Campus Virtual
Cruzeiro do Sul
Educação a Distância

Cálculo Numérico

Online

Unidade:

Zero de Funções Reais

Responsável pelo Conteúdo:
Prof[a]. Ms. Adriana D. Freitas

Revisão Técnica:
Prof[a]. Dr. Jaime Sandro da Veiga

Revisão Textual:
Prof[a]. Ms. Alessandra Cavalcante

MATERIAL TEÓRICO

INTRODUÇÃO À ORIGEM DOS ERROS

A frase atribuída ao matemático alemão David Hilbert (1862-1943) "*Nenhum outro problema afetou tão profundamente o espírito do homem; nenhuma outra ideia tão fertilmente estimulou seu intelecto; nenhum outro conceito necessita de maior esclarecimento do que o infinito*" ilustra bem o início desta unidade de estudo.

Ao efetuarmos operações matemáticas, mesmo que com números naturais ou inteiros, devemos considerar que nem sempre obtemos resultados exatos, assim temos de interpretar números que são finitos, mas que possuem representação infinita. Por exemplo, a divisão de 1 por 3 (1/3) é finita (está entre 0 e 1), todavia possui representação no conjunto do números reais com infinitas casas decimais (0,3333...). Além disso, lidamos também com números que não podem ser expressos como a divisão de dois números inteiros, são os chamados números irracionais, o que acarreta em chegarmos a apenas uma representação aproximada do número em questão.

Com a evolução das tecnologias para fins computacionais, os cálculos complexos ficaram a cargo de máquinas que estão sendo sempre aperfeiçoadas a fim de aumentar seus recursos. As máquinas operam diversos cálculos, dos mais simples aos mais complexos, porém por mais complexas que sejam, trabalham com um número finito de recursos, o que não é suficiente quando lidamos com números de infinitos dígitos.

Assim, qualquer cálculo, seja realizado por mãos humanas ou por máquinas, que envolva números que não possam ser expressos por um número finito de dígitos, não fornecerá como resultado um valor exato, mas sim um valor aproximado; e, quanto maior o número de dígitos utilizados, maior será a precisão obtida.

É por isso que precisamos aprender a lidar com os erros, ou melhor, com a margem de erro.

Vejamos dois exemplos

Exemplo 1: A primeira grande crise matemática de que se tem conhecimento foi quando os pitagóricos se depararam com o problema da diagonal de um quadrado. Sabemos que a diagonal de um quadrado de lado L qualquer é calculada pela expressão $L\sqrt{2}$.

O número irracional $\sqrt{2}$ é um número que não pode ser representado, em sua forma decimal, com um número finito de dígitos. Assim, qualquer operação que o envolva estará sujeita a aproximações para sua representação, como por exemplo:

$$1,4142 \text{ ou } 1,4142136 \text{ ou ainda } 1,4142135623730950488016887242097 .$$

Por exemplo, na trigonometria, o arco de valor $\pi/_4$ possui seno igual a $\sqrt{2}/_2$, o que nos permite infinitas representações, remetendo-nos a resultados próximos do exato, mas que não são verdadeiramente exatos:

$$\sqrt{2}/_2 \cong 0,7 ;$$

$$\sqrt{2}/_2 \cong 0,7071 ;$$

$$\sqrt{2}/_2 \cong 0,7071067811865 .$$

Exemplo 2: A área A de uma circunferência, de raio r, é obtida através do cálculo da fórmula $A = \pi r^2$. Neste caso, para uma circunferência de raio igual a 10m poderemos obter como área:

A = 314m² ;

A = 314,1592653m² ;

A = 314,15926535897932384 m² .

Como π é um número irracional não teremos um valor exato para o cálculo da área, mas sim valores aproximados. No primeiro cálculo utilizamos 3,14 (três algarismos significativos para π) e no segundo cálculo, utilizamos 3,141592653 (dez algarismos significativos) e no terceiro 3,14159265358979323846 (vinte algarismos significativos).

Nenhum dos resultados está incorreto, porém o terceiro está mais preciso que o segundo, por sua vez está mais preciso que o primeiro, assim quanto maior o número de dígitos utilizados nos cálculos, maior a precisão do número, ou seja, mais próximo estamos da representação real do número.

As diferenças entre resultados para uma mesma operação podem ser consequência da precisão dos dados de entrada da operação (como nos casos ilustrados acima), ou ainda da forma como estes números são representados nos computadores ou calculadoras, pois devemos levar também em consideração que estes trabalham com o sistema de representação binário. Assim, ao inserirmos um número no computador, normalmente o representamos na base decimal, este o converte para binário, realiza operações matemáticas nessa base e converte o resultado novamente para a base decimal para que possamos observá-lo.

Por isso ao analisarmos um resultado, devemos levar em consideração que este resultado é limitado em função dos números de dígitos que a máquina dispõe para trabalhar e também na conversão, pois podemos ter alguