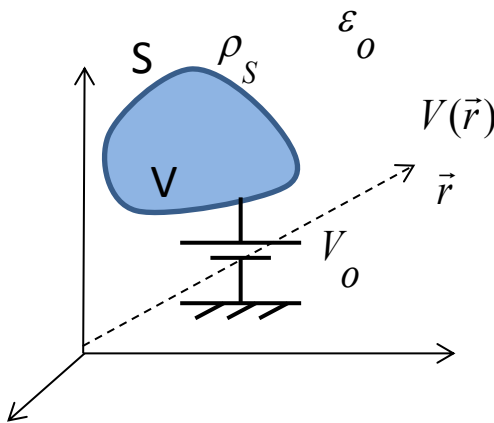


# MÉTODO DOS MOMENTOS

Como determinar o potencial  $V(\vec{r})$  em todo o espaço, se apenas o conhecemos em alguma região?

Exemplo: potencial vale  $V_o$  no condutor de volume  $V$ . Qual o valor do potencial  $V(\vec{r})$  em um ponto  $\vec{r}$  qualquer?



$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{S'} \frac{\rho_s(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} ds'$$

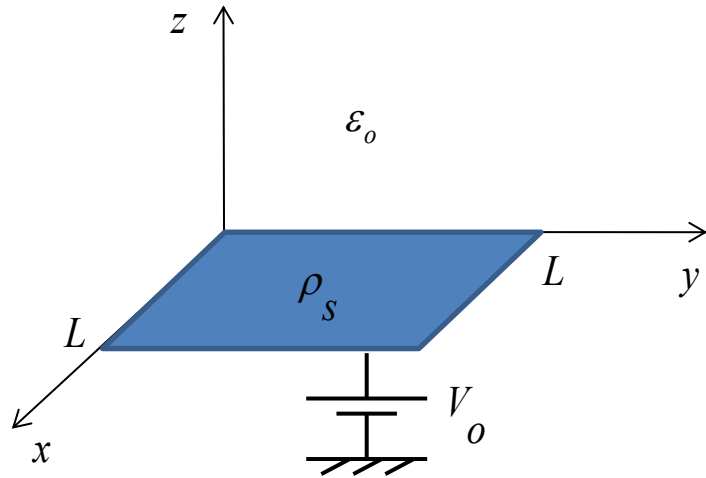
Como determinar  $\rho_s$  no condutor?

A função desconhecida ( $\rho_s$ ) está sob a integral ➡ Equação Integral

**Método de Solução:**

A função desconhecida é escrita como o somatório de funções conhecidas (funções de base), com coeficientes a determinar.

# Distribuição de carga em uma placa com potencial $V_o$



$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{s'} \frac{\rho_s(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} ds'$$

Condição de contorno:  $V(\vec{r}) = V_o \quad \vec{r} \in \text{placa}$

Se a distribuição de carga for conhecida na placa, o potencial pode ser calculado em qualquer ponto do espaço.

## Discretização:

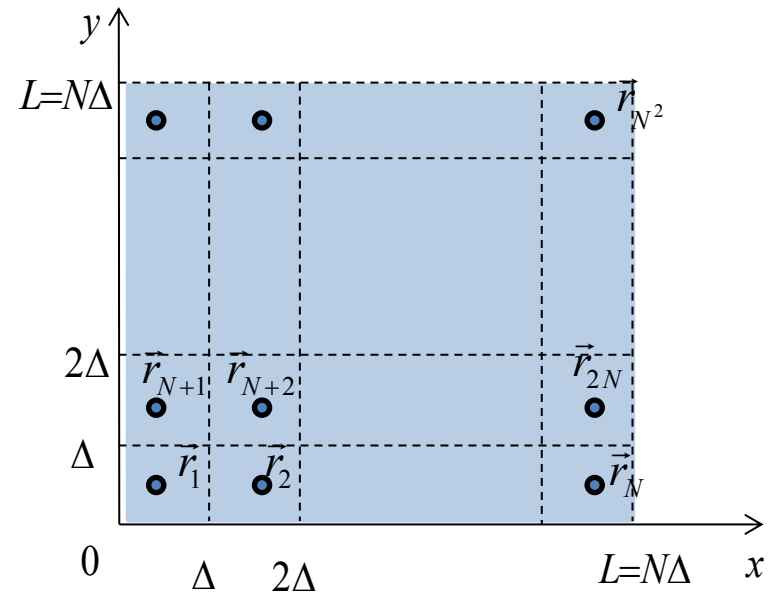
- Discretização da superfície da placa.

$$\Delta = \frac{L}{N}$$

- Ordenar os quadrados, com pontos centrais

$$\vec{r}_n \quad n = 1, 2, \dots, N^2$$

$n$	$i$	$j$
1	1	1
2	2	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
N	N	1
N+1	1	2
N+2	2	2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$N^2$	N	N

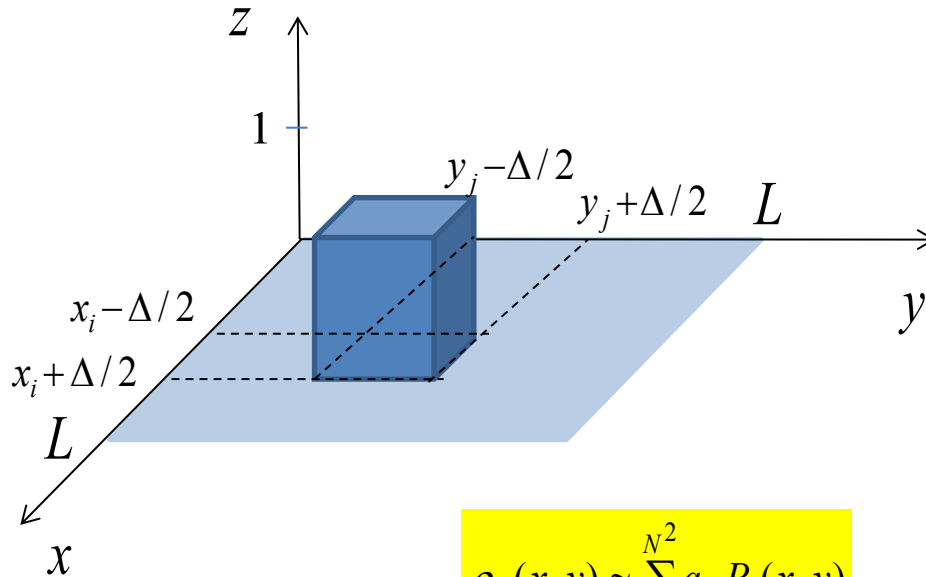


$$\vec{r}_n = (x_i, y_j) \quad \left\{ \begin{array}{ll} x_i = (i - 1/2)\Delta & i = 1, \dots, N \\ y_j = (j - 1/2)\Delta & j = 1, \dots, N \end{array} \right.$$

$$n = i + (j - 1)N$$

## Aproximação:

A distribuição superficial de carga será aproximada por uma soma de funções pulso em cada sub-domínio (quadrado).



$$P_n(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x_i - \Delta/2 < x < x_i + \Delta/2 \\ & y_j - \Delta/2 < y < y_j + \Delta/2 \\ 0 & \text{fora} \end{cases}$$

$$\rho_s(x, y) \approx \sum_{n=1}^{N^2} a_n P_n(x, y)$$

Coeficientes a serem  
determinados ( $N^2$ )

Funções de Base

➡ Aproximação da densidade superficial de carga constante por partes.

Condição de contorno:

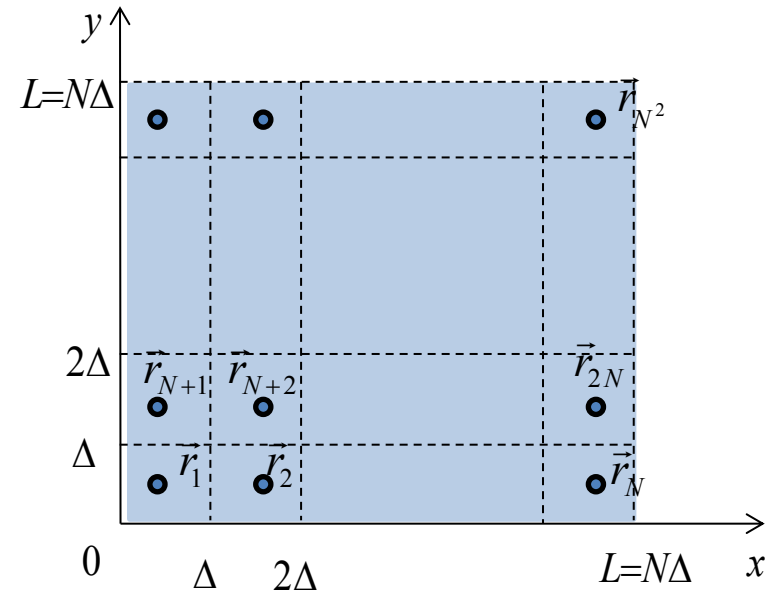
Potencial constante  $V_o$  na placa.

$$V_o = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{S'} \frac{\rho_s(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} ds' \quad \vec{r} \in \text{placa}$$

A condição de contorno será imposta no centro de cada quadrado (point-matching):

$$\vec{r}_m \quad m = 1, 2, \dots, N^2$$

$m$	$p$	$q$
1	1	1
2	2	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
N	N	1
N+1	1	2
N+2	2	2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$N^2$	N	N



$$\vec{r}_m = (x_p, y_q) \quad \left\{ \begin{array}{ll} x_p = (p - 1/2)\Delta & p = 1, \dots, N \\ y_q = (q - 1/2)\Delta & q = 1, \dots, N \end{array} \right.$$

$$m = p + (q - 1)N$$

Impondo o potencial  $V_o$  no ponto  $\vec{r}_m = (x_p, y_q)$  e usando a expansão da distribuição de carga na placa:

$$\left. \begin{aligned} V_o &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{S'} \frac{\rho_s(\vec{r}')}{|\vec{r}_m - \vec{r}'|} ds' \\ \rho_s(x, y) &\approx \sum_{n=1}^{N^2} a_n P_n(x, y) \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} V_o &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{S'} \frac{\sum_{n=1}^{N^2} a_n P_n(x', y')}{|\vec{r}_m - \vec{r}'|} ds' \\ \sum_{n=1}^{N^2} a_n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{x_i-\Delta/2}^{x_i+\Delta/2} \int_{y_j-\Delta/2}^{y_j+\Delta/2} \frac{1}{|\vec{r}_m - \vec{r}'|} dx' dy' &= V_o \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad V_o = \sum_{n=1}^{N^2} a_n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{S'} \frac{P_n(x', y')}{|\vec{r}_m - \vec{r}'|} ds'$$

Equação linear com incógnitas  $a_n$  : 

Organizando em forma matricial:

$$\begin{bmatrix} Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{N^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V \end{bmatrix}$$

[Z]: matriz de impedância

[V]: matriz de tensão

$$\Rightarrow \left\{ \begin{aligned} V_m &= V_o \\ Z_{mn} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{x_i-\Delta/2}^{x_i+\Delta/2} \int_{y_j-\Delta/2}^{y_j+\Delta/2} \frac{1}{|\vec{r}_m - \vec{r}'|} dx' dy' \end{aligned} \right.$$

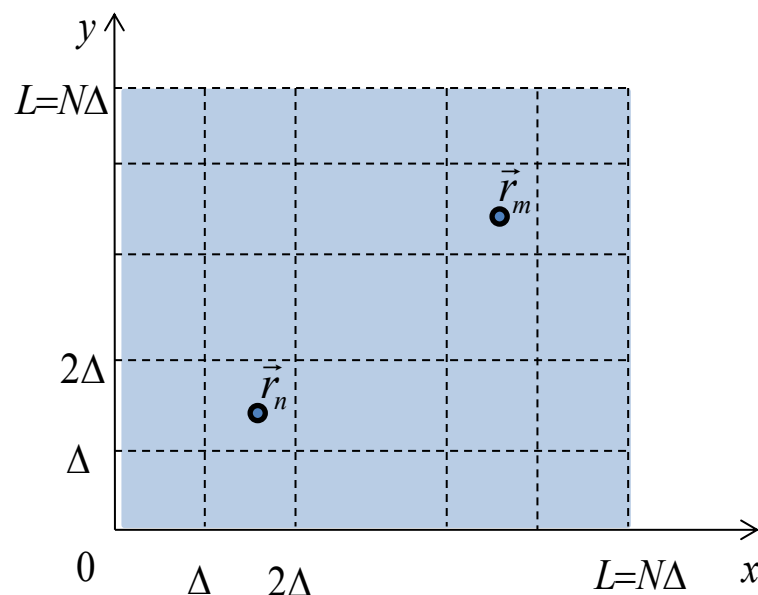
## Matriz de Impedância:

$$Z_{mn} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{x_i-\Delta/2}^{x_i+\Delta/2} \int_{y_j-\Delta/2}^{y_j+\Delta/2} \frac{1}{|\vec{r}_m - \vec{r}'|} dx' dy'$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{r}_m = (x_p, y_q) \\ \vec{r}' = (x', y') \end{array} \right\} \quad |\vec{r}_m - \vec{r}'| = \sqrt{(x_p - x')^2 + (y_q - y')^2}$$

$$Z_{mn} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{x_i-\Delta/2}^{x_i+\Delta/2} \int_{y_j-\Delta/2}^{y_j+\Delta/2} \frac{1}{\sqrt{(x_p - x')^2 + (y_q - y')^2}} dx' dy'$$

$Z_{mn}$  é igual ao potencial no ponto  $\vec{r}_m$  gerado por uma densidade superficial de carga constante e igual a 1 no sub-domínio n.



**1** Se  $m \neq n$  :  $Z_{mn}$  pode ser aproximado como se toda a carga do quadrado n estivesse concentrada no centro.

$$Z_{mn} \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{x_i-\Delta/2}^{x_i+\Delta/2} \int_{y_j-\Delta/2}^{y_j+\Delta/2} \frac{1}{\sqrt{(x_p - x_i)^2 + (y_q - y_j)^2}} dx' dy'$$



$$Z_{mn} \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\Delta^2}{\sqrt{(x_p - x_i)^2 + (y_q - y_j)^2}}$$

**2** Se  $m = n$  : Elementos da diagonal principal de  $Z_{mn}$  :

$$m = n \rightarrow \begin{cases} i = p & x_i = x_p \\ j = q & y_j = y_q \end{cases}$$

$$Z_{mn} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{x_i - \Delta/2}^{x_i + \Delta/2} \int_{y_j - \Delta/2}^{y_j + \Delta/2} \frac{1}{\sqrt{(x_p - x')^2 + (y_q - y')^2}} dx' dy'$$

$$Z_{nn} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{x_i - \Delta/2}^{x_i + \Delta/2} \int_{y_j - \Delta/2}^{y_j + \Delta/2} \frac{1}{\sqrt{(x_i - x')^2 + (y_j - y')^2}} dx' dy' =$$

$$\begin{aligned} u &= x' - x_i & du &= dx' \\ v &= y' - y_j & dv &= dy' \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2}} du dv = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} \ln \left[ u + \sqrt{u^2 + v^2} \right]_{-\Delta/2}^{\Delta/2} dv = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} \ln \left[ \frac{\Delta/2 + \sqrt{(\Delta/2)^2 + v^2}}{-\Delta/2 + \sqrt{(\Delta/2)^2 + v^2}} \right] dv$$

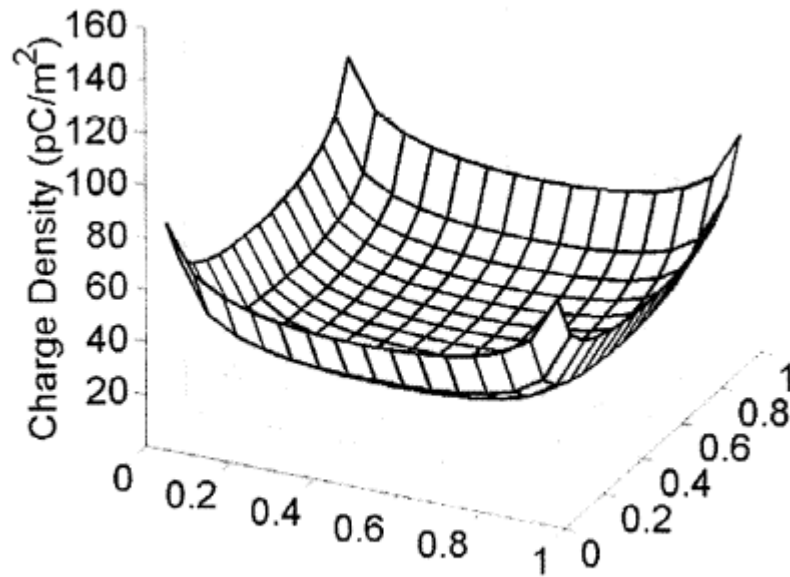
Usando [www.wolfram.com](http://www.wolfram.com):

$$\int \ln \left[ \frac{\sqrt{x^2 + a^2} + a}{\sqrt{x^2 + a^2} - a} \right] dx = x \ln \left[ \frac{\sqrt{x^2 + a^2} + a}{\sqrt{x^2 + a^2} - a} \right] + 2a \ln(\sqrt{x^2 + a^2} + x)$$

