

Relatório de simulação da manobra orbital *fly-by*

Gabriel Vinicius Ferreira

24 de novembro de 2025

1 Introdução

Neste relatório, apresentado para a disciplina de Simulação Computacional em Física (CF1829, 2-2025), é abordada a simulação da manobra orbital *fly-by* (também conhecida como assistência gravitacional ou gravidade assistida).

O *fly-by* é uma técnica utilizada por sondas espaciais para alterar sua velocidade e/ou trajetória aproveitando a gravidade de um corpo celeste [1]. Esse processo pode ser comparado a uma “carona gravitacional”, na qual a nave altera sua velocidade ao interagir com o campo gravitacional do corpo massivo — sem consumir combustível.

Como o transporte de combustível no espaço é limitado e custoso, o uso de manobras desse tipo é estratégico e amplamente adotado em missões espaciais de longa duração. Algumas das missões que utilizaram assistência gravitacional incluem as sondas *Voyager*, *Parker Solar Probe*, *Solar Orbiter*, *MESSENGER*, *Psyche* e *BepiColombo* [2].

Neste trabalho, será realizada uma simulação simplificada da manobra *fly-by* em uma aproximação em Marte. Será usado como base para a construção e execução do problema de simulação a apostila de simulação computacional do curso [3], o livro de Mecânica Clássica do Marion [4], e o livro de Mecânica Orbital do Curtis [5].

2 Revisão teórica e metodologia

Para a construção deste trabalho nos limitaremos a um *Fly-by* usando o problema de dois corpos restrito e o método de integração de Euler. Não será abordado o problema de três corpos restrito, pois o método de Euler acaba gerando inconsistências numéricas devido a perturbação do campo gravitacional do Sol. O “restrito” no problema dos dois corpos se dá pelo fato da sonda não influenciar Marte; com isso, assumimos Marte como a origem do nosso sistema e observamos os resultados da interação da sonda com o campo gravitacional do planeta.

Seguindo a física newtoniana, a força gravitacional gerada por um corpo de massa M , atuante sobre um corpo de massa m é dada pela expressão [4]

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\frac{GMm}{|\vec{r}|^3} \vec{r}, \quad (1)$$

onde $G \approx 6,6743 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ é a constante gravitacional universal de Newton, no sistema internacional, e \vec{r} é o vetor distância entre os corpos.

No problema dos dois corpos restrito, como representado na Figura 1, a interação é descrita diretamente pela Eq. (1). A fim de simplificar o processo, podemos abrir o problema usando coordenadas cartesianas. Para isso, definimos

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad (2)$$

de maneira que $|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Usando isso, podemos re-escrever a Eq. (1) como

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^3} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Tomando a segunda lei de Newton [4]

$$\vec{F} = m\vec{a}, \quad (4)$$

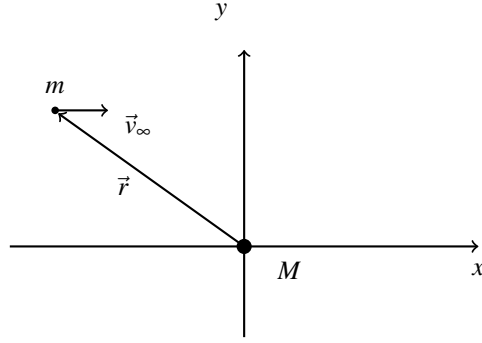


Figura 1: Representação do problema dos dois corpos restrito. Na figura temos Marte sendo representado pelo objeto de massa M , onde $M \approx 6,4171 \times 10^{23} \text{ kg}$, e a sonda pelo objeto de massa m . Além disso, a distância entre os dois corpos é dada pelo vetor \vec{r} . Para manter o problema simples, a sonda estará aproximando-se a partir de $-\infty$ com uma velocidade \vec{v}_∞ que apresenta apenas uma componente em x na direção positiva. A simulação é construída a partir da análise de interação dessa sonda com o campo gravitacional gerado pela massa M .

podemos associar a dinâmica da Eq. (3) com a cinemática do movimento. Para isso, derivamos \vec{r} a fim de obter a velocidade e a aceleração, dadas por

