (var * epsilon_i * math.sqrt(dt))))**N)
    Valori_finali_opzione = []
    for i in range(g):
      Valore_finale_opzione = max(prezzi[i,N] - K,0)   # ci interessano solo i prezzi finali del sottostante per calcolare il valore dell'opzione
      Valori_finali_opzione.append(Valore_finale_opzione)

    valore_opzione_put = np.mean(Valori_finali_opzione) * np.exp(-r*T/365)

    return (prezzi, valore_opzione_put)
```

Una volta creata questa funzione, basta inserire gli input e aggiustare i dati (qualora sia necessario) per ottenere il prezzo dell'opzione, nonché la rappresentazione grafica dei diversi possibili andamenti (contenuta nell'array prezzi) costruiti con il metodo Monte-Carlo. Vediamo il nostro script finale in cui ci basta richiamare la funzione *metodoMonteCarlo* con tutti gli input adeguatamente scaricati e lavorati.

```
ticker = 'AAPL '     # ticker del titolo
T = 25            # giorni a scadenza
r = 0.03        # tasso risk free
N = 10     # numero stadi
K = 250    # strike price
g=1000    # numero di sentieri simulati

dt=(T/N)*(1/365)
data = yf.download(ticker, period='1y', interval='1d')  # scarichiamo i dati
prezzi_chiusura = data['Close'].values
S0 = prezzi_chiusura[-1]
v = prezzi_chiusura[-30:]
var = np.std(v) * 0.01       # varianza calcolata sugli ultimi 30 giorni

prezzi, c= metodoMonteCarlo(T,S0,K,r,N,g,var,type = "Call")
```



Oltre la bellezza dei 1000 payoff generati, anche questa strategia presenta dei limiti, infatti le informazioni che può farci questa analisi fornisce ben poche indicazioni pratiche vista l'ampiezza del range di possibili risultati. Inoltre la strategia comporta un elevato carico computazionale se volessimo che si aggiornasse ad ogni tick ricevuto dal mercato, simulare un numero così importante di percorsi rende il metodo computazionalmente intensivo. Purtroppo l'affidabilità dei risultati del modello è strettamente legata al numero di sentieri generati, maggiori sono le iterazioni maggiori possibilità avremo di ottenere stime accurate.

3.2.3 Modello Black-Scholes-Merton

Eccoci infine al modello di Black-Scholes-Merton. Nel 1973 i tre teorici riuscirono a trovare l'equazione differenziale che permettesse di valutare il prezzo di opzioni su titoli azionari o indici che non prevedano stacco di dividendi. Il modello assume che i rendimenti siano distribuiti tra infiniti stati della natura secondo una legge statistica normale: superiamo quindi il limite imposto dal modello Binomiale in cui la variabilità del prezzo del sottostante si manifesta solamente in due possibili movimenti, un rialzo e un ribasso. Il modello permette di definire e valutare il valore di un opzione a partire dalla conoscenza delle greche, ovvero dei fattori che ne influenzano il prezzo. Il modello si basa su alcune ipotesi fondamentali:

- Il mercato è aperto con continuità, condizione necessaria per l'implementazione di un modello valido nel continuo.
- Il mercato è perfetto: non abbiamo costi di transazione o pressione fiscale, i titoli sono infinitamente divisibili e vendibili allo scoperto, non ci sono opportunità di arbitraggio, gli agenti sono razionali, massimizzatori di profitto e price-taker.
- Il prezzo dell'azione segue un moto geometrico Browniano con i rendimenti che si distribuiscono come una normale.
- L'opzione valutata è europea e il titolo sottostante non prevede lo stacco di dividendi.
- La curva dei tassi è piatta[8] ed è sempre possibile investire al tasso risk-free su qualunque scadenza.

Date queste assunzioni, l'equazione differenziale parziale di Black-Scholes-Merton è così definita:

---

[8] - Il tasso risk-free è uguale per tutte le scadenze.

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS\frac{\partial C}{\partial S} + \frac{\partial C}{\partial t} - rC = 0$$

Dove *C* è il valore dell'opzione. Questa equazione esprime le relazioni infinitesimali e le dinamiche che deve soddisfare il prezzo dell'opzione in funzione dell'andamento del sottostante *S* e del tempo *t*. Possiamo notare come siano presenti proprio quelle variabili che abbiamo studiato essere influenti sul prezzo di un'opzione: il prezzo del sottostante *S*, la volatilità del sottostante σ, il tasso d'interesse risk-free *r*, la vita residua *t*, il prezzo di esercizio *X*. Infatti $\frac{\partial C}{\partial t}$ è la derivata parziale rispetto al tempo: Theta; $\frac{\partial C}{\partial S}$ è la derivata parziale rispetto al sottostante: Delta; $\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}$ è la derivata seconda rispetto all'andamento del sottostante: Gamma. E' utile fare un passo indietro tornando all'analisi dell'andamento del sottostante; abbiamo definito il processo che esprime l'evoluzione del prezzo di un titolo come:

$$dS0 \ = \ \mu S0dt \ + \ \sigma S0dz$$

Con μ e σ costanti. Dividendo da entrambi i lati per *S0* otteniamo:

$$\frac{dS0}{S0} = \ \mu dt + \ \sigma dz$$

Introducendo l'aspettativa, e ricordando che *dz* ha media nulla:

$$E_t\left[\frac{dS0}{S0}\right] = \ \mu dt + \ \sigma E_t[dz] = \ \mu \ dt$$

Di conseguenza il rendimento istantaneo atteso μ, anche detto intensità di rendimento, è pari a:

$$\mu = \frac{E_t\left[\frac{dS0}{S0}\right]}{dt}$$

Mentre la varianza è uguale a

$$Var_t\left[\frac{dS0}{S0}\right] = \ Var_t[dz] = \ \sigma^2 dt$$

$$\sigma^2 = \frac{Var_t\left[\frac{dS0}{S0}\right]}{dt}$$

Quindi σ esprime la deviazione standard del rendimento istaneo dell'investimento nel sottostante. In un mondo non neutrale al rischio, i nostri investitori chiederebbero un $\mu > rf$, con un differenziale positivo tra i due rendimenti proporzionale all'avversione per il rischio. Ricordiamo che in un mondo neutrale al rischio il tasso di rendimento atteso di tutti i titoli è uguale al tasso d'interesse risk-free.

Vediamo ora la soluzione analitica esplicita della PDE nel caso di opzioni call e put europee, una formula immediata che permette di giungere allo stesso prezzo della opzioni in maniera più immediata:

$$c = S0N(d_1) - Ke^{-rt}N(d_2)$$

$$p = Ke^{-rt}N(-d_2) - \ S0N(-d_1)$$

Dove:

$$d_1 = \frac{log\left[\frac{S(t)}{K}\right] + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

$$d_2 = \frac{log\left[\frac{S(t)}{K}\right] + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} = d_1 - \sigma\sqrt{\tau}$$

Forniamo una leggenda dei valori in queste formule:

- $c =$ opzione call europea.
- $p =$ opzione put europea.
- $K =$ strike price.
- $r =$ tasso risk free.
- $S =$ prezzo corrente del sottostante.
- $t =$ vita residua dell'opzione.
- σ = volatilità implicita del modello.
- $N(x)$ = indica la funzione di distribuzione cumulata di una variabile normale, ossia la funzione di ripartizione della variabile normale nel punto x:

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Il valore ottenuto indica la possibilità che tale variabile assuma un valore minore uguale ad x. I coefficienti $N(d1)$ e $N(d2)$ individuano la struttura del portafoglio replicante; il primo esprime il numero di unità di sottostante da acquistare, nonché come vedremo anche la possibilità di esercitare a scadenza l'opzione; il secondo il numero di ZCB con scadenza in T e nominale K da vendere allo scoperto. I valori $N(d1)$ e $N(d2)$ sono positivi e compresi tra 0 e 1. Possiamo anche assumere che data $N(x)$, funzione monotona crescente di x, $N(d1)>N(d2)$, e quindi, assumendo $\sigma\sqrt{\tau}>0$, possiamo dire che $d1>d2$.

Come menzionato nelle ipotesi del modello, esso si sviluppa per opzioni europee su titoli che non staccano dividendi. Come abbiamo visto nei precedenti capitoli, se non sono previsti dividendi, un'opzione call americana avrà lo stesso prezzo di un opzione call europea. Quindi il modello di Black-Scholes-Merton può essere usato anche per questo tipo di opzioni. Al contrario, queta assunzione non è più valida nel caso delle opzioni put. Per il calcolo del prezzo di opzioni put in presenza di dividendi bisogna necessariamente far riferimento ad altri modelli di pricing come quello degli alberi binomiali. Esistono in realtà formulazioni recenti che riprendono la formula di BSM correggendola per prevedere anche la presenza di dividendi. Vedremo entrambe le implementazioni in codice, in modo da avere lo strumento d'eccellenza per lo studio delle opzioni.

Facciamo prima un esempio numerico per vedere nel dettaglio quali sono le reali problematiche relative alla reperibilità e alla manipolazione dei dati da dare in input al codice. Come abbiamo visto infatti, l'implementazione del modello necessita di un certo numero di elementi come la volatilità e il tasso risk-free, e bisogna anche scegliere su quale orizzonte temporale e quindi su quali scadenze operare. Reperire questi dati, ed effettuare delle scelte consapevoli, richiede di poter manipolare i dati di cui disponiamo per estrarre le informazioni necessarie. Immaginiamo di avere un opzione call su AAPL con i seguenti dati di mercato:

- $S = 245$.
- $K = 250$.
- $r = 3.5\%$.
- $t = 2$ mesi.

Abbiamo quasi tutti i dati per implementare il nostro modello, ma ci manca la volatilità. Su questo fattore abbiamo detto che la volatilità non può essere presa come deviazione standard della serie, quando implementeremo il modello in codice useremo il metodo di Newton-Raphson, ma per ora accontentiamoci di prendere anche questo come dato esogeno:

- $\sigma = 20\%$.

Possiamo quindi popolare le nostre formule:

$$d_1 = \frac{log\left[\frac{245}{250}\right] + \left(0.035 + \frac{0.20^2}{2}\right)\frac{2}{12}}{0.02\sqrt{\frac{2}{12}}} = -0.13$$

$$d_2 = -0.13 - 0.20\sqrt{\frac{2}{12}} = -\ 0.21$$

$$c = 245N(-0.13\ ) - 250e^{-0.035*\frac{2}{12}}N(-0.21) =$$

$$= 245 * 0.44 - 250e^{-0.035*\frac{2}{12}} *\ 0.41 = 5.89$$

La nostra opzione avrà quindi fair value pari a 8.37. Ora implementeremo in codice due modelli, uno senza dividendi e uno con, per poi confrontare il valore risultante a parità di input con quello ottenuto con i nostri calcoli manuali:

- Il primo metodo è costruito da noi, sviluppa una funzione personalizzata in cui inserire gli input che ormai conosciamo, per ricevere il prezzo dell'opzione tramite il calcolo dei coefficienti d1 e d2. Per questo metodo non è previsto l'inserimento di un dato relativo alla presenza di dividendi, resta quindi valido solo per le opzioni europee.
- Il secondo metodo si occupa tramite richiamo di una libreria già creata in python di alcune formule che renderanno immediato il calcolo dei prezzi delle opzioni anche in caso di presenza di dividendi.

```
###------------  METODO 1

# importiamo da shipy la funzione norm
from scipy.stats import norm

def pricing_opzioni_europee(r,S,K,T,var, type="c"):

  # vengono calcolati i valori d1 e d2
  d1 = (np.log(S/K) + (r + var**2/2)*T)/(var * np.sqrt(T))
  d2 = d1 - var * np.sqrt(T)

  # applichiamo la formula di BSM in base alla type
  if type == "c":
     price = S * norm.cdf(d1,0,1) - K * np.exp(-r*T) * norm.cdf(d2,0,1)
  elif type == "p":
     price = K * np.exp(-r*T) * norm.cdf(-d2,0,1) - S * norm.cdf(-d1,0,1)
  return price
```

Il primo metodo prevede che vengano dati in input le variabili esogene accuratamente estratte e si usino per calcolare d1 e d2. In base al *type* scelto (*c* per le call e *p* per le put), si calcolerà la formula di pricing più adatta, proprio come abbiamo fatto manualmente.

Il secondo metodo è ancora più immediato e non ci chiede di ricostruire le formule algebriche per il calcolo del prezzo delle opzioni, in quanto risultano già integrate nella libreria *blackscholes* resa disponibile dalla community python. Questo secondo modello prevede negli input anche l'inserimento del dividend yield, dato solitamente reperibile sulla reportistica dei broker o sulle pagine web delle testate di settore. Mettendo q = 0 potremo valutare anche opzioni che non distribuiscono dividendi.

```python
###------------  METODO 2

#installiamo e importiamo la nostra libreria blackscholes
!pip install blackscholes
from blackscholes import BlackScholesCall, BlackScholesPut

def pricing_opzioni_europee_div(S, K, T, r, sigma, q):
    """
    Questa funzione calcolera automaticamente il prezzo di un'opzione call o
    put europea in base ai parametri specificati.

    Parameters:
    S : valore corrente.
    K : strike price.
    T : tempo a scadenza (in anni).
    r : tasso di interesse (annualizzato).
    q : tasso atteso di dividendi (annual dividend yield).
    sigma : volatilità ovvero dev.st. (annualizzata).
    """
    # inizializza le funzioni
    call_option = BlackScholesCall(S=S, K=K, T=T, r=r, sigma=sigma, q=q)
    put_option = BlackScholesPut(S=S, K=K, T=T, r=r, sigma=sigma, q=q)

