Diskrete Mathematik

Oliver Cooley

3. Juli 2023

Kapitel I: Aspekte der Kombinatorik

Abschnitt 1: Fibonacci-Zahlen

Sei

$$
\begin{aligned}
F_0 &:= 0 \\
F_1 &:= 1 \\
F_n &:= F_{n-1} + F_{n-2} \qquad \text{für } n \geq 2.
\end{aligned}
$$

Satz 1.1. *Sei*

$$
\begin{aligned}
\varphi &:= \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\
\hat{\varphi} &:= \frac{1-\sqrt{5}}{2}.
\end{aligned}
$$

Dann ist $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^n - \hat{\varphi}^n\right)$.

Beweis. Siehe Vorlesung. □

Man kann aus der Definition die Fibonacci-Zahlen auch für negative n erweitern:

$$
\begin{aligned}
F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad \forall n \in \mathbb{Z} \qquad &\Rightarrow \qquad F_{n-2} = F_n - F_{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{Z} \\
&\Rightarrow \qquad F_n = F_{n+2} - F_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}
$$

Korollar 1.2. *Sei* $n \in \mathbb{Z}$. *Dann ist* $F_{-n} = (-1)^{n-1} F_n$.

Beweis. Siehe Vorlesung. □

Lemma 1.3. $F_{n+k} = F_k F_{n+1} + F_{k-1} F_n$ *für alle* $k, n \in \mathbb{Z}$.

Beweis. Siehe Vorlesung. □

Satz 1.4. $\operatorname{ggT}(F_n, F_m) = F_{\operatorname{ggT}(n,m)}$ *für alle* $n, m \in \mathbb{N}$.

Beweis. Übung. □

Abschnitt 2: Stirling-Zahlen

2.1 Stirling-Zahlen erster Art

Definition. *Ein* Zyklus *von n Elementen ist eine zyklische Permutation.*

Sei $\bar{S}_{n,k}$ die Anzahl Möglichkeiten, eine n-elementige Menge in genau k (nichtleere) Zyklen zu partitionieren. Der Vollständigkeit halber definieren wir auch

$$\bar{S}_{n,0} := \begin{cases} 1 & \textit{wenn } n = 0 \\ 0 & \textit{sonst.} \end{cases}$$

Einfache Eigenschaften:

(1) $\bar{S}_{n,1} = (n-1)!$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(2) $\bar{S}_{n,n} = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(3) $\bar{S}_{n,n-1} = \binom{n}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Satz 2.1. $\sum_{k=0}^{n} \bar{S}_{n,k} = n!$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. Siehe Vorlesung. □

Satz 2.2. $\bar{S}_{n,k} = (n-1)\bar{S}_{n-1,k} + \bar{S}_{n-1,k-1}$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$ *und* $1 \leq k \leq n$.

Beweis. Siehe Vorlesung. □

2.2 Stirling-Zahlen zweiter Art

Definition. *Sei $S_{n,k}$ die Anzahl Möglichkeiten, eine n-elementige Menge in genau k nichtleere Teilmengen zu partitionieren. Wie vorher definieren wir auch*

$$S_{n,0} := \begin{cases} 1 & \textit{wenn } n = 0 \\ 0 & \textit{sonst.} \end{cases}$$

Einfache Eigenschaften:

(1) $S_{n,1} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } n \geq 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

(2) $S_{0,2} = S_{1,2} = 0$;
$S_{n,2} = 2^{n-1} - 1$ für $n \geq 2$.

Satz 2.3. *Sei $n \in \mathbb{N}$ Dann gilt*

$$S_{n,k} = \begin{cases} k \cdot S_{n-1,k} + S_{n-1,k-1} & \textit{für } k \geq 1 \\ 0 & \textit{für } k \leq 0 \textit{ oder } k > n. \end{cases}$$

Notation: Für $x \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}$ ist

$$x^{\underline{k}} := x(x-1)\dots(x-k+1) \text{ die } \textit{fallende Faktorielle}, \text{ und}$$
$$x^{\overline{k}} := x(x+1)\dots(x+k-1) \text{ die } \textit{steigende Faktorielle.}$$

Lemma 2.4. *Für $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt*

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} S_{n,k} x^{\underline{k}} = \sum_{k \in \mathbb{N}_0} S_{n,k} x^{\underline{k}}.$$

Beweis. Siehe Vorlesung. □

Abschnitt 3: Binomialkoeffizienten

Für $n, k \in \mathbb{N}_0$ definieren wir $\binom{n}{k}$ als die Anzahl k-elementiger Teilmengen einer n-elementigen Menge.
Es ist $\binom{n}{k} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ (letzteres nur für $k \leq n$).

Erweiterung: Für $r \in \mathbb{R}$, sei

$$\binom{r}{k} = \begin{cases} \frac{r^{\underline{k}}}{k!} & \text{für } k \in \mathbb{N}_0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bemerkung. *(1) Für $r \notin \mathbb{N}_0$ hat dieser Ausdruck keine kombinatorische Interpretation.*

(2) $\binom{r}{k}$ ist ein Polynom in r vom Grad k.

(3) $\binom{n}{n} = \begin{cases} 1 & \textit{für } n \in \mathbb{N}_0 \\ 0 & \textit{sonst.} \end{cases}$

Einfache Eigenschaften:

(1) Symmetrie: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ für $n \in \mathbb{N}_0$ und $k \in \mathbb{Z}$.
Achtung! Für $n < 0$ gilt die Identität nicht!

(2) Absorption: $\binom{r}{k} = \frac{r}{k}\binom{r-1}{k-1}$ für $r \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Lemma 3.1. *Sei $r \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{Z}$. Dann gilt*

$$(r-k)\binom{r}{k} = r \cdot \binom{r-1}{k}.$$

Beweis. Siehe Vorlesung. □

Lemma 3.2. *Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

Beweis. Siehe Vorlesung. □

Lemma 3.3 (Additionsformel)**.** $\binom{r}{k} = \binom{r-1}{k} + \binom{r-1}{k-1}$ *für alle $r \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{Z}$.*

Beweis. Siehe Vorlesung. □

Lemma 3.4. *Für $m, n \in \mathbb{N}_0$ gilt*

$$\sum_{k=m}^{n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}.$$

Beweis. Siehe Vorlesung. □

Korollar 3.5. *Für $r \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{r+k}{k} = \binom{r+n+1}{n}.$$

Beweis. Siehe Vorlesung. □

Satz 3.6 (Binomialsatz)**.** *Seien $r \in \mathbb{R}$ und $x, y \in \mathbb{C}$. Falls $r \in \mathbb{N}_0$ oder $\left|\frac{x}{y}\right| < 1$, dann gilt*

$$(x+y)^r = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \binom{r}{k} x^k y^{r-k}.$$

Beweis. Siehe Vorlesung. □

Lemma 3.7 (Negationseigenschaft)**.**

$$\binom{r}{k} = (-1)^k \binom{k-r-1}{k} \quad \text{für alle } r \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{Z}.$$

Beweis. Siehe Vorlesung. □

Satz 3.8 (Vandermonde)**.** *Seien $m, n \in \mathbb{Z}$ und $r, s \in \mathbb{R}$. Dann gilt*

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \binom{r}{m+k} \binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{m+n}.$$

Beweis. Siehe Vorlesung. □

Multinomialkoeffizienten:
Analog zum Binomialkoeffizienten definieren wir, für $m \in \mathbb{N}_0$ und $a_1, a_2, \ldots, a_m \in \mathbb{N}_0$,

$$\binom{a_1 + a_2 + \ldots + a_m}{a_1, a_2, \ldots, a_m} := \frac{(a_1 + a_2 + \ldots + a_m)!}{a_1! a_2! \ldots a_m!}.$$

Dies ist die Anzahl Möglichkeiten, eine Menge mit $a_1 + a_2 + \ldots + a_m$ Elementen in m Mengen mit Größen $a_1, a_2, \ldots, a_m$ zu partitionieren.

