CONCOURS GENERAL DE L'AN 1828

Evariste Galois
Transcrit par Gabriel Dahan

Ce document est une transcription en LaTeX de la copie du concours général de l'an 1828/9 (à l'ENS d'Ulm), rédigée par Evariste Galois, disponible ici : `https://math.univ-lyon1.fr/~caldero/galois_copie.pdf`*. Les mots que je n'ai pas pu déchiffrer sont remplacés par des '. . . '.*

1^{ere} *Question* 1^{ere} *Méthode*

Soit $Ex = 0$ l'équation pour laquelle en ... la limite supérieure K des racines, ... dans laquelle nous supposerons pour plus de simplicité le plus haut terme positif. Comme l'hypothèse $x = +\infty$ donne pour résultat $Ex > 0$, et qu'aucune racine ne doit être comprise entre $+\infty$ et une limite supérieure des racines, il faudrait que toute limite supérieure des racines substituée dans l'équation doit donner un résultat positif. Mais K étant une limite, $K + z$ (z étant postitif) en est encore une. Donc $E(K + z)$ doit être positif pour toute valeur positive de z, K sera limite. Car aucune valeur ... supérieure à K n'annulera Ex.

Il faut donc et il suffit que pour toute valeur positive de z, on ait $E(K + z)$ ou bien

$$Ek + E'k \cdot z + \frac{1}{2}E''k \cdot z^2 + \frac{1}{2 \cdot 3}E'''k \cdot z^3 + \dots$$

positif. Et cette condition sera évidemment remplie, si l'on suppose que tous les coefficients de z dans cette fonction soient positifs.

Ainsi, on n'a qu'à résoudre le système d'inégalités

$$Ek > 0, \quad E'k > 0, \quad E''k > 0, \quad \dots, \quad E^{(m-1)}k > 0$$

Pour celà, on cherchera le plus petit nombre entier qui satisfasse à la dernière, puis le plus petit nombre qui satisfasse à la fois aux deux dernières, puis aux trois dernières, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on ait le plus petit nombre qui rend tous les termes positifs. Arrivé à ce nombre, on aura la limite supérieure cherchée.

Si l'on demandait au contraire la limite inférieure l des racines, on ferait dans Ex, $x = -y$, on chercherait la limite supérieure K des racines de l'équation $E(-y) = 0$, et l'on ferait $l = -K$, et comme K est plus grand que toutes les valeurs de y, il s'ensuit que $-K$ ou l est plus petit que toutes celles de $-y$ ou de x.

On peut présenter cette règle, appelée Méthode de Newton, d'une manière un peu plus simple.

Puisque K est plus grand et l plus petit que toutes les racines de l'équation $Ex = 0$, il faudra que l'équation en z, $E(K + z) = 0$ n'ait pas de racine > 0, sans quoi $Ex = 0$ aurait des racines $> K$, et de même, que l'équation en z, $E(l + z) = 0$ n'ait pas de racine < 0, sans quoi $Ex = 0$ aurait des racines $< l$. Les condition à exprimer sont donc que $E(K+z) = 0$ n'ait pas de racine positive, et que $E(l+z) = 0$ n'en ait pas de négative. Il suffit pour celà que la première n'ait que des ..., et la seconde, que des variations de signe. C'est qui donnera encore deux systèmes d'inégalités à résoudre dont l'un donnera K et l'autre l.

2^{eme} *Méthode*

La 1^{ere} Méthode donne en général des approximations assez bonnes, mais on voit qu'elle est longue et pénible dans la pratique. En voici une plus expéditive.

Soit m le degré de l'équation, $n+1$ le rang du premier terme négatif, N le plus grand des coefficients des termes négatifs, pris positivement, en sorte que l'équation débarrassée du coefficient fractionnaire, soit de la forme:

$$x^m + \cdots + Hx^{m-n+1} - Kx^{m-n} - \cdots - Nx^p \cdots = Ex = 0 \tag{1}$$

Il s'agit d'abord de trouver un nombre positif qui donne dans ce polynôme un résultat positif ainsi que tout nombre plus grand. Or l'inégalité $Ex > 0$ est évidemment satisfaite par toute solution positive de l'inégalité

$$x^m - Nx^{m-n} - Nx^{m-n-1} - \cdots - Nx - N > 0 \tag{2}$$

à savoir $x^m - N\frac{x^{m-n+1}-1}{x-1} > 0$. Cette inégalité n'étant pas satisfaite en général par (1), la marche que nous suivons