    # calcola i prezzi
    call_price = call_option.price()
    put_price = put_option.price()

    # restituisce i due prezzi
    return call_price, put_price
```

Andando ad applicare il metodo 1 all'esempio fatto con il calcolo manuale, troveremmo il seguente risultato: 6.38, molto vicino al risultato ottenuto dall'implementazione manuale, pari a un valore di 5.9. Fondamentale ricordare l'importanza degli input che diamo "in pasto" a queste funzioni. La volatilità può essere recuperata esogenamente, oppure si potrebbe stimare tramite modelli come quello di Rapson-Newton. Ora che possediamo tutte le conoscenze teoriche per affrontare al meglio il campo di lavoro dei mercati, è il momento di sospendere lo studio dei numeri e dei modelli, per dare uno sguardo all'operatività con questi strumenti finanziari.

4. OPERATIVITÀ CON OPZIONI

Facciamo un passo in avanti per capire come è possibile accedere ai mercati delle grandi piazze mondiali per comprare e vendere contratti di opzioni. Nel momento in cui si decide di investire una parte del proprio capitale, indifferentemente dallo strumento finanziario su cui andremo a investire, bisogna scegliere un intermediario finanziario che ci permetta di accedere ai mercati tramite i suoi canali. Le opzioni su cui lavoreremo per i nostri esempi hanno come sottostante azioni quotate sui mercati americani, queste opzioni sono scambiate principalmente sul Chicago Board Option Exchange o sul NYSE, i più grandi mercati telematici di strumenti derivati al mondo. Per accedere a questi e ad altri mercati e agli strumenti ivi quotati, bisogna interfacciarsi con un intermediario, anche detto *broker*, che ci trasmetterà informazioni in tempo reale sui prezzi e indicatori degli asset e soprattutto ci permetterà di piazzare i nostri ordini a mercato. L'apertura del conto trading presso un broker è il primo passo per poter operare sui mercati, la scelta dell'intermediario con cui gestire i propri investimenti non è una scelta banale, per questo approfondiremo questo tema successivamente in questo capitolo.

Abbiamo parlato anche dello stile delle opzioni, europeo o americano, e di come influisca sul prezzo precludendo anche l'attuazione di alcune strategie. Infatti, la possibilità di esercitare in qualunque momento per l'acquirente di un opzione americana complica ulteriormente il processo di previsione dei possibili flussi futuri: per investire in opzioni americane è necessario uno studio della duration dell'investimento e della sensibilità degli investitori alle variazioni di prezzo, repentini movimenti di prezzo potrebbero rendere conveniente un esercizio anticipato dell'opzione. Chi vende opzioni deve ricordare che sta vendendo il diritto di esercitare l'opzione, e sarà quindi obbligato in solido qualora l'acquirente, ovvero la controparte, esercitasse l'opzione. Nel caso di opzioni europee il problema non si pone perché sappiamo con esattezza il giorno in cui potremmo essere chiamati a comprare le azioni sottostanti a un dato prezzo, mentre per le opzioni americane ciò comporterebbe un esborso improvviso difficilmente prevedibile. Il broker generalmente tende a difendersi dal rischio di inadempienza chiedendoci margini ampi, spesso pari al 100% della potenziale perdita soprattutto nel caso in cui avessimo venduto un'opzione naked. Se si sono comprese bene bene le dinamiche dei limiti delle opzioni, si potrebbe ribattere che la potenziale perdita di una call venduta è illimitata, e sarebbe un ottima osservazione. Come può il broker proteggersi dal nostro rischio di inadempienza? Avremo la risposta a questa domanda studiando nel dettaglio il funzionamento del sistema a margini.

Le opzioni sono funzionali non solo in ambito speculativo, ma anche per un hedging di singole posizioni o di un intero portafoglio. Se le strategie speculative vengono approfondite soprattutto al capitolo successivo, l'uso delle opzioni per fini di copertura viene affrontato nei prossimi paragrafi. Questi strumenti prevedono la possibilità di fissare a pronti le condizioni per uno scambio futuro, eliminando l'incertezza sui flussi e permettendo di proteggersi da eventuali movimenti contrari dell'andamento del sottostante. Se la nostra strategia in opzioni è in scadenza, e per qualche motivo volessimo allungare la vita residua della strategia, sarà necessario applicare una tecnica definita *rollover,* che permette di posticipare le scadenze. Ovviamente questa tecnica comporta un costo, e non bisogna abusarne o cadere in bias cognitivi (Colombo, 2021) riguardo la possibilità di rimandare la chiusura e il consolidamento di un'operazione in perdita[9].

[9] Bias Avversione alla Perdita: Daniel Kahneman e Amos Tversky, padri dell'economia comportamentale. Secondo questa teoria odiamo perdere qualcosa che abbiamo più di quanto ci piaccia guadagnare qualcosa che non abbiamo.

4.1 Mercati regolamentati e OTC.

E' utile approfondire il tema dei mercati di negoziazione, i quali possono essere regolamentati o fuori borsa (mercati *over the counter*) (Gandolfi, 2018). Il mercato su cui si va ad operare incide in modo significativo sul profilo di rischio e sulle caratteristiche degli strumenti, in particolare la negoziazione su un mercato regolamentato comporta la standardizzazione dei contratti derivati, con regole di negoziazione stabilite in modo puntuale dalle autorità di borsa competenti. Immaginiamo siano disponibili sul nostro broker delle opzioni call sulle azioni A2A. Guardando la tabella dei Lotti minimi di cui sopra, vediamo che un contratto controlla 5000 azioni. Vediamo alcune caratteristiche di questo contratto:

CARATTERISTICA	DESCRIZIONE	NOTA
Stile dell'opzione	Americano	Può essere esercitata in qualunque momento.
Orario di negoziazione	Dalle 9:00 alle 17:50	Orario dei mercati italiani.
Unità di negoziazione	Eur	La quotazione dei contratti è in euro.
Liquidazione del premio	Primo giorno lavorativo successivo alla data di negoziazione del contratto.	
Valore del contratto	Prodotto tra prezzo di esercizio e il rispettivo lotto.	Nel nostro caso: $Strike * 5000$
Premio del contratto	Prodotto tra premio e rispettivo lotto.	Nel nostro caso: $Premio * 5000$
Scadenze negoziate	Sono quotate 10 scadenze, le due mensili più vicine, le successive 4 a scadenza trimestrale e le 4 scadenze semestrali per i due anni successivi.	Una nuova scadenza mensile viene quotata il giorno di borsa aperta successivo all'ultima scadenza.
Prezzo di regolamento	E' il prezzo d'asta di chiusura dell'azione sottostante il contratto nel giorno di scadenza.	

Questa standardizzazione comporta un grado di liquidità superiore per gli strumenti quotati sui mercati regolamentati, dove la cassa di compensazione gestisce per noi il rischio di controparte. Non abbiamo le stesse garanzie operando su mercati OTC. Al contrario negoziare sui mercati OTC significa assumersi il rischio di inadempienza della controparte, non è garantita la presenza di un intermediario super partes. Nonostante le opzioni sui principali sottostanti risultino quotate sulle grandi piazze come il CBOE o il NYSE, a volte può risultare utile affacciarsi sui mercati OTC per trovare delle condizioni più convenienti e adatte alle personali necessità del trader:

- Sui mercati OTC infatti il contratto non deve necessariamente sottostare ai termini stabiliti ex-ante dalle autorità di borsa, ma si possono personalizzare con la controparte le condizioni come la data di scadenza e i meccanismi di settlement. In questa contrattazione bilaterale non ci sono intermediari che fungano da garanti, la trattativa è bilaterale.
- In alcuni mercati la liquidità è limitata, non è quindi possibile creare un mercato regolamentato efficiente, come accade per le commodities o per determinati indici di nicchia, motivo per cui i market maker letteralmente "fanno il mercato".
- Su questi mercati è necessario essere molto cauti e saper valutare bene le condizioni dei contratti. La scarsa liquidità influisce sugli spread e risulta difficile piazzare ordini consistenti senza dover

scendere a compromessi sul prezzo d'esecuzione (bisogna considerare il rischio potenziale di *slippage* del prezzo).

- Abbiamo detto che la trattativa bilaterale sui mercati OTC permette di stabilire le condizioni più adatte per noi senza dover necessariamente sottostare ai parametri standardizzati imposti dai regolatori. I mercati OTC sono quindi decentralizzati, non esistono terzi garanti, le contrattazioni avvengono direttamente tra le controparti, spesso attraverso reti di broker-dealer o piattaforme elettroniche dedicate.

Riassumento, mentre per i trader retail le operazioni OTC sono relativamente rare e vanno evitate per quanto possibile perché richiedono una conoscenza approfondita degli strumenti. Per gli istituzionali e i market maker le negoziazioni OTC rappresentano una quota consistente delle operazioni, specialmente quando si tratta di implementare strutture complesse (dette *esotiche*).

Un altro aspetto che è fondamentale valutare quando si opera sui mercati è la modalità di settlement definita dal contratto. La maggior parte dei broker permettono di operare con cash settlment, ovvero accreditando o addebitando a scadenza i controvalori dei profitti o delle perdite in valuta sul nostro conto di trading. Altri broker chiedono l'acquisto "manuale" delle opzioni esponendoci a un esborso molto più alto del premio inizialmente versato. Per questo è fondamentale definire le modalità di settlement dei contratti opzionali. Il settlement delle opzioni, anche note come regolamento, è il processo attraverso il quale si finalizza una transazione di opzioni alla data di scadenza, o all'esercizio anticipato del contratto. Questo processo determina come e quando avviene lo scambio tra le parti coinvolte, sia in termini di strumenti finanziari che di controvalori. Esistono principalmente due modalità di settlement per le opzioni:

- Cash Settlement: ovvero il regolamento che alla scadenza dell'opzione prevede lo scambio di somme liquide, e non avviene la consegna fisica del sottostante. Si effettua un pagamento in denaro pari alla differenza tra il prezzo di mercato del sottostante e il prezzo di esercizio dell'opzione. Nelle strategie che implementeremo nei prossimi capitoli ipotizzeremo che il nostro broker ci permetta di operare sempre in cash settlement. In realtà questa modalità è più comune per le opzioni su indici, come il VIX, e per alcuni contratti futures.
- Physical Settlement: questa modalità prevede la consegna fisica dell'attività sottostante a scadenza. Ad esempio, se si possiede un'opzione call su un'azione, esercitando l'opzione si acquisteranno effettivamente le azioni al prezzo di esercizio. Questo tipo di regolamento è comune per le opzioni su azioni, o opzioni su commodities. Anche i contratti derivati su commodities, ovvero materie prime, prevedono il phisycal delivery e quindi l'acquisto a scadenza della commodities sottostante, sia rame, oro o petrolio.[10]

È importante tenere in considerazione che alcuni investitori preferiscono esercitare il diritto di acquisto non per trarre profitto dall'immediata vendita del sottostante, ma per altri vantaggi derivanti dal possesso del sottostante, come ad esempio la possibilità di godere di uno stacco cedola. Alla data di scadenza, il prezzo di settlement può essere calcolato in due modi: basandosi sui prezzi di apertura del giorno successivo (settlement AM), come avviene ad esempio per le opzioni su indici come l'S&P 500, oppure sui prezzi di chiusura del giorno di scadenza (settlement PM), tipico delle opzioni su azioni.

[10] Era il caso dei famosi future oil che andarono sotto il valore di zero nell'aprile 2020, quando nessuno voleva comprare i future in scadenza a causa della difficoltà a trovare depositi disponibili allo stoccaggio. (Bellomo, 2021)

4.2 Clearing House, Broker e Conto a margine.

Come abbiamo precedentemente accennato il broker è quell'intermediario che ci permette di piazzare gli ordini sul mercato, si tratta solitamente di banche o grandi finanziarie, in alcuni casi di operatori specializzati che fungono da intermediari per favorire l'ingresso degli investitori ai mercati. Queste figure nell'unione europea svolgono anche una funziona di vigilanza e monitoraggio sia per conto delle norme internazionali che regolano l'accesso ai mercati, sia per mantenere il meccanismo di garanzia a margini imposto dalle *Clearing House* (Gandolfi, 2018). Quest'ultima è anche detta *stanza di compensazione*, un ente indipendente che opera sotto stretto controllo della Banca d'Italia con il compito di regolamentare i mercati affinché non si verifichino episodi di insolvenza delle controparti che scambiano contratti derivati. A tale scopo la Clearing House si pone come controparte automatica e speculare, la sottoscrizione di ogni contratto deve prevedere il contestuale versamento iniziale e al successivo mantenimento da parte delle controparti dei cosiddetti *margini di garanzia*, somme di denaro o titoli equivalenti depositati presso la stanza di compensazione che fungono da garanzia e collaterale sul buon esito dell'operazione. Questi margini vengono aggiornati automaticamente e in tempo reale tramite un processo definito *marking to market*, infatti se dovessimo essere soggetti a una perdita verremmo richiamati a effettuare dei versamenti per rientrare nei margini di compensazione previsti alla sottoscrizione, pena l'immediata chiusura anticipata del contratto. Facciamo un esempio usando un contratto future, che per il suo payoff simmetrico è più adatto per capire in un primo approccio il meccanismo del sistema a margini e del marking to market:

- Indice FTSE Mib quotato 35000 p.i.
- Moltiplicatore di ogni p.i. pari a 5.
- Margini di garanzia del 10%.

	Var	Prezzo	Controvalore	P/L	Margine di garanzia			
					Iniziale	Variazione	Compensazione	Finale
t_0		35.000	175.000	/	17.500	/	/	17.500
t_1	-4%	33.600	168.000	-7.000	10.500	-40%	+6.300	16.800
t_2	+8%	36.288	181.440	+13.440	30.240	+80%	-12.096	18.144

Da questa tabella traiamo delle informazioni importantissime sulla reale operatività con opzioni. Innanzitutto notiamo l'effetto leva, infatti con un margine di garanzia fissato al 10% otteniamo un effetto leva x10, dove a una variazione del 4% del prezzo di mercato del titolo consegue una variazione del 40% del margine di garanzia versato, ovvero del capitale investito nell'operazione. Nel passaggio da t_0 a t_1 infatti il nostro titolo scende a un livello più basso di prezzo, il margine di garanzia andrà reintegrato in quanto una buona parte di quello versato a t_0 è andato a compensare le perdite che abbiamo subito. Dobbiamo portare il nostro margine a livello 16.800, pari al 10% del nostro controvalore con una compensazione di 6.300. Allo stesso modo nel periodo t_2 il guadagno ci porterà ad avere in stanza di compensazione ben più di quanto necessario per adempiere agli obblighi imposti dalla clearing house, ci verrà dunque accreditato il surplus pari a 12.096. Questo processo che abbiamo visto è fondamentale nei contratti a payoff simmetrici come i futures, nelle opzioni invece gli aggiustamenti di margine sono richiesti al solo venditore di opzioni, in quanto maggiormente esposto al rischio di movimenti sfavorevoli del mercato. Per quanto riguarda l'acquirente invece la perdita massima in cui può incorrere è il premio che ha pagato al momento di stipula del contratto. Nel momento in cui invece si implementino strategie composte da combinazioni di opzioni la situazione si complica notevolmente, il broker ci chiamerà a fare una serie di aggiustamenti soprattutto se siamo esposti con leve elevate.

Torniamo a parlare dei broker, questi enti terzi senza i quali non sarebbe possibile per gli investitori retail accedere ai mercati. E' molto importante selezionare con cura i broker tramite i quali operare, in primis perché apriremo un conto e depositeremo in nostri risparmi su questi dossier, in secundis perché saranno anche i costi e i prezzi proposti dal broker a deteriorare il profitto e determinare l'efficacia delle nostre strategie. Il paese di provenienza di un broker è uno dei primi elementi che devono essere oggetto di valutazione, grazie alla possibilità di operare online spesso ci si relaziona con intermediari che hanno sede in stati esteri, sono soggetti a diverse regolamentazioni e possono essere più o meno affidabili. Spesso si sorvola su queste caratteristiche in fase di apertura di un conto, ma operare professionalmente significa tenere in considerazione non solo le commissioni, ma la possibilità di avere un broker che fornisca servizi transazionali, che funga da sostituto d'imposta, che possa garantirci un servizio clienti efficiente e la multicanalità dei servizi. Nessuno si preoccupa di operare con broker sicuri fino al momento in cui non giunge la necessità di operare attivamente sul conto, magari per trasferire/traslocare/chiudere il dossier titoli. La possibilità di operare con broker sicuri e affidabili ha come requisito quello di essere in linea con alcuni parametri stabiliti dalle normative Mifid, soprattutto se si intende operare con strumenti derivati. Solitamente all'apertura di un conto si viene profilati in base a delle classi di rischio, è bene sottolineare che gli strumenti derivati non sono facilmente accessibili a investitori inesperti con profili di rischio inadeguati. Nonostante ciò, con una conoscenza base del mondo degli investimenti è possibile rispondere correttamente al KYC (domande sulla nostra conoscenza degli investimenti, la situazione familiare e patrimoniale, i nostri proventi, la nostra attitudine al rischio) di profilazione in fase di apertura del conto, ottenendo l'abilitazione all'uso di tali strumenti. Ogni broker ha una certa offerta di strumenti, di piazze e di mercati sui quali cerca e piazza i nostri ordini di acquisto e vendita. I prezzi di ogni asset sono disponibili in un interfaccia tramite un *book consolidato*, una lista dei migliori prezzi calcolati e proposti dall'algoritmo del broker. Per operare con le principali opzioni su titoli azionari americani è sufficiente avere un broker che offra l'accesso al CBOE. In europa sono numerosi, su questo manuale potreste trovare le schermate dell'home banking di uno dei broker che ritengo più adatto al mio tipo di esigenze. In generale è necessario prestare particolarmente attenzione se si opera con broker extra-europei, i quali non solo non possono offrire la solidità e i servizi di una grande finanziaria italiana, ma richiedono anche l'integrazione del modulo W Quadro nel Modulo 730 della dichiarazione dei redditi (Cesarini, 2017), in quanto aprendo un conto diventiamo possessori di dossier titoli all'estero. Non tutti i commercialisti o specialisti CAF sono in grado di gestire questo tipo di reportistica, che invece viene automaticamente generata dalle banche italiane che fungono da sostituto d'imposta, le quali pagano per noi la tassazione sui redditi di capitale[11].

Come abbiamo detto il broker si proteggerà limitando parzialmente l'operatività agli utenti classificati come più rischiosi, al contrario potrebbe concedere l'operatività su un conto cosiddetto *a margine* per investitori con requisiti più alti. Si tratta di un conto a leva, che aumenta esponenzialmente la nostra potenziale esposizione. E' molto importante prestare attenzione, è come se il nostro capitale avesse due moltiplicatori. Se il conto ha leva x2 potremmo operare come senza ulteriori leve sul singolo prodotto come se avessimo sul conto liquidità pari al doppio di quella realmente presente. Se invece andassimo a investire su un altro prodotto a leva x2, il risultato sarebbe un'operazione a leva x4! Alla base di queste concessioni c'è un controllo di adeguatezza e la valutazione del nostro rating creditizio da parte dell'intermediario: se le possibilità di avere una certa perdita sono molto basse coprirsi da quel rischio è inutile e impegnerebbe un capitale che l'investitore potrebbe utilizzare per operare e generare ulteriori commissioni, quindi per il broker non è conveniente impegnare troppo capitale al suo correntista, il denaro fermo non rende. Solo se il trader è particolarmente affidabile gli si può permettere di operare anche su un conto a margine, abilitandolo all'uso della leva. Queste operazioni commerciali dei broker sono sempre svolte sotto il controllo dei regolatori, infatti una copertura tramite sistema a margini dei rischi di controparte basandoci sugli studi delle distribuzioni non sarà in grado di proteggerci nei tanto temuti Cigni Neri (Taleb, 2007), ovvero eventi avversi imprevedibili, con impatto sistemico su tutti gli attori sul mercato.

[11] Per l'operatività ad alta frequenza il sostituto d'imposta, tassandoci alla fonte, erode parzialmente il beneficio del compounding sul capitale.

4.3 Market maker e Bid-Ask spread.

Come abbiamo visto i broker agiscono come intermediari tra gli investitori e il mercato, rendono accessibili tramite diversi canali gli strumenti finanziari ai migliori prezzi disponibili sul mercato, prezzi che gli vengono determinati da alcuni enti terzi fornitori di liquidità, chiamati market maker. Queste figure sono fondamentali sul mercato, fanno da controparte nelle transazioni garantendo la liquidità sulle piazze. Vediamo nel dettaglio queste e altre funzioni di questi operatori:

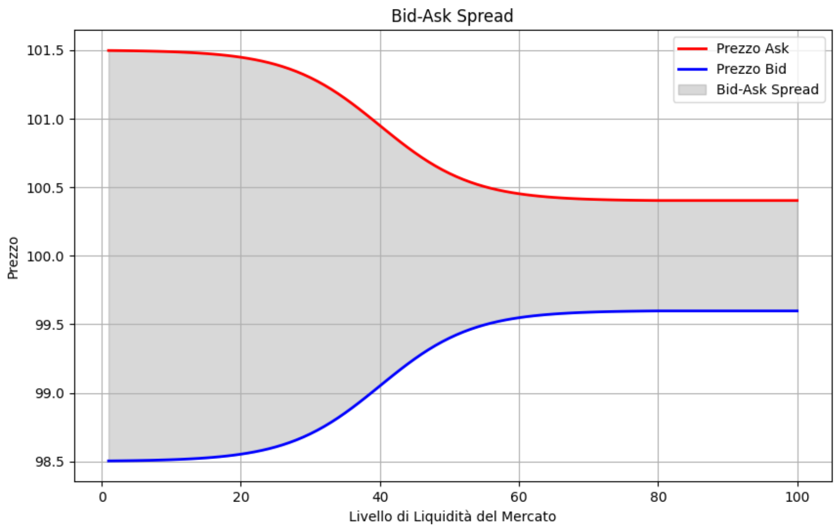
- Forniscono liquidità al mercato, fornendo una certa disponibilità di quote di acquisto (bid) e di quote di vendita (ask). Nei mercati regolamentati i market maker sono tenuti a degli obblighi di quotazione, ciò significa che devono necessariamente garantire certi volumi di liquidità su determinati asset, per garantire il flusso costante degli scambi.
- Dalla differenza tra i prezzi bid e ask, chiamata bid-ask spread, i broker ottengono un margine di ricavo che è la prima fonte di reddito per questi operatori.
- Nella loro attività di controparte obbligata i market maker sono costretti ad assumersi dei rischi di mercato, acquistano e vendono e sono quindi potenzialmente soggetti a perdite. Di conseguenza il market maker implementerò un'attività di delta hedging dinamico (vedremo successivamente nel paragrafo dedicato all'hedging) per proteggersi dalle fluttuazioni di mercato, il suo obiettivo infatti non è speculare sulla direzionalità.

I market maker forniscono i loro servizi non direttamente agli investitori, ma bensì ai broker. In molti casi, un singolo intermediario può svolgere più di un ruolo. Ad esempio, una grande istituzione finanziaria può fungere da broker per i suoi clienti e contemporaneamente come market maker su alcune piazze. Per i broker i principali guadagni provengono principalmente da commissioni di intermediazione, interessi sui conti a margine e, in alcuni casi, da modelli come il *payment for order flow* (Thompson, s.d.). Quest'ultima tecnica di remunerazione dei broker retail è particolarmente interessante, infatti alcuni broker preferiscono indirizzare gli ordini raccolti dagli investitori verso determinati market maker piuttosto che su altri. Ogni market maker garantisce un determinato prezzo e garantisce una determinata qualità del mercato, quindi c'è un concreto rischio di conflitto di interessi. Infatti, questo meccanismo ha causato diverse controversie, il broker guadagna in base al volume degli ordini inviati al market maker, che offre la migliore remunerazione per il broker, anche se non necessariamente può garantire la *best execution* per il cliente. Questo metodo è tipicamente usato da molti broker online che garantiscono costi espliciti molto ridotti per gli investitori, ma quei costi sono spesso scaricati sui prezzi, diventano impliciti e non vengono notati da ignari risparmiatori.

Come abbiamo detto, la principale fonte di ricavi per i market maker deriva dal bid-ask spread. Nei mercati molto liquidi questo spread risulta molto ridotto, data la competizione tra i market maker che sono costretti a fornire il miglior livello di prezzo se vogliono rimanere sul mercato. Nei mercati meno liquidi invece può risultare difficile trovare una controparte disposta a trattare a prezzi competitivi. Per un investitore, un bid-ask spread più ampio implica maggiori costi impliciti, sui mercati di opzioni gli spread possono variare notevolmente a seconda dello stato dell'opzione (ATM, OTM, ITM):

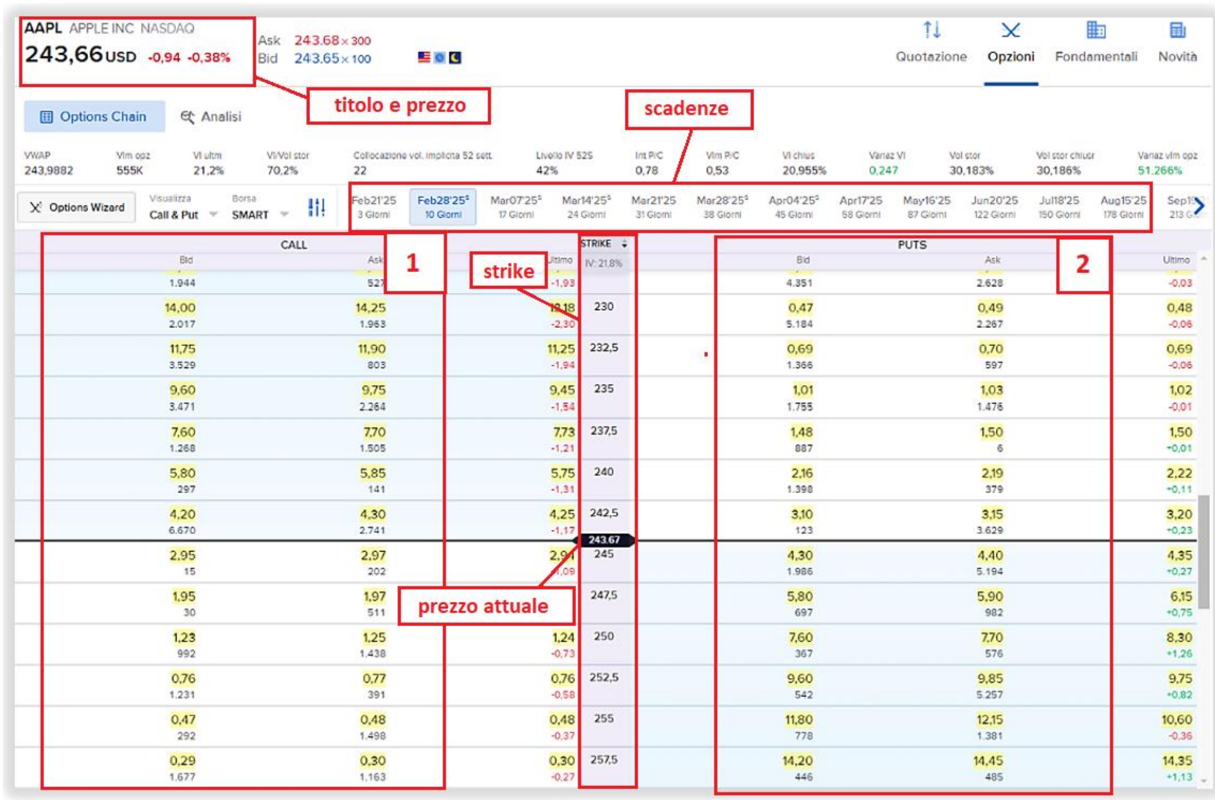
- Il maggior volume di scambi si concentra solitamente sulle opzioni ATM, tipicamente maggiori volumi implicano spread più stretti.
- Al contrario, opzioni DOTM o DITM sono maggiormente soggette a spread più rilevanti e maggior rischio di liquidità.

Anche periodi di alta volatilità possono implicare maggiori spread, anche perché il market maker vuole un maggior premio per assumersi un maggior rischio. Allo stesso modo anche la struttura a termine dei tassi influenza lo spread, maggiori tassi implica tipicamente maggiori spread. Quando la liquidità è bassa, anche lo slippage, ovvero lo scostamento tra il prezzo atteso di ordine e quello effettivo di esecuzione aumenta. Ciò significa essere pronti a "scendere a compromessi" durante la trattativa di acquisto o vendita. Ciò può compromettere ed erodere il profitto atteso.



4.4 Option Chain

Quindi è il broker a fornirci il *trading book* delle opzioni disponibili su un titolo, ovvero l'insieme dei prezzi bid e ask a cui quotano le diverse call e put, divisi per strike e possibile scadenze. Tutte queste informazioni vengono riassunte in una tabella detta *Option Chain* (Natenberg, 2014), disponibile su qualunque broker che permetta di operare con strumenti opzionali.



Studiamone le componenti:

- In alto sulla sinistra il ticket del titolo sottostante e il prezzo corrente di quotazione, in questo caso AAPL, quotata su NASDAQ, prezzo corrente pari a 243,66 $.
- Le scadenze disponibili per operare. L'option chain è utile a studiare la struttura a termine delle opzioni sulle varie scadenze, per individuare quelle più favorevoli in termini di prezzo e rischio. Ogni scadenza avrà una sua option chain ovviamente diversa dalle altre, con i prezzi aggiornati di tutte le opzioni disponibili in scadenza alla data selezionata. In questo caso stiamo vedendo i prezzi delle opzioni in scadenza al *28/02/2025*, ovvero a *10 giorni* dalla data corrente, cioè il 18/02/2025.
- L'asse verticale orizzontale e verticale che dividono l'option chain sono rispettivamente il prezzo corrente del titolo approssimato al primo decimale *243,7* $ e gli strike price potenziali con salti di *2.5 $* dal prezzo di *230 $* a quello di *257.5 $*.
- Nei quadranti uno e due, sono disponibili i prezzi rispettivamente delle opzioni call e delle put, rispettivamente divisi per la aree out of the money e in the money dal prezzo corrente del sottostante.

Solo grazie a questi elementi possiamo riscontrare che molte delle competenze che abbiamo acquisito trovano un riscontro pratico:

- Al crescere dello strike il prezzo delle call diminuisce, perché aumenta la possibilità che le opzioni scadano in the money. Il contario vale per le put, che invece aumentano al crescere del valore dello strike.
- Vediamo che sono presenti opzioni in scadenza ogni 7 giorni, rispettivamente ogni venerdì per il mese e mezzo successivo. Da aprile in poi invece le scadenze diventano mensili.
- Il bid-ask spread, ovvero una commissione implicita imposta dal broker, è facilmente calcolabile e monitorabile calcolando la differenza tra i prezzi bid e ask sullo stresso strike. Confrontando il bid-ask spread con quello offerto sulle quotazioni di altri broker possiamo trovare l'intermediario che ci offre i minori csoti.
- Può essere anche interessante verificare la veridicità della put call parity, secondo la quale dato il prezzo di strike pari a 245, una scadenza a 10 giorni e un tasso risk free del 2.5%, possiamo calcolare il prezzo della call prendendo il prezzo della put e viceversa. Facciamo un esempio pratico, partendo dalla put-call parity:

$$c + strike * e^{-r*T} = p + S$$

$$c + strike * e^{-r*T} - S = p$$

  Calcolando il termine esponenziale possiamo notare che questo, avendo un esponente molto piccolo, tende a 1. Così non sarebbe se l'opzione avesse scadenza maggiore o se i tassi fossero sensibilmente più alti.

$$e^{-0.02*\frac{10}{365}} = e^{-0.00054795} \approx 0.999452$$

$$p = 0.999452 * 245 + 2.97 - 243{,}67 = 4.17$$

  Andando sulla option chain possiamo verificabile che il prezzo quotato della put sullo stesso strike e scadenza risulta di 4.40, il risultato quindi è molto vicino, soprattutto se si considera il bid-ask spread e le possibilità di normali disallineamenti di prezzo.

Spesso i broker offrono la possibilità di modificare a proprio piacimento il layout delle option chain, anche inserendo una barra personalizzata, altre colonne e vari altri indicatori. Tramite i layout personalizzati è possibile monitorare su un'unica schermata le esposizioni e i coefficienti di rischio del nostro portafoglio. I trader di opzioni passano gran parte del loro tempo lavorando con le option chain, ora sappiamo come calcolare i valori che le popolano con i modelli di pricing e dove reperire i dati di mercato con i quali confrontarci.

4.5 Rischio dividendi

I dividendi non rientrano tra le variabili del gruppo delle greche, tuttavia sono tra i fattori che influenzano il prezzo delle opzioni e, soprattutto, possono compromettere l'efficacia di determinate strategie. Abbiamo anche anticipato che l'influenza della presenza di dividendi sul valore dell'opzione è difficile da stimare, soprattutto nell'ambito della valutazione della opzioni americane. Prima di valutare lo strumento derivato, è fondamentale un'analisi dell'influenza dei dividendi sul titolo sottostante, infatti una cedola elevata produce una diminuzione del valore del prezzo del titolo azionario. I dividendi non sono altro che gli utili distribuiti agli azionisti, dopo la distribuzione il patrimonio netto della società si riduce, la società dispone di minori risorse finanziarie e, di conseguenza, il valore dell'azione deve adeguarsi a questa riduzione patrimoniale. Indirettamente quindi, lo stacco del dividendo produce coeteris paribus anche una diminuzione del valore delle opzioni call, il detentore di opzioni dovrà essere compensato del costo opportunità di non detenere il sottostante.

Nell'operatività pratica, in base al tasso *dividend yield* atteso del titolo, gli operatori incorporano anticipatamente nei prezzi delle opzioni call il ribasso atteso del sottostante allo stacco dei dividendi. Per questo motivo, i detentori di opzioni americane preferiscono esercitare anticipatamente l'opzione per incassare il dividendo sul sottostante ed evitare la perdita di valore in portafoglio. Per principio, una call americana, in presenza di dividendi, deve quindi valere più dell'opzione europea corrispondente, se non altro per la possibilità di esercizio anticipato e la concreta possibilità per il detentore dell'opzione di percepire i dividendi (maggior valore opzionale). Questo dettaglio diventa fondamentale nel momento in cui si vendono delle opzioni americane, l'operatore deve coprirsi dalla possibilità che la controparte eserciti anticipatamente chiamandoci ad ottemperare ai nostri obblighi (chi compra opzioni compra un diritto, chi le vende invece è obbligato in solido). Questa possibilità è una complicazione concreta che compromette l'attuazione di molteplici strategie per chi volesse operare con opzioni americane. Infatti. l'esercizio anticipato della controparte non è prevedibile e ci costringerebbe ad assolvere alle nostre obbligazioni consolidando le perdite e sbilanciando completamente i payoff attesi.

Quanto visto fino ad ora era valido per le opzioni call, ma non funzione allo stesso modo per le put. Un maggior dividend yield permette di beneficiare di un rialzo del prezzo dell'opzione put, al contrario di quanto avviene per le call, perché aumentano le possibilità che il prezzo tenda a diminuire. Come abbiamo visto nel modello di Black-Scholes-Merton originale non era prevista la presenza dividendi, ma alcune rivisitazioni lo hanno adattato per includere l'effetto della distribuzione dei dividendi nel pricing delle opzioni (la seconda strategia vista per il modello BSM con l'introduzione del parametro q). Il metodo più comune è quello di scontare il prezzo del sottostante in funzione del valore attuale dei dividendi attesi.

Torniamo ad assumere l'assenza di dividendi, per le opzioni call devono valere le due seguenti relazioni:

- $C = c$: in assenza di dividendi non ha mai senso esercitare anticipatamente un opzione call, ciò comporterebbe il pagamento immediato del prezzo fissato per lo scambio, capitale che potrebbe rendere un tasso rf se investito altrove mentre la nostra opzione matura valore temporale.
- $P < p$: per le opzioni put americane invece l'esercizio anticipato può convenire, in presenza di tassi alti incassare un valore pari al prezzo di vendita significa poter "parcheggiare" il capitale ottenuto dall'esercizio a un buon rendimento rf.

Per concludere è bene aprire una parentesi per quanto riguarda l'investimento in opzioni su indici azionari, cioè quegli strumenti che permettono di investire in un paniere di titoli selezionati secondo criteri tematici, geografici o di altri tipi. Questi indici quotano a un prezzo definito da alcuni modelli di calcolo che si distinguono principalmente in due macroclassi:

- Indici Price Return: quelli calcolati come una semplice media ponderata dei prezzi dei titoli. E' anche il modello di calcolo più diffuso e utilizzato per il calcolo dei prezzi di S&P500, Euro Stoxx 50, ecc.
- Indici Total Return : anche detti indici di performance, prevedono un reinvestimento automatico dei dividendi, di conseguenza non subiscono l'influenza negativa di uno stacco cedola. Nel caso di trading su un indici di performance non è necessario includere il dividend yield nel modello di calcolo.

4.6 Hedging

Per hedging (Gandolfi, 2018), o copertura, si intende la neutralizzazione di uno o più fattori di rischio ai quali siamo continuamente esposti durante la nostra operatività. Abbiamo imparato come monitorare e quantificare la sensibilità del nostro payoff al variare dei parametri di mercato tramite le greche, ora capiremo come costruire determinate combinazioni di opzioni permetta di neutralizzare l'effetto di potenziali eventi sfavorevoli. Infatti annullare il rischio, visto nell'ottica degli strumenti a termine, significa annullare l'incertezza oltre che coprirsi dalle possibilità di eventi che ci danneggino. Le opzioni, e più in generarle gli strumenti a termine, sono perfetti se si intende eliminare l'aleatorietà dei flussi futuri. Per capire meglio l'utilità dell'uso di opzioni per finalità di hedging, mettiamoci nei panni di un agricoltore che in fase di semina voglia coprirsi da un ribasso futuro dei prezzi del raccolto. La possibilità di acquistare una put sulla verdura permetterebbe di fissare a pronti il prezzo a cui vendere alla data di raccolta, eliminando il rischio di ribassi del prezzo (ma annullando i potenziali profitti che deriverebbero da un incremento del prezzo della verdura). La possibilità data dalle opzioni di fissare le condizioni dello scambio a pronti permette di annullare l'effetto di variazioni del prezzo del sottostante sul nostro payoff finale, neutralizzato il rischio di mercato. Per avere l'esigenza di copertura bisogna avere un'esposizione precedentemente assunta, è fondamentale quindi fare un primo discrimine tra le tipologie di strategie di hedging necessarie per coprire una posizione long o un'esposizione short dalle variazioni di prezzo del sottostante:

- Short hedge: operazione finanziaria nella quale si vende a termine un'attività già in portafoglio. Così facendo si fissa anticipatamente il prezzo a scadenza dell'operazione stessa e si prevengono eventuali ribassi delle quotazioni sul mercato. è l'esempio dell'agricoltore che vuole coprirsi dai possibili ribassi del prezzo del grano e compra una put per fissare anticipatamente il prezzo di vendita.
- Long hedge: operazione finanziaria nella quale si acquista a termine un'attività già in portafoglio. In questo modo si copre il rischio di un possibile rialzo delle quotazioni di mercato rispetto a quelle esistenti nel momento dell'acquisto. Un esempio può essere un industriale che voglia proteggersi da futuri rialzi del prezzo delle materie prime, potrà fissare a pronti il prezzo d'acquisto grazie a delle opzioni call.

Come abbiamo detto queste strategie ci permettono di annullare l'effetto di movimenti del sottostante sul nostro payoff. Avendo già definito la sensibilità del valore delle opzioni a variazioni del sottostante con la greca delta, è intuibile il motivo per cui le strategie di hedging che neutralizzano il rischio di mercato sono anche definite strategie di *delta hedging* (Gandolfi, 2018) (Natenberg, 2014). Il valore numerico assunto dal delta indica il numero di azioni del sottostante che dovremmo acquistare per ogni opzione venduta al fine di creare una posizione istantaneamente coperta. Ovviamente non dobbiamo dimenticarci di considerare i limiti del delta che si ripercuotono anche sulle strategia di copertura. Infatti se usassimo solo il delta la copertura risulterebbe completa solo istantaneamente, necessiterebbe di ribilanciamenti a ogni variazione del sottostante. Maggiori saranno le variazioni del sottostante maggiormente imprecise risulteranno le stime ottenute con il coefficiente delta. Vedremo nel dettaglio nel paragrafo successivo dedicato al delta hedging come coprirci dal rischio delta.

Oltre al delta, gli operatori abituati ad avere portafogli complessi possono effettuare un hedging anche su altri coefficienti di rischio. Le greche permettono di isolare e, quindi, speculare o proteggersi sui singoli fattori. Ad esempio ci si può coprire dagli effetti di possibili rialzi della volatilità comprando uno *straddle*, strategia che costruiremo nel capitolo successivo e che si apprezza in caso di un aumento delle variazioni dei prezzi. I grandi fondi investono su *currency option*, ovvero strumenti che permettono lo scambio di grandi quantità in valuta per coprirsi dal rischio di cambio. La possibilità di speculare sui singoli coefficienti mette sicuramente le opzioni tra i primi posti degli strumenti utilizzati dai grandi istituzionali, dalle banche e dalla pubblica amministrazione. Una volta individuato e quantificata l'influenza di un fattore rischio, le opzioni sono particolarmente utili nelle attività di *risk management* dei portafogli (Elton, 2007). Non dobbiamo dimenticare infatti che gli stessi fattori che influenzano il prezzo di un'opzione, come volatilità, tasso risk-free e gli altri che abbiamo incontrato, sono elementi comuni alla valutazione del rischio di qualsiasi altra classe di titoli (obbligazioni, materie prime, mercato monetario).

4.6.1 Delta Hedging e Gamma Scalping

Il delta hedging è cruciale non solo per gli investitori istituzionali o retail, ma anche per i market maker che devono fornire costantemente liquidità al mercato. Comprando e vendendo continuamente opzioni, i market maker si fanno da controparte per gli investitori fornendo i prezzi bid e ask, ma come abbiamo già detto, questi operatori non vogliono esporsi al rischio di mercato. Al contrario devono mantenere un'esposizione neutra rispetto ai possibili trend seguiti del prezzo del sottostante, strutturando le proprie posizioni in modo tale da ridurre al minimo il rischio di perdite legate alle oscillazioni dei prezzi. Questa attività prende il nome di delta hedging dinamico. Dinamico in quanto richiede di monitorare e ribilanciare le proprie coperture in funzione delle variazioni del delta, della volatilità e del tempo residuo.