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}, \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Unindo as Eqs. (3), (4), e (5) obtemos a expressão

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = -\frac{GM}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad (6)$$

que pode ser dividida em duas equações diferenciais de segunda ordem, uma para cada eixo do plano de coordenadas cartesianas:

$$\ddot{x} = -\frac{GMx}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, \quad (7)$$

$$\ddot{y} = -\frac{GMy}{(x^2 + y^2)^{3/2}}. \quad (8)$$

Podemos ainda abrir essas equações diferenciais em equações de primeira ordem, ao definirmos $\dot{x} = v_x$ e $\dot{y} = v_y$, de maneira que $\ddot{x} = \dot{v}_x$ e $\ddot{y} = \dot{v}_y$. Com isso, obtemos

$$\dot{x} = v_x, \quad (9)$$

$$\dot{v}_x = -\frac{GMx}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, \quad (10)$$

$$\dot{y} = v_y, \quad (11)$$

$$\dot{v}_y = -\frac{GMy}{(x^2 + y^2)^{3/2}}. \quad (12)$$

Por fim, utilizando o método de integração de Euler, como descrito na apostila do curso [3], podemos re-escrever essas

equações diferenciais na forma

$$x(t + \Delta t) = x(t) + v_x(t)\Delta t, \quad (13)$$

$$v_x(t + \Delta t) = v_x(t) - \frac{GMx(t)}{(x(t)^2 + y(t)^2)^{3/2}} \Delta t, \quad (14)$$

$$y(t + \Delta t) = y(t) + v_y(t)\Delta t, \quad (15)$$

$$v_y(t + \Delta t) = v_y(t) - \frac{GM y(t)}{(x(t)^2 + y(t)^2)^{3/2}} \Delta t, \quad (16)$$

que são as equações de movimento utilizadas numericamente no nosso problema de simulação.

Para as condições iniciais, consideremos a sonda vindo de um “infinito” negativo e se aproximando da região de influencia de Marte. Assim, vamos considerar que a sonda inicialmente esteja em uma posição $x(0) = -50R_{Marte}$, onde $R_{Marte} \approx 3,3895 \times 10^6 \text{ m}$ é o raio de Marte. Além disso, vamos considerar a posição inicial no eixo y como sendo $y(0) = b$, onde b é o parâmetro de impacto que discutiremos mais a frente.

Tomando a velocidade inicial no eixo y igual a zero, ou seja, $v_y(0) = 0$, podemos assumir a velocidade inicial no eixo x como sendo a velocidade no infinito v_∞ mais um adicional de aproximação proporcional a energia potencial gravitacional da posição inicial da sonda. Vamos modelar isso usando [5]

$$|\vec{v}(t)| = +\sqrt{v_\infty^2 + \frac{2GM}{|\vec{r}(t)|}}, \quad (17)$$

que vem da conservação de energia do problema de dois corpos. Para o estado inicial usaremos a aproximação $|\vec{r}(0)| = |x(0)|$ ao tomar um valor de b pequeno em relação a $x(0)$, além disso, como $v_y(0) = 0$ temos $v_x(0) = |\vec{v}(0)|$. Utilizaremos na simulação um valor de $v_\infty = 2,6 \text{ km/s}$, sendo um valor razoável para uma boa observação da trajetória hiperbólica do *fly-by*.

Portanto, as condições iniciais utilizadas para o problema serão:

$$x(0) = -50R_{Marte}, \quad (18)$$

$$y(0) = b, \quad (19)$$

$$v_x(0) = +\sqrt{v_\infty^2 + \frac{2GM}{|x(0)|}}, \quad (20)$$

$$v_y(0) = 0. \quad (21)$$

O parâmetro de impacto, b , é a distância perpendicular entre a trajetória inicial da sonda, se ela seguisse em linha reta, e o centro do corpo que a desvia gravitacionalmente. Para o caso do nosso problema de simulação, o parâmetro de impacto é o parâmetro livre que iremos variar a fim de analisar diferentes casos de simulação. O valor de b não pode ser muito grande, caso contrário a aproximação de $|\vec{r}(0)| = \sqrt{x(0)^2 + y(0)^2} \approx x(0)$ usada na obtenção Eq. (17) não será válida, e simultaneamente ele não pode ser pequeno de maneira que a sonda colida com Marte, o que será ignorado neste trabalho já que desejamos observar casos com colisão. Para este trabalho assumiremos $b \in [0; 10R_{Marte}]$ (em metros), porém, dado que definimos $y(0) = b$ podemos tomar os valores negativos para a posição inicial de $y(0)$ a fim de fazer uma análise simétrica com relação ao 0. Por conta disso, assumiremos como conversão que um b positivo representa uma sonda com o respectivo valor de parâmetro de impacto acima do eixo x , e um b negativo representa a mesma coisa, mas para uma sonda iniciando abaixo do eixo x .

A análise será feita de maneira global com uma comparação de dois quantificadores para diferentes valores de b . O primeiro quantificador que observaremos é a variação da velocidade da sonda no infinito, dada por

$$\Delta v = |\vec{v}_{\infty, out}| - |\vec{v}_{\infty, in}|. \quad (22)$$

Esse quantificador nos permite analisar se a sonda acelerou ou desacelerou após o percurso; o que neste teste realizado estará mais associado ao ganho de energia devido ao processo de integração pelo método de Euler, já que teoricamente deve-se ter $|\vec{v}_{\infty, in}| = |\vec{v}_{\infty, out}|$ para um problema dos dois corpos restrito. É importante notar que o valor de $|\vec{v}_{\infty, in}|$ é

fixo, igual a $2,6 \text{ km/s}$ como mencionado anteriormente, enquanto o valor de $|\vec{v}_{\infty, out}|$ precisa ser calculado a partir da correção da energia potencial da posição de captura final, utilizando a Eq. (17).

Também observaremos o ângulo de deflexão, que é o ângulo entre as direções assintóticas de entrada e saída da trajetória hiperbólica da sonda, medindo o quanto ela foi desviada pela gravidade. Obtemos o ângulo de deflexão a partir da simulação numérica como

$$\delta = \arccos \left(\frac{\vec{v}_{\infty, in} \cdot \vec{v}_{\infty, out}}{|\vec{v}_{\infty, in}| |\vec{v}_{\infty, out}|} \right). \quad (23)$$

Nesse caso, o vetor $\vec{v}_{\infty, out}$ é calculado a partir do seu módulo corrigido, e definimos a sua direção como sendo a direção do vetor $\vec{v}(t_{fin})$, capturado ao fim da simulação. Um ponto interessante sobre o ângulo de deflexão para os testes que realizaremos é que existe uma definição analítica para o seu valor vinda da geometria do problema, dada por [5]

$$\delta = 2 \arctan \left(\frac{GM}{bv_{\infty}^2} \right), \quad (24)$$

o que nos permite analisar inconsistências entre a simulação e o modelo teórico.

Além disso, também podemos analisar a distância mínima registrada entre a sonda e Marte. Isso é crucial já que assumimos valores de b que irão resultar em colisões, e ao analisarmos a distância mínima registrada podemos verificar se houve ou não uma colisão. Um outro ponto interessante é que a distância mínima que a sonda vai assumir também tem uma descrição teórica que vem da geometria hiperbólica do problema, sendo dado (apos algumas manipulações da equação original) por [5]

$$r_{min} = -\frac{GM}{v_{\infty}^2} + \sqrt{\left(\frac{GM}{v_{\infty}^2}\right)^2 + b^2}. \quad (25)$$

Com isso, podemos fazer uma outra comparação dos resultados da simulação com o esperado pela teoria.

Como precisamos obter o valor de $\vec{v}_{\infty, out}$, é crucial que a sonda tenha se afastado de Marte. Para isso, assumiremos que a integração deva parar quando $|\vec{r}(t)| > 50R_{Marte}$, seguindo o mesmo critério que usamos para a posição inicial. Além disso, caso identifiquemos colisões de maneira que $|\vec{r}(t)| < R_{Marte}$ acionaremos a parada da simulação, demarcando o valor de b com um parâmetro que leva a colisão. Também assumiremos um critério de parada de segurança associado ao tempo de integração de $t_{max} = 1 \times 10^{10} \text{ s}$, o qual não foi acionado durante os teste realizados.