Satz 3.9 (Multinomialsatz)**.** *Seien $m, n \in \mathbb{N}_0$ und $x_1, x_2, \ldots, x_m \in \mathbb{R}$. Dann gilt*

$$\left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right)^n = \sum_{(a_1,a_2,\ldots,a_m) \in S} \binom{n}{a_1, a_2, \ldots, a_m} \prod_{i=1}^{m} x_i^{a_i},$$

wobei $S := \{(a_1, a_2, \ldots, a_m) \in \mathbb{N}_0^m : \sum_{i=1}^m a_i = n\}$.

Abschnitt 4: Harmonische Zahlen

Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ definieren wir die *n-te harmonische Zahl* als

$$H_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

Einfache Eigenschaften:

(1) $\frac{\lfloor \log_2 n \rfloor}{2} \leq H_n \leq \lfloor \log_2 n \rfloor + 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(2) $\ln n \leq H_n \leq 1 + \ln(n-1)$ für alle $n \geq 2$.

Die n-te harmonische Zahl der Ordnung $r \in \mathbb{N}$ ist definiert durch $H_n^{(r)} := \sum_{k=1}^n k^{-r}$. Des Weiteren sei

$$\zeta(r) := \sum_{k \geq 1} k^{-r} = \lim_{n \to \infty} H_n^{(r)}$$

für $r \geq 2$.

Satz 4.1.

$$\lim_{n \to \infty} (H_n - \ln n) = \gamma,$$

wobei γ die Euler-Mascheroni-Konstante ist, definiert durch

$$\gamma := 1 - \sum_{k \geq 2} \frac{1}{k} (\zeta(k) - 1) \approx 0,577\ldots$$

Beweis. Siehe Vorlesung. □

Abschnitt 5: Bernoulli-Zahlen

Für $m, n \in \mathbb{N}_0$, sei $S_m(n) := \sum_{k=0}^{n-1} k^m$.
Für $m \in \mathbb{N}_0$ sind die *Bernoulli-Zahlen* definiert als Lösung vom linearen Gleichungssystem

$$\sum_{j=0}^{m} \binom{m+1}{j} B_j = \begin{cases} 1 & \text{wenn } m = 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Satz 5.1.

$$S_m(n) = \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^{m} \binom{m+1}{k} B_k n^{m+1-k}.$$

Beweis. Siehe Vorlesung. □

Kapitel II: Asymptotik

Abschnitt 1: Hierarchien von Funktionen und Landau Notation

Definition. *Seien $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ oder $f, g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$. Wir schreiben*

$$f \ll g \quad \text{oder} \quad f(n) \ll g(n) \quad \text{oder} \quad f = o(g) \quad \text{oder} \quad f(n) = o(g(n))$$

genau dann, wenn

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|f(n)|}{|g(n)|} = 0.$$

Lemma 1.1. $e^{f(n)} \ll e^{g(n)} \Leftrightarrow f(n) - g(n) \to -\infty$.

Beweis. Siehe Vorlesung. □

Definition. *Wir schreiben $f = O(g)$ beziehungsweise $f(n) = O(g(n))$ falls es ein $C > 0$ und ein $n \in \mathbb{N}_0$ gibt, so dass*

$$|f(n)| \leq C \cdot |g(n)| \quad \forall n \geq n_0.$$

Vorsicht! In der O-Notation sind Gleichungen „Ein-Weg-Gleichungen"; zum Beispiel ist $\sqrt{n} = O(n)$, aber $O(n) = \sqrt{n}$ ergibt keinen Sinn. Formal gesehen ist

$$O(g(n)) = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} : \exists C > 0, n_0 \in \mathbb{N} \text{ mit } |f(n)| \leq C \cdot |g(n)| \quad \forall n \geq n_0\}.$$

Dann bedeutet $f = O(g)$, dass $f \in O(g)$.

Definition. *Analog definieren untere Schranken:*

$$f(n) = \Omega(g(n)) \Leftrightarrow g(n) = O(f(n))$$
$$f(n) = \omega(g(n)) \Leftrightarrow g(n) = o(f(n))$$

und

$$f(n) = \Theta(g(n)) \Leftrightarrow f = O(g) \text{ und } f = \Omega(g).$$

Noch stärker ist die asymptotische Äquivalenz:

$$f(n) \sim g(n) \Leftrightarrow f(n) = g(n) + o(g(n)) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1.$$

Lemma 1.2.

(i) $O(f) + O(g) = O(|f| + |g|)$,

(ii) $O(O(f)) = O(f)$,

(iii) $O(f) \cdot O(g) = O(fg)$,

(iv) $O(f \cdot g) = fO(g)$,

(v) *Für* $c \in \mathbb{R}$ *ist* $c \cdot O(f) = O(f)$,

und die analogen Aussagen gelten auch für $o(\cdot)$.

Beweis. Siehe Vorlesung. □

Abschnitt 2: Asymptotische Summation

Ziel: $\sum_{k \in I} a_k(n)$ asymptotisch bestimmen, für $n \to \infty$.
Strategie:

1. Summation aufbrechen: $I = D_n \cup R_n$.
2. Finde eine Abschätzung $b_k(n)$ und einen Fehlerterm $c_k(n)$ für alle $k \in I$, sodass

$$a_k(n) = b_k(n) + O(c_k(n)) \quad \text{für } k \in D_n.$$

3. Zeige, dass

$$S_a(n) := \sum_{k \in R_n} a_k(n), \qquad S_b(n) := \sum_{k \in R_n} b_k(n), \qquad S_c(n) := \sum_{k \in D_n} |c_k(n)|$$

   klein ist.

Dann ist

$$\sum_{k \in I} a_k(n) = \sum_{k \in I} b_k(n) + O\left(|S_a| + |S_b| + |S_c|\right).$$

Beispiel: Siehe Vorlesung.

Euler Summation
Sei $B_m(x) := \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} B_k x^{m-k}$ das „m-te Bernoulli-Polynom“.

Satz 2.1. *Sei $m \in \mathbb{N}$, seien $a, b, m \in \mathbb{Z}$ mit $a \leq b$ und sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine m Mal stetig differenzierbare Funktion. Dann gilt*

$$\sum_{k=a}^{b-1} f(k) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \sum_{k=1}^{m} \frac{B_k}{k!} f^{(k-1)}(x)\Big|_a^b + R_m,$$

wobei $R_m := (-1)^{m+1} \displaystyle\int_a^b \frac{B_m\left(x - \lfloor x \rfloor\right)}{m!} f^{(m)}(x)\mathrm{d}x.$

Beweis. Siehe Vorlesung. □

Beispiel: Sei $S_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{-k^2/n}$. Dann gilt für alle $M > 0$

$$S_n = \sqrt{\pi n} + O\left(n^{-M}\right).$$

Beweis. Siehe Vorlesung. □

Korollar 2.2. *Sei $m \in \mathbb{N}$, sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine m Mal stetig differenzierbare Funktion und sei*

$$S_n := \sum_{k=1}^{n-1} f(k) \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Sei $T_k(x) := \frac{B_k}{k!} f^{(k-1)}(x)$ und sei F eine Stammfunktion von f. Falls ein $c > 0$ existiert, sodass $f^{(m)}(x) = O(x^{-1-c})$ (wo $x \to \infty$), dann gibt es eine Konstante C mit

$$S_n = F(n) + C + \sum_{k=1}^{m} T_k(n) + O\left(n^{-c}\right).$$

Beweis. Siehe Vorlesung. □

Korollar 2.3. $H_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma - \frac{1}{2n} - \sum_{k=1}^{m} \frac{B_{2k}}{2k} n^{-2k} + O\left(n^{-2m-2}\right).$

Beweis. Siehe Vorlesung. □

Weitere Formen von Euler Summation:

Lemma 2.4.

(i) *Es gilt*

$$\sum_{k=a}^{b-1} f(k) = F(b) - F(a) + \sum_{k=1}^{m} (T_{2k}(b) - T_{2k}(a)) - \frac{1}{2}(f(b) - f(a)) + O\left((2\pi)^{-2m}\right) \int_a^b |f^{(2m)}(x)|\mathrm{d}x.$$

(ii) Angenommen es sind entweder $f^{(2m+2)}(x), f^{(2m+4)}(x) \geq 0$ *für alle* $x \in [a, b]$ *oder* $f^{(2m+2)}(x), f^{(2m+4)}(x) \leq 0$ *für alle* $x \in [a, b]$. *Dann existiert* $\theta_m \in [-1, 1]$ *sodass*

$$R_{2m} = \theta_m \frac{B_{2m+2}}{(2m+2)!} f^{(2m+1)}(x)\Big|_{x=a}^{b}.$$

Ohne Beweis. □

Satz 2.5. *Es gibt eine Konstante* $\sigma \in \mathbb{R}$ *und eine reelle Zahl* $\theta_{m,n} \in [-1, 1]$ *mit*

$$\ln((n-1)!) = n \ln n - n - \frac{\ln n}{2} + \sigma + \sum_{k=1}^{m} \frac{B_{2k}}{2k(2k-1)} n^{-2k+1} + \theta_{m,n} \cdot \frac{B_{2m+2}}{(2m+2)(2m+1)} \cdot n^{-2m-1}.$$

Beweis. Siehe Vorlesung. □

Daraus folgt:

$$\ln(n!) = n \ln n - n + \frac{\ln n}{2} + \sigma + \frac{1}{12n} + O(n^{-2})$$

Umgeformt ist das die Stirling Formel:

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n} e^{\sigma} \left(1 + \frac{1}{12n} + O(n^{-2})\right).$$

Lemma 2.6. $\sigma = \frac{1}{2} \ln(2\pi)$.

Korollar 2.7. $n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \left(1 + \frac{1}{12n} + O(n^{-2})\right)$.

Beweis von Lemma 2.6. Siehe Vorlesung.

□

Kapitel III: Graphentheorie

Abschnitt 1: Grundbegriffe

Definition 1.1. *Ein* Graph *ist ein Paar* $G = (V, E)$*, wobei*

1. V *eine endliche Menge ist – die* Knoten*,*
2. $E \subseteq \binom{V}{2} = \{\{v, v'\} : v, v' \in V, v \neq v'\}$ *– die* Kanten

Beispiel: Sei $n \in \mathbb{N}$ und $[n] := \{1, 2, \ldots, n\}$.

1. $K_n := \left([n], \binom{[n]}{2}\right)$ – der *vollständige Graph.*
2. Für $n \geq 3$ ist $C_n := ([n], \{\{1, n\}\} \cup \{\{i, i+1\} : 1 \leq i \leq n-1\})$ – ein *Kreis der Länge* n.
3. Für $n \geq 1$ ist $P_n := ([n], \{\{i, i+1\} : 1 \leq i \leq n-1\})$ – ein *Pfad der Länge* $n-1$.

Notation: Wir schreiben oft uv statt $\{u, v\}$ für eine Kante.

Definition 1.2. *Seien* $G_1 = (V_1, E_1)$ *und* $G_2 = (V_2, E_2)$ *zwei Graphen. Wir nennen* G_1, G_2 isomorph *und schreiben* $G_1 \simeq G_2$*, falls eine bijektive Abbildung* $\varphi : V_1 \to V_2$ *existiert, so dass für alle* $u, v \in V_1$*,*

$$uv \in E_1 \Leftrightarrow \varphi(u)\varphi(v) \in E_2.$$

Wir unterscheiden im Sprachgebrauch nicht zwischen isomorphen Graphen.

Definition 1.3. *Sei* $G = (V, E)$ *ein Graph und* $v \in V$ *ein Knoten.*

1. *Die* Nachbarschaft *von* v *in* G *ist*

   $$N_G(v) := \{u \in V : uv \in E\}.$$

   Der Grad *von* v *ist* $d_G(v) := |N_G(v)|$.
   v *heißt* isoliert *falls* $d_G(v) = 0$.
   v *heißt* Blatt *falls* $d_G(v) = 1$.

2. (a) *Der* Minimalgrad *von* G *ist* $\delta(G) := \min_{v \in V} d_G(v)$.

(b) *Der* Maximalgrad *von* G *ist* $\Delta(G) := \max_{v\in V} d_G(v)$.

(c) *Der* Durchschnittsgrad *von* G *ist* $\overline{d}(G) := \frac{\sum_{v\in V} d_G(v)}{|V|} = \frac{2|E|}{|V|}$.

Lemma 1.4 (Handschlaglemma). *Sei* $G = (V, E)$ *ein Graph. Dann ist*

$$\sum_{v\in V} d_G(v) = 2|E|.$$

Beweis. Siehe Vorlesung □

Korollar 1.5. *In einem beliebigen Graphen gibt es eine gerade Anzahl Knoten, die ungeraden Grad haben.* □

Definition 1.6. *Sei* $G = (V, E)$ *ein Graph.*

1. *Ein Graph* $G' = (V', E')$ *ist ein* Teilgraph *von* G *falls* $V' \subseteq V$ *und* $E' \subseteq E$.

2. *Sei* $U \subseteq V$ *eine nichtleere Knotenmenge in* G. *Dann ist*

$$G[U] := (U, \{e \in E : e \subseteq U\})$$

der durch U induzierte Teilgraph *von* G.

Definition 1.7. *Ein* Weg *in einem Graph* $G = (V, E)$ *ist eine Folge* $W = (v_0, v_1, \ldots, v_k)$ *von Knoten, so dass* $v_iv_{i+1} \in E$ *für alle* $0 \leq i \leq k-1$.
W *heißt ein* Pfad *falls alle* v_i *unterschiedlich sind.*
Ein Kreis *ist ein Weg, in dem alle* v_i *unterschiedlich sind außer, dass* $v_0 = v_k$.
Die Länge *von* W *ist* $\ell(W) = k$ *(die Anzahl Kanten).*

Definition 1.8. *Sei* $G = (V, E)$ *ein Graph*

(1) G *heißt* zusammenhängend *falls für alle* $u, v \in V$ *ein Weg in* G *existiert, der* u *und* v *enthält.*
Äquivalent: Für alle $u, v \in V$ *existiert ein* u–v *Pfad (das heißt, ein Pfad der bei* u *beginnt und bei* v *endet).*

(2) *Eine* Komponente *von* G *ist ein maximaler induzierter Teilgraph, der zusammenhängend ist.*

Beobachtung: Die Komponenten von G partitionieren V.