Entriamo nel vivo dell'operatività e vediamo come implementare il delta hedging sulle nostre posizioni. Essendo una strategia che prevede un'attività di copertura sull'esposizione al rischio di mercato, è necessario che vi sia un rischio direzionale dal quale vogliamo neutralizzarci. Ciò implica avere già in portafoglio un asset, come ad esempio azioni, o posizioni su opzioni, che desideriamo coprire. La prima fase richiede quindi di quantificare l'esposizione totale, in modo da prendere una posizione contraria e proporzionale. Infatti nel nostro portafoglio potremmo avere un numero di N azioni, oppure opzioni call o put, ma in entrambi i casi per una corretta gestione del rischio bisogna determinare l'ammontare di strumenti (azioni o opzioni) da utilizzare per il bilanciamento. Il delta rappresenta il valore di cui aumenterebbe la nostra opzione call in seguito a un incremento unitario del valore del sottostante, ciò sarà utile per quantificare il rapporto di copertura. Facciamo due esempi:

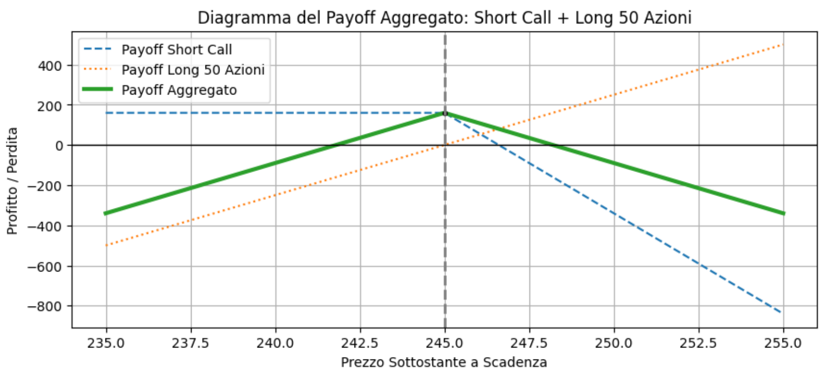
- Copertura di una call long: nel caso di una call long il delta è sempre positivo e compreso tra 0 e 1. Per coprirsi dal rischio di fluttuazioni di mercato, si dovrà prendere una posizione corta sul sottostante per una quantità di azioni pari a:
$$\Delta * n.\, azioni\ controllate\ dall'opzione$$
Per esempio se la nostra opzione è attualmente ATM, il delta sappiamo essere nei dintorni di 0,50. Sarà possibile neutralizzarsi vendendo 50 azioni, se il lotto minimo è pari a 100 come sui mercati regolamentati americani.
- Copertura di azioni long: se invece si è in possesso ad esempio di 1000 azioni, per neutralizzare il delta con opzioni sarà necessario vendere call o comprare put. Immaginando di implementare la seconda opzione, dato il delta negativo delle put, per neutralizzare la nostra posizione dovremo comprare un numero di put pari a:
$$\frac{n.\, azioni\ in\ ptf}{|\Delta_{put}| * n.\, azioni\ controllate\ dall'opzione}$$

Supponendo di avere 1000 azioni e di comprare put ATM, saranno necessarie $\frac{1000}{50} = 20$ opzioni put.

Mettiamoci ora nei panni del market maker. Qualora dovesse presentarsi un potenziale acquirente di una call, l'eventuale vendita lo esporrebbe al rischio di perdite in caso di rialzi del sottostante. Per questo è necessario effettuare un'operazione di copertura:

- Il mercato chiede una call, la vendita espone il market maker a un rischio di mercato, il profitto o la perdita dipenderà dall'andamento del sottostante.
- Il market maker neutralizzerà il rischio di mercato, dato il delta pari a 0.50 per le opzioni ATM, e data la posizione short sul sottostante e lotto minimo di 100 azioni. Bisognerà comprare 0.50*100=50 azioni long del sottostante per ottenere una copertura perfetta sulla posizione.
- La posizione del market maker risulta così *istantaneamente* immunizzata dall'effetto mercato, ma è fondamentale precisare che il passare del tempo e il muoversi del sottostante causerebbe una variazione immediata del delta. Si rende necessario un ribilanciamento costante per mantenere la copertura.

Date le condizioni del mercato al momento in cui scrivo, la vendita di un'opzione e l'acquisto di 50 azioni AAPL ci restituirebbe il seguente payoff:



Un altro aspetto operativo da tenere in considerazione riguarda la possibilità di operare per la copertura su altri asset correlati al sottostante e non sul sottostante stesso. Spesso risulta più comodo e funzionale coprire esposizioni su alcuni titoli azionari con dei derivati che hanno come sottostante l'indice di riferimento, questo perché le opzioni sugli indici sono più liquide e diffuse sui mercati. Facciamo quindi un nuovo esempio, immaginiamo di voler coprire la nostra posizione long su AAPL con una opzione put sul NASDAQ. Immaginiamo di avere in portafoglio 500 azioni AAPL, con un prezzo attuale del titolo sul mercato pari a 250. L'esposizione totale è pari a un controvalore di:

$$500 * 250 = 125.000$$

Il NASDAQ quota invece circa 17.300. E' disponibile un'opzione put con strike 17.000, scadenza a 3 mesi, perfetta per noi perché in quella data pensiamo di dover scaricare le nostre quote AAPL, e quindi la copertura si ritiene necessaria solo per questi 3 mesi. In primis dobbiamo calcolare il delta della nostra opzione, ovvero la sensibilità del prezzo della put al variare del sottostante NASDAQ. Il tasso risk-free reperibile sui mercati è pari a 2.5%, il delta calcolato istantaneamente è pari al -0.22 (sempre negativo per le put). Per avere una copertura istantanea ottimale bisognerà comprare un certo numero di put, ottenibile grazie alla seguente formula:

$$N.\,contratti\ put = \frac{1}{0.22} * \frac{125.000}{17.300} = 32{,}2$$

Non potendo acquistare frazioni di contratti, sarà necessario acquistare 32 contratti put con strike 17.300. Proviamo a immaginare che il giorno, al tempo $t + 1$, dopo si verifichi un ribasso del NASDAQ e di alcuni titoli componenti, tra cui la nostra AAPL:

- Un ribasso di AAPL del 3% porta il controvalore della nostra esposizione a 121.250, con una perdita pari a:

$$variazione = 125.000 - 121.250 = -3.750$$

- Un ribasso del NASDAQ fino a livello 17.000 si traduce in un aumento del controvalore detenuto in put pari a:

$$variazione = \Delta_{put} * \Delta S * n.contratti = -0.22 * -300 * 32 = +2.112$$

Pertanto il nostro portafoglio ha beneficiato della copertura che abbiamo implementato. Il ribasso del controvalore azionario è stato parzialmente coperto dal rialzo del valore dei contratti opzionali. Purtroppo però, la copertura non si è rivelata perfetta, come invece auspicabile, e questo per una serie di fattori:

- Il titolo sottostante delle nostre opzioni, ovvero l'indice, non è perfettamente correlato con il prezzo del titolo azionario di AAPL.
- Il numero di derivati acquistati è stato arrotondato per difetto, questo perché non è possibile comprare frazioni di contratti derivati.
- Il valore delle opzioni non varia solo in funzione delle variazioni del sottostante: come sappiamo, anche altre componenti hanno una certa influenza sul premio.
- Il delta è utile per stimare l'influenza sul prezzo di piccole variazioni del sottostante, ma è necessario integrare il gamma nel nostro algoritmo per ottenere delle stime più affidabili sulle variazioni del valore dell'opzione.

Simuliamo l'andamento dei due portafogli, quello azionario attivo, e quello opzionario di copertura. Immaginando il passare dei giorni e le conseguenti variazioni dei prezzi, possiamo notare come le perdite e i guadagni ponderino l'effetto di eventuali guadagni o perdite della strategia aggregata.

	Portafoglio 500 azioni long			**Portafoglio opzionario copertura**					**Performance Totale**
	Valore azione*	Controvalore ptf azioni*	Profitti (perdite) Azioni*	Valore indice*	Delta	N° contratti	Acquisto (vendita) contratti	Risultato (perdite) Copertura*	Profitti (perdite) Totali*
t	0,250	125,00	/	17,3	-0.22	32	32		
t+1	0,242	121,25	(-3,75)	17,0	-0.50	14	(18)	+2,11	-1,64
t+2	0,235	117,60	(-3,64)	16,8	-0.65	10	(4)	+1,40	-2,2
t+3	0,240	119,90	2,35	17,1	-0.45	15	5	(-1.96)	+0,4
t+4	0,255	127,50	7,60	18,1	-0.17	41	(26)	(-2,25)	+5,3

**valori in migliaia di euro*

Questo tipo di strategia che ci coinvolge in un'attività di monitoraggio continua, prende il nome di *delta hedging dinamico* o *gamma scalping* (Quillacq, 2019). Sebbene questo tipo di operatività sia stata inizialmente pensata per finalità di copertura, essa può essere attuata anche assumendo un profilo speculativo. Come stiamo vedendo la copertura è un'attività estremamente complessa, il delta hedging inoltre ha un limite che è fondamentale ricordare: siamo coperti solo istantaneamente, al variare del prezzo del sottostante anche il nostro delta varierà, sarà necessario effettuare un ribilanciamento o non saremmo più coperti perfettamente. Per spiegare questo aspetto dal punto di vista algebrico, è necessario considerare che mentre la relazione tra prezzo dell'opzione e prezzo del sottostante è convessa, noi cerchiamo di studiarla tramite una derivata prima, ovvero il delta. La derivata di una funzione è pari alla tangente della curva, ma data la convessità non può aiutarci a stimare perfettamente le variazioni del premio in seguito a potenziali variazioni del prezzo del sottostante. Per misurare il grado di convessità della funzione è necessario introdurre il coefficiente gamma. Riassumendo, maggiore è il gamma, più inaffidabili saranno le stime ottenute tenendo conto solo del delta: l'errore di hedging è influenzato dalla curvatura della relazione tra il prezzo dell'opzione e il prezzo del sottostante, maggiore è il gamma maggiormente il delta tenderà a cambiare a variazioni del prezzo del sottostante e quindi maggiori saranno gli aggiustamenti necessari sulla nostra strategia per risultare coperti.

4.6.2 Gamma Short

Riprendiamo il ruolo del market maker, e l'esempio fatto precedentemente: l'operatore si troverà a essere controparte obbligata nella vendita sul mercato di un'opzione call. Questa operazione comporta per il market maker un'esposizione al rischio che variazioni al rialzo del sottostante lo portino in perdita. La nostra copertura sarà implementata tramite l'acquisto diretto del sottostante in quantità definite dal delta. Notiamo che è l'operazione contraria all'esempio visto al paragrafo precedente, dove per coprirci da una posizione diretta sul sottostante compravamo opzioni put (operazione analoga alla vendita di call). Immaginiamo ora che il giorno successivo un movimento al rialzo del sottostante ci porti OTM sulla call venduta. Le possibilità che l'opzione call venduta venga esercitata dalla controparte aumentano, quindi il nostro delta si avvicina ancora di più a -1 e sarà necessario coprirsi con un acquisto ulteriore di azioni. Nel terzo giorno il prezzo del nostro sottostante scende leggermente, la nostra opzione ha preso valore, quindi nuovamente la nostra strategia necessita di un aggiustamento tramite la vendita di azioni.

	Prezzo Spot AAPL	Delta Opzione	Copertura	Sottostante in PTF	Operazioni di copertura
Giorno 1	245	-0.50%	Long 50 azioni	0	Buy 50
Giorno 2	260	-0.75%	Long 75 azioni	50	Buy 25
Giorno 3	255	-0.60%	Long 60 azioni	75	Sell 15

Come vediamo tra il giorno 1 e il giorno 2 un rialzo del sottostante ci ha portato a un ulteriore acquisto di 25 azioni a un prezzo maggiore del precedente, stiamo accumulando posizioni long a prezzi sempre maggiori. Invece nel terzo giorno un aumento del delta ci ha portati a rivendere le nostre azioni in perdita, a prezzi più bassi. Questa logica come vediamo da luogo a una serie di transazioni che sembrano accumulare perdite, ma va contestualizzata nell'ottica della strategia di hedging. Questa operatività è ha dato spunto ad alcuni trader che hanno deciso di sfruttare in chiave speculativa i meccanismi di copertura. Questa strategia prende il nome di *gamma scalping*:

- Un gamma positivo fa sì che il delta aumenti quando il prezzo del sottostante sale, e diminuisca quando il prezzo scende, come nelle call.
- Al contrario, un gamma negativo comporta che il delta aumenti quando il prezzo scende e diminuisca quando il prezzo sale, come nelle put.

E' facile intuire che il gamma è quasi nullo su opzioni DITM e DOTM poichè il loro delta ha una scarsissima reattività al movimento del sottostante, ma acquisisce un peso determinante nella valutazione delle opzioni ATM poichè sono le più sensibili ai cambiamenti di prezzo del sottostante.

Chi è lungo gamma, tipicamente, possiede opzioni (call o put comprate), mentre chi è corto gamma vende opzioni. Nel nostro caso abbiamo venduto una call, quindi il nostro delta oscilla tra 0 e -1. Al salire del prezzo abbiamo avuto un delta ancora più piccolo (vicino al -1), questo comporta che abbiamo dovuto vendere delle azioni per riequilibrare la nostra posizione, a un prezzo ancora maggiore. Per chi è corto gamma quindi valgono le seguenti considerazioni:

- Quando il prezzo sale, aumenta la possibilità che la controparte ci chiami a esercitare. Per mantenere l'hedging, è necessario comprare altre azioni a prezzi sempre più elevati. Queste operazioni sono definite *buy high*, perché si entra long sui massimi.

- Se il prezzo scende, il delta dell'acquirente si riduce. A quel punto la nostra copertura è più che proporzionale, bisogna vendere azioni, sempre a un prezzo inferiore. Anche qui si realizza una perdita potenziale, siamo in presenza di *sell low*, vendiamo sui minimi.

In pratica, ogni volta che il mercato si muove contro la posizione, la necessità di copertura provoca operazioni che amplificano il movimento. Se il prezzo sale, i trader corti gamma devono comprare azioni a prezzi più alti, amplificando ulteriormente la salita, proprio come avvenuto nel nostro esempio. Se il prezzo scende, i trader corti gamma vendono per coprirsi, amplificando ulteriormente i ribassi. Quindi, i mercati in cui prevalgono operatori corti gamma tendono ad amplificare e incrementare la volatilità. Al contrario invece chi è gamma positivo sembra contribuire alla stabilità del mercato.

4.6.3 Gamma Long

Come abbiamo anticipato, chi è lungo gamma ha in portafoglio delle opzioni comprate, put o call. E' il caso del market maker che voglia coprirsi dopo l'acquisto sul mercato di alcune opzioni. Per coprirsi dovrà vendere determinate quantità di sottostante nel caso in cui fossimo in possesso di opzioni call; acquistare determinate quantità di sottostante nel caso in cui fossimo in possesso di opzioni put.

- Se il prezzo del sottostante sale, il delta dell'opzione call aumenta automaticamente, facendo guadagnare sempre più rapidamente. A quel punto, il trader può vendere parte del sottostante per riportare il delta in equilibrio. Queste vendite sono effettuate a prezzi sempre più alti del sottostante acquistato precedentemenete, come se fossimo in presenza di un sistema piramidale di takeprofit. Si realizzano guadagni man mano che il prezzo sale.
- Se invece il prezzo scende, il delta diminuisce automaticamente. Per mantenere un hedging neutrale, il trader deve comprare azioni aggiuntive, a un prezzo inferiore. In questo modo anche il nostro prezzo medio di carico sta diminuendo, permettendoci di ottenere un vantaggio implicito. Stiamo comprando a prezzi più bassi, potremo rivendere solo in seguito a rialzi del sottostante, e quindi a prezzi maggiori di quelli di acquisto. Riproponendo la tabella precedente con un ipotetico acquisto di una put:

	Prezzo Spot AAPL	**Delta Opzione**	**Copertura**	**Sottostante in PTF**	**Operazioni di copertura**
Giorno 1	245	0.50%	Long 50 azioni	0	Buy 50
Giorno 2	260	0.25%	Long 25 azioni	50	Sell 25
Giorno 3	255	0.30%	Long 30 azioni	25	Sell 15

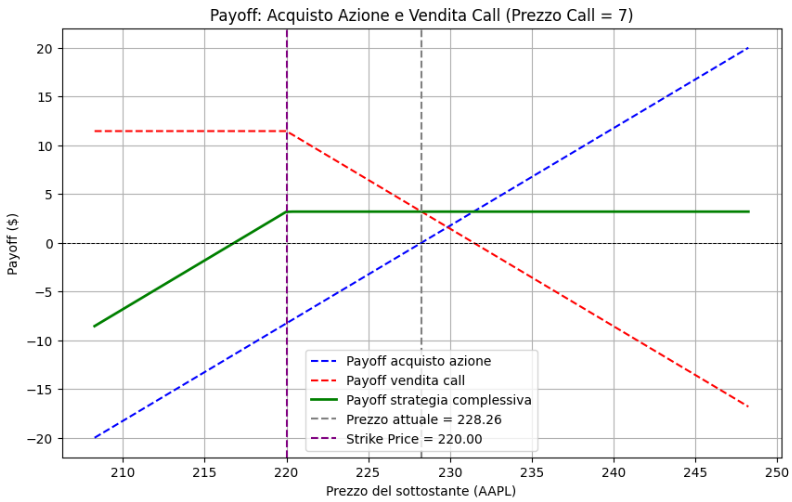
Possiamo alla fine dire che le operazioni di chi è lungo gamma portano dei profitti a chi effettua la copertura, mentre chi è corto gamma subirà delle perdite. Il delta hedging di chi è lungo gamma produce dei profitti che vanno confrontati con l'erosione del valore dell'opzione lunga al passare del tempo. Il delta hedging di chi al contrario è corto gamma tende a generare perdite che vanno confrontate col profitto derivante dall'erosione del valore dell'opzione corta nel corso del tempo.

Posizione Gamma	**Comportamento Delta Hedging**	**Effetto sulla volatilità**
Lungo gamma	Compra basso e vende alto (*take profit*)	**Comprime** la volatilità
Corto Gamma	Costretto a comprare alto e vendere basso (*stop loss*)	Amplifica la volatilità

In sintesi, mentre i trader lunghi gamma realizzano strategie di copertura proattive che comprimono la volatilità, i trader corti gamma, se costretti ad azioni di delta hedging difensive, finiscono per amplificarla. Le tecniche di copertura rappresentano uno strumento cruciale nella gestione dinamica di tali scenari, consentendo di adattare le posizioni al mutare delle condizioni del mercato sottostante e delle proprie aspettative di rischio/rendimento.

4.6.4 Covered Call

E' interessante esaminare la potenziale copertura dal rischio delta ottenibile vendendo una call, in caso di un esposizione long sul sottostante in portafoglio. Il payoff subirebbeuna parziale neutralizzazione del rischio delta con una curva piatta per i valori di S>K. Quindi la covered call non realizza una copertura totale, ma ci lascia esposti sull'estrema coda dei rendimenti negativi. In presenza di grosse variazioni al ribasso subiremmo una perdita significativa. I potenziali profitti, invece, vengono limitati da un tetto massimo. Queste caratteristiche rendono la covered call una strategia penalizzante per chi abbia aspettative fortemente buy sul sottostante, mentre è più utile a chi ha una view più cauta sul mercato. La vendita della call comporta l'incasso del premio, che va ad erodere il costo totale della strategia portandoci in vantaggio con un breakeven traslato verso sinistra rispetto al prezzo d'acquisto del sottostante. Se è vero che ogni strategia va contestualizzata, le covered call permette di eliminare parzialmente il rischio di mercato in capo al possessore di un determinato asset sottostante, con il conseguente tetto sui massimi rendimenti realizzabili. Vediamo un esempio con un sottostante acquistato a 228.26 e una call venduta con strike 220 e premio pari a 11.86.



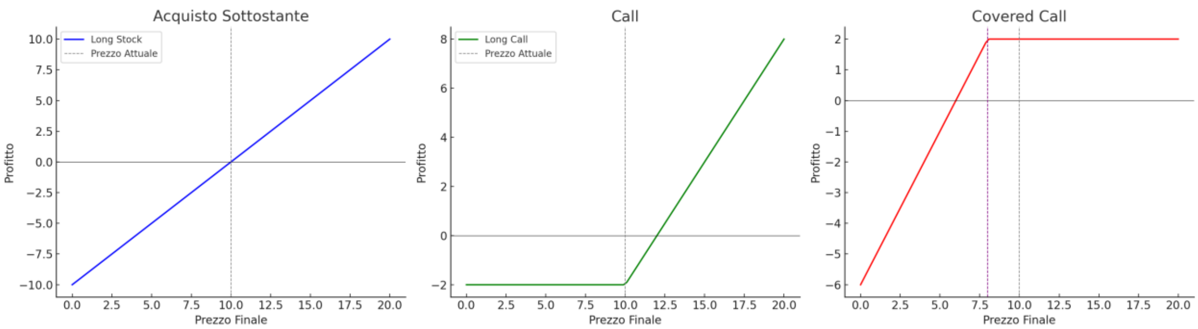
Dobbiamo sottolineare che la covered call nasce proprio per permettere a chi è già esposto sul rischio di mercato del sottostante di ponderare il rischio tramite l'incasso del premio dell'opzione venduta, il tutto senza dover impegnare ulteriorie capitale. Questo concetto necessita di essere approfondito, in quanto è il vero vantaggio ottenibile dall'investitore che dovesse detenere una posizione long sul sottostante e volesse implementare un covered call. Immaginiamo di acquistare al momento *T* una quantità di *100* azioni *AAPL*, qualora al tempo *T+1* si decidesse di vendere una call, ci si esporrebbe al dovere di vendere a scadenza un totale di *100* azioni AAPL a un dato prezzo (lotto minimo delle opzioni su AAPL). Per il nostro broker, il sottostante che deteniamo basta e avanza come garanzia sulla nostra potenziale insolvenza sull'opzione, in quanto già deteniamo a pronti il sottostante che dovremmo vendere alla nostra controparte, acquirente della call, qualora dovesse esercitare.Al contrario per la vendita di un opzione call naked il broker ci chiederebbe un margine molto elevato, quasi pari al costo del sottostante, in quanto l'assegnazione comporterebbe per noi dover vendere a un prezzo estremamente più basso le azione, comprandole al prezzo corrente a mercato.

Quindi con lo stesso capitale impegnato per l'acquisto del sottostante possiamo usufruire di una strategia Covered Call, con l'acquisto del sottostante e la vendita di una call. La vendita di un'opzione comporta un incasso ex ante che supporta il nostro payoff sulle code dei rendimenti negativi. Se si è in possesso di un portafoglio long di azioni a medio/lungo termine, e le opzioni dovessero lateralizzare, non aver implementato la covered call significa aver perso un occasione per un potenziale incasso senza gravare di ulteriori rischi.

L'implementazione in codice della rappresentazione grafica del payoff a scadenza visto sopra è qui riportata, l'aggregato sarà la somma dei due singoli payoff, acquisto del sottostante e vendita opzioni, calcolati a scadenza per ogni livello di prezzo.

```python
# richiamiamo le solite librerie
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import yfinance as yf

strike_price = 220
prezzo_call = 11.45
ticker = "AAPL"

# prendiamo i prezzi daily di chiusura

azione = yf.Ticker(ticker)
prezzo_attuale = azione.history(period="1d")['Close'][0]
prezzi_sottostante = np.linspace(prezzo_attuale - 20, prezzo_attuale + 20, 100)

# definiamo due funzioni che restituiscano i payoff
def payoff_azione(prezzo_sottostante, prezzo_acquisto):
    return prezzo_sottostante - prezzo_acquisto

def payoff_call_vendita(prezzo_sottostante, strike_price, prezzo_call):
    payoff_call = np.maximum(prezzo_sottostante - strike_price, 0)
    return prezzo_call - payoff_call

# Payoff
payoff_acquisto_azione = payoff_azione(prezzi_sottostante, prezzo_attuale)
payoff_vendita_call = payoff_call_vendita(prezzi_sottostante, strike_price, prezzo_call)

# Payoff complessivo della strategia
payoff_totale = payoff_acquisto_azione + payoff_vendita_call
```

Come possiamo vedere dal payoff grafico siamo delta neutral solo per livelli di prezzo superiori allo strike della call venduta, per questo la copertura è parziale. Questa strategia incassa il premio delle call vendute, eventuali dividendi e potenziale capital gain pagato dal sottostante: in presenza di bassa volatilità, la covered call permette di avere flussi cospicui anche qualora il sottostante non si muovesse. Interessante anche vedere le differenze tra tre modi differenti di operare con aspettativa rialzista sul sottostante, come sempre, qualora vi steste chiedendo quale metodo è preferibile usare, la risposta può essere solo "dipende":



Operazione	Direzionalità	Impiego di capitale	Rendimento	Rischio
Long sottostante	Fortemente rialzista	Alto	Pari al rendimento del sottostante.	Pari alla perdita del sottostante.

Call	Rialzista	Basso	Pari al rendimento del sottostante – premio pagato.	Pari solo al premio pagato per le opzioni.
Covered call	Moderatamente rialzista	Medio	Premio incassato dalla vendita della call + dividendi del sottostante + rendimento del sottostante	Pari alla perdita del sottostante - premio incassato dalla vendita – dividendi eventuali del sottostante.

4.7 Scadenze e Rollover.

Fino a questo punto abbiamo parlato di scadenza senza mai approfondire nel dettaglio le scadenze offerte sui mercati regolamentati. Parlando di opzioni con sottostanti le principali azioni del mercato americano, sono disponibili opzioni in scadenza ogni venerdì dei 30 giorni successivi alla data in cui effettuiamo la nostra ricerca, più altre scadenze sporadiche. Nel dettaglio ci sono scadenze settimanali, scadenze mensili, scadenze trimestrali. Le scadenze mensili cadono ogni terzo venerdi del mese: al momento in cui scrivo, cioè il 10 marzo 2025, la prossima scadenza mensile è il 21 marzo, ovvero il terzo venerdì del mese corrente. La prossima sarà il 18 aprile, poi il 16 maggio, e così via. Le scadenze settimanali cadono ogni venerdì del mese, escluso il terzo, ovvero quello in cui sono in scadenza le opzioni mensili. Le opzioni trimestrali scadono il terzo venerdì del terzo mese di ogni trimestre (marzo, giugno, settembre, dicembre). Sono quelle trimestrali le scadenze dove si concentrano i maggiori volumi. Fanno eccezione solo alcuni titoli e indici particolarmente liquidi dove si possono arrivare ad avere scadenze anche ogni lunedì, mercoledì e venerdì per tutte le settimane (SPY, SPX,NASDAQ).

Scadenze disponibili su AAPL al 10 marzo 2025

Scadenze settimanali	Scadenze mensili	Scadenze trimestrali
- 14 marzo 2025	- 21 marzo 2025	- 20 giugno 2025
- 28 marzo 2025	- 18 aprile 2025	- 19 settembre 2025
- 4 aprile 2025	- 16 maggio 2025	- 19 dicembre 2025

Solo su alcune opzioni sono disponibili scadenze fino a tre anni nel futuro, generalmente fissate al terzo venerdì di gennaio**.** Prossime scadenze su contratti AAPL - LEAPS (Long-term Equity AnticiPation Securities):

- 16 gennaio 2026
- 15 gennaio 2027

Una volta scelta la scadenza sulla quale vogliamo operare con le nostre opzioni e avviata l'attuazione di una strategia, può accadere che, per una serie di motivi che approfondiremo successivamente, si ritenga necessario rinviare la scadenza delle nostre opzioni, spostandoci su una scadenza successiva. Questa tecnica è chiamata rollover, può servire se si crede che la strategia non abbia ancora espresso il massimo delle sue potenzialità, se si ha una variazione inattesa sull'holding period inizialmente stabilito, quando un trader detiene una posizione in opzioni prossime alla scadenza e desidera estendere il periodo di copertura o speculazione sul mercato sottostante. Per tutte queste necessità il rollover è la soluzione più adatta, chiudendo la posizione a breve scadenza e aprendo contestualmente una posizione equivalente con scadenza più lunga, il trader può continuare a beneficiare dell'esposizione al sottostante evitando la scadenza immediata dell'opzione. In pratica la tecnica del rolling nelle opzioni consiste nel chiudere una posizione esistente e aprire una nuova posizione con parametri più o meno simili alla precedente, ma con scadenza a data successiva. In particolare alcuni trader non cambiano solo scadenza, ma sfruttano l'occasione per rimodulare anche lo strike, per meglio adattarsi al mutare delle condizioni di mercato o per gestire i rischi della strategia (Rollover diagonale).

Quando un operatore è lungo gamma, cioè possiede opzioni call o put acquistate, beneficia da movimenti ampi del sottostante. Infatti, il gamma positivo indica che il delta della posizione cresce quando il mercato si muove a favore della posizione e diminuisce quando si muove contro, permettendo una gestione ottimale del rischio attraverso operazioni di Delta Hedging. Applicare tecniche di rolling alle posizioni in opzioni permette ai trader, specialmente a chi è corto gamma, di mitigare questi rischi. Ad esempio, rollare una call venduta con strike vicino al prezzo corrente (ATM) verso strike più lontani (OTM) oppure verso scadenze più lontane permette di ridurre la probabilità di esercizio e, di conseguenza, l'immediata esposizione gamma negativa. Viceversa, chi è lungo gamma potrebbe utilizzare il rolling per estendere la durata della posizione positiva in gamma, garantendosi più tempo per beneficiare della volatilità del mercato.Anche evitare l'assegnazione può essere un motivo per implementare un rolling sulle scadenze: nel caso di opzioni americane vendute il trader potrebbe voler evitare l'assegnazione automatica se l'opzione è in-the-money, spostando la posizione su una scadenza successiva e uno strike minore. Le operazioni di rollover sulle scadenze possono rivelarsi molto utili, ma è necessario conoscere e valutarle alla luce di una serie di costi impliciti:

- Bid-ask spread: la chiusura e la riapertura di posizioni implica il pagamento dello spread denaro-lettera, ovvero il profitto del nostro broker, a scapito del risultato della nostra strategia.
- Theta: le opzioni in scadenza possono aver già subito un elevato decay temporale, che sappiamo aumentare in prossimità della scadenza, quindi l'operazione di roll-over rischia di risultare particolarmente costosa.
- Variazioni nella volatilità implicita: la volatilità implicita quotata per ogni scadenza varia in base alle aspettative dei mercati, di conseguenza anche i premi necessitano di'un attenta analisi per valutare la convenienza dell'operazione.
- Slippage: il mercato può muoversi rapidamente mentre si esegue il rollover, causando esecuzioni a prezzi meno favorevoli.

Attuare la tecnica di rollover delle scadenze sui nostri contratti è utile per gestire posizioni attive senza liquidarle completamente, tuttavia, richiede una valutazione attenta dei costi, della volatilità e della liquidità del mercato, il rischio concreto è che la nuova posizione possa essere completamente differente dall'opzione che si intendeva rollare inizialmente.

5. STRATEGIE SPECULATIVE CON OPZIONI.

A questo punto del volume è chiaro che le opzioni sono uno strumento tanto complesso quanto funzionale agli investitori professionali. Da questo momento utilizzeremo le conoscenze e gli strumenti acquisiti ai precedenti capitoli per costruire e monitorare strategie composte da un numero variabile di opzioni. Partiremo con combinazioni semplici, composte da una coppia di opzioni, fino ad arrivare a modelli più complessi con quattro o più opzioni. Inoltre, per l'attuazione di alcune strategie, è prevista anche una posizione diretta sul sottostante. Per semplificare il lavoro approfondiremo strategie su opzioni con la medesima data di scadenza, o sarebbe impossibile valutare il payoff e le greche aggregate come faremo nelle prossime pagine. Ciò nonostante, non escludiamo la possibilità di effettuare eventuali rollover qualora si ritenesse necessario.

Riprendendo le nostre greche, al netto delle variabili esogene o a basso impatto sul prezzo dell'opzione, rimangono solo due variabili che influiscono maggiormente sul valore delle opzioni: il valore del titolo sottostante e le aspettative sulla volatilità. Dopo aver studiato questi due fattori di rischio possiamo formulare delle ipotesi robuste sulle quali basarci per costruire le nostre strategie. Vediamo quindi i nomi delle principali combinazioni che andremo ad approfondire in una *strategy map,* divise in base alle aspettative sul trend e sulla volatilità. Per orientarsi su quale strategia è più adatta al contesto in cui andremo ad operare, è necessario avere delle aspettative fondate sulle nostre analisi:

- L'analisi del sottostante vista nei primi capitoli sarà determinante per definire la nostre aspettativa su un eventuale trend.
- I modelli di pricing e lo studio delle opzioni ci hanno insegnato quanto è importante la volatilità attesa per valutare il prezzo delle opzioni.

Prendere dimestichezza con i fondamentali teorici delle opzioni e lo studio della serie storica permettono di orientarsi tra le potenziali strategie al fine di scegliere quella che maggiormente sfrutta le potenzialità che abbiamo individuato:

	Aspettative sul trend del sottostante			
		Ribasso	**Incerto**	**Rialzo**
Aspettative sulla volatilità	**Ribasso**	Short Call	Long butterfly spread Short straggle Short strangle	Short put
	Incerto	Bear spread Covered Put		Bull spread Covered call
	Rialzo	Long Put Strip	Short butterfly spread Long straggle Long strangle	Long Call Strap

La covered call è stata la prima combinazione di singole operazioni che abbiamo incontrato. Per l'attuazione di questa strategia è previsto l'acquisto del sottostante e la vendita della call, con l'obiettivo di neutralizzare parzialmente il rischio di mercato. Interessante notare come dalla combinazione di queste due operazioni nasca un payoff uguale alla vendita di una put: le opzioni sono fatte per essere combinate tra loro, mantenendo sempre un equilibrio e una coerenza tra i prezzi, tale da permettere il raggiungimento dei medesimi risultati anche con l'uso di strumenti differenti (put-call parity). Secondo questa strategia, la covered call può essere replicata sinteticamente. Infatti, la put-call parity per opzioni europee (su titoli senza dividendi) è:

$$C - P = S - Ke^{-rT}$$

Da cui possiamo ricavare:

$$S - C = Ke^{-rT} - P$$

Quest'ultima formula ci dice che possedere l'azione S e vendere la call C, ovvero implementare una covered call equivale, a scadenza, a vendere una put e investire il capitale al tasso risk-free. In entrambi i casi, il payoff a scadenza sarà:

$$min\ (S, K)$$

Ora finalmente possediamo tutti gli strumenti utili a costruire delle strategie: conosciamo nel dettaglio i contratti opzionali, i mercati, i broker; dove repire i dati, pulirli e come decifrarli; sappiamo gestire il rischio e combinare gli strumenti per ottenere la nostra strategia ideale.

5.1 Straddle

Lo straddle è una strategia ampiamente utilizzata dagli investitori che vogliono speculare o proteggersi da potenziali rialzi della volatilità: avevamo già accennato nei capitoli precedenti alla possibilità di speculare sui movimenti della volatilità grazie alle opzioni, senza dover necessariamente fare assunzioni sulla direzione del trend del sottostante. Lo straddle rientra infatti nella famiglia delle strategie definite *market neutral*. Lo straddle può essere implementato sotto la forma di *long straddle*, ovvero una strategia che genera profitti in caso di forti variazioni attese dei prezzi, per andare lunghi sulla volatilità; o come *short straddle*, se invece ci si aspetta una stazionarietà decisa dei prezzi. Nel primo caso è previsto l'acquisto simultaneo di una call e di una put sullo stesso strike e scadenza: l'investitore si aspetta quindi un movimento significativo del prezzo, indifferentemente dalla direzione. Per questi motivi chi è long straddle è detto *volatility buyer,* o compratore di volatilità, in quanto maggiori movimenti dei prezzi garantiranno maggiore profitto. Se l'acquisto di due opzioni comporta un profitto potenziale illimitato sulle code, l'esborso iniziale è conosciuto ex ante, ed è pari alla somma dei due premi. Questo valore rappresenta anche la perdita massima della strategia, infatti nello scenario peggiore, ovvero in caso di volatilità fissa a zero, la perdita ammonterebbe al massimo ai premi pagati alla sottoscrizione. Non c'è quindi aleatorietà sulle potenziali perdite e ciò agevola la gestione del rischio del nostro portafoglio. I due punti di break-even, uno inferiore e uno superiore, sono calcolati in base al costo delle opzioni. L'aerea delimitata dai break-even point è la zona di payoff negativo, e si trova nei dintorni del prezzo strike. Annunci di stacco dividendi, eventi geopolitici, pubblicazioni di dati economici o qualsiasi evento che possa innescare movimenti bruschi dei prezzi sono occasioni di profitto per chi è long straddle. Un'alta volatilità implicita è favorevole per il long straddle, mentre una bassa volatilità ci indica maggiori probabilità di successo per uno short straddle.

5.1.1 Long Straddle

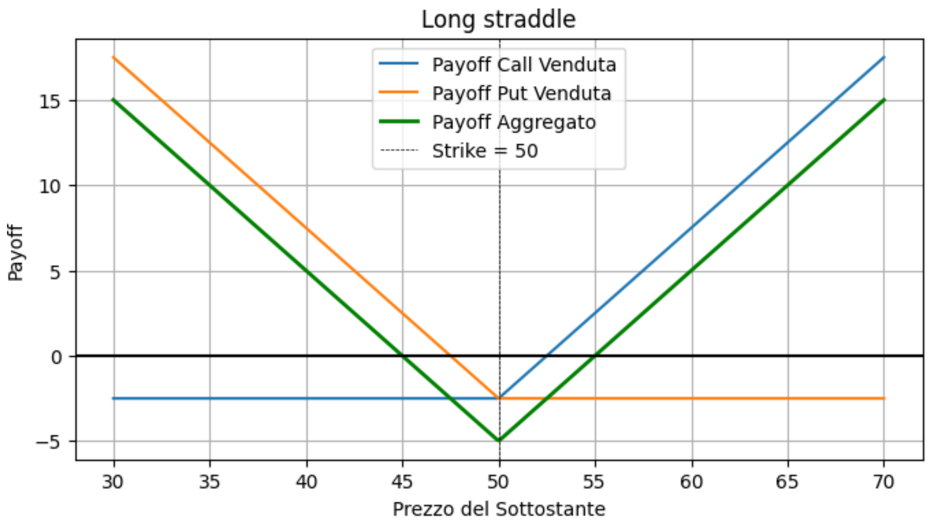
Facciamo un esempio e immaginiamo di avere aspettative rialziste sulla volatilità di un determinato titolo. Non abbiamo invece aspettative sul trend seguito del prezzo di tale strumento. Il nostro sottostante potrebbe quindi salire o scendere significativamente nel breve termine dal livello attuale di prezzo pari a 50, siamo quindi in presenza di un'occasione per implementare un long straddle. Acquistando sia un'opzione call che un'opzione put at the money, ovvero con strike price pari a 50, otterremmo un long straddle. Supponendo un lotto sottostante a ogni opzione pari a 100 azioni, e prezzo uguale sia per l'opzione call che per l'opzione put di 2.50, siamo esposti a un esborso totale per pagare i premi delle due opzioni pari a:

$$2 * 2.50 * 100 = 500$$

Ciò significa che il prezzo del titolo deve variare di almeno il 10%, ovvero muoversi sopra il valore di 55 o sotto quello di 45, per portare la strategia in area di profitto. Questi sono i livelli di prezzo breakeven della nostra strategia:

- Breakeven superiore: $K + c + p = 50 + 2.50 + 2.50 = 55$
- Breakeven inferiore: $K - c - p = 50 - 2.50 - 2.50 = 45$

Capiamo che nel nostro esempio, che non si discosta troppo dai reali modelli sui mercati, è necessario un movimento di prezzo sostanziale per ottenere un profitto da questa strategia. D'altra parte, ciò è compensato da un profitto potenziale illimitato qualora la volatilità dovesse esplodere. I lettori più attenti avranno notato che stiamo facendo l'ipotesi semplificatrice che la call e la put su un dato strike possano avere lo stesso prezzo, ovviamente questo non è vero per il principio della put-call parity (la call avrà un prezzo maggiore della put se $S > Ke^{-rT}$, o viceversa).



Quindi nel long straddle il trader acquista:

- Una call option ATM con strike K.
- Una put option ATM con lo stesso strike K e la stessa scadenza.

Il payoff alla scadenza sarà così diviso in tre diverse aree di prezzo:

- Se l'opzione dovesse scadere con prezzo del sottostante S sensibilmente sopra K, il valore della call compenserebbe il deprezzamento della put.
$$S > K + c + p$$
$$S > 55$$
Dove K + c + p corrisponde al punto di breakeven superiore della strategia.
- Viceversa, se il prezzo a scadenza dovesse essere notevolmente inferiore a K, il valore della put compenserà la perdità per la call non esercitata.
$$S < K - c - p$$
$$S < 45$$
Dove K – c – p corrisponde al punto di breakeven inferiore della strategia.
