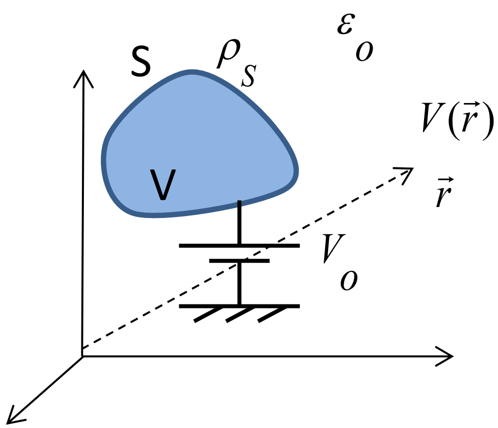
MÉTODO DOS MOMENTOS



Como determinar o potencial $V(\vec{r})$ em todo o espaço, se apenas o conhecemos em alguma região?

Exemplo: potencial vale V_o no condutor de volume V.
Qual o valor do potencial $V(\vec{r})$ em um ponto $\vec{r}$ qualquer?

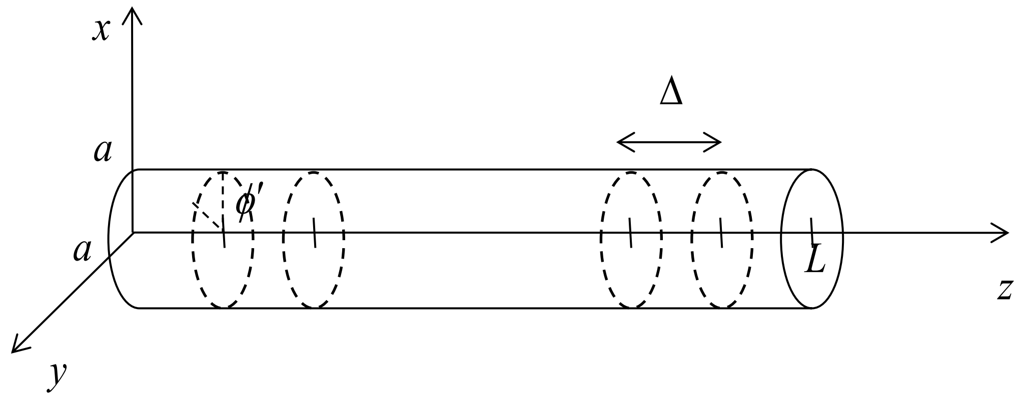
$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iint_{S'} \frac{\rho_S(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} ds'$$

Como determinar ρ_S no condutor?

A função desconhecida (ρ_S) está sob a integral ➡ Equação Integral

Método de Solução: A função desconhecida é escrita como o somatório de funções conhecidas (funções de base), com coeficientes a determinar.

Distribuição de carga em um fio fino com potencial Vo



1. Aproximação para fios finos:

(A) a distribuição superficial de carga não depende de ϕ' .

$$\rho_S(\phi', z') = \rho_S(z')$$

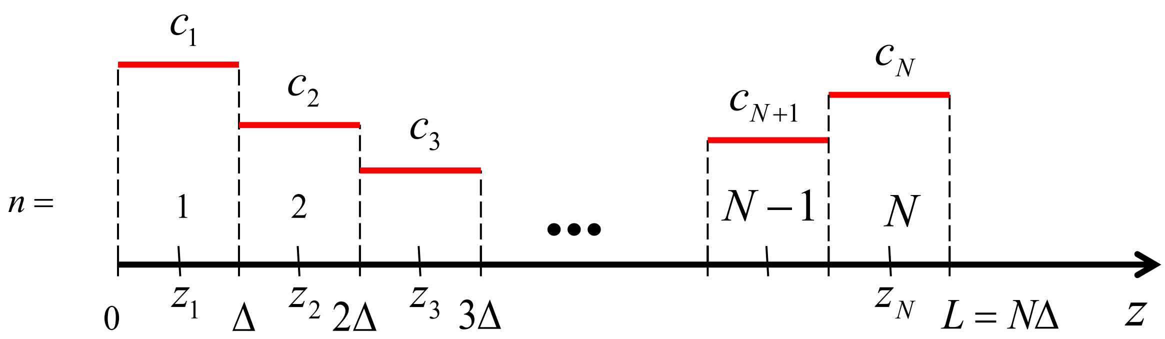
(B) a carga no topo e base do fio são desprezadas.

2. Divisão do comprimento do fio em N segmentos.

$$\Delta = \frac{L}{N}$$

3. A densidade superficial de carga $\rho_S(z')$ será aproximada por valores constantes nos intervalos de comprimento Δ .

Aproximação:

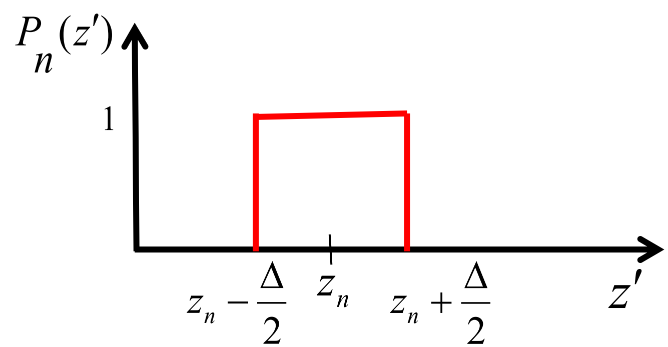


$$z_n = (n - 0{,}5)\,\Delta$$

$$\rho_s(z') \approx \sum_{n=1}^{N} c_n P_n(z')$$

Coeficientes a serem determinados (c_n)

Funções de Base ($P_n(z')$)

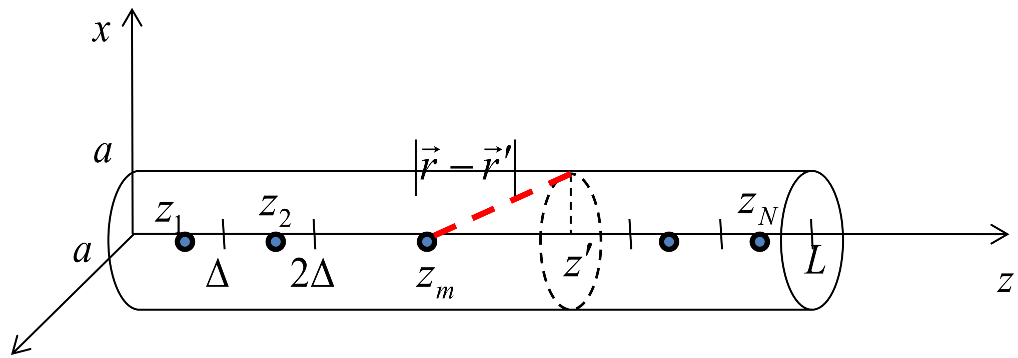


Aproximação da densidade superficial de carga constante por partes.

Condição de contorno:

Potencial constante Vo no fio.

$$V_o = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint_{S'} \frac{\rho_S(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}ds' \qquad \vec{r} \in fio \qquad \Rightarrow \qquad 4\pi\varepsilon_0 V_o = \int_0^L \int_0^{2\pi} \frac{\rho_S(z')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} a\, d\phi'\, dz' \qquad \vec{r} \in fio$$



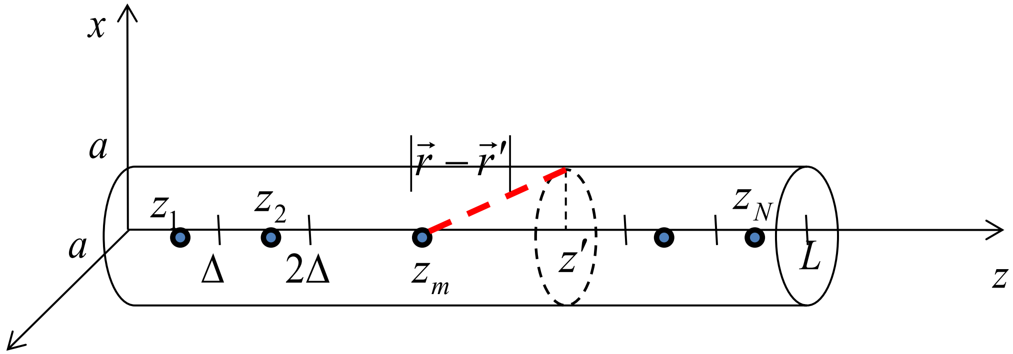
Impondo o potencial Vo nos pontos centrais de cada intervalo do fio.

$$\vec{r}_m = z_m\,\hat{a}_z \qquad z_m = (m-0{,}5)\Delta \qquad m = 1,\dots,N$$

$$\vec{r}' = a\cos\phi'\,\hat{a}_x + a\,sen\phi'\,\hat{a}_y + z'\,\hat{a}_z$$

$$\Rightarrow \quad |\vec{r}-\vec{r}'| = \sqrt{a^2 + (z_m - z')^2}$$

A escolha dos pontos $\vec{r}_m$ no eixo do fio resulta em que o integrando independe de ϕ' .

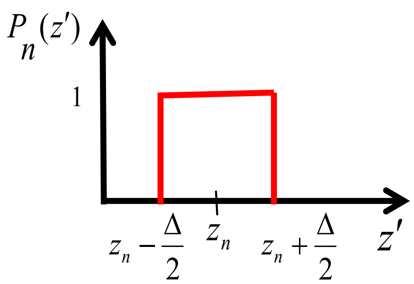


$$4\pi\varepsilon_0 V_o = \int_0^L \int_0^{2\pi} \frac{\rho_s(z')}{\sqrt{a^2 + (z_m - z')^2}} \, a \, d\phi' \, dz'$$

$$4\pi\varepsilon_0 V_o = 2\pi a \int_0^L \frac{\rho_s(z')}{\sqrt{a^2 + (z_m - z')^2}} \, dz'$$

Substituindo a expansão em funções de base:

$$\rho_s(z') \approx \sum_{n=1}^{N} c_n P_n(z') \quad \Rightarrow \quad 2\varepsilon_0 V_o = a \int_0^L \frac{\sum_{n=1}^{N} c_n P_n(z')}{\sqrt{a^2 + (z_m - z')^2}} \, dz' \qquad 2\varepsilon_0 V_o = a \sum_{n=1}^{N} c_n \int_0^L \frac{P_n(z')}{\sqrt{a^2 + (z_m - z')^2}} \, dz'$$



$$2\varepsilon_0 V_o = a \sum_{n=1}^{N} c_n \int_{z_n - \Delta/2}^{z_n + \Delta/2} \frac{1}{\sqrt{a^2 + (z_m - z')^2}} \, dz'$$

$$u = z' - z_m$$

$$d u = d z'$$

$$2\varepsilon_0 V_o = a \sum_{n=1}^{N} c_n \int_{z_n - z_m - \Delta/2}^{z_n - z_m + \Delta/2} \frac{1}{\sqrt{a^2 + u^2}} \, du$$

$$2\varepsilon_0 V_o = a \sum_{n=1}^{N} c_n \ln\left[u + \sqrt{u^2 + a^2} \right]_{z_n - z_m - \Delta/2}^{z_n - z_m + \Delta/2}$$

$$2\varepsilon_0 V_o = a\sum_{n=1}^{N} c_n \ln\left[u+\sqrt{u^2+a^2}\right]_{z_n-z_m-\Delta/2}^{z_n-z_m+\Delta/2}$$

$$2\varepsilon_0 V_o = a\sum_{n=1}^{N} c_n \ln\left(\frac{z_n-z_m+\Delta/2+\sqrt{(z_n-z_m+\Delta/2)^2+a^2}}{z_n-z_m-\Delta/2+\sqrt{(z_n-z_m-\Delta/2)^2+a^2}}\right) \qquad m=1,\ldots,N$$

Organizando em forma matricial:

$$\begin{bmatrix} & & \\ & Z & \\ & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ V \\ \\ \end{bmatrix}$$

[Z]: matriz de impedância

[V]: matriz de tensão

$$\Rightarrow \begin{cases} V_m = 2\varepsilon_o V_o \\ Z_{mn} = a\ln\left(\dfrac{z_n-z_m+\Delta/2+\sqrt{(z_n-z_m+\Delta/2)^2+a^2}}{z_n-z_m-\Delta/2+\sqrt{(z_n-z_m-\Delta/2)^2+a^2}}\right) \end{cases}$$

O sistema linear é resolvido para cada número N de elementos, resultando em uma aproximação da distribuição de carga no fio.