Lemma 1.9. *Sei* $G = (V, E)$ *ein Graph mit* $|V| = n$ *und* $|E| = m$. *Dann hat* G *mindestens* $n - m$ *Komponenten.*

Beweis. Siehe Vorlesung □

Abschnitt 2: Bäume und Wälder

Definition 2.1. *Ein* Baum *ist ein zusammenhängender und kreisfreier Graph.*
Ein Wald *ist ein kreisfreier Graph (oder äquivalent: ein Graph, dessen Komponente Bäume sind).*

Satz 2.2. *Sei $T = (V, E)$ ein Graph. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) T ist ein Baum

(2) Für alle $u, v \in V$ gibt es genau einen *u-v Pfad.*

(3) T ist minimal zusammenhängend*: Für alle $e \in E$ ist $(V, E \setminus \{e\})$ nicht zusammenhängend.*

(4) T ist maximal kreisfrei*: Für alle $e \in \binom{V}{2} \setminus E$ enthält $(V, E \cup \{e\})$ einen Kreis.*

Beweis. Siehe Vorlesung □

Lemma 2.3. *Jeder Baum mit mindestens zwei Knoten enthält mindestens zwei Blätter.*

Beweis. Siehe Vorlesung □

Lemma 2.4. *Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph und $v \in V$ ein Blatt. Dann ist $G' := G[V \setminus \{v\}]$ auch zusammenhängend.*
Insbesondere, wenn G ein Baum ist, dann ist G' auch ein Baum.

Beweis. Siehe Vorlesung □

Notation: Für einen Graphen G schreiben wir $V(G)$ für die Knotenmenge und $E(G)$ für die Kantenmenge.
Wir definieren auch $v(G) := |V(G)|$ und $e(G) := |E(G)|$.

Satz 2.5. *Sei T ein Graph. Dann gilt*

$$T \text{ ist ein Baum } \Leftrightarrow T \text{ zusammenhängend und } e(T) = v(T) - 1.$$

Beweis. Siehe Vorlesung □

Korollar 2.6. *Sei $T = (V, E)$ ein Baum, sei $v \in V$ und seien $T_1, \ldots, T_k$ die Komponenten von $T[V \setminus \{v\}]$. Dann gilt*

(1) $T_1, \ldots, T_k$ sind Bäume.

(2) $k = d_T(v)$.

Beweis. Siehe Vorlesung. □

Korollar 2.7. *Sei $T = (V, E)$ ein Baum, sei $e \in E$ und seien $T_1, \ldots, T_k$ die Komponenten von $(V, E \setminus \{e\})$. Dann ist $k = 2$ und T_1, T_2 sind Bäume.*

Beweis. Siehe Vorlesung. □

2.1 Zählen von Bäumen

Sei $\mathcal{G}_n := \left\{(V,E) : V = [n], E \subseteq \binom{V}{2}\right\}$ die Menge aller Graphen auf Knotenmenge $[n]$.
Dann ist $|\mathcal{G}_n| = 2^{\binom{n}{2}}$.
Analog: Sei $\mathcal{T}_n := \{G \in \mathcal{G}_n : G \text{ ein Baum}\}$ die Menge aller Bäume auf Knotenmenge $[n]$.

Bemerkung: Wir betrachten hier *nicht* die Isomorphieklassen; z.B. ist der Stern mit n Knoten n Mal in $\mathcal{T}_n$ enthalten.

Satz 2.8 (Cayley)**.** $|\mathcal{T}_n| = n^{n-2}$.

Notation: Für einen Graphen $G = (V,E)$ und einen Knoten v definieren wir $G - v := G[V \setminus \{v\}]$.

Definition 2.9. *Sei $T = ([n], E)$ ein Baum. Der* Prüfer-Code *von T ist eine Folge* $\mathrm{PC}(T) = (a_1, a_2, \dots, a_{n-2}) \in [n]^{n-2}$ *der wie folgt rekursiv definiert ist:*

(1) Setze $T_1 := T$.

(2) In Schritt i, für $1 \leq i \leq n-2$ definieren wir:

(a) b_i ist das kleinste Blatt von T_i (in der natürlichen Ordnung auf $[n]$);

(b) a_i ist der Nachbar von b_i;

(c) $T_{i+1} := T_i - b_i$.

Lemma 2.10. *Sei $\mathcal{F}_n := [n]^{n-2}$ die Menge aller Folgen der Länge $n-2$ mit Einträgen aus $[n]$. Dann ist die Prüfer-Code Funktion* PC *eine bijektive Abbildung von $\mathcal{T}_n$ nach $\mathcal{F}_n$. Insbesondere ist $|\mathcal{T}_n| = |\mathcal{F}_n|$.*

Beweis. Siehe Vorlesung □

Beweis von Satz 2.8. Siehe Vorlesung. □

Lemma 2.11. *Sei T ein Baum, sei v ein Knoten in T und sei $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt:*

$$d_T(v) = k \;\Leftrightarrow\; v \textit{ kommt in } \mathrm{PC}(T) \textit{ genau } k-1 \textit{ Mal vor.}$$

Beweis. Siehe Vorlesung. □

Satz 2.12. *Sei $(d_1, \dots, d_n) \in \mathbb{N}^n$ mit $\sum_{i=1}^n d_i = 2(n-1)$. Sei $\mathcal{T}_n(d_1, \dots, d_n)$ die Menge aller Bäume aus $\mathcal{T}_n$ mit der Eigenschaft, dass der Knoten i Grad d_i hat. Dann ist*

$$|\mathcal{T}_n(d_1, \dots, d_n)| = \frac{(n-2)!}{\prod_{i=1}^n (d_i - 1)!}.$$

Beweis. Siehe Vorlesung. □

2.2 Spannbäume

Definition 2.13. *Seien G, T Graphen. T heißt ein* Spannbaum *von G falls T ein Baum ist, T ein Teilgraph von G ist und $V(T) = V(G)$.*
Wir bezeichnen mit $\mathcal{T}(G)$ die Menge aller Spannbäume von G.

Lemma 2.14. *G ist zusammenhängend $\Leftrightarrow$ $\mathcal{T}(G) \neq \emptyset$.*

Beweis. Siehe Vorlesung □

Sei $\tau(G) := |\mathcal{T}(G)|$.

Definition 2.15. *Ein* Multigraph *besteht aus einer Knotenmenge V und eine Menge E* markierter Kanten *$e = (uv, m_e)$, wobei jede markierte Kante zwei Unterschiedliche Knoten enthält und zusätzlich eine Markierung, so dass alle Markierungen unterschiedlich sind.*

Die Markierung auf den Kanten erlaubt uns, mehrere Kanten zwischen einem Paar Knoten zu haben.