- Se il sottostante non dovesse muoversi dai dintorni di K, entrambe le opzioni potrebbero scadere ATM, e la perdita sarebbe consolidata per un importo pari alla somma dei premi pagati.
$$K + c + p > S > K - c - p$$
$$55 > S > 45$$

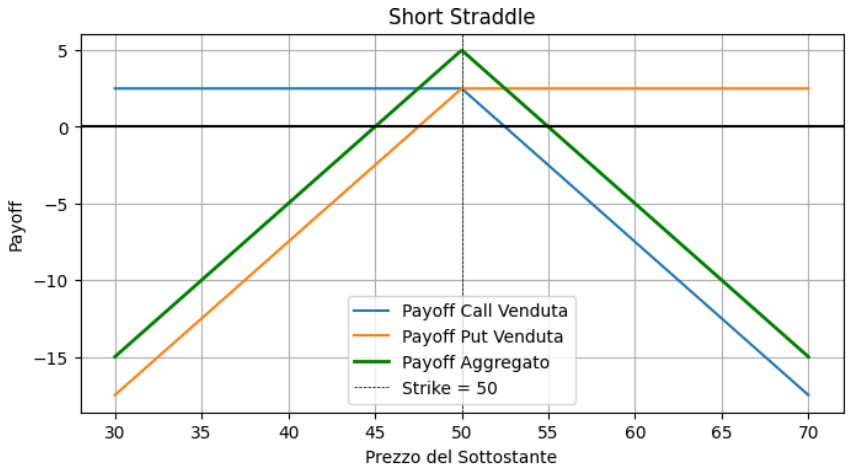
5.1.2 Short Straddle

Nel caso di short straddle invece l'investitore si aspetta un andamento laterale del prezzo e un ribasso della volatilità, di conseguenza cerca un payoff finale della strategia speculare a quello del long straddle. L'area di profitto è definita da alcuni limiti definiti dai punti di breakeven calcolati tenendo conto dei prezzi delle opzioni

(45 e 55 nel caso del nostro esempio di long straddle). La vendita di due opzioni comporta un guadagno iniziale, pari al massimo profitto potenziale della strategia, mentre la perdita rimane aleatoria fino a scadenza, e può essere molto elevata in caso di rialzi della volatilità. Lo short straddle è quindi una strategia molto più rischiosa rispetto al long straddle, il rischio sulle code rimane molto elevato e ci espone alla regolazione quotidiana dei margini al broker, che possono essere anche molto elevati. Nello short straddle l'operatore vende:

- Una call option ATM con strike K.
- Una put option ATM con lo stesso strike K e la stessa scadenza.

Riproponendo lo stesso esempio fatto per il long straddle, ma immaginando di avere un view stazionaria sul prezzo del nostro titolo nel breve periodo, è possibile impostare uno short straddle. A tal fine, si vende un'opzione call e un'opzione put con stesso prezzo d'esercizio, 50, e la stessa data di scadenza, incassando la somma dei due premi per un totale di 500. Se il prezzo dovesse rimanere tra 45 e 55 si otterrebbe un profitto, mentre avremmo il profitto massimo qualora il prezzo non dovesse subire variazioni rimanendo sul valore di 50. Le controparti non eserciterebbero le opzioni e al venditore di volatilità rimarrebbe l'intero importo di 500. Contrariamente al long straddle è la potenziale la perdita ad essere infinita, siamo esposti al rischio che il prezzo subisca forti variazioni. Il payoff che risulta dalla vendita di un'opzione call e di una put è esattamente opposto rispetto al long straddle.



Sia per lo straddle, che per le successive strategie, è fondamentale approfondire l'influenza delle greche sul payoff atnow. Queste ci aiutano a quantificare e gestire i rischi a cui siamo esposti, sommando algebricamente i singoli rischi delle operazioni che compongono la strategia:

- Vega: ovviamente la strategia straddle long è positivamente esposta alle variazioni di volatilità, un aumento della volatilità implicita giova sensibilmente al valore delle opzioni comprate. Uno short straddle invece è esposto negativamente al vega, maggiori variazioni della volatilità implicano un potenziale rialzo dei prezzi delle opzioni vendute, con conseguenti perdite.
- Theta: il time decay è nemico dei trader che volessero implementare uno straddle long, l'avvicinamento della scadenza fa diminuire il valore temporale e causa il deprezzamento delle opzioni. Per chi vende opzioni invece, come nel caso dello straddle short, il passare del tempo comporta un vantaggio.
- Delta: le due opzioni call (delta positivo) e put (delta negativo) tendono a compensare il delta complessivo, infatti come abbiamo detto la strategia è market neutral. Tuttavia, man mano che il prezzo si muove, il delta cambia in maniera non lineare. Lo stesso vale anche per lo short straddle, in entrambi i casi può essere necessaria un'attività di ribilanciamento dell'esposizione sul delta (delta hedging).
- Gamma: il gamma iniziale è elevato e positivo nel long straddle, per questi motivi il delta hedging si rende necessario in presenza di variazioni del prezzo del titolo. In presenza di alto gamma le nostre coperture risultano compromesse al minimo movimento di prezzo. Nel caso di short straddle il gamma

risulta negativo ed esprime un rischio importante per il venditore di opzioni, rischio da monitorare frequentemente.

Parlando quindi di potenziali rischi e profitti, la due strategie hanno due profili molto diversi. Ci sarà utile per tutte le strategie che incontreremo ricordare che comprare e vendere opzioni comportano rischi molto differenti, riassumiamo quindi i potenziali rischi e profitti delle due tipologie di straddle.

	Profitti	**Rischi**
Short Straddle	L'investitore incassa i premi, la cui somma equivale al profitto massimo ottenibile.	Il rischio e la perdita sono potenzialmente illimitati: il limite superiore per il prezzo (e quindi la perdita) è infinito, il limite inferiore equivale alla perdita ottenuta dalla vendita della put se il prezzo del sottostante dovesse scadere a zero. Data la natura ad alto rischio della posizione, le richieste di margine possono essere elevate, e le commissioni possono incidere significativamente sui profitti netti.
Long Straddle	Se la strategia dovesse muoversi oltre i punti di breakeven i profitti sono potenzialmente illimitati: il limite superiore è infinito, il limite inferiore equivale al profitto ottenuto dalla put se il prezzo del sottostante dovesse scadere a zero.	Se il sottostante non si muove sufficientemente, l'investitore perde l'intero investimento, che è limitato ai premi pagati per la call e per la put.

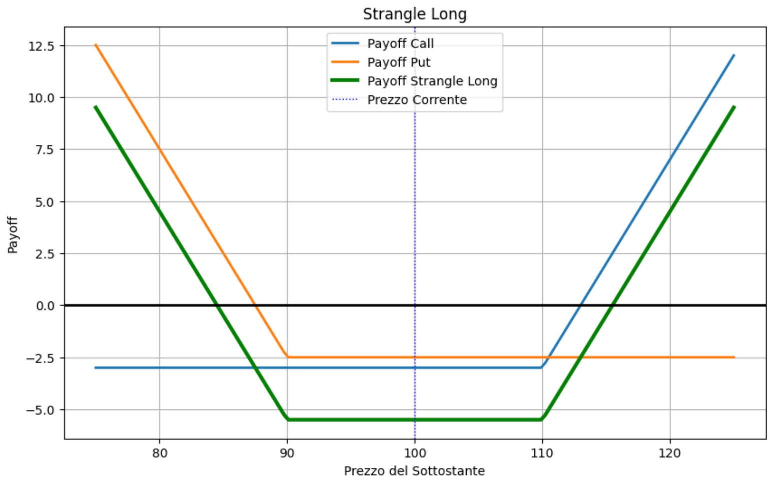
Fin'ora abbiamo parlato di straddle costruiti con l'acquisto o la vendita di due opzioni di diverso tipo, allo stato ATM, le quali offrono una maggiore sensibilità alla volatilità (vega) e una decisa esposizione al gamma, e quindi alle variazioni di prezzo. In realtà i trader possono considerare anche la possibilità di operare con due opzioni leggermente OTM per ridurre i costi iniziale, a fronte di alcune implicazioni differenti rispetto allo straddle classico soprattutto in ambito rischio di mercato. Chi sceglie di operare con opzioni out of the money per ridurre il rischio immediato dovrà attendere variazioni maggiori per avere un profitto: questa strategia è conosciuta con il nome di *strangle*. La scelta tra long straddle, short straddle o eventuali strangle dipende dalla corrente situazione sui mercati e dalle aspettative future sulla volatilità.

5.2 Strangle

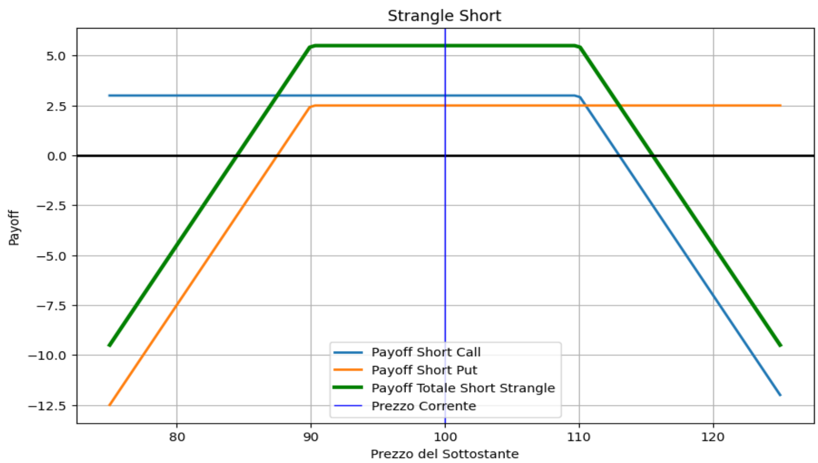
Lo strangle è spesso trattato congiuntamente con lo straddle, in quanto entrambe le strategie sono fortemente influenzate dalla volatilità implicita e non investono nella direzionalità. Nonostante molte caratteristiche comuni, lo strangle si differenzia operativamente perchè costa tipicamente meno. Le due opzioni, infatti, non sono ATM ma OTM, e ciò permette di lavorare sul differenziale degli strike per trovare prezzi più favorevoli. Anche nel caso di strangle long si acquistano due opzioni, una call out of the money e un'opzione put out of the money. Sostanzialmente il prezzo del sottostante deve essere minore dello strike della call e maggiore dello strike della put nel momento della sottoscrizione dei contratti:

$$K_p < S < K_c$$

La selezione dei prezzi dipende dalla propria visione sul potenziale aumento delle fluttuazioni del prezzo sul mercato e dal livello di rischio che si intende assumere. Trattandosi in entrambi i casi di un acquisto di opzioni, il costo iniziale è pari alla somma dei premi delle due opzioni. Come nello straddle il monitoraggio del rischio è semplice in quanto la perdita massima è pari al costo pagato ex-ante.
La strategia risulta profittevole solo in presenza di oscillazioni importanti del prezzo, maggiori di quelle richieste dallo straddle: il break-even è raggiunto solo dopo una variazione del prezzo che porti una delle due opzioni abbastanza ITM da compensare la perdita legata al costo delle due opzioni pagato inizialmente.[12]



Nello strangle short invece, la vendita di due opzioni in simultanea definisce un'area di profitto nei pressi del prezzo attuale del sottostante, l'investitore prevede una bassa volatilità e spera che il sottostante non subisca forti variazioni di prezzo. Nello strangle short il trader incassa la somma dei due prezzi, ma queste due opzioni, costano molto meno delle opzioni vendute nello straddle, il nostro profitto è limitato. I rischi possono essere elevati in caso di movimenti estremi, ma le variazioni devono essere importanti per portaci in zona di perdita, ovvero molto in là sulle code della distribuzione de rendimenti. I punti focali nella valutazione di questa strategie sono la quantificazione e valutazione del premio incassato al momento delle vendite, pari al profitto massimo della strategia, e la possibilità di capitalizzare quanto ottenuto alla vendita a un tasso di interesse valido per il periodo rimanente fino alla scadenza. Infatti, questo è il modo per trarre il maggior profitto dall'implementazione di questa strategia, l'investimento dell'incasso dei premi a tasso risk-free fino alla scadenza. Fondamentale la gestione del rischio sulle code e l'esposizione a eventi imprevisti o episodi di volatilità estrema, la strategia short strangle necessita di di un monitoraggio costante e di un hedging dinamico.



[12] Anche in questa strategia come nello straddle i profitti sono teoricamente infiniti, non c'è un tetto massimo al prezzo che un asset può raggiungere sul mercato.

Facciamo ora una analisi della sensibilità delle strategie strangle ai fattori di rischio:

- Delta: nello strangle long il delta complessivo è vicino a zero, poiché la call e la put tendono a compensarsi. Questo effetto di compensazione, a differenza dello straddle, non è perfetto. Nello strangle il delta continua ad avere una minima influenza soprattutto se il prezzo resta OTM. Nonostante ciò possiamo considerare la strategia tendenzialmente non direzionale.
- Gamma: in particolare lo strangle long prevede una particolare esposizione al rischio gamma, che tipicamente aumenta attorno ai prezzi d'esercizio delle opzioni. L'analisi del gamma aiuta a comprendere quanto velocemente una posizione delta neutral possa evolversi in una posizione fortemente direzionale.
- Theta: valgono le stesse logiche dello straddle, in una strategia strangle long ha valore negativo, perchè il valore delle opzioni decresce con il passare del tempo: è l'effetto time decay, un costo implicito per coloro che detengono posizioni long su opzioni. Nello strangle short invece incassiamo un importo inizialmente, quindi il passare del tempo è un vantaggio per chi detiene le opzioni short, a patto che restino OTM.
- Vega: come lo straddle, anche lo strangle è fortemente esposto alla volatilità implicita: nello strangle long in modo positivo, nello strangle short in modo negativo. Soprattutto per chi vende opzioni un aumento della volatilità implica un grosso rischio.

Supponiamo di implementare uno strangle long e di avere i seguenti valori stimati per le due opzioni::

- Call: Delta = +0,30, Gamma = 0,20, Theta = −0,02, Vega = 0,10.
- Put: Delta = −0,30, Gamma = 0,20, Theta = −0,02, Vega = 0,10.

Il delta combinato è pari a zero, il che indica una posizione neutrale rispetto ai piccoli movimenti del sottostante. Tuttavia, se il prezzo si sposta significativamente, il gamma elevato farà sì che il delta si modifichi rapidamente esponendo a un rischio direzionale la nostra strategia market neutral. Inoltre, l'aumento dei prezzi comporta un aumento della volatilità, di cui beneficerebbero ulteriormente le nostre opzioni. Una gestione dinamica di queste metriche è essenziale per mantenere il profilo di rischio desiderato, in un'attività di monitoraggio e ribilanciamento che conosciamo come hedging dinamico. La strategia strangle rappresenta uno degli strumenti più versatili nel trading di opzioni, grazie alla sua capacità di trarre vantaggio dai movimenti del mercato senza dover prevedere la direzione del movimento. Tuttavia, la sua efficacia dipende in larga misura dalla gestione accurata del rischio, dallo studio della volatilità e dall'utilizzo di modelli di valutazione affidabili.

Riassumendo i punti chiave delle strategie strangle e straddle:

- Non direzionalità: Lo strangle long beneficia di forti movimenti del sottostante in entrambe le direzioni, mentre lo strangle short scommette su una bassa volatilità.
- Punti di break-even: Determinati dai premi pagati o incassati, definiscono la soglia oltre la quale la strategia inizia a generare profitto.
- Analisi delle greche: Delta, Gamma, Theta, Vega e Rho forniscono una mappa dettagliata della sensibilità della strategia ai cambiamenti nel prezzo del sottostante, con il passare del tempo, nelle variazioni della volatilità e nei tassi d'interesse. Una gestione dinamica di queste metriche è essenziale per mantenere il profilo di rischio desiderato.
- Gestione del rischio: L'adozione di strumenti di hedging dinamici e ribilanciamenti frequenti sono fondamentali per limitare l'esposizione a movimenti estremi e per ottimizzare la performance della strategia. L'hedging dinamico è sinonimo di costi elevati, è importante scegliere il proprio broker anche in funzione della frequenza attesa dell'operatività.

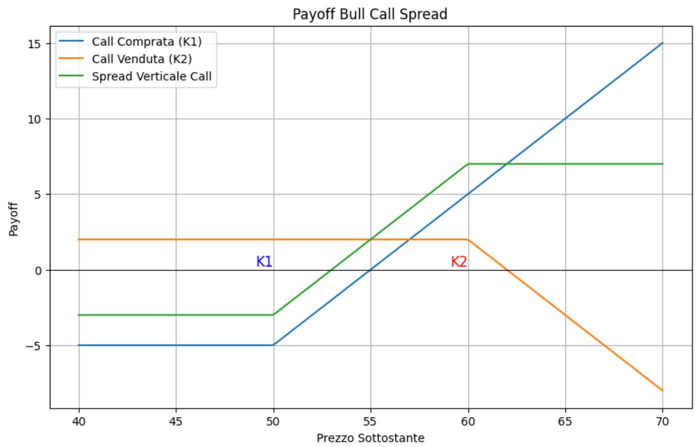
5.3 Spread

Probabilmente se siete degli appassionati di economia e finanza avrete già sentito parlare di *spread*. La parola spread indica una differenza tra due valori, la sua importanza è data dalla possibilità di mettere a confronto due valori o più valori tramite lo studio della distanza tra loro. Spread è anche una parola che ha segnato alcuni periodi della storia politica ed economica recente, infatti il nostro paese è stato spesso considerato particolarmente rischioso in quanto cresceva lo spread tra i tassi di rendimenti dei titoli di stato italiani e quelli di altri paesi paesi europei considerati più solidi, quindi aumentava il costo del capitale a cui il nostro paese si finanziava sui mercati, scatenando a cascata un aggravo sui bilanci pubblici e un aumento del rischio di insolvenza. Non approfondiremo ulteriormente queste tematiche macroeconomiche, in quanto lo spread che attenzioneremo sarà quello tra gli strike di due o più opzioni dello stesso tipo, una comprata e una venduta. Come nello straddle e nello strangle, anche queste opzioni avranno ovviamente il medesimo sottostante e la stessa data di scadenza. Gli spread si dividono in due tipi:

- Bull spread: se si hanno aspettative rialziste sul prezzo del sottostante.
- Bear spread: se si hanno aspettative ribassiste sul prezzo del sottostante.

5.3.1 Bull Spread

Un investitore con aspettative rialziste su una certa azione può fare ricorso a un long spread, anche detto *bull spread*. Il bull spread permette all'investitore di controllare il livello massimo di perdite, limitando tuttavia i profitti ad una soglia massima. Dopo aver visto lo straddle è facile comprendere che questa strategia è molto diversa se la valutiamo sotto l'aspetto della gestione del rischio, infatti in un call spread entrambe le code della distribuzione sono "coperte", mentre nello straddle il nostro payoff è esposto alla potenziale presenza di grandi variazioni. Ovviamente confrontare queste due strategie sotto altri aspetti non avrebbe senso, in quanto una è una strategia market neutral, mentre gli spread implicano una chiara strategia direzionale. Proviamo ora a implementare un bull *call spread* (per ora limitiamoci a notare la parola *call*), bisogna comprare una call ad un certo strike price *K1* e vendere una call ad uno strike price più alto *K2* sul medesimo sottostante. Immaginando ad esempio di comprare una call strike 50 e vendere una strike 60, otteniamo un payoff di questo tipo:

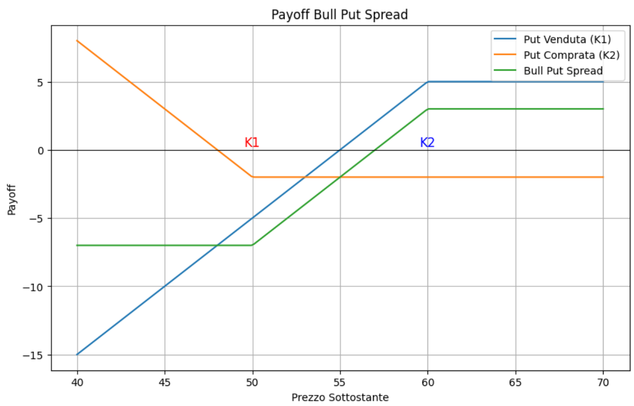


La vendita della call e l'incasso del corrispettivo premio finanzia in parte l'acquisto della call con strike K1. L'aumento del valore sottostante permetterà a quest'ultima di generare profitti per il portafoglio. Il livello massimo di profitti raggiungibili è dato dal differenziale, ovvero lo spread, tra i due strike: maggiore distanza tra i due prezzi implica maggiori profitti potenziali, ma anche minori probabilità di raggiungerli. Ovviamente il livello di perdita massima dipenderà dal prezzo pagato per comprare la call con strike K1, meno il valore incassato dalla vendita della call con strike K2. Interessante fare alcune osservazioni logiche:

- se la call comprata è out of the money, ovvero $S < K1$, inevitabilmente anche la call venduta sarà out of the money, dato che per definizione $K1 < K2$. Una strategia con l'acquisto di entrambe le opzioni OTM prevede un costo iniziale molto basso, con una gestione del rischio agevolata e potenziali perdite limitate. Ovviamente la diretta conseguenza di una strategia poco costosa sono le minori probabilità di successo della strategia stessa.

