Formule de transformation de rationnels sous leur écriture fractionnaire.

Soit Δ la fonction qui à tout $n \in \mathbb{N}$ associe la représentation sous forme de fraction du nombre $0.\overline{n} \in \mathbb{Q}$.

$$\boxed{\Delta \underset{\text{def}}{=} \left(n \mapsto \frac{n}{10^{\lceil \log_{10}(n) \rceil} - 1} \right)}$$

Démonstration :

Soit $q = 0.\overline{n}$ et $c \in \mathbb{N}^*$ le nombre de chiffres de n.

$$10^{c-1} < n < 10^c$$

$$\log_{10}(10^{c-1}) < log_{10}(n) < \log_{10}(10^c)$$

$$c - 1 < log_{10}(n) < c$$

On en déduit que c est l'entier directement supérieur à $\log_{10}(n)$, d'où $c = \lceil \log_{10}(n) \rceil$.

$$q = 0.\overline{n}$$

$$10^c q = n.\overline{n} = n + q$$

$$10^{\lceil \log_{10}(n) \rceil} q = n + q$$

$$q = \frac{n}{10^{\lceil \log_{10}(n) \rceil} - 1} = \Delta(n)$$

On en déduit que n'importe quel rationnel peut être écrit en fonction de $\Delta(n)$.

Exemples :

- $2.\overline{37} = 2 + \Delta(37)$
- $8.133\overline{9} = 8 + \Delta(9) \cdot 10^{-3}$