Definition 2.16 (Kantenlöschen und Kantenkontraktion)**.** *Sei G ein Multigraph und $e = (xy, m)$ eine markierte Kante.*

1. *Wir definieren $G \setminus e := (V(G), E(G) \setminus \{e\})$.*
2. *Wir konstruieren einen neuen Multigraphen G/e in dem wir, von G ausgehend, folgende Schritte durchführen:*
   (a) *Lösche alle Kanten, die x oder y enthalten.*
   (b) *Lösche x, y und füge einen neuen Knoten u_{xy} hinzu.*
   (c) *Für jede (ursprüngliche) markierte Kante (zv, m) von G mit $z \in \{x, y\}$ und $v \in N_G(x) \cup N_G(y) \setminus \{x, y\}$, füge die Kante $(u_{xy}v, m)$ hinzu.*

Auch für einen Multigraphen G definieren wir $\mathcal{T}(G)$ als die Menge aller Spannbäume von G und $\tau(G) := |\mathcal{T}(G)|$.

Lemma 2.17. *Sei G ein Multigraph und $e = (xy, m) \in E(G)$. Dann gilt*

$$\tau(G) = \tau(G/e) + \tau(G \setminus e).$$

Beweis. Siehe Vorlesung. □

Definition 2.18. *Gegeben einen Multigraphen G auf Knotenmenge $[n]$, definieren wir die* Adjazenzmatrix *$A = A(G) = (a_{ij})_{i,j \in [n]}$ von G durch*

$$a_{ij} := \text{ Anzahl Kanten, die } i, j \text{ enthalten.}$$

Wir definieren auch die Matrix $D = D(G) = (d_{ij})_{i,j \in [n]}$ durch

$$d_{i,j} := \begin{cases} d_G(i) & \text{wenn } i = j; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für eine $n \times n$ Matrix M und für $i, j \in [n]$ definieren wir $M^{(ij)}$ als die Teilmatrix von M die entsteht, wenn wir die i-te Zeile und die j-te Spalte löschen.

Satz 2.19. *Sei G ein Multigraph mit $n := v(G) \geq 2$ und seien $i, j \in [n]$. Dann gilt*

$$\tau(G) = (-1)^{i+j} \, det(D - A)^{(ij)}.$$

Beweis. Siehe Vorlesung. □

Abschnitt 3: Zusammenhang

3.1 k-zusammenhängende Graphen

Definition 3.1. *Sei $G = (V, E)$ ein Graph, seien $A, B \subseteq V$ und sei $X \subseteq V \cup E$. Wir sagen X* trennt *A, B in G falls jeder $u - v$ Pfad mit $u \in A$ und $v \in B$ ein Element aus X enthält.*
X heißt ein Trenner, *falls $\big(V \setminus X \ , \ E \setminus X\big)$ nicht zusammenhängend ist.*
Eine Brücke *ist eine Kante, die in einer Komponente ein Trenner ist.*
Ein Artikulationsknoten *(engl.* cut-vertex*) ist ein Knoten, der in einer Komponente ein Trenner ist.*

Definition 3.2. *Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $k \in \mathbb{N}$. G heißt k-*zusammenhängend *falls*

- *$|V| > k$,*
- *Für alle $X \subseteq V$ mit $|X| < k$ ist $G[V \setminus X]$ zusammenhängend.*

Der Knotenzusammenhang *von G ist*

$$\kappa(G) := \max\{k \in \mathbb{N} : G \ k\text{-}zusammenhängend\}.$$

Definition 3.3. *Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $k \in \mathbb{N}$. G heißt k-*kantenzusammenhängend *falls*

- *$|V| > 2$,*
- *Für alle $F \subseteq E$ mit $|F| < k$ ist $(V, E \setminus F)$ zusammenhängend.*

Der Kantenzusammenhang *von G ist*

$$\lambda(G) := \max\{\ell \in \mathbb{N} : G \ \ell\text{-}kangenzusammenhängend\}.$$

Lemma 3.4. *Für jeden Graphen G gilt $\kappa(G) \leq \lambda(G)$,*

Beweis. Siehe Vorlesung. □

3.2 Satz von Menger

Definition 3.5. *Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $u, v \in V$ mit $u \neq v$. Zwei $u - v$ Pfade P_1, P_2 heißen*

- kreuzungsfrei *wenn $V(P_1) \cap V(P_2) = \{u, v\}$;*
- kantendisjunkt *wenn $E(P_1) \cap E(P_2) = \emptyset$.*

Satz 3.6. *Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $k, \ell \in \mathbb{N}$. Dann gilt:*

(1) G ist k-zusammenhängend $\Leftrightarrow$ zwischen je zwei Knoten $u, v \in V$ mit $u \neq v$ gibt es k kreuzungsfreie Pfade.

(2) G ist ℓ-kantenzusammenhängend $\Leftrightarrow$ zwischen je zwei Knoten $u, v \in V$ mit $u \neq v$ gibt es ℓ kantendisjunkte Pfade.

Lemma 3.7. *Sei $G = (V, E)$ ein Multigraph und $A, B \subseteq V$. Dann gilt:*

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{minimale } \textit{Größe einer } A \textit{ von } B \\ \textit{trennenden Knotenmenge}\end{array}} = \boxed{\begin{array}{c}\text{maximale } \textit{Anzahl} \\ \textit{(knoten-)disjunkter } A - B \textit{ Pfade.}\end{array}}$$

Beweis. Siehe Vorlesung. □

Korollar 3.8. *Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $a, b \in V$ mit $a \neq b$. Falls $ab \notin E$, gilt:*

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{minimale } \textit{Größe einer } a \textit{ von } b \\ \textit{trennenden Knotenmenge} \\ X \subseteq V \setminus \{a, b\}\end{array}} = \boxed{\begin{array}{c}\text{maximale } \textit{Anzahl} \\ \textit{kreuzungsfreier } a - b \textit{ Pfade.}\end{array}}$$

Beweis. Siehe Vorlesung. □

Korollar 3.9. *Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $a, b \in V$ mit $a \neq b$. Dann gilt:*

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{minimale } \textit{Größe einer } a \textit{ von } b \\ \textit{trennenden Kantenmenge } Y \subseteq E\end{array}} = \boxed{\begin{array}{c}\text{maximale } \textit{Anzahl} \\ \textit{kantendisjunkter } a - b \textit{ Pfade.}\end{array}}$$

Definition 3.10. *Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Der* Kantengraph *(engl.* line graph*) $L(G)$ von G ist der Graph mit Knotenmenge E und Kantenmenge F, wobei $e_1 e_2 \in F \Leftrightarrow e_1 \cap e_2 \neq \emptyset$.*

Beweis von Korollar 3.9. Siehe Vorlesung. □

Beweis von Satz 3.6. Siehe Vorlesung. □

Satz 3.11. *Sei G_1 ein zusammenhängender Graph, sei $G_2 := L(G_1)$ und sei $G_3 := L(G_2)$. Dann gilt:*

$$G_3 = G_1 \;\Leftrightarrow\; G_1 \textit{ ist ein Kreis.}$$

Beweis. Siehe Vorlesung. □

Definition 3.12. *Sei G ein zusammenhängender Graph. Ein* Ohr *von G ist ein Pfad P zwischen zwei unterschiedlichen Knoten u, v von G mit $V(P) \cap V(G) = \{u, v\}$. Eine* Ohrenzerlegung *von G ist eine Folge $G_1, G_2, \ldots, G_k$, wobei G_1 ein Kreis ist, $G_k = G$ und für jedes $i \in [k-1]$ ist $G_{i+1} = G_i \cup P_i$, wobei P_i ein Ohr von G_i ist.*