- Si potrebbe anche optare per l'acquisto di una call in the money e la vendita di una call ancora out of the money: sebbene questa strategia sia più costosa, a causa del valore intrinseco che pesa sul premio dalla call con strike K1 che intendiamo acquistare, la strategia subisce anche un aumento notevole delle possibilità di successo.
- nel caso in cui le opzioni vendute e comprate siano entrambe "in the money", ovviamente avremo il minimo rischio, ma maggiori costi e minori possibilità di rendimento in quanto significa entrare in una strategia che ha già pagato parte del potenziale profitto.

Ovviamente i prezzi delle opzioni sono soggetti all'influenza di tutti fattori che abbiamo imparato a conoscere, è importante capire che valutare una strategia significa valutare il payoff complessivo, l'influenza delle greche non ha utilità se non vista in aggregato nella strategia. Abbiamo incontrato questi concetti a partire della put-call parity, un equilibrio sui mercati delle opzioni permette di ricreare lo stesso payoff implementando strategie diverse, per scoprire che diverse strategie hanno uguali costi, in quanto comportano lo stesso payoff a scadenza, altrimenti verrebbero a verificarsi occassioni per attività di arbitraggio. Proprio per questo dimostreremo che è possibile implementare una *bull put spread,* ovvero una strategia rialzista costruita con due put, una comprata a strike price K1 e una venduta a strike price K2 con $K1 < K2$. La put-call parity ci dimostrerà che questa strategia porta allo stesso payoff di una bull call spread.



Quale è l'unica differenza tra queste due implementazioni? Ragionando a livello di settlment, una delle due strategie permette nel momento della sottoscrizione di ottenere un guadagno, mentre l'implementazione dell'altra comporta un esborso alla sottoscrizione:

- Bull Call Spread: Richiede un esborso iniziale.
- Bull Put Spread: Fornisce un incasso iniziale.

Ovviamente tra le due non deve esserci opportunità di arbitraggio, se entrambe portassero allo stesso payoff colui che implementa la bull put spread potrebbe investire il capitale inizialmente incassato al tasso risk-free ottenendo un rendimento maggiore. Di questo rendimento aggiuntivo va ovviamente compensato colui che decidesse di implementare il bull call spread: sono i concetti fondanti della put-call parity.

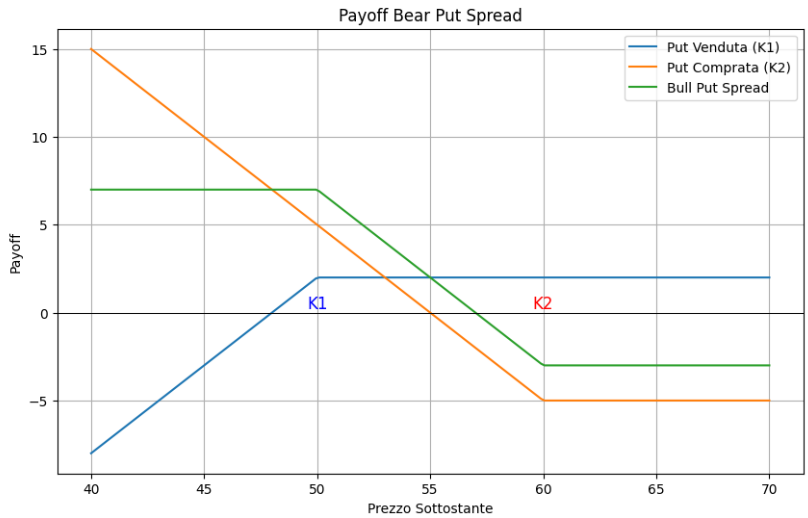
Considerando ciò che abbiamo detto precedentemente sull'uso delle greche per la valutazione di una strategia, seguiremo sempre il concetto che ciò che ci interessa è la strategia nel suo complesso, le greche aggregate. Quindi le nostre strategie bull call spread e bull put spread avranno greche simili durante la loro vita, in quanto ciò che conta è la probabilità di successo a scadenza e nient'altro:

- Ad esempio, se si acquista una call con un delta di 0,85 e si vende una call con un delta di 0,55, il delta netto dello spread sarà 0,30. Ciò indica che il nostro bull spread aumenterà di valore di circa 0,30 unità per ogni aumento di 1 unità nel prezzo del sottostante.

- Gamma: nei cosiddetti *spread verticali* il gamma è generalmente ridotto, in quanto le posizioni lunghe e corte su opzioni con stesso sottostante tendono a ponderare le fluttuazioni del delta. Un gamma basso implica che il delta dello spread non varierà drasticamente con movimenti nel prezzo del sottostante, rendendo la nostra posizione più stabile.
- Theta: può essere positivo o negativo, a seconda che la strategia sia fatta con le put o con le call, infatti in un bull put spread (dove si incassa un premio alla sottoscrizione), il theta è generalmente positivo, indicando che lo spread guadagna valore con il passare del tempo.
- Vega: molto difficile valutare la sua influenza sugli spread verticali, generalmente gli spread sono meno sensibili ai cambiamenti nella volatilità implicita rispetto alle singole opzioni, poiché l'opzione acquistata e quella venduta reagiscono in modo opposto alle variazioni di volatilità, compensandosi a vicenda. Ciò nonostante importante valutare i dettagli del singolo spread per valutare la posizione netta in vega della nostra strategia.

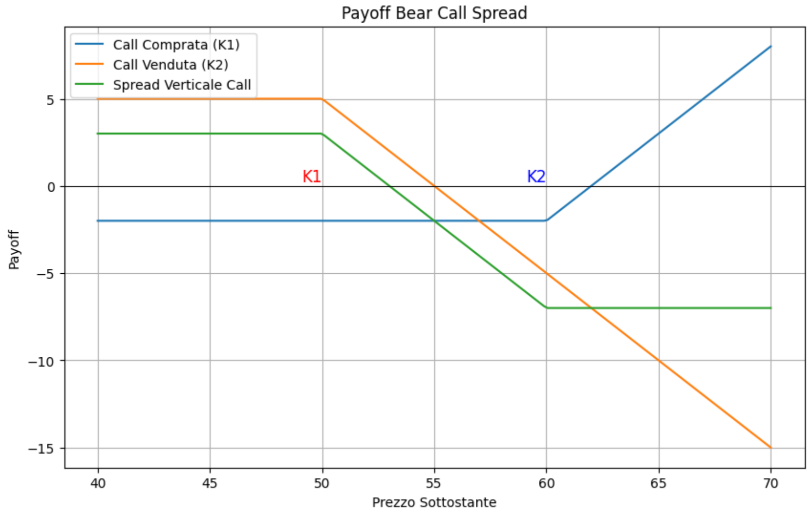
5.3.2 Bear Spread

Se il bull spread è quella strategia utile all'investitore che prevede un rialzo del prezzo, lo spread orizzontale invece trae profitto da un ribasso dei prezzi, e prende il nome di *bear sperad*. La strategia vuole anche in questo caso ridurre il rischio di potenziali rialzi, ma al costo di limitare con un tetto massimo i possibili profitti. Nel caso di un *bear put spread*, è prevista la vendita di un'opzione put a un prezzo K1 e l'acquisto di una put a un prezzo K2, con *K2 > K1*. La strategia implica quindi l'acquisto della put con strike alto e la vendita della put con strike basso. Anche in questo caso il profitto massimo sarà proporzionale alla differenza tra gli strike. Il payoff che ne risulta, con gli stessi dati visti per le bull call spread è il seguente:



Con la bear put spread, al prezzo di esercizio più basso corrisponde una minore possibilità di avere la nostra opzione put in the money: la put venduta avrà prezzo più basso rispetto alla put acquistata, l'investitore subirà un esborso iniziale pari alla differenza per sfruttare la strategia. Se il prezzo del sottostante dovesse scendere sotto lo Strike Price K1, il portafoglio entrerebbe in una zona dove il profitto massimo è definito per ogni livello di prezzo: sappiamo che l'influenza delle due opzioni contrarie in questa area di prezzo si compensa perfettamente.Invece qualora il prezzo del sottostante dovesse salire oltre lo strike price K2, ciò comporterebbe la perdita data dal pagamento del premio per l'acquisto della nostra put, compensato in parte dalla vendita della put con strike K1. Ricordiamo che il differenziale è negativo, la put comprata sarà più costosa.

Anche nel caso delle strategie bear spread è possibile trovare uno squilibrio tra i payoff, riconducibile alla compensazione delle possibilità di arbitraggio. Un'operazione che fa conseguire inizialmente un ricavo che può essere reinvestito deve compensare il debito di cui l'investitore della strategia alternativa deve avvalersi per implementare la sua strategia. Proviamo a immaginare una bear *call* spread, costruito con la vendita di una call con strike K1 e l'acquisto di una call con strike K2. Abbiamo capito che questa strategia comporta un ricavo iniziale, infatti la vendita della call con strike minore comporta un ricavo maggiore della spesa per l'acquisto della call con strike superiore.



Riassumendo quanto visto le strategie spread possono assumere quattro forme in base alle aspettative sul prezzo e alla tipologia di opzioni che andremo a utilizzare, rispettivamente bull o bear, con call o con put. L'uso dello stesso tipo di opzioni, una comprata e una venduta, rende questa strategia particolarmente interessante in quanto fortemente legata al concetto di put-call parity. Nella scelta della strategia da implementare, con opzioni call o put, a parità di scelta sulla direzionalità, può essere determinante anche il tasso risk free, ovvero il tasso a cui è possibile reinvestire gli eventuali proventi o a cui è necessario indebitarsi per implementare la strategia.

	Bear Spread	**Bull Spread**
Call	Aspettative rialziste, comporta un costo iniziale.	Aspettative ribassiste, comporta un ricavo iniziale.
Put	Aspettative rialziste, comporta un ricavo iniziale.	Aspettative ribassiste, comporta un costo iniziale.

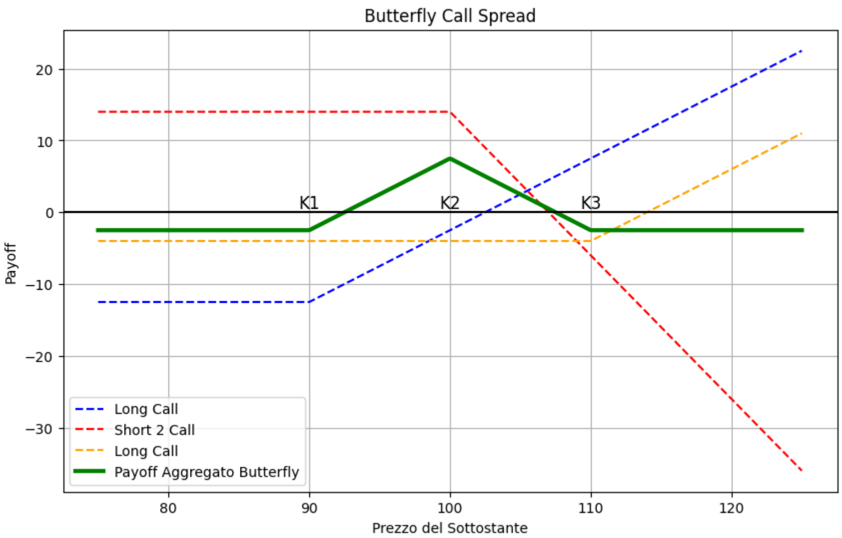
Gli spread si confermano uno strumento molto utile per un investitore che sia in grado di formulare delle previsioni sul futuro trend del titolo sottostante, ma che voglia mantenere un profilo di rischio prudente e un'esposizione controllata al rischio delta.

5.4 Butterfly spread

Facciamo un passo avanti nell'implementazione di strategie sempre più sofisticate e introduciamo il *butterfly spread.* Questa strategia è considerata una delle migliori alternative per gli investitori che vogliano investire sulla volatilità del prezzo del sottostante contenendo il rischio sulle code. Questa strategie sono genericamente chiamate *butterfly strategy*, ovvero strategia a farfalla, per via della forma del payoff che ricorda la tipica forma di una farfalla con le ali spiegate. Grazie al principio della put-call parity, anche di questa strategia esistono varianti *butterfly call spread* e *butterfly put spread*, utilizzabili sia per una strategia long, che short. In generale la struttura base prevede l'utilizzo di quattro opzioni su tre diversi strike: uno inferiore, uno centrale e uno superiore. La forma del butterfly spread ricorda molto uno straddle con una copertura sulle code, è quindi una strategia meno rischiosa ma che non può garantire gli stessi rendimenti potenziali.

5.4.1 Butterfly Spread Long

Nel caso del butterfly spread long, la combinazione di opzioni genera un payoff aggregato che è in profitto solo se il sottostante a scadenza è vicino al prezzo di sottoscrizione, mentre la perdita potenziale è coperta per un importo definito ex ante**.** La strategia long butterfly *call* spread prevede di vendere due opzioni call at the money, quindi lo strike sarà pari al prezzo del sottostante in quel momento e sarà il nostro strike centrale K2, e di comprare altre due opzioni call agli estremi. Tipicamente il butterfly call spread è una strategia che prevede un esborso iniziale, le due call da comprare sono più costose dell'incasso dato dalla duplice vendita.



Per la prima volta introduciamo una strategia che prevede di operare con più di due opzioni, Partendo dalla strategia, come abbiamo già detto questa prevede:

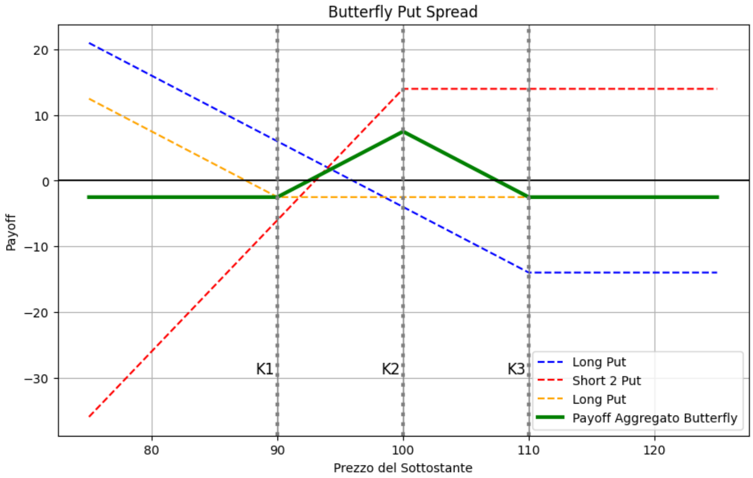
- L'acquisto di una call in the money a strike K_1.
- La venddita di due call at the money a strike K_2.
- L'acquisto di una una call in the money a strike K_3.

Con $K_1 < K_2 < K_3$ ed $S \approx K_2$

La distanza tra K_1 e K_2 deve essere uguale a quella tra K_2 e K_3 se vogliamo ottenere un payoff aggregato simmetrico rispetto allo strike centrale, in questo modo possiamo definire l'area di profitto con un raggio fisso rispetto allo strike pari a *K2 - K1*, in modo da essere coperti indifferentemente dalla direzione del prezzo: per questi motivi anche il butterfly spread è una di quelle strategie comunemente dette market neutral. Il butterfly long spread è tipicamente una strategia che se applicata su strike vicini tra loro, permette di operare con basso rischio di capitale e, di conseguenza, con un livello di massimo rendimento potenziale molto basso. La perdita massima è limitata al costo netto della strategia:

$$c_{K1} + c_{K3} - 2c_{K2}$$

Il costo della nostra strategia può essere anche aumentato da bid-ask spread o altre eventuali commissioni implicite ed esplicite. Il profitto massimo si ottiene invece se il prezzo del sottostante alla scadenza è esattamente pari a K_2, lo strike centrale nonché prezzo corrente al momento della sottoscrizione: significa ipotizzare volatilità uguale a zero, il prezzo non si è mosso. In questo caso, le opzioni vendute scadono at the money e il profitto è al suo massimo teorico. Importante notare come gli strike dividano il grafico in 4 parti e il payoff in 4 segmenti. Inoltre notiamo che il payoff della vendita di due opzioni ha maggiore pendenza, infatti il costo è maggiore e la variazione unitaria del prezzo ottiene un aumento del valore pari al doppio di quello che si avrebbe se avessimo una sola opzione. Prendiamo ad esempio il payoff della strategia butterfly *put* spread, che sappiamo essere facilmente ricostruibile sostituendo le call con le put, con la differenza che avremo una strategia che prevede un ricavo alla sottoscrizione e non un esborso. Vediamo come le varie opzioni contribuiscono a determinare la pendenza del payoff nelle varie zone.



	S < K1	K1 < S < K2	K2 < S < K3	K3 < S
Put Buy K1	-1	0	0	0
Put Buy K3	-1	-1	-1	0
Put Sell K2	+1	+1	0	0
Put Sell K2	+1	+1	0	0
Pendenza Payofff	**0**	**+1**	**-1**	**0**

Grazie a questa tabella è possibile capire come le varie opzioni, in base al prezzo del sottostante, possano contribuire alla pendenza, e quindi all'esposizione, del payoff della strategia alle variazioni del prezzo sottostante. Oltre a questa analisi, può essere interessante comprendere come la strategia butterfly si espone ai vari fattori di rischio espressi dalle greche, analisi che abbiamo condotto anche per le strategie incontrate precedentemente:

- Delta: nel butterfly long spread, la posizione complessiva ha un delta relativamente neutro, data la compensazione delle opzioni acquistate e vendute. Proprio per questo, la strategia appartiene alla classe delle strategie market neutral.
- Gamma: sempre necessario monitorare il gamma, che assume valori particolarmente elevati in prossimità dello strike centrale K2, dove il delta può cambiare rapidamente e siamo esposti a una sensibilità maggiore in caso di movimenti imprevisti.
- Theta: nel butterfly long call spread è tipicamente un fattore a sfavore del trader se il prezzo dovesse rimanere nei dintorni dello strike centrale, infatti il decadimento temporale contribuisce a ridurre il valore delle opzioni vendute in maniera più decisa rispetto alle opzioni acquistate
- Vega: un aumento della volatilità è un evento sfavorevole al trader che abbia investito in un butterfly spread long, il quale infatti ha scommesso su movimenti laterali del sottostante e sulla riduzione della volatilità attesa.

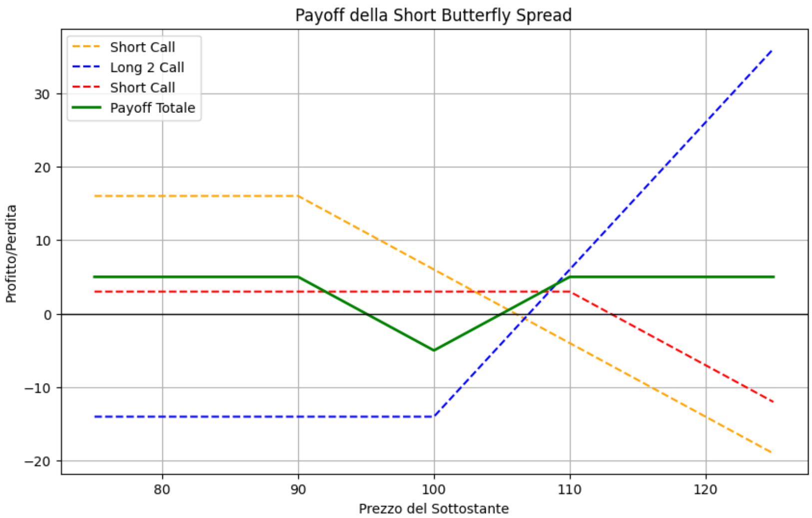
Uno dei principali punti di forza della strategia butterfly long è che sia il profitto massimo che la perdita massima sono ben definiti fin dall'inizio. Il butterfly long spread è particolarmente indicato in mercati a bassa volatilità o in fasi di consolidamento, dove il prezzo del sottostante si muove in un range limitato. Quando il mercato si muove lateralmente, la probabilità che il prezzo scada vicino allo strike centrale aumenta, rendendo le butterfly strategy particolarmente profittevoli. Ovviamente ogni trader può personalizzare la strategia variando gli strike e il numero di contratti per adattarsi alle proprie previsioni di mercato. Ad esempio, aumentando la distanza tra lo strike centrale e gli strike agli estremi si può modificare la larghezza della "finestra" di profitto, adattando la strategia a diverse aspettative di movimento. Il successo nell'applicazione di una butterfly spread dipende non solo dalla capacità di individuare un range di prezzo favorevole, ma anche dalla capacità di monitorare e reagire dinamicamente ai cambiamenti delle condizioni di mercato, sfruttando al meglio le peculiarità degli strumenti derivati.

5.4.2 Butterfly Spread Short

Il butterfly spread short è semplicemente l'inversione della posizione long, quindi prenderemo posizioni opposte rispetto a quelle del butterfly spread long. Vendendo il long butterfly otteniamo un credito netto iniziale, il payoff è inverso rispetto a quello della long butterfly:

- Perdita massima: si verifica se il sottostante scade vicino al prezzo centrale K_2.
- Profitto massimo: si ottiene se il prezzo scade ben al di fuori della fascia di prezzo compresa tra i due strike esterni K_1 e K_3, ovvero in quelle zone dove tutte le opzioni sono ITM o OTM.

La logica alla base è che, vendendo una strategia che normalmente beneficia di bassi movimenti (bassa volatilità), si avrà una strategia che tende a guadagnare quando il sottostante è molto volatile. Pertanto, la short butterfly è essenzialmente una scommessa su un aumento della volatilità, possiamo vedere anche esso in confronto con un long straddle, a differenza del quale siamo coperti sulle code, in modo da fissare il profitto e rischio massimo alla sottoscrizione. Anche la strategia short può essere costruita sia con call che con put grazie alla put-call parity.



Per costruire una short butterfly spread con call si prendono le posizioni opposte rispetto a quelle prese in una long butterfly spread con call:

- Vendita 1 call con strike K_1
- Acquisto 2 call con strike K_2
- Vendita 1 call con strike K_3

Questa operazione permette di avere un profitto ex-ante, in quanto la vendita delle due call permette di ottenere un profitto maggiore rispetto al costo sostenuto per l'acquisto delle due call a K_2. Il payoff sarà suddiviso in 4 parti:

