Cola para prova

Gabriel Ferreira

December 2025

1 Derivação de γ

Partindo de

$$PV^\gamma = \text{cte}, \tag{1}$$

aplicamos ln e ambos os dados tal que

$$\ln(PV^\gamma) = \ln P + \gamma \ \ln V = \ln C, \tag{2}$$

isolando o γ...

$$\gamma = \frac{\ln C - \ln P}{\ln V}. \tag{3}$$

Via termodinâmica estatística, temos

$$C_V = \frac{f}{2}R, \quad C_P = C_V + R = \left(\frac{f}{2} + 1\right)R, \quad \gamma = \frac{C_P}{C_V}. \tag{4}$$

Logo, juntando tudo isso:

$$\gamma = \frac{\frac{f}{2} + 1}{\frac{f}{2}} = \frac{f + 2}{f} = 1 + \frac{2}{f}. \tag{5}$$

Como f é o número de graus de liberdade, e o sistema só tem 2 graus de liberdade por ser bi-dimensional, sem rotação e sem vibração, então chegamos em

$$\gamma = 2. \tag{6}$$

2 Distribuição de velocidades

Num gás bidimensional as partículas têm só duas componentes de velocidade:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2). \tag{7}$$

Em **equilíbrio térmico**, a probabilidade de um microestado com energia E é proporcional a

$$e^{-E/(k_bT)}, \tag{8}$$

logo, a densidade de probabilidade no espaço de velocidades $(v_x,\ v_y)$ é

$$f(v_x,\ v_y) \propto e^{-\frac{m}{2k_bT}(v_x^2+v_y^2)}. \tag{9}$$

Como v_x e v_y são independentes, cada um é gaussiano; temos

$$f(v_x,\ v_y) \propto e^{-\frac{m}{2k_bT}(v_x^2+v_y^2)}. \tag{10}$$

Vamos normalizar $f(v)$...

$$\iint_{-\infty}^{\infty} f(v_x,\ v_y)\ dv_x dv_y = 1, \tag{11}$$

escrevendo

$$f(v_x,\ v_y) = Ae^{-a(v_x^2+v_y^2)}, \quad a = \frac{m}{2k_BT}, \tag{12}$$

obtemos

$$A = \frac{a}{\pi} = \frac{m}{2\pi k_bT} \tag{13}$$

Portanto, a distribuição em 2D fica:

$$f(v_x,\ v_y) = \frac{m}{2\pi k_BT}e^{-\frac{m}{2k_BT}(v_x^2+v_y^2)} \tag{14}$$

Como queremos a distribuição do módulo da velocidade, $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$, passamos paraa o plano de coordenadas polares:

$$v_x = v\cos\theta, \quad v_y = v\sin\theta, \tag{15}$$

temos o elemento de área $dv_xdv_y = v\ dv\ d\theta$. Com isso, a densidade conjunta em $(v,\ \theta)$ fica:

$$f(v,\ \theta)\ v\ dv\ d\theta = \frac{m}{2\pi k_bT}e^{-\frac{mv^2}{2k_bT}}v\ dv\ d\theta. \tag{16}$$

A distribuição apenas um v é obtida integrando sobre o ângulo θ de 0 a 2π:

$$f_V(v)\ dv = \int_0^{2\pi} f(v,\ \theta)\ v\ dv\ d\theta = \frac{m}{2\pi k_bT}e^{-\frac{m}{2k_bT}v^2}v\ dv\int_0^{2\pi} d\theta. \tag{17}$$

$$\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi \tag{18}$$

Logo:

$$f_v(v) = \frac{m}{k_bT}v\ e^{-\frac{m}{2k_bT}v^2} \tag{19}$$

3 Velocidades

3.1 Velocidade mais provável

É o máximo de $f_v(v)$, sendo dado pela derivada da distribuição igualada a zero:

$$v_{mp} = \sqrt{\frac{k_bT}{m}} \tag{20}$$

3.2 Velocidade média

É dada pela média da distribuição:

$$\langle v \rangle = \int_0^\infty v \ f_v(v) \ dv, \tag{21}$$

sendo:

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{\pi k_b T}{2m}} \tag{22}$$

3.3 Velocidade quadrática média

É dada como

$$v_{rms} = \sqrt{\langle v^2 \rangle}, \tag{23}$$

portanto,

$$v_{rms} = \sqrt{\frac{2k_b T}{m}} \tag{24}$$

4 Formuletas úteis

Valor médio de v^2:

$$\langle v^2 \rangle = \frac{2k_b T}{m} \tag{25}$$

Energia média:

$$\langle E \rangle = \frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = k_b T \tag{26}$$

Energia interna:

$$U = N k_b T = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m v_i^2 \tag{27}$$

Podemos também fazer a seguinte aproximação:

$$U = N \langle E \rangle = N \langle \frac{1}{2} m v^2 \rangle \tag{28}$$