Satz 3.13. *Ein Graph ist 2-zusammenhängend genau dann, wenn er eine Ohrenzerlegung hat.*

Beweis. Siehe Vorlesung. □

Abschnitt 4: Graphfärbungen

4.1 Knotenfärbung

Definition 4.1. *Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $k \in \mathbb{N}$. Eine k-*Färbung *von G ist eine Abbildung $c : V \to [k]$ mit der Eigenschaft:*

$$\forall uv \in E \text{ ist } c(u) \neq c(v).$$

Die chromatische Zahl $\chi(G)$ *von G ist die kleinste natürliche Zahl k, für die eine k-Färbung von G existiert.*

Definition 4.2. *Sei $G = (V, E)$ ein Graph.*

1. *$V' \subseteq V$ heißt* unabhängig *falls $E \cap \binom{V'}{2} = \emptyset$. Die* Unabhängigkeitszahl $\alpha(G)$ *von G ist*
$$\alpha(G) := \max\{|V'| : V' \text{ unabhängig in } G\}.$$
2. *$V' \subseteq V$ heißt* vollständig *oder* eine Clique *falls $E \cap \binom{V'}{2} = \binom{V'}{2}$. Die* Cliquenzahl *$\omega(G)$ von G ist*
$$\omega(G) := \max\{|V'| : V' \text{ vollständig in } G\}.$$

Lemma 4.3. *Sei $G = (V, E)$ ein Graph.*

1. *$H \subseteq G \Rightarrow \chi(H) \leq \chi(G)$;*
2. *$\chi(G) \geq \omega(G)$;*
3. *$\chi(G) \geq \frac{v(G)}{\alpha(G)}$.*

Beweis. Siehe Vorlesung. □

Der Greedy-Algorithmus: Sei $G = (V, E)$ mit $v(G) = n$ und $\pi : [n] \to V$ eine Bijektion. Färbe die Knoten in Reihenfolge $\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(n)$, in dem $\pi(i)$ immer die kleinstmögliche Farbe erhält:

1. $c(\pi(1)) = 1$

2. Für $i = 2, 3, \ldots, n$,

$$c(\pi(i)) = \min\{\ell \in \mathbb{N} : \ell \neq c(\pi(j)) \text{ für alle } j \in [i-1] \text{ mit } \pi(i)\pi(j) \in E\}.$$

Sei $\chi_{\mathrm{gr}}(G, \pi) := \max\{\ell \in \mathbb{N} : \exists v \in V \text{ mit } c(v) = \ell\}$ die *Greedy-choromatische Zahl von G bezüglich π.*

Lemma 4.4. *Sei $G = (V, E)$ und $\pi : [v(G)] \to V$ eine Bijektion. Dann ist*

$$\chi(G) \leq \chi_{\mathrm{gr}}(G, \pi) \leq 1 + \Delta(G).$$

Beweis. Siehe Vorlesung. □

Bemerkung: Die Schranke $\chi(G) \leq 1 + \Delta(G)$ ist bestmöglich für $G = K_n, C_{2n+1}$. Sie kann aber beliebig schlecht sein: zum Beispiel ist $\chi(K_{n,n}) = 2$ aber $\Delta(K_{n,n}) = n$.

Definition 4.5. *Ein Graph $G = (V, E)$ heißt* d-degeneriert*, falls jeder Teilgraph mindestens einen Knoten vom Grad höchstens d enthält. Sei*

$$\mathrm{dg}(G) = \min\{d \in \mathbb{N} : G \text{ ist } d\text{-degeneriert}\}.$$

Lemma 4.6. *$G = (V, E)$ ist genau dann d-degeneriert, wenn es eine Bijektion $\pi : [v(G)] \to V$ gibt mit*

$$|N_G(\pi(i)) \cap \{\pi(1), \ldots, \pi(i-1)\}| \leq d \qquad \forall i \in [v(G)].$$

Beweis. Siehe Vorlesung. □

Satz 4.7. *Für jeden Graphen G gilt $\chi(G) \leq 1 + \mathrm{dg}(G)$.*

Beweis. Siehe Vorlesung. □

Lemma 4.8. *Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph mit $\delta(G) < \Delta(G)$. Dann ist $\chi(G) \leq \Delta(G)$.*

Beweis. Siehe Vorlesung. □

Satz 4.9 (Brooks)**.** *Sei G ein zusammenhängender Graph und $G \neq K_n, C_{2n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $\chi(G) \leq \Delta(G)$.*

Beweis. Siehe Vorlesung. □

Die Schranke $\chi(G) \geq \omega(G)$**.**

Satz 4.10. *Für alle* $2 \leq k \in \mathbb{N}$ *gibt es einen Graphen mit* $\chi(G) = k$ *und* $\omega(G) = 2$*.*

Definition 4.11 (Konstruktion von Mycielski)**.** *Sei* G *ein Graph mit* $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$*. Definiere einen neuen Graphen* $\mathrm{Myc}(G)$ *mit Knotenmenge*

$$V(\mathrm{Myc}(G)) := V(G) \cup \{u_1, \dots, u_n, w\}$$

und mit Kantenmenge

$$E(\mathrm{Myc}(G)) := E(G) \cup \{u_i v_j : 1 \leq i, j \leq n \text{ und } v_i v_j \in E(G)\} \cup \{u_i w : 1 \leq i \leq n\}.$$

Lemma 4.12. *Sei* G *ein Graph mit* $\omega(G) = 2$*. Dann ist auch* $\omega(\mathrm{Myc}(G)) = 2$ *und* $\chi(\mathrm{Myc}(G)) = \chi(G) + 1$*.*

Beweis. Übungsaufgabe. □

Beweis von Satz 4.10. Siehe Vorlesung. □

4.2 Kantenfärbung

Definition 4.13. *Eine* k-Kantenfärbung *von einem Graphen* $G = (V, E)$ *ist eine Abbildung* $c : E \to [k]$ *mit der Eigenschaft*

$$|e \cap e'| = 1 \Rightarrow c(e) \neq c(e') \quad \text{für alle } e, e' \in E.$$

Der Chromatische Index $\chi'(G)$ *ist die kleinste natürliche Zahl* k *sodass eine* k*-Kantenfärbung existiert.*

Lemma 4.14. *Für jeden Graphen* G *gilt* $\chi'(G) = \chi(L(G))$*.*

Beweis. Siehe Vorlesung. □

Satz 4.15. *Sei* G *ein bipartiter Graph. Dann ist* $\chi'(G) = \Delta(G)$*.*

Definition 4.16. *Sei* $G = (V, E)$ *ein Graph. Ein* Matching *in* G *ist eine Menge* $M \subseteq E$ *von Kanten mit der Eigenschaft, dass für alle* $e, e' \in M$ *mit* $e \neq e'$ *gilt* $e \cap e' = \emptyset$*.*
Sei $m(G) := \max\{|M| \ : \ M \text{ ein Matching in } G\}$*.*

