Exercices de Khôlles en Mathématiques

Eliott Fevret & Gabriel Dahan

12 novembre 2023

Ce document regroupe une grande partie des exercices de khôlles posés aux élèves de MPSI2 du Lycée Charlemagne au cours de l'année scolaire 2023-2024.

$$(1/g)^{(n)}(x) = \frac{n!}{g^{n+1}(x)} \sum \frac{(-1)^{n-m_0}(n-m_0)!}{\prod_{i=0}^{n}(i!)^{m_i} m_i!} \prod_{i=0}^{n} g^{(i)}(x)^{m_i}$$

Formule du moine ***Faà di Bruno***

Parce que les mathématiques ce n'est pas qu'apprendre des formules.

$\LaTeX$, un art de vivre.

1 Introduction

Ce recueil d'exercices rassemble un éventail de problèmes de khôlles ayant été présentés aux élèves de MPSI 2 au Lycée Charlemagne pendant l'année scolaire 2023-2024. Ces exercices couvrent divers domaines des mathématiques et sont destinés à aider les étudiants à se préparer aux épreuves.

2 À propos

Les khôlles sont récupérées par l'intermédiaire de ce qui a été posté par les élèves eux même, il est donc naturel que certaines khôlles ne soient pas complètes, ou paraissent trop peu fournies, car tous les exercices ne sont pas toujours envoyés en entier.

Les exercices notés d'un ϕ peuvent être considérés comme des exercices plus compliqués au vu de l'avancement en parallèle dans le cours.

3 Préambule

En guise de préambule, nous vous proposons une autre démonstration originale de la primitive de $\frac{1}{\sin(x)}$.

On note F une primitive de $\frac{1}{\sin(x)}$: $F(x) = \int \frac{1}{\sin(x)}\, dx$. On a :

$$F(x) = \int \frac{dx}{\sin(x)} = \int \frac{\sin(x)dx}{\sin^2(x)} = -\int \frac{-\sin(x)dx}{1-\cos^2(x)}$$

On pose [1] $t = \cos(x)$, donc $dt = -\sin(x)dx$, d'où

$$F(t) = -\int \frac{dt}{1-t^2} = \int \frac{dt}{t^2-1} = \int \frac{1/2}{t-1} + \frac{-1/2}{t+1} dt = \frac{1}{2}(\ln(|t-1|) - \ln(t+1))$$

Soit

$$F(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{|\cos(x)-1|}{\cos(x)+1}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{|1-2\sin^2(\frac{x}{2})-1|}{2\cos^2(\frac{x}{2})-1+1}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sin^2(\frac{x}{2})}{\cos^2(\frac{x}{2})}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$

On peut dès lors conclure

$$\boxed{\int \frac{dx}{\sin(x)} = \ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)}$$

On pourrait assurément ajouter une once de rigueur en veillant à bien définir les intervalles.

1. Pour penser à ce changement de variable on s'appuie sur les règles de Bioche https://www.bibmath.net/dico/index.php?action=affiche&quoi=./b/bioche.html

Table des matières

4 Khôlles

4.1 Semaine 1

Khôlle 1.1

1. Calculez $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$
2. Montrez que $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$:
$$\sin^2(a+b) + \cos^2(a-b) = 1 + \sin(2a)\sin(2b)$$
3. Montrez que $\log_{10}(2)$ est irrationnel.

Khôlle 1.2

1. Question de cours : calculer $\cos(2\theta)$ et $\sin(2\theta)$.
2. On pose $t = 1 + \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$: Simplifiez $\frac{2t}{1+t^2}$ et $\frac{2t}{1-t^2}$.
3. $\forall \theta, R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \pm\sin\theta \\ \pm\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$
   Trouvez les signes des $\sin\theta$ qui vérifient $R_{\theta \cdot \theta'} = R_\theta + R_{\theta'}$.
4. $\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$. Donnez $\cos(\theta+\theta')$ à l'aide de la formule précédente.

Khôlle 1.3

1. Soient x_1, x_2, x_3 réels tels que $x_1 + x_2 + x_3 = \pi$. Soit $S = \sin^2(x_1) + \sin^2(x_2) + \sin^2(x_3)$.
   Montrez que :
   — $S = -\cos^2(x_1) + \cos(x_1)\cos(x_2 - x_3) + 2$
   — $S \leq \frac{9}{4}$
2. Soient a et b deux réels positifs. Montrez que :
$$\arctan(a) - \arctan(b) = \arctan\left(\frac{a-b}{1+ab}\right)$$

Khôlle 1.4

1. Soient a et b deux réels positifs t.q. $a + b \leq \frac{\pi}{2}$.
   Montrez que $\sin^2(a+b) \leq \sin^2(a) + \sin^2(b)$ et déterminer le cas d'égalité.
2. Déterminez pour $\tan(\arctan(x))$ et $\arctan(\tan(x))$:
   — le domaine de définition
   — l'intervalle de valeurs atteintes
   — une simplification (à démontrer)
   — la courbe de la fonction (à représenter)

3. Calculez pour tout $x \in \mathbb{R}*$.

$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$$

Khôlle 1.5

Pour $x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$, calculer :
— $\sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$
— $\sum_{k=0}^{n} \sin(kx)$

Khôlle 1.6

Montrer que $|e^{ix} - 1| \leq |x|$, $x \in \mathbb{R}$

4.2 Semaine 2

Khôlle 2.1

Montrer que $(f \circ (f \circ f))' = (f \circ f) \circ f$.

Khôlle 2.2

Simplifier : $\arcsin\left(x/\sqrt{1+x^2}\right)$

Khôlle 2.3

1. Simplifier : $\tan(\arcsin(x))$
2. Résoudre $\cos(x) - \cos(2x) = \sin(3x)$ d'inconnue x

Khôlle 2.4

1. Démontrer : $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
2. Simplifier $\cos(3x)$
3. Montrer que $Tr(A \cdot B) = Tr(B \cdot A)$
   où $Tr(M)$ est la trace de la matrice M égale à la somme de ses coefficients diagonaux.

Tous les moyens sont bons quand ils sont efficaces. - *Jean-Paul Sartre*

Khôlle 2.5

Résoudre $2\sin^2(x) \leq 1$

Khôlle 2.6

Soit $u_0 \in]0;1[$ et pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{\frac{(1+u_n)}{2}}$.
Trouver l'expression générale de u_n.

Khôlle 2.7

A quelle condition nécessaire et suffisante $f : x \mapsto \cos(x) + \cos(Ax)$ est-elle périodique ?

Khôlle 2.8

1. Montrer de deux façons différentes : $\forall x \in [-1, 1], \arccos(x) + \arcsin(x) = \pi/2$.
2. Soit
$$f : (x, y) \mapsto \arccos\left(\frac{1 - xy}{\sqrt{1 + x^2}\sqrt{1 + y^2}}\right)$$
Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}^2$ et simplifier son expression.
3. Soit $x \in] - \pi/2, \pi/2[$, soit $t = \tan(x/2)$. Exprimer $\cos(x)$ et $\sin(x)$ en fonction de t.

Khôlle 2.9

1. Exprimer $\cos(x)$ en fonction de $\tan(x/2)$
2. Faire de même pour $\sin(x)$ et $\tan(x)$
3. Calculer :
$$\int_a^b \frac{dx}{\sin(x)}$$

Khôlle 2.10

1. Intégrer :
$$\int \frac{1}{\cos(x)}\, dx$$
2. Φ *Inégalité de Cauchy-Schwarz*
Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \left(\sum_{k=1}^{n} u_k v_k\right)^2 \leq \sum_{k=1}^{n} u_k^2 \sum_{k=1}^{n} v_k^2$$
On pourra s'aider de la fonction $f : x \mapsto \sum_{k=1}^{n}(xu_k + v_k)^2$.

Tous les moyens sont bons quand ils sont efficaces. - *Jean-Paul Sartre*

3. Montrez que le cas d'égalité a lieu si et seulement si $(u_1, u_2, ..., u_n)$ et $(v_1, v_2, ..., v_n)$ sont colinéaires.