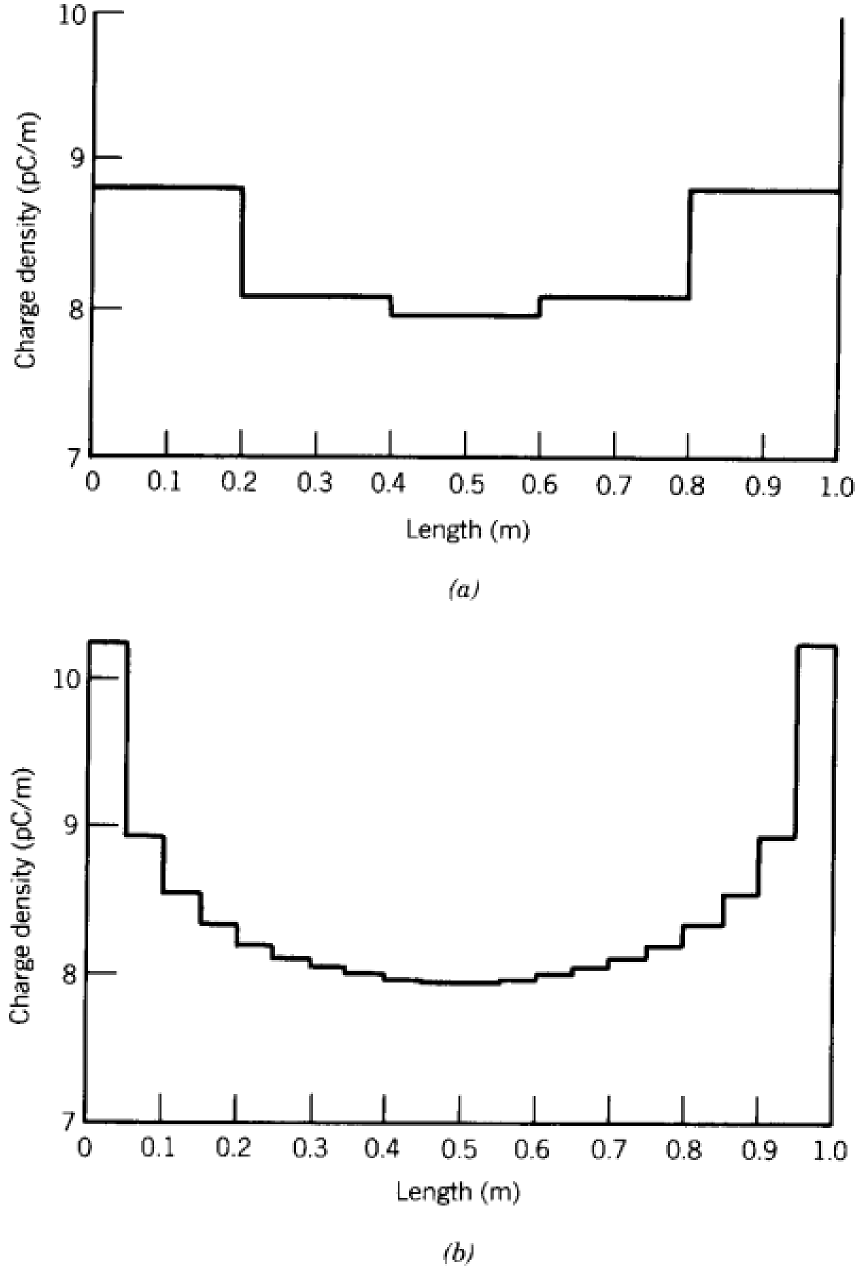


FIGURE 12-2 Charge distribution on a 1-m straight wire at 1 V. (*a*) $N = 5$. (*b*) $N = 20$.

Leitura:

- Elementos de Eletromagnetismo, Matthew Sadiku, 3ª Ed., 2006 seção 15.4
- Advanced Engineering Electromagnetics, C. A. Balanis, 1989