Satz 4.17 (Heiratssatz von Hall)**.** *Sei* $G = (V, E)$ *ein bipartiter Graph mit Partitionsklassen* A, B*. Dann gilt*

$$m(G) = |A| \qquad \Leftrightarrow \qquad |N_G(S)| \geq |S| \quad \forall S \subseteq A.$$

Definition 4.18. *Sei* M *ein Matching in einem bipartiten Graphen* $G = (A \cup B, E)$ *mit Partitionsklasse* A, B*, und sei* $P = a_0 b_0 a_1 b_1 \dots$ *ein Pfad in* G*, wobei* $a_0, a_1, \dots \in A$ *und* $b_0, b_1, \dots \in B$*.*

- *P heißt M-*alternierend *falls $b_i a_{i+1} \in E(M)$ sind.*
- *P heißt M-*augmentierend *falls P M-alternierend ist, in B endet und zusätzlich die Start- und Endknoten nicht in $V(M)$ sind.*

Lemma 4.19. *Sei $G = (A \cup B, E)$ bipartit, M ein Matching in G und P ein M augmentierender Pfad. Dann ist*

$$M \Delta E(P) := (M \setminus E(P)) \cup (E(P) \setminus M)$$

ein Matching mit $|M \Delta E(P)| = |M| + 1$.

Beweis. Siehe Vorlesung. □

Beweis von Satz 4.17. Siehe Vorlesung. □

Satz 4.20. *Sei $G = (A \cup B, E)$ bipartit. Dann ist*

$$m(G) = |A| - \max_{A' \subseteq A} \{|A'| - |N_G(A')|\}.$$

Beweis. Siehe Vorlesung. □

Definition 4.21. *Ein* perfektes Matching *in einem Graph G ist ein Matching M mit $V(M) = V(G)$.*

Korollar 4.22. *Sei $d \in \mathbb{N}$ und sei G ein d-regulärer bipartiter Graph. Dann enthält G ein perfektes Matching.*

Beweis. Übungsaufgabe □

Beweis von Satz 4.15. Siehe Vorlesung. □

Satz 4.23 (Vizing)**.** *Für einen beliebigen Graphen G gilt*

$$\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

Abschnitt 5: Extremale Graphentheorie

5.1 Kleine Teilgraphen

Satz 5.1 (Mantel)**.** *Sei $n \in \mathbb{N}$ und G ein dreiecksfreier Graph auf n Knoten. Dann ist $e(G) \leq \frac{n^2}{4}$.*

Beweis. Siehe Vorlesung. □

Satz 5.2 (Turán)**.** *Seien $r, n \in \mathbb{N}$ und G ein K_{r+1}-freier Graph mit n Knoten. Dann ist $e(G) \leq \left(1 - \frac{1}{r}\right) \frac{n^2}{2}$.*

Beweis. Siehe Vorlesung. □

Definition 5.3. *Sei H ein Graph. Wir definieren*

$$\mathrm{ex}(n, H) := \max\{e(G) : v(G) = n \text{ und } H \nsubseteq G\}.$$

Satz 5.4 (Erdős-Stone-Simonovits)**.** *Sei H ein Graph und $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ sodass für alle $n \geq n_0$,*

$$\left(1 - \frac{1}{\chi(H) - 1} - \varepsilon\right) \frac{n^2}{2} \leq \mathrm{ex}(n, H) \leq \left(1 - \frac{1}{\chi(H) - 1} + \varepsilon\right) \frac{n^2}{2}.$$

Definition 5.5. *Seien $s, t \in \mathbb{N}$. Der Graph $K_s(t)$ ist der vollständige s-partite Graph mit Partitionsklassen der Größe t, d.h. der Graph auf Knotenmenge $A_1 \cup \ldots \cup A_s$, wobei die A_i alle disjunkt sind und $|A_i| = t$ für $i \in [s]$, und mit allen Kanten zwischen A_i und A_j für $1 \leq i < j \leq s$.*

Lemma 5.6. *Seien $r, t \in \mathbb{N}$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ sodass folgendes gilt.*
Sei G ein Graph auf $n \geq n_0$ Knoten mit mindestens $\left(1 - \frac{1}{r} + \varepsilon\right) \frac{n^2}{2}$ Kanten. Dann ist $K_{r+1}(t) \subseteq G$.

Beweis von Satz 5.4. Siehe Vorlesung. □

Beweis von Lemma 5.6. Siehe Vorlesung. □

5.2 Aufspannende Teilgraphen

Definition 5.7. *Sei G ein Graph. Ein Teilgraph $H \subseteq G$ heißt* aufspannend *falls $V(H) = V(G)$. Ein* Hamiltonkreis *in G ist ein aufspannender Kreis, d.h. ein Kreis $C \subseteq G$, der alle Knoten von G enthält.*

Definition 5.8. *Für $n \in \mathbb{N}$ und ein Graph H auf n Knoten, sei $\delta_{\mathrm{ex}}(n, H)$ der größte Minimalgrad unter allen H-freien Graphen G auf n Knoten.*

Satz 5.9 (Dirac)**.** *Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$ gilt $\delta_{\mathrm{ex}}(n, C_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil - 1$.*
Insbesondere enthält jeder Graph G mit $\delta(G) \geq v(G)/2$ einen Hamiltonkreis.

Beweis. Siehe Vorlesung. □

Satz 5.10 (Ore)**.** *Sei G ein Graph auf n Knoten in dem, für alle $u, v \in V(G)$ mit $u \neq v$ und $uv \notin E(G)$ gilt $d_G(u) + d_G(v) \geq n$. Dann enthält G einen Hamiltonkreis.*

Beweis. Siehe Vorlesung. □

Definition 5.11. *Sei H ein Graph und $n \in \mathbb{N}$ durch $v(H)$ teilbar. Ein H-*Tiling *von einem Graphen G auf n Knoten ist eine Menge $\{H_1, \ldots, H_k\}$, wobei*

- *$H_i \simeq H$ für $i = 1, \ldots, k$;*

- *$H_i \subseteq G$ für $i = 1, \dots, k$;*
- *$V(H_i) \cap V(H_j) = \emptyset$ für $1 \leq i < j \leq k$.*

Das heißt, eine Menge von paarweise knotendisjunkten Kopien von H. Ein H-Tiling heißt perfekt *falls es alle Knoten überdeckt (also genau $n/v(H)$) Kopien von H enthält.*

Definition 5.12. *Für einen Graphen H und eine Zahl $n \in \mathbb{N}$, die durch $v(H)$ teilbar ist, ist $\delta_{\text{tile}}(n, H)$ der größte Minimalgrad unter allen Graphen G auf n Knoten, die kein perfektes H-Tiling besitzen.*

Satz 5.13. *Sei $n \in \mathbb{N}$ gerade. Dann ist $\delta_{\text{tile}}(n, K_2) = \frac{n}{2} - 1$.*

Beweis. Übungsaufgabe. □

Satz 5.14 (Corrádi, Hajnal, Szemerédi)**.** *Sei $r \in \mathbb{N}$ mit $r \geq 2$ und sei $n \in \mathbb{N}$ durch r teilbar. Dann ist $\delta_{\text{tile}}(n, K_r) = \left(1 - \frac{1}{r}\right) n - 1$.*

Definition 5.15. *Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Der* Komplement $\overline{G}$ *von G ist der Graph $\left(V, \binom{V}{2} \setminus E\right)$, d.h. Kanten werden zu Nichtkanten und umgekehrt.*

Lemma 5.16. *Sei H ein Graph auf 6 Knoten mit mindestens 12 Kanten. Dann hat H entweder ein perfektes K_3-Tiling oder H hat genau 12 Kanten und die drei Kanten des Komplements $\overline{H}$ bilden ein Dreieck.*

Beweis. Siehe Vorlesung. □

Lemma 5.17. *Sei H ein Graph auf Knotenmenge $A \cup B$, wobei $A \cap B = \emptyset$, und $|A| = 4$ und $|B| = 3$. Angenommen $H[A]$ enthält ein perfektes Matching und $H[B] = K_3$, und dass es mindestens 9 Kanten von H zwischen A und B gibt. Dann enthält H zwei knotendisjunkte Dreiecke C_1, C_2.*

Sollte es einen Knoten $a \in A$ geben, für den $B \subseteq N_H(a)$, dann können C_1, C_2 so gewählt werden, dass $B \cup \{a\} \subseteq V(C_1) \cup V(C_2)$.