Khôlle 2.11

1. Résoudre l'équation : $\arccos(x) = \arcsin(2x)$.
2. Calculer
$$\int \frac{1}{\sin(x)} dx$$
3. Pour un entier naturel n, et pour tout réel x, simplifiez le produit des $\cos\left(\frac{x}{2^k}\right)$ pour k allant de 1 à n.

4.3 Semaine 3

Khôlle 3.1

Φ Soit $f_\alpha : x \mapsto \cos(x) + \cos(\alpha x)$.
Montrer que : f_α périodique $\Leftrightarrow \alpha \in \mathbb{Q}$

Khôlle 3.2

On veut montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* \forall (a_1, a_2, ..., a_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$:

$$\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k \tag{IAG}$$

1. Montrer qu'il suffit de prouver l'inégalité lorsque
$$\prod_{k=1}^{n} a_k = 1$$
.
2. Soit $n \in \mathbb{N}*$. On suppose que (IAG) est vraie pour toute famille de n réels positifs.
   (a) Justifier que l'on peut supposer (quitte à changer la numérotation) : $a_n \leq 1 \leq a_{n+1}$.
   (b) Montrer (IAG) pour $a_1, a_2, ..., a_{n+1}$.
3. Conclure.

Les hommes construisent trop de murs et pas assez de ponts. - *Newton*

Khôlle 3.3

1. Soient $z \in \mathbb{C}$ et $a > 0$. Montrer l'équivalence suivante :

$$|z| \leq a \Leftrightarrow \forall u \in \mathbb{C}, \mathfrak{Re}(uz) \leq a|u|$$

2. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ continue.
   Φ Montrer

$$\left|\int_0^1 f(t)dt\right| \leq \int_0^1 |f(t)|dt$$

Khôlle 3.4

Calculer

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{t^2+t+1}$$

Khôlle 3.5

Etablir que $\forall x \in]0, \pi/2[$,

$$2\sin(x) + \tan(x) \geq 3x$$

4.4 Semaine 4

Khôlle 4.1

Soit $F(x) = \int_0^x \frac{1}{t^2+t+1}$. Déterminer $C \in \mathbb{R}$ tels que $\lim_{x\to\infty} = 1$

Khôlle 4.2

Résoudre (E) dans $\mathbb{C}$ sachant que la somme de deux des solutions vaut 2.

$$(E) : \quad x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x + 2 = 0$$

Khôlle 4.3

Soit $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ tel que $x_1 + x_2 + x_3 = \pi$.
Montrer que $\sin^2(x_2) + \sin^2(x)_2 + \sin^2(x_3) \leq \frac{9}{4}$.

La mort d'un seul homme est une tragédie, la mort d'un million d'hommes est une statistique - *Staline*

Khôlle 4.4

Trouver $x, y, z \in \mathbb{C}$ tels que

$$e^x + e^y + e^z = 0$$

Khôlle 4.5

Soit $P(X) = 1 + X + X^2 + ... + X^{p-1}$. Trouver les racines complexes de P et en déduire

$$\prod_{k=1}^{p-1} \sin(k\pi/p)$$

Khôlle 4.6

1. Calculer
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$$
2. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, trouver une condition nécessaire et suffisante telle que $P(X) = P(X+1)$.

4.5 Semaine 5

Khôlle 5.1

Φ *Théorème de Gauss-Lucas*
Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non constant à $r \geq 2$ racines distinctes $z_1, z_2, ..., z_r$

1. Faire une décomposition en éléments simples de $\frac{P'}{P}$ en fonction des racines de P et de leurs multiplicités.
2. Soit z racine de P'. Montrer que : $\exists \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r \in \mathbb{R}_+$ tels que $z = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k z_k$ avec $\sum_{k=1}^{r} \lambda_k = 1$.

