CI1238 - Primeiro Trabalho Prático

Gabriel Pucci Bizio

Abril de 2025

1 Introdução

O trabalho consiste em modelar um programa linear de forma a distribuir cargas em um avião de maneira ótima. São dados o número k de compartimentos a serem preenchidos e n de carregamentos que os preencherão, seguido dos limites de peso e volume (respectivamente) de cada compartimento, seguido ainda dos pesos (`i.e` quantidade), volumes (totais) e ganhos (por tonelada) de cada carregamento. O objetivo é escrever uma aplicação que recebe essas informações e modela um programa linear que possa ser aceito e resolvido pela aplicação `lpsolve`. O código foi feito usando a linguagem C. Para realizar essa tarefa, o primeiro passo foi tentar modelar manualmente o exemplo dado no enunciado do trabalho[Gue25].

2 Exemplo

O exemplo do enunciado tem $k = 3$ e $n = 4$. Veremos que isso resultará no uso de 19 variáveis para a modelagem. As demais informações são descritas nas tabelas abaixo:

compartimentos	**peso**	**volume**
1	10	6800
2	16	8700
3	8	5300

carregamentos	**peso**	**volume**	**ganho**
1	18	480	310
2	15	650	380
3	23	580	350
4	12	390	285

3 Modelo

3.1 O quê Maximizar

O exemplo nos ajuda a notar algumas coisas sobre comos devemos modelar o programa, lembrando que teremos que elaborar um modelo genérico para quaisquer quantidade e valores de compartimentos e carregamentos. Vemos que o valor que queremos maximizar, o ganho, é dado por toneladas para cada carregamento. Assim, já podemos definir a função a ser maximizada:

$$max : 310 * x_1 + 380 * x_2 + 350 * x_3 + 285 * x_4$$

De forma genérica, teríamos:

$$max : g_1 * x_1 + g_2 * x_2 + ... + g_n * x_n$$

Onde

$$x_n$$

É o **peso em toneladas** do carregamento n (contando todos os compartimentos), e

$$g_n$$

É o **ganho em reais por tonelada** do carregamento n.

Maximizar essa função nos dará o maior ganho possível. Agora precisamos modelar as restrições exigidas pelo problema[Jiř07].

3.2 Restrições

O problema define algumas restrições que o programa linear precisa respeitar, essas são:

1. O limite de peso de cada compartimento,
2. O limite de volume de cada compartimento,
3. A quantidade total (em toneladas) de cada carregamento,
4. As proporções de peso dos compartimentos devem ser iguais

Para satisfazer essas restrições é preciso definir novas variáveis. Como cada compartimento tem um limite diferente de peso e volume, definimos, para cada carregamento, uma variável que representa a quantidade (novamente, em toneladas) do carregamento em um dado compartimento, limitando o somatório de todas as quantidades ao limite do compartimento especificado na entrada. Fazemos isso para cada um dos compartimentos. Seguindo novamente o exemplo do enunciado do trabalho, temos:

$$x_{1,1} + x_{2,1} + x_{3,1} + x_{4,1} \leq 10$$
$$x_{1,2} + x_{2,2} + x_{3,2} + x_{4,2} \leq 16$$
$$x_{1,3} + x_{2,3} + x_{3,3} + x_{4,3} \leq 8$$

Veremos que essa parte do modelo ainda precisa de ajustes, devido à restrição 4. Observa-se que criamos n variáveis para cada carregamento, i.e $n * k$ variáveis. Cada variável $x_{n,k}$ acima representa a quantidade de carga n que irá no compartimento k.

Modelamos a restrição do volume de cada compartimento de forma similar, usando as mesmas variáveis:

$$26 * x_{1,1} + 43 * x_{2,1} + 25 * x_{3,1} + 32 * x_{4,1} \leq 6800$$
$$26 * x_{1,2} + 43 * x_{2,2} + 25 * x_{3,2} + 32 * x_{4,2} \leq 8700$$
$$26 * x_{1,3} + 43 * x_{2,3} + 25 * x_{3,3} + 32 * x_{4,3} \leq 5300$$

Os números que multiplicam as variáveis são as densidades de cada carregamento em m^3 por tonelada, obtidos divindo a partir da tabela (aqui, foram arredondados). Os limitantes são os limites de volume de cada compartimento.

generalizando, temos:

$$d_1 * x_{1,1} + d_2 * x_{2,1} + ... + d_k * x_{n,1} \leq compartimento[1].volume$$
$$\vdots$$
$$d_1 * x_{1,k} + d_2 * x_{2,k} + ... + d_k * x_{n,k} \leq compartimento[k].volume$$

Agora modelamos a quantidade máxima de carregamento possuída. Como só temos 18 toneladas disponíveis do carregamento 1, por exemplo, é preciso garantir que as variáveis associadas a esse carregamento não passem de 18 toneladas quando somadas. Também já explicitamos que $x_{n,1} + ... + x_{n_k} = x_n$, i.e a quantidade de carregamento em cada compartimento é igual ao total do carregamento dentro do avião (aquilo que queremos maximizar):

$$x_{1,1} + x_{1,2} + x_{1,3} = x_1 \leq 18$$
$$x_{2,1} + x_{2,2} + x_{2,3} = x_2 \leq 15$$

$$x_{3,1} + x_{3,2} + x_{3,3} = x_3 \leq 23$$
$$x_{4,1} + x_{4,2} + x_{4,3} = x_4 \leq 12$$

generalizando, temos:

$$x_{1,1} + x_{1,2} + ... + x_{1,k} = x_1 \leq carregamento[1].peso$$
$$\vdots$$
$$x_{n,1} + x_{n,2} + ... + x_{n,k} = x_k \leq carregamento[k].peso$$