Beweis. Aufgabe. □

Beweis von Satz 5.14 (Fall $r = 3$). Siehe Vorlesung. □

Satz 5.18 (Alon, Yuster & Komlós, Sárközy, Szemerédi)**.** *Sei H ein Graph mit mindestens einer Kante und $n \in \mathbb{N}$ durch H teilbar. Dann ist $\delta_{\text{tile}}(n, H) \leq \left(1 - \frac{1}{\chi(H)}\right) n + O(1)$.*

Bemerkung. *Die obere Schranke in Satz 5.18 ist für manche Graphen H bis auf den $O(1)$ Term bestmöglich (z.B. für $H = K_r$, siehe Satz 5.14). Für andere Graphen H ist sie aber* nicht *bestmöglich.*
Für manche andere Graphen H wäre die Aussage ohne den $O(1)$ Term falsch (Übungsaufgabe).

Satz 5.19. *Sei H der Graph auf Knotenmenge $[5]$ mit Kantenmenge $\{12, 13, 45\}$. Es existiert ein $\varepsilon > 0$ und $n_0 \in \mathbb{N}$ sodass für alle $n \geq n_0$,*

$$\delta_{\text{tile}}(n, H) \leq \left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right) n$$

Beweis Skizze. Siehe Vorlesung. $\square$

Kapitel IV: Ramseytheorie

Abschnitt 1: Ramseytheorie für Graphen

Definition 1.1. *Sei $k \in \mathbb{N}$ und $G = (V, E)$ ein Graph. Eine k-*Quasikantenfärbung *von G ist eine Funktion $c : E \to [k]$.*

Definition 1.2. *Sei $s \in \mathbb{N}$. Die* Ramsey-Zahl $R(s)$ *ist die kleinste Zahl $n \in \mathbb{N}$ sodass für jede 2-Quasikantenfärbung von K_n, ein monochromatisches K_s als Teilgraph enthalten ist.*

Einfache Eigenschaften:

1. $R(1) = 1$ und $R(2) = 2$;
2. $R(3) = 6$.

Satz 1.3 (Ramsey & Erdős, Szekeres)**.** *Für jedes $s \in \mathbb{N}$ ist $R(s) \leq 4^s$. (Insbesondere existiert $R(s)$).*

Definition 1.4. *Seien $s, t \in \mathbb{N}$. Die* Ramsey-Zahl $R(s, t)$ *ist die kleinste Zahl $n \in \mathbb{N}$ sodass für jede 2-Quasikantenfärbung von K_n es entweder ein K_s mit Farbe 1 als Teilgraph gibt oder ein K_t mit Farbe 2 als Teilgraph.*

Lemma 1.5. *Seien $s, t \in \mathbb{N}$ mit $s, t \geq 2$. Dann ist $R(s, t) \leq R(s - 1, t) + R(s, t - 1)$.*

Beweis. Siehe Vorlesung. □

Beweis von Satz 1.3. Siehe Vorlesung □

Satz 1.6 (Erdős)**.** *Für jedes $s \in \mathbb{N}$ mit $s \geq 3$ ist $R(s) > 2^{s/2}$.*

Beweis. Siehe Vorlesung. □

Abschnitt 2: Ramseytheorie für arithmetische Progressionen

Definition 2.1. *Sei $s \in \mathbb{N}$. Eine arithmetische Progression der Länge s ist eine Folge $(a, a + d, a + 2d, \ldots, a + (s - 1)d)$, wobei $a, d \in \mathbb{N}$.*

Seien $c, s \in \mathbb{N}$. Die van der Waerden Zahl $W_c(s)$ *ist die kleinste Zahl $n \in \mathbb{N}$ sodass jede c-Färbung von $[n]$ eine monochromatische arithmetische Progression der Länge s enthält.*

Einfache Eigenschaften:

1. $W_c(1) = 1 \quad \forall c \in \mathbb{N}$.
2. $W_c(2) = c + 1 \quad \forall c \in \mathbb{N}$.
3. $W_1(s) = s \quad \forall s \in \mathbb{N}$.

Satz 2.2. *$W_2(3) \leq 325$.*

Beweis. Siehe Vorlesung. □

Satz 2.3. *$W_2(3) = 9$.*

Beweis. Übungsaufgabe. □

Satz 2.4 (van der Waerden)**.** *Für alle $c, s \in \mathbb{N}$ existiert $W_c(s)$.*

Lemma 2.5. *Für alle $c, s \in \mathbb{N}$ mit $c \geq 3$ ist $W_c(s) \leq W_2(W_{\lceil c/2 \rceil}(s))$.*

Beweis. Übungsaufgabe. □

Satz 2.6 (Szemerédi)**.** *Für alle $\delta > 0$ und $s \in \mathbb{N}$ existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ sodass für alle $n \geq n_0$, jede Teilmenge $A \subseteq [n]$ mit $|A| \geq \delta n$ eine arithmetische Progression der Länge s enthält.*

Satz 2.7 (Green, Tao)**.** *Für alle $s \in \mathbb{N}$ gibt es eine arithmetische Progression der Länge s die aus Primzahlen besteht.*

Abschnitt 3: Ramseytheorie im Hyperwürfel

Definition 3.1. *Für $d, k \in \mathbb{N}$, sei $H_d(k) := [k]^d$ die Menge aller Folgen der Länge d mit Einträgen aus $[k]$. Eine* kombinatorische Gerade *in $H_d(k)$ ist eine Menge von Folgen $\{x_1, \ldots, x_k\} \subseteq H_d(k)$, sodass es eine nichtleere Menge $A \subseteq [d]$ gibt, sodass*

1. *für alle $i \in [d] \setminus A$, die i-ten Einträge von $x_1, \ldots, x_k$ alle gleich sind;*
2. *für alle $i \in A$, und für alle $j \in [k]$, der i-te Eintrag von x_j gleich j ist.*

Wir nennen A die aktiven Koordinaten *und $[d] \setminus A$ die* inaktiven.

Satz 3.2 (Hales, Jewett)**.** *Für alle $c, k \in \mathbb{N}$ gibt es ein $d \in \mathbb{N}$ sodass jede c-Färbung von $H_d(k)$ eine monochromatische kombinatorische Gerade enthält.*

Beweis. Siehe Vorlesung. □

Beweis von Satz 2.4. Siehe Vorlesung. □