- Due zone esterne ($S < K_1 \, o \, S > K_3$) dove il profitto è pari all'incasso netto alla sottoscrizione.
- La zona centrale($K_1 < S < K_3$) dove il potenziale profitto si annulla fino a determinare una potenziale perdita quanto più ci si avvicina a K_2.

La medesima struttura si può costruire usando solo opzioni put. Considerando la put butterfly long classica la short put butterfly si ottiene invertendo le posizioni:

- Vendita 1 put con strike K_1
- Acquisto 2 put con strike K_2

- Vendita 1 put con strike K_3

Per opzioni europee e in assenza di dividendi, sempre grazie al principio di put-call parity, il payoff aggregato del short butterfly spread implementato con put è identico a quello ottenuto tramite call. Andiamo a fare il solito controllo sulle greche:

- Il payoff complessivo risulta sostanzialmente delta neutral: non andiamo a investire sulla direzionalità, ma sulla volatilità, il delta tende a compensarsi. Nonostante ciò, il delta cambia sensibilmente vicino K_2, e ciò comporta variazioni dell'esposizione al rischio di mercato che è necessario valutare in ottica di gestione del rischio.
- Il gamma di una strategia short butterfly, in quanto strategia short di una struttura con payoff non lineare, tende ad avere gamma negativa**.** Ciò implica che anche piccoli movimenti imprevisti del sottostante, in particolare intorno a K_2, possono provocare variazioni repentine del delta.
- Come tutte le strategie che comportano un incasso alla sottoscrizione, anche lo short butterfly spread beneficia del time decay: abbiamo un theta positivo. Il passare del tempo il valore temporale delle opzioni diminuisce e il nostro payoff migliora.
- La short butterfly è tipicamente long volatilità**,** beneficia di un aumento della volatilità in quanto aumentano le possibilità che la strategia scada in zona di profitto. Al contrario la posizione perde se il sottostante non dovesse muoversi significativamente scadendo intorno a K_2. Al contrario guadagna se il sottostante si dovesse muovere significativamente.

La butterfly spread short è una strategia sofisticata che si propone di generare profitti sfruttando aumenti di volatilità. L'investitore si espone a un rischio limitato e facilmente gestibile, nel caso in cui il prezzo dovesse lateralizzare la perdita massima sarà pari alla somma algebrica dei premi.

6. CONCLUSIONI

La redazione di questa tesi ha richiesto una dedizione e un impegno profondo, sia intellettuale che emotivo, di cui non credevo fossi capace. Non avrei mai immaginato di potermi appassionare in questo modo a una disciplina e a un progetto simile, quando, cinque anni fa, varcavo per la prima volta la soglia di un ateneo. Lo studio non era da tempo il mio punto forte, ma dalle esperienze degli anni precedenti avevo ereditato una forte determinazione, il desiderio di mettermi alla prova e la volontà di costruire qualcosa di solido per il mio futuro. La mia formazione da quel giorno di settembre del duemiladiciannove ha seguito due percorsi paralleli. Il primo è quello accademico, fatto di ore di studio e lezioni in ateneo, di esami sbagliati e di notti in biblioteca. Il secondo è quello guidato dalla voglia di approfondire una passione, fatto di viaggi per esserci ai più famosi eventi del settore, di cene trascorse ad ascoltare e assorbire quanto più possibile da esperti e operatori, di notti passate al computer per acquisire sempre più strumenti e conoscenze. Volevo cambiare un futuro che qualcuno, e talvolta anch'io, credeva già scritto. Sebbene il lavoro di redazione della tesi sia iniziato poco più di un anno fa, l'idea di riassumere in un volume le conoscenze e le competenze che ho acquisito negli ultimi anni nasce molto prima. Le lezioni in università forniscono le basi di una disciplina che richiede un'indagine individuale, una ricerca del senso comune che spesso si perde nei rigidi piani di studio dei corsi universitari. Per questo ho voluto scrivere un volume che sia tecnico, ma che voglia unire una serie di punti che, a mio parere, restavano vicoli ciechi se trattati solo in ambito accademico. In un discorso così complesso come quello dell'indagine finanziaria dei mercati, qualcuno ogni tanto deve tirare le somme, ed è questo l'approccio che ho voluto dare a questo lavoro. Per il lettore che è arrivato fin qui, l'auspicio è di aver fornito strumenti utili per affrontare i mercati con maggiore consapevolezza e serenità, ricordando che, come ogni altro aspetto della realtà che viviamo, essi sono un fenomeno umano e, in quanto tali, trovano sempre una spiegazione nel mondo che ci circonda. Forse devo a questo la mia inspiegabile passione per i numeri. L'irrazionalità dei mercati altro non è che un riflesso della nostra. Dentro quei grafici, dietro quelle oscillazioni, alle spalle della macchina, c'è sempre un essere umano con le sue paure e le sue incertezze. Credo, nonostante la mia giovane età, di aver conosciuto la paura e di aver imparato a riconoscerla negli occhi dell'altro. Prima di studiare i libri, ho studiato l'uomo, e credo di dovere più al secondo che al primo i piccoli successi che sto raggiungendo in questa nuova fase della mia vita. A proposito di successo, trovo significativo osservare come, in un'indagine sulle abitudini comportamentali e culturali tenuta nel 1975 dalla Roper-Starch Worldwide General Information[13], alla domanda <*Quando pensi a una bella vita, la vita che ti piacerebbe condurre, quali cose di questo elenco, dovrebbero farne parte?*> il 38% degli intervistati selezionò <*Molto denaro*>. Lo stesso sondaggio venne riproposto nel 1993, 18 anni dopo, e a discapito di altre opzioni come salute e amore, <*Molto denaro*> era salito al 63%. In un mondo in cui l'uomo d'affari è visto come di maggior successo rispetto all'artista, allo scienziato, al politico, non so più se questo successo mi affascina davvero. Forse per capire il vero significato di questo termine, dovremmo guardarlo sotto un altro punto di vista: *successo,* participio passato del verbo succedere. In quest'ottica tutto ciò che facciamo diventa successo, il semplice fatto che qualcosa faccia parte del nostro passato e che sia stato vissuto sulla nostra pelle basta a dargli valore, perché è *successo.* Vista in quest'ottica, forse, più che di rigide scalette e di direzioni precise, c'è bisogno di vivere e far succedere le cose. Non lasciarsi paralizzare dalla paura di un futuro incerto, che sfugge al nostro controllo e si ribella a ogni previsione. Agire e far succedere, credo sia questa la lezione più importante che ho imparato nell'ultimo anno, scrivendo questa tesi. In un momento della mia vita in cui il futuro mi faceva paura, ho agito. Fate lo stesso. Un famoso detto russo dice <*quando gli occhi hanno paura, le mani fanno*>. Che questa tesi sia la vostra arma contro la paura, e benzina per le vostre mani, il successo sarà solo un'inevitabile conseguenza.

[13] Fornitore di servizi globali di opinione pubblica, indagini e ricerche di mercato creati per fornire informazioni tempestive e approfondite sul mercato.

глаза боятся, а руки делают

quando gli occhi hanno paura, le mani fanno

Ringraziamenti

Questo viaggio inizia lontano, in un paese così piccolo da non fare neanche comune, dentro una casa d'angolo gialla, affollata e brulicante di vita. Il primo grazie è per la mia famiglia. Grazie Papà. Grazie Mamma. Se non vi avessi avuto nella mia vita, non avrei mai creduto all'amore. Senza il vostro esempio, mi sarei arreso alla durezza di un mondo cinico e senza verità. Eppure, voi siete qui, prove viventi che ancora ci si può donare all'altro, senza riserve e senza pretese. Anche se non sarò mai alla vostra altezza, grazie per avermi insegnato l'arte del fare il bene, perché mi ripaga ogni giorno. Roberta, mi sei stata vicina più di tutti in questi ultimi anni. Nonostante le mille differenze tra noi, hai fatto un grande sforzo per capirmi, e ci sei riuscita come nessun altro. Ti invidio, vorrei riuscire a coltivare la mia pace con la tua stessa serenità, riuscire a battere la paura con la determinazione. E' una fortuna averti accanto, grazie. Marcello mi hai insegnato che non bisogna arrendersi al primo ostacolo, che esistono mille strade per raggiungere i propri obiettivi, che non ci sono scuse valide per non provarci. La dedizione ti sta premiando come meritavi, vederti felice mi sprona e mi rincuora. E' grazie a te, se credo ancora nei sogni. Francesca, sei diventata una donna in un battito di ciglia, mentre l'arroganza mi rendeva così cieco da non accorgermene. Credo che entrambi abbiamo fatto fatica a scrollarci di dosso delle etichette non ci appartenevano, per dimostrare che siamo destinati a qualcosa che non credevano possibile per noi. Oggi brindo al tuo futuro, sei la mia sorella più piccola, ma da te ho solo che imparare. Grazie ai miei nonni, e grazie a Dio per avermi permesso di conoscerli. Grazie a Gianna, Leonardo, Silvia, Alessandro. Grazie a tutti voi dall'angolo più remoto del mio cuore.

Grazie Parma, perché da quando ho lasciato casa e ti ho incontrato è cambiato il corso della mia storia. Grazie per il buon cibo e le lunghe notti. Grazie perché mi hai educato alla bellezza. A tutti gli amici e le amiche dell'immenso gruppo che abbiamo costruito in quegli anni, dico eternamente grazie. Citarvi tutti sarebbe impossibile, abbiamo consumato le strade di questa città dove conservo i migliori ricordi della mia vita. A Lorenzo ed Edoardo, il nostro legame va al di là dell'amicizia, vi considero fratelli. Grazie per tutto ciò che abbiamo condiviso, non importa dove, se ci sarete voi con me, io mi sentirò a casa. A Matteo, Federico, Francesco, Pac, Donato, Andrea e tutti gli altri, se non ve lo avessi detto abbastanza volte, lo ripeto: vi voglio bene. Sappiate che, per voi, io ci sarò sempre.

Milano, grazie per avermi colpito così forte da mandarmi al tappeto. Grazie perché mi hai dato l'occasione di capire che non sono solo. Grazie Leo, senza di te forse avrei mollato in partenza, la mia casa sarà sempre anche la tua. Grazie Francesco, voglio festeggiare i dieci anni esatti da quel caldo pomeriggio in cui ci siamo incontrati. Anche se sono volati, noi in fondo non siamo cambiati per nulla. Grazie Riccardo, conserviamo memorie che si fanno sempre più difficili da raccontare, nessuno ci crede più. Grazie per avermi sempre coinvolto, quegli anni travagliati sono stati una palestra per la vita, non vedo l'ora di scoprire le improbabili avventure che ci riserva il futuro. Grazie Giulia, con la tua dolcezza sei il cuore vibrante del gruppo, l'unico vero nuovo gruppo che io abbia avuto in questa città. Grazie a tutti voi per le splendide cene, per i pranzi domenicali e i caffè al tramonto, per i vostri odiosi ritardi e per i McDonald notturni. Grazie ai miei compaesani, ad Alle, Simone, Samu, Francesco, Delia. Sembra incredibile pensare quanti anni sono passati da quando prendevamo quello squallido autobus all'alba per andare a scuola. Ancora più assurdo ritrovarsi oggi sui treni che ci portano lontani da casa. So che non condividiamo solo le radici del passato, ma anche le speranze nel futuro. Mi auguro che il vento ci riporti a sud, tutti insieme. Infine, Milano, grazie per avermi sorpreso. Nei grigi palazzi della periferia ho trovato un concentrato di calore, un'umanità che tanto avevo cercato per le tue strade, ma senza fortuna. Grazie alla grande famiglia del Business Support, per il seme di bene che ogni giorno coltivate con naturalezza e generosità. Ne porto fuori i frutti ogni giorno, lo diffondo, e credo che sia un contributo tanto semplice quanto grande. Grazie Sergio, per i tuoi preziosi consigli, per le tue parole mai banali, per il sorriso che ci doni ogni giorno. Grazie Stefania, per aver apprezzato la mia sincerità a quel colloquio, per avermi dato l'opportunità di dimostrare che un'adolescenza fuori dalle righe, non necessariamente lascia cicatrici, ma sicuramente splendidi ricordi. Grazie Francesca, Francesco, Mariagrazia, per condividere ogni giorno con me un piccolo ma significativo pezzo della vostra esperienza professionale e di vita. A tutto il Business Support Investimenti, grazie per la vostra pazienza e perché apprezzate anche i miei sforzi più piccoli e infruttuosi. La sinergia che si crea su quelle scrivanie è qualcosa di magico. La verità è che entro in ufficio con il sorriso, e a volte mi sento quasi in colpa per questo. Farò di tutto perché questa grande fortuna non vada sprecata.

Infine grazie a delle persone lontane. Alcune mi avranno dimenticato, altre mi guardano dal cielo, altre ancora forse mi ricordano con nostalgia e rammarico, come faccio io con loro. Popolate i miei ricordi e i miei sogni. Grazie ai buoni e ai cattivi esempi, grazie al dolore, che, come il fuoco, brucia, ma lascia la terra fertile. Grazie.

BIBLIOGRAFIA

Bella, R. L. (2021). *Best Trading Idea - MQL5*. Tratto da Best Trading Idea : https://www.besttradingidea.com/author/roberto/

Bellomo, S. (2021). Petrolio sotto zero, dopo un anno è tutto un altro mondo. *Sole 24Ore*.

Black, S. M. (1973). The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy*.

Cardellicchio, A. (s.d.). *Anatomia di una rete neurale*. Tratto da https://python.angelocardellicchio.it/material/05_dl/01_nn/lecture/

Cesarini, P. (2017). *Trading con Excell.*

Cleveland, M. T. (1990). *STL: a seasonal-trend decomposition procedure based on Loess.*

Colombo, F. (2021). *Rischio informazione equilibrio.* G. Giappichelli.

Cournapeau, D. (s.d.). *Scikit-learn MSE*. Tratto da Scikit-learn : https://scikit-learn.org/stable/about

Dickey, F. (1979). Dickey Fuller Test.

Elton, G. M. (2007). *Teorie di portafoglio e analisi degli investimenti.*

Fornasiero, R. (2021). *MQL5 - Come Comprendere i Mercati con gli Algoritmi.*

Gandolfi, G. (2018). *Scelta e gestione degli investimenti finanziari.*

Hamilton, J. (1995). *Econometria delle serie storiche* . Monduzzi.

Hyndman, A. (2021). *Forecasting: Principles and Practice. 3rd ed.*

La Stampa. (2020). Il Coronavirus manda alle stelle il Vix, l'indice della paura: è successo solo altre quattro volte negli ultimi 20 anni. *La Stampa*.

MetaQuotes. (2018). *MetaTrader Modul For Integration With Python*. Tratto da Metatrader: https://www.mql5.com/en/docs/python_metatrader5?utm_source=chatgpt.com

MetaQuotes. (s.d.). *Strategy Optimization*. Tratto da Metatrader: https://www.metatrader5.com/en/terminal/help/algotrading/strategy_optimization

Natenberg, S. (2014). *Option Volatility and Pricing: Advanced Trading Strategies and Techniques.* McGraw-Hill Education - Europe.

Pant, N. (2022). *Mean Reversion Trading: Using Options Spreads and Technical Analysis.*

Pearson, K. (1905). *Omoschedasticità.*

Proietti, T. (2011). *Econometria applicata.*

PyData. (s.d.). *A community for developers and users of open source data tools*. Tratto da PyData: https://pydata.org

PyData. (s.d.). *pandas.DataFrame.pct_change*. Tratto da PyData: https://pandas.pydata.org/docs/reference/api/pandas.DataFrame.pct_change.html

Quillacq, G. d. (2019). *Gamma Scalping 102 – The Undisclosed Risks.* Tratto da Navesink International: https://navesinkinternational.com/wp-content/uploads/2021/01/Gamma-Scalping-102-The-Undisclosed-Risks.pdf

Ronchini. (2014). *Il sistema finanziario: funzioni, istituzioni e servizi.*

Roussi, A. (2019). yfinance.

Statsmodelw. (s.d.). *Statsmodelw*. Tratto da https://www.statsmodels.org/stable/index.html

Taleb, N. (2007). *Il cigno Nero.*

Thompson, C. (s.d.). *Payment for Order Flow (PFOF)*. Tratto da Investopedia: https://www.investopedia.com/terms/p/paymentoforderflow.asp

Tiberti, P. (2015). *Volatilità locale in assenza di arbitraggio.*

TradingQuant. (s.d.). *DataTrader*. Tratto da GitHub: https://github.com/tradingquant-it/DataTrader

TradingQuant. (s.d.). *Modelli Autoregressivi Integrati a Media Mobile ARIMA(p, d, q)*. Tratto da TradingQuant: https://tradingquant.it/modelli-autoregressivi-integrati-a-media-mobile-arimap-d-q/

TradingQuant. (s.d.). *Modello autoregressivo (AR) di ordine p*. Tratto da TradingQuant: https://tradingquant.it/corsi/analisi-delle-serie-temporali-per-il-trading-quantitativo/lezioni/modello-autoregressivo-ar-di-ordine-p/

TradingQuant. (s.d.). *Strategia di pairs trading con il filtro di kalman in Python*. Tratto da TradingQuant: https://tradingquant.it/strategia-di-pairs-trading-con-il-filtro-di-kalman-in-python/#elementor-toc__heading-anchor-0