Gabriele Armanino S4361875

Alessandro Caroti S4342252

Relazione di Calcolo Numerico

Sistemi Lineari

Esercizio 1:

Consegna:

Calcolare la norma ∞ delle seguenti matrici:

a)

b)  A = P , dove P `e la matrice di Pascal n × n definita nel modo seguente:

con n=10.

c)  A = T , dove T `e la matrice tridiagonale n × n definita dalle formule :

(T)i,j =2 se i=j, (T)i,j =−1 se |i−j|=1, (T)i,j =0 altrimenti,   
e n è fissato nel modo seguente: si consideri il numero di matricola dell’ultimo componente, in ordine alfabetico, del gruppo; si indichi con d0 e d1, rispettivamente, l’ultima e la penultima cifra di tale numero di matricola; si ponga n = 10(d1 + 1) + d0.

L’esercizio prevede di calcolare la norma ∞ che è definita nel seguente modo:

||A||∞=

L’output delle norme è il seguente:

-punto a:

la norma infinito di A1 è 14;

la norma infinito di A2 è 8.

-punto b:

La norma infinito della matrice P è 2299.

-punto c:

la norma infinito di T è 4.

Esercizio 2:

**Consegna:**

Data una matrice A ed un vettore b di dimensioni fissate, implementare in C un programma che risolva in precisione singola il sistema Ax = b tramite l’algoritmo di eliminazione Gaussiana.  
Facoltativi:

* considerare il pivoting parziale;
* implementare un unico programma che funzioni per matrici di dimensioni arbitrarie (suggerimento: per passare le matrici alla funzione, utilizzare puntatori a puntatori o linearizzare le matrici).

Assumendo nota la soluzione del sistema   
 = (1,1,…,1)t,

per tutte le matrici definite al punto 1, calcolare il corrispondente termine noto dato dal prodotto

b = A ·

e usando b così calcolato, verificare il corretto funzionamento dell’algoritmo di eliminazione Gaussiana.

Come da consegna bisogna implementare un programma abile nel ridurre matrici di dimensioni arbitrarie tramite l’eliminazione Gaussiana, ossia l’algoritmo usato in algebra lineare per determinare le soluzioni di un sistema di equazioni lineare, per calcolare il rango o l’inversa di una matrice.

Tale algoritmo riduce la matrice in una forma detta “a scalini”, cioè il primo elemento della matrice diverso da zero di una riga deve essere più a destra del primo elemento diverso da zero della riga precedente;

il primo elemento diverso da zero su ogni riga (se c’è) è detto pivot.

Le mosse di Gauss sono operazioni che modificano una matrice in uno dei modi seguenti:

* scambiando due righe;
* moltiplicando una riga per un numero diverso da zero;
* sommando una riga ad un multiplo di un'altra riga.

Esse hanno la seguente importante proprietà: se applicate alla matrice completa (con termini noti) di un sistema lineare, non modificano lo spazio delle soluzioni del sistema. In altre parole, cambia il sistema ma le soluzioni restano invariate: un vettore è soluzione del sistema iniziale se e solo se lo è del sistema a cui abbiamo applicato le mosse di gauss.

L’algoritmo di Gauss funziona nel modo seguente:

* Se la prima riga ha il primo elemento nullo, scambiala con una riga che ha il primo elemento non nullo. Se tutte le righe hanno il primo elemento nullo, vai al punto 3.
* Per ogni riga con primo elemento non nullo, eccetto la prima (), moltiplica la prima riga per un coefficiente scelto in maniera tale che la somma tra la prima riga e abbia il primo elemento nullo (quindi coefficiente = ). Sostituisci con la somma appena ricavata.
* Adesso sulla prima colonna tutte le cifre, eccetto forse la prima, sono nulle. A questo punto ritorna al punto 1 considerando la sotto-matrice che ottieni cancellando la prima riga e la prima colonna.

Le soluzioni delle matrici del nostro programma sono mostrate di seguito.

* Vettore x calcolato con matrici A1 e A2 dell’esercizio 1a:

* Vettore x calcolato con matrice esercizio 1b:
* Vettore x calcolato con matrice esercizio 1c:

x è un vettore di lunghezza 62 con tutti 1.

Per le matrici dell’esercizio 1 e 3 il vettore risultante non viene modificato in modo significativo da alcun errore; mentre per la matrice dell’esercizio 2 il vettore subisce variazioni significative.

Questo fenomeno è dovuto dal condizionamento della matrice, il quale si può osservare dalla norma infinito di esse; infatti le matrici dell’esercizio 1 e 3 hanno una norma infinito bassa e perciò sono ben condizionate, al contrario la matrice dell’esercizio 2 ha una norma alta, quindi si può evincere che essa sia mal condizionata.

Esercizio3:

**Consegna:**

Risolvere il sistema lineare

A = b + δ b

con le stesse matrici dell’esercizio precedente, considerando per ogni termine noto b il vettore di perturbazioni   
 δb = ∥b∥∞ · (−0.01, 0.01, −0.01, ..., 0.01)t

Confrontare le due soluzioni x e ottenute, corrispondenti ai rispettivi sistemi lineari con termine noto b e b + δb. Cosa si osserva? In base agli argomenti visti a lezione, come si possono giustificare i risultati ottenuti?

Di seguito alleghiamo i risultati del nostro programma.

* Vettore calcolato con matrici A1 e A2 dell’esercizio 1a:

=

* Vettore calcolato con matrice esercizio 1b:

=

* Vettore calcolato con matrice esercizio 1c:

=

In questo esercizio notiamo che perturbando il vettore b l’errore sulla matrice x viene amplificato;

Come già visto nell’esercizio precedente l’errore cresce in base al condizionamento delle matrici, che si può constatare dalla norma di esse.