Khôlle 5.2

Résoudre (pour $z \in \mathbb{C}$) :

$$(z^2 + 4z + 1)^2 + (3z + 5)^2 = 0$$

Khôlle 5.3

Φ Montrer la serie d'équivalence suivante :

$$
\begin{align}
& a, b, c \in \mathbb{C} \text{ forment un triangle équilatéral} \tag{1}\\
\Leftrightarrow\ & \text{les racines de } ax^2 + bx + c = 0 \text{ sont } j \text{ ou } j^2 \tag{2}\\
\Leftrightarrow\ & a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc \tag{3}\\
\Leftrightarrow\ & \frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-a} + \frac{1}{c-b} = 0 \tag{4}
\end{align}
$$

4.6 Semaine 6

Khôlle 6.1

Calculer

$$\int_0^1 \frac{t\ln(t)}{(1-t^2)^2}dt$$

Khôlle 6.2

Soient a et b deux réels donnés. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$.
Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par :

$$I_n = \int_a^b f(t)\sin(nt)dt$$

Démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$

Khôlle 6.3

Soit $j \in \mathbb{C}$ tel que $|j| = 1$ et $\arg(j) = \frac{2\pi}{3}$.

Montrer que le triangle ABC (affixes respectives a, b et c) est équilatéral si et seulement si :

$$a + bj + cj^2 = 0$$

Khôlle 6.4

Soit $n \in \mathbb{N}$, calculer :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$$

Tu vois, le monde se divise en deux catégories, ceux qui ont un pistolet chargé et ceux qui creusent. Toi tu creuses.- *L'homme sans nom*

Khôlle 6.5

Pour tout entier naturel n, on pose

$$F_n(x) = \int_0^x t^n e^{-t} dt$$

— Donner une relation de récurrence entre F_n et F_{n+1}.
— Déterminer la limite de $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $n \to +\infty$, puis conclure.

Khôlle 6.6

Pour tout entier naturel n, on pose

$$I_n = \int_0^\pi \cos^n(t) dt$$

— Trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n-2}.
— Calculer l'intégrale pour tout n (*Indice* : On pourra faire une disjonction de cas sur la parité de n).

Khôlle 6.7

Soient A, B et P trois polynômes de $K[X]$ (P non constant). Montrer que si

$$A \circ P \mid B \circ P$$

alors

$$A \mid B$$

Khôlle 6.8

Soient $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ deux à deux distincts.
Soient M_1, M_2 et M_3 trois points d'affixes respectives z_1, z_2 et z_3. On pose

$$P = (X - z_1)(X - z_2)(X - z_3)$$

On note α_1, α_2 les racines complexes de P' (et $N_1(\alpha_1)$, $N_2(\alpha_2)$ les points associés).
Montrer que

$$(\vec{M_1N_1}, \vec{M_1M_2}) = (\vec{M_1M_3}, \vec{M_1N_2})$$

Khôlle 6.9

1. Soit
$$I_n^m = \int_0^1 x^n (x-1)^m dx$$
Trouver une relation de récurrence entre I_n^m et I_{n-1}^{m+1}, et calculer le terme général de I_n^m.
2. Calculer
$$J_n^m = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1}(x) \cos^{2m+1}(x) dx$$

Tu vois, le monde se divise en deux catégories, ceux qui ont un pistolet chargé et ceux qui creusent. Toi tu creuses.- *L'homme sans nom*

Khôlle 6.10

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n}(x)dx$$

1. Trouver une relation entre I_n et I_{n-1}.
2. Exprimer I_n.

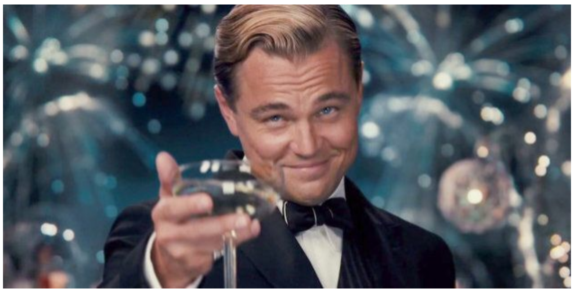

Figure 1 – To be continued.

Je rêve d'un jour où l'égoïsme ne régnera plus dans les sciences, où on s'associera pour étudier, au lieu d'envoyer aux académiciens des plis cachetés, on s'empressera de publier ses moindres observations pour peu qu'elles soient nouvelles, et on ajoutera "je ne sais pas le reste" - *Evariste Galois*