Finalmente (!) temos que modelar o problema 4, que especifíca que os pesos ocupados em cada compartimento precisam ter proporções iguais, i.e:

$$\frac{y_1}{Y_1} = \frac{y_2}{Y_2} = ... = \frac{y_k}{Y_k}$$

Onde y_k é o volume sendo utilizado no compartimento k, e Y_k é sua capacidade máxima. Como já modelamos as variáveis e restrições para os pesos dos compartimentos, apenas alteramos o que havíamos feito:

$$x_{1,1} + x_{2,1} + x_{3,1} + x_{4,1} = y_1$$
$$x_{1,2} + x_{2,2} + x_{3,2} + x_{4,2} = y_2$$
$$x_{1,3} + x_{2,3} + x_{3,3} + x_{4,3} = y_3$$

Generalizando:

$$x_{1,1} + x_{2,1} + ... + x_{n,1} = y_1$$
$$\vdots$$
$$x_{1,k} + x_{2,k} + x_{3,k} + x_{n,k} = y_k$$

Em seguida modelamos as novas variáveis:

$$\frac{y_1}{10} = \frac{y_2}{16} = \frac{y_2}{8}$$

Dessa forma, as proporções serão iguais em todos os compartimentos (caso a restrição pudesse ser relaxada,seria possível utilizar uma variável δ para indicar a tolerância).

Assim completamos a modelagem desse problema:

$$max : 310 * x_1 + 380 * x_2 + 350 * x_3 + 285 * x_4$$

$$s.t$$

$$x_{1,1} + x_{2,1} + x_{3,1} + x_{4,1} = y_1$$
$$x_{1,2} + x_{2,2} + x_{3,2} + x_{4,2} = y_2$$
$$x_{1,3} + x_{2,3} + x_{3,3} + x_{4,3} = y_3$$

$$x_{1,1} + x_{1,2} + x_{1,3} = x_1 \leq 18$$
$$x_{2,1} + x_{2,2} + x_{2,3} = x_2 \leq 15$$
$$x_{3,1} + x_{3,2} + x_{3,3} = x_3 \leq 23$$
$$x_{4,1} + x_{4,2} + x_{4,3} = x_4 \leq 12$$

$$26 * x_{1,1} + 43 * x_{2,1} + 25 * x_{3,1} + 32 * x_{4,1} \leq 6800$$
$$26 * x_{1,2} + 43 * x_{2,2} + 25 * x_{3,2} + 32 * x_{4,2} \leq 8700$$
$$26 * x_{1,3} + 43 * x_{2,3} + 25 * x_{3,3} + 32 * x_{4,3} \leq 5300$$

$$\frac{y_1}{10} = \frac{y_2}{16} = \frac{y_2}{8}$$

Note que obtivemos $n + n * k + k = 19$ variáveis .Agora basta generalizar o modelo completo.

3.3 Generalizando

Como já foram mostradas as generalizações de cada "seção"do modelo, basta juntá-las:

$$max : g_1 * x_1 + g_2 * x_2 + ... + g_n * x_n$$

$$s.t$$

$$x_{1,1} + x_{2,1} + ... + x_{n,1} = y_1$$

$$\vdots$$

$$x_{1,k} + x_{2,k} + x_{3,k} + x_{n,k} = y_k$$

$$x_{1,1} + x_{1,2} + ... + x_{1,k} = x_1 \leq carregamento[1].peso$$

$$\vdots$$

$$x_{n,1} + x_{n,2} + ... + x_{n,k} = x_k \leq carregamento[k].peso$$

$$d_1 * x_{1,1} + d_2 * x_{2,1} + ... + d_k * x_{n,1} \leq compartimento[1].volume$$

$$\vdots$$

$$d_1 * x_{1,k} + d_2 * x_{2,k} + ... + d_k * x_{n,k} \leq compartimento[k].volume$$

$$\frac{y_1}{Y_1} = \frac{y_2}{Y_2} = ... = \frac{y_k}{Y_k}$$

Obtivemos aqui, da mesma forma, $n + n * k + k = 19$ variáveis. Basta agora criar a aplicação que modela a entrada no formato especificado.

4 Conclusão e Codificação

O código fonte da implementação da modelagem descrita na seção 3 é simples. Primeiro lê-se da entrada o valor de k e n, e em seguida de seus respectivos valores. Em seguida, imprime as linhas e colunas das funções e restrições de acordo com o tamanho de k 4 n, seguindo a generalização explicada na seção 3, em formato admissível para servir de entrada à aplicação `lpsolve`. Para solucionar o problema de otimização, basta então alimentar a entrada ao programa, que fornecerá a entrada ao `lpsolve`. Por exemplo:

cat entrada.txt | ./carga | lp_solve

Referências

[Jiř07] Bernd Gärtner Jiří Matoušek. *Understanding and Using Linear Programming.* springer, 2007.

[Gue25] André Guedes. *Primeiro Trabaho.* 2025.