$$\rightarrow Z_{nn} = \frac{\Delta}{\pi \epsilon_0} \ln(1 + \sqrt{2})$$

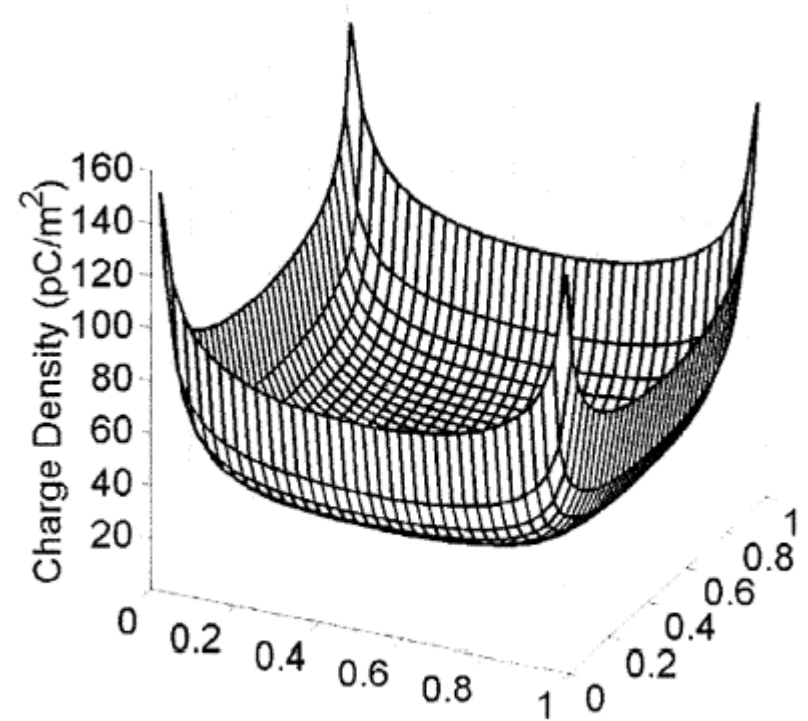


## Exemplo:



(a) 225 Patches

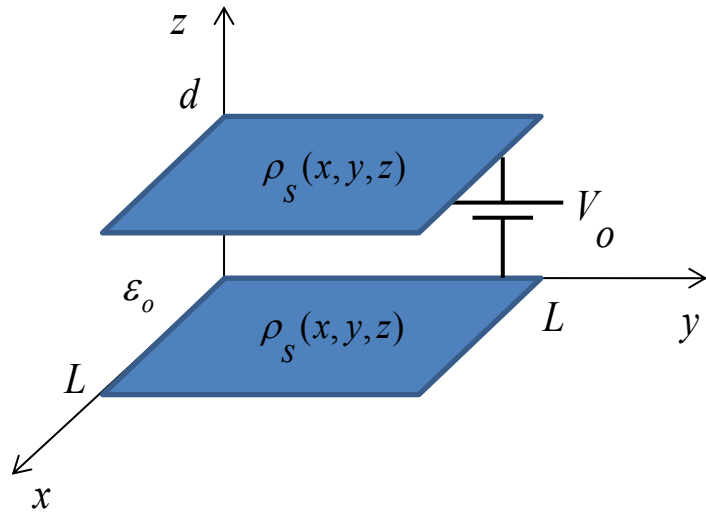
$N=15$



(b) 1225 Patches

$N=35$

# Condutor de Placas Paralelas



$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{S'} \frac{\rho_s(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} ds'$$

Condições de contorno:

$$V(\vec{r}) = \begin{cases} V_o & \vec{r} \in \text{placa } cima \\ 0 & \vec{r} \in \text{placa } baixo \end{cases}$$

Se a distribuição de carga for conhecida na placa, o potencial pode ser calculado em qualquer ponto do espaço.

## Discretização:

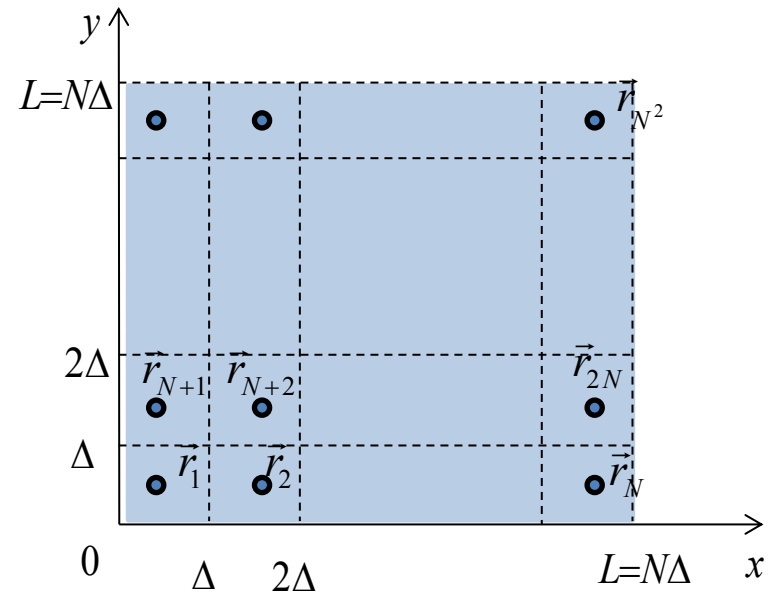
- Discretização da superfície das placas.

$$\Delta = \frac{L}{N}$$

- Ordenar os quadrados, com pontos centrais

$$\vec{r}_n \quad n = 1, 2, \dots, 2N^2$$

n	i	j	k
1	1	1	0
2	2	1	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$N^2$	N	N	0
$N^2+1$	1	1	1
$N^2+2$	2	1	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$2N^2$	N	N	1



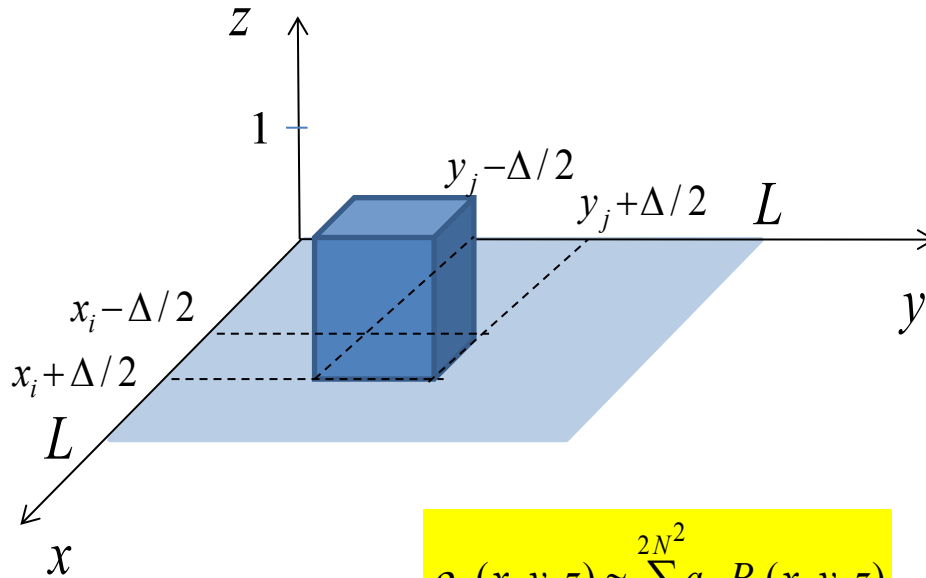
$$\vec{r}_n = (x_i, y_j, z_k) \quad \left\{ \begin{array}{ll} x_i = (i - 1/2)\Delta & i = 1, \dots, N \\ y_j = (j - 1/2)\Delta & j = 1, \dots, N \\ z_k = k d & k = 0, 1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} k = 0 & \text{placa de baixo} \\ k = 1 & \text{placa de cima} \end{array} \right.$$

$$n = i + (j - 1)N + k N^2$$

## Aproximação:

A distribuição superficial de carga será aproximada por uma soma de funções pulso em cada sub-domínio (quadrado).



$$P_n(x, y, z) = \begin{cases} 1 & \text{se } x_i - \Delta/2 < x < x_i + \Delta/2 \\ & y_j - \Delta/2 < y < y_j + \Delta/2 \\ & z = kd \\ 0 & \text{fora} \end{cases}$$

$$\rho_s(x, y, z) \approx \sum_{n=1}^{2N^2} a_n P_n(x, y, z)$$

Coeficientes a serem  
determinados ( $2N^2$ )

Funções de Base

➡ Aproximação da densidade superficial de carga constante por partes.

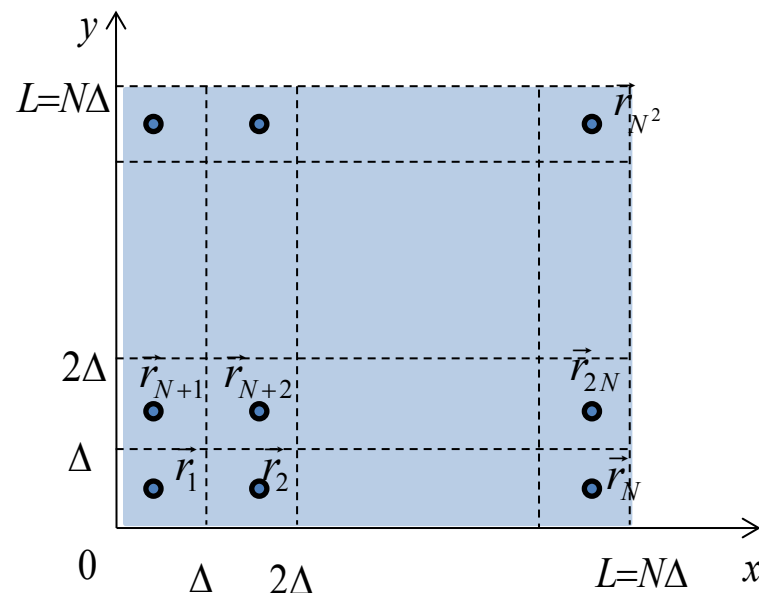
**Condições de contorno:** Potencial constante  $V_o$  na placa superior e 0 (zero) na inferior.

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{s'} \frac{\rho_s(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} ds' = \begin{cases} V_o & \vec{r} \in \text{placa } cima \\ 0 & \vec{r} \in \text{placa } baixo \end{cases}$$

A condição de contorno será imposta no centro de cada quadrado (point-matching):

$$\vec{r}_m \quad m = 1, 2, \dots, 2N^2$$

m	p	q	s
1	1	1	0
2	2	1	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$N^2$	N	N	0
$N^2+1$	1	1	1
$N^2+2$	2	1	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$2N^2$	N	N	1



$$\vec{r}_m = (x_p, y_q, z_s) \quad \left\{ \begin{array}{ll} x_p = (p - 1/2)\Delta & p = 1, \dots, N \\ y_q = (q - 1/2)\Delta & q = 1, \dots, N \\ z_s = s d & s = 0, 1 \end{array} \right.$$

$$m = p + (q - 1)N + s N^2 \quad \left\{ \begin{array}{ll} s = 0 & \text{placa de baixo} \\ s = 1 & \text{placa de cima} \end{array} \right.$$

Impondo o potencial no ponto  $\vec{r}_m = (x_p, y_q, z_s)$  e usando a expansão da distribuição de carga na placa:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{S'} \frac{\rho_s(\vec{r}')}{|\vec{r}_m - \vec{r}'|} ds' = V(z_s) \\ \rho_s(x, y, z) \approx \sum_{n=1}^{2N^2} a_n P_n(x, y, z) \end{aligned} \right\} \quad \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{S'} \frac{\sum_{n=1}^{2N^2} a_n P_n(x', y', z_k)}{|\vec{r}_m - \vec{r}'|} ds' = V(z_s) \quad \rightarrow \quad \sum_{n=1}^{2N^2} a_n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{S'} \frac{P_n(x', y', z_k)}{|\vec{r}_m - \vec{r}'|} ds' = V(z_s)$$

$$\sum_{n=1}^{2N^2} a_n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{x_i-\Delta/2}^{x_i+\Delta/2} \int_{y_j-\Delta/2}^{y_j+\Delta/2} \frac{1}{|\vec{r}_m - \vec{r}'|} dx' dy' = V(z_s) \quad m = 1, 2, \dots, 2N^2$$

Equação linear com incógnitas  $a_n$  : 

Organizando em forma matricial:

$$\begin{bmatrix} Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{2N^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V \end{bmatrix}$$

[Z]: matriz de impedância

[V]: matriz de tensão

$$\Rightarrow \left\{ \begin{aligned} V_m = V(z_s) &= \begin{cases} 0 & 1 \leq m \leq N^2 \\ V_o & N^2+1 \leq m \leq 2N^2 \end{cases} \\ Z_{mn} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{x_i-\Delta/2}^{x_i+\Delta/2} \int_{y_j-\Delta/2}^{y_j+\Delta/2} \frac{1}{|\vec{r}_m - \vec{r}'|} dx' dy' \end{aligned} \right.$$

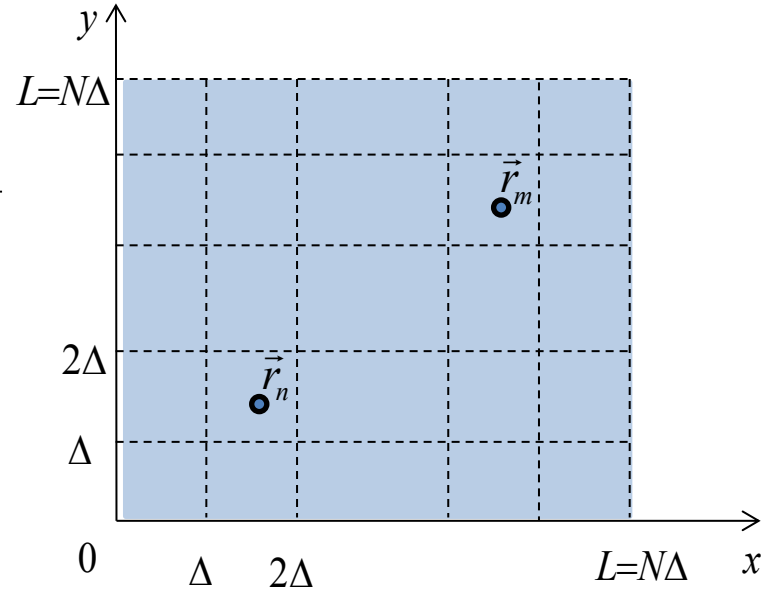
## Matriz de Impedância:

$Z_{mn}$  é igual ao potencial no ponto  $\vec{r}_m$  gerado por uma densidade superficial de carga constante e igual a 1 no sub-domínio n.

$$Z_{mn} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{x_i-\Delta/2}^{x_i+\Delta/2} \int_{y_j-\Delta/2}^{y_j+\Delta/2} \frac{1}{|\vec{r}_m - \vec{r}'|} dx' dy'$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{r}_m &= (x_p, y_q, z_s) \\ \vec{r}' &= (x', y', z_k) \end{aligned} \right\} |\vec{r}_m - \vec{r}'| = \sqrt{(x_p - x')^2 + (y_q - y')^2 + (z_s - z_k)^2}$$

$$Z_{mn} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{x_i-\Delta/2}^{x_i+\Delta/2} \int_{y_j-\Delta/2}^{y_j+\Delta/2} \frac{1}{\sqrt{(x_p - x')^2 + (y_q - y')^2 + (z_s - z_k)^2}} dx' dy'$$



- 1** Se  $m \neq n$  :  $Z_{mn}$  pode ser aproximado como se toda a carga do quadrado n estivesse concentrada no centro.

$$Z_{mn} \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{x_i-\Delta/2}^{x_i+\Delta/2} \int_{y_j-\Delta/2}^{y_j+\Delta/2} \frac{1}{\sqrt{(x_p - x_i)^2 + (y_q - y_j)^2 + (z_s - z_k)^2}} dx' dy'$$

$$\rightarrow Z_{mn} \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\Delta^2}{\sqrt{(x_p - x_i)^2 + (y_q - y_j)^2 + (z_s - z_k)^2}}$$

2 Se  $m = n$  : Elementos da diagonal principal de  $Z_{mn}$  :

$$m = n \quad \rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ll} i = p & x_i = x_p \\ j = q & y_j = y_q \\ k = s & z_k = z_s \end{array} \right.$$

$$Z_{nn} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{x_i-\Delta/2}^{x_i+\Delta/2} \int_{y_j-\Delta/2}^{y_j+\Delta/2} \frac{1}{\sqrt{(x_i-x')^2 + (y_j-y')^2 + (z_k-z_k)^2}} dx' dy'$$

$$Z_{nn} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{x_i-\Delta/2}^{x_i+\Delta/2} \int_{y_j-\Delta/2}^{y_j+\Delta/2} \frac{1}{\sqrt{(x_i-x')^2 + (y_j-y')^2}} dx' dy' =$$

$$\rightarrow \quad Z_{nn} = \frac{\Delta}{\pi \epsilon_0} \ln(1 + \sqrt{2})$$



## Leitura:

- Elementos de Eletromagnetismo, Matthew Sadiku, 3ª Ed., 2006  
Cap. 15
- Advanced Engineering Electromagnetics, C. A. Balanis, 1989