Por fim, para obtermos um resultado numérico que busca minimizar os problemas da integração pelo método de Euler, podemos assumir um $\Delta t = 0,001 \text{ s}$, com saídas de dados a cada ~ 3 minutos.

Os códigos desenvolvidos a partir da revisão teórica e da metodologia descrita nesta seção estão disponível no GitHub: <https://github.com/gabriel-ferr/Fly-by>. No repositório também fornecemos um guia simples de como os códigos foram executados e das dependências necessárias. A simulação foi feita em C, enquanto os gráficos foram gerados em Julia, com a biblioteca GLMakie.

3 Resultados

O primeiro conjunto de resultados que apresentamos aqui são “fotografias” das trajetórias obtidas numericamente, apresentadas na Figura 2. Essa figura permite visualizar como o campo gravitacional de Marte modifica a trajetória hiperbólica da sonda, evidenciando o grau de curvatura associado a diferentes valores do parâmetro de impacto. Além disso, os painéis (c) e (d) exibem situações de colisão, onde a deflexão da trajetória devido a gravidade é suficiente

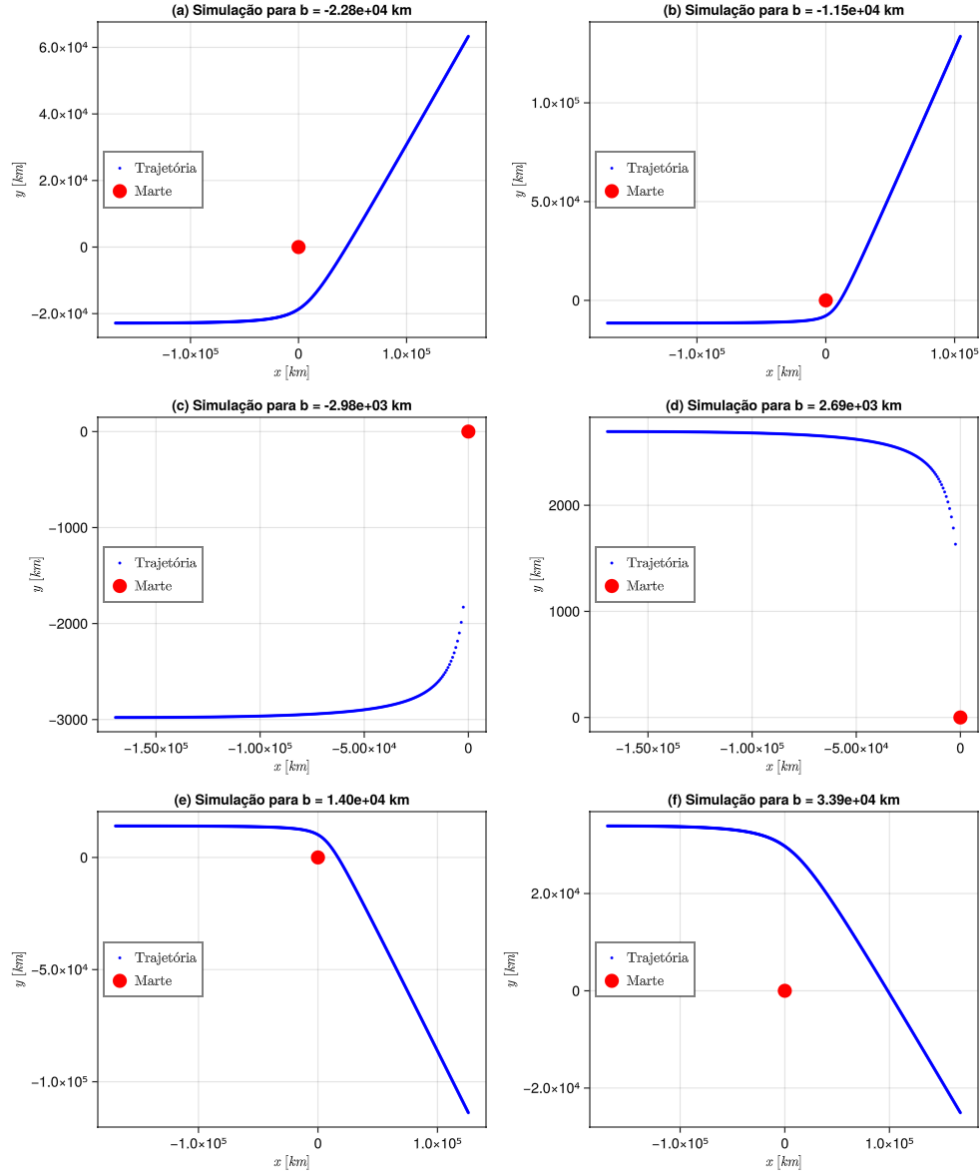


Figura 2: Fotografias de algumas das simulações realizadas. Nos painéis (a), (b) e (c) temos um *fly-by* com a sonda iniciando abaixo do eixo x , e por isso os parâmetros de impacto foram marcados como negativos, seguindo a convenção que estabelecemos; e nos painéis (d), (e) e (f) a simulação inicia-se acima do eixo x , sendo o parâmetro de impacto marcado como positivos. Os painéis (c) e (d) demonstram situações de colisão, enquanto os demais apresentam a manobra completa. É importante pontuar que Marte não está representado em escala nestas figuras, sendo apenas uma demarcação de onde o centro do planeta deve estar.

para direcionar a sonda diretamente para o planeta.

Na sequência, a Figura 3 apresenta as distâncias mínimas registradas numericamente na simulação, além de traçar a curva teórica prevista pela Eq. (25). Na figura podemos observar que os pontos representando as trajetórias sem colisão fitam adequadamente a curva teórica, sendo que o erro diminui conforme o parâmetro de impacto diminui, o que pode estar associado com a aproximação $|\vec{r}(0)| \approx x(0)$ feita a fim de obter o valor de $v_x(0)$, já que quanto menor o valor de b , melhor essa aproximação seria. Um ponto curioso é a região onde ocorrem as colisões, sendo ela destacada pela concentração de pontos vermelhos no centro da região inferior do gráfico. É possível observar que nessa área não ocorre o fitamento da curva teórica, o que era esperado já que a simulação foi abortada assim que a trajetória foi identificada como abaixo da linha que marca R_{Marte} no gráfico.

Uma outra característica interessante é o efeito serrilhado nos pontos vermelhos; isso ocorre devido ao erro numérico do método de Euler que joga a trajetória para “perto” de Marte em um único passo de integração. Isso também pode ser observado nos painéis (c) e (d) da Figura 2, onde no final da trajetória é possível observar um espaçamento dos pontos, resultantes da relação entre o passo de integração fixo e a característica dura do campo gravitacional para posições próximas da fonte.

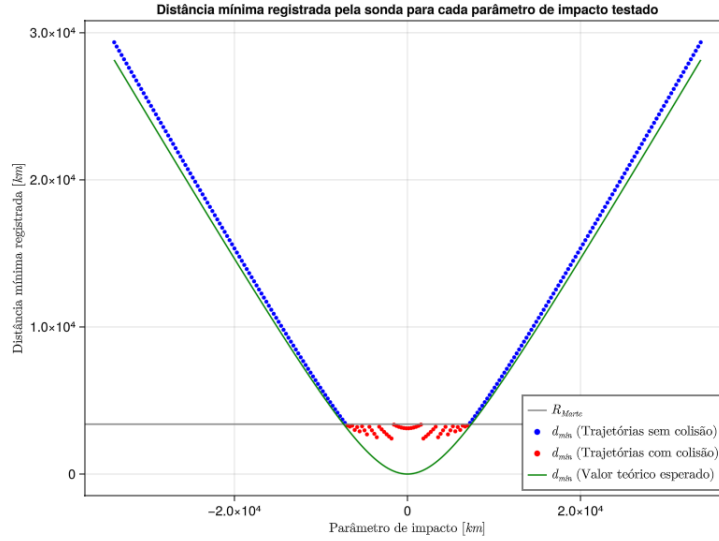


Figura 3: Representação das distâncias mínimas registradas, e esperadas, pela sonda em relação a Marte. Os pontos azuis e vermelhos representam valores obtidos numericamente na simulação, e a curva verde apresenta os valores esperados, pela Eq. (25). Além disso, os pontos azuis representam trajetórias sem colisão, e os pontos vermelhos trajetórias com colisão.

Podemos também observar o erro entre os valores $|\vec{v}_{\infty, in}|$ e $|\vec{v}_{\infty, out}|$. Seguindo a teoria para o problema de dois corpos restrito, a velocidade deveria se conservar, pela própria conservação de energia do sistema, ou seja, $|\vec{v}_{\infty, in}| = |\vec{v}_{\infty, out}|$ de maneira que Δv , definido pela Eq. (22), deve ser igual a zero. Contudo, sabemos que o método de integração de Euler tende a incrementar a energia total do sistema, o que resulta no caso da simulação de *fly-by* em um aumento de $|\vec{v}_{\infty, out}|$.

Para demonstrar isso, a Figura 4 ilustra no painel (a) o erro relativo da velocidade, dado pela variação da velocidade no infinito da Eq. (22) comparado com o valor definido de $|\vec{v}_{\infty}| = 2,6 \text{ km/s}$. O painel (b) complementa a interpretação ao apresentar o tempo usado na integração até um dos critérios de parada definidos ser acionado. Ao observarmos os dois painéis em conjunto pode-se notar que um tempo maior de integração associa-se com um erro maior na velocidade, o que é condizente com o uso do método de Euler, já que mais tempo de integração implica em um maior acúmulo do erro numérico que afeta a velocidade. Por conta disso, as situações em que ocorre colisão acabam por apresentar o menor erro, já que são simulações mais rápidas; enquanto que para valores grandes de b , onde o *fly-by* é mais lento, o tempo de integração aumenta, junto com o erro numérico. Esse ganho de energia também é a justificativa

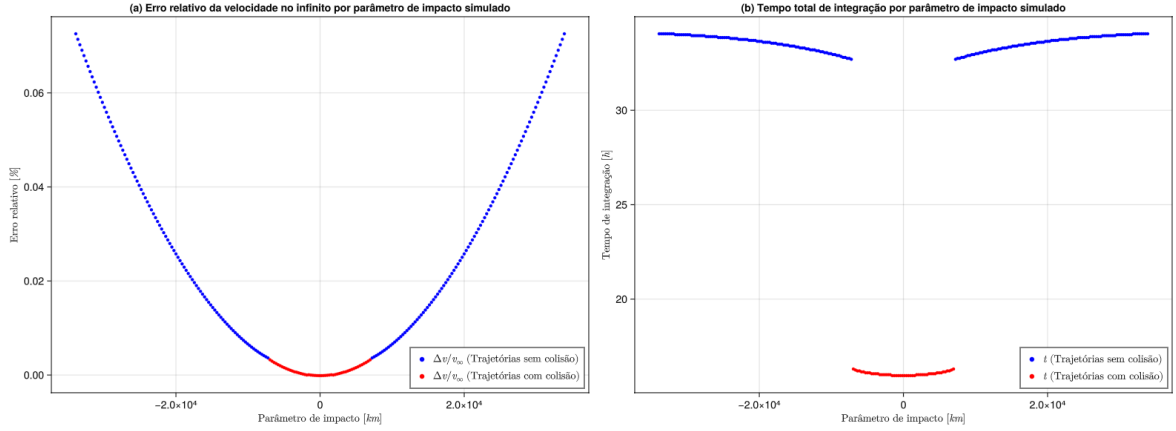


Figura 4: No painel (a) temos o erro relativo na velocidade da sonda no infinito quando comparamos a variação dela, dada pela Eq. (22), com o valor definido de $2,6 \text{ km/s}$. Já, no painel (b) temos o tempo usado na integração numérica até o momento em que um dos critérios de parada definidos foi acionado.

pela divergência dos valores numéricos e da curva teórica observada na Figura 3 para valores grandes de b .

Por fim, a Figura 5 ilustra o ângulo de deflexão sofrido pela trajetória assintótica original da sonda. Na figura é possível perceber que os valores obtidos numericamente fitam muito bem a curva teórica para todos os parâmetros de impacto onde não houveram colisões. Todavia, para os valores de b onde ocorrem colisões os dados numéricos colapsam ao invés de acompanhar a curva. Isso era esperado, já que a simulação é interrompida assim que a posição do planeta é menor que o raio de Marte. Como consequência, a velocidade final da sonda fica enviesada, e apesar do seu módulo ser corrigido, usando a Eq. (17), a sua direção ainda se mantém incorreta o que causa o colapso observado dos valores em vermelho; já que a informação capturada pela Eq (23) é justamente a relação entre a direção de $\vec{v}_{\infty, in}$ e de $\vec{v}_{\infty, out}$.

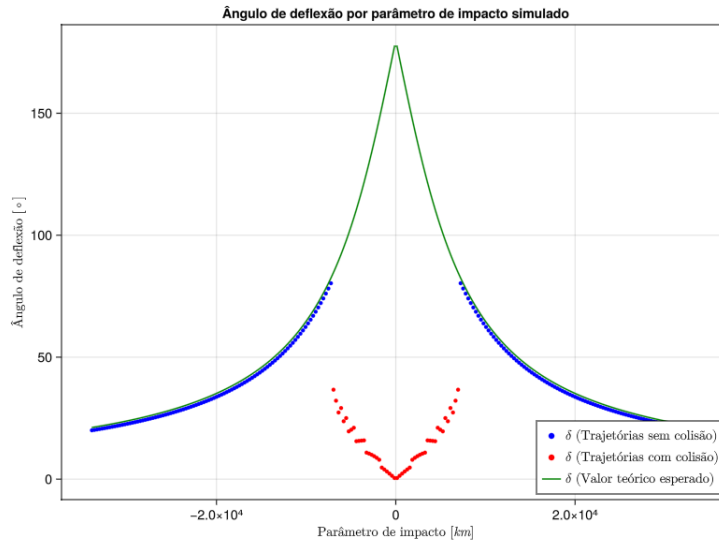


Figura 5: Ângulo de deflexão sobre a sonda, dado pela Eq. (23). A curva verde é o valor teórico calculado utilizando a Eq. (24), sendo o esperado pela geometria do problema.

4 Conclusão

Com isso, podemos concluir o relatório da simulação do *fly-by* com a afirmação de que o procedimento foi um sucesso. A análise do trabalho conseguiu agrupar situações em que a simulação refletiu a teoria, situações onde ocorreram pequenas divergências de valores devido ao uso do método de Euler, e situações – como o ângulo de deflexão nas trajetórias com colisão – onde o erro causado foi devido a própria construção do método de simulação, sendo fundamental a compreensão disso.

Referências

- [1] P Berg. «The fundamental concepts of the gravity-assist manoeuvre». Em: *European Journal of Physics* 44.2 (2023), p. 025002. DOI: 10.1088/1361-6404/acaad8.
- [2] NASA. *Lista de missões da NASA*. Acessado em 2025. URL: <https://www.nasa.gov/a-to-z-of-nasa-missions/>.
- [3] Dietmar William Foryta. *Apostila de simulação computacional*. Acessado durante o curso, em 2025. URL: <https://fisica.ufpr.br/foryta/Manual-CF1829.pdf>.
- [4] Jerry B. Marion e Stephen T. Thornton. *Classical Dynamics of Particles & Systems*. 5ª ed. Belmont, CA: Brooks/Cole, 2004. ISBN: 9780534408961.
- [5] Howard D. Curtis. *Orbital Mechanics for Engineering Students*. 3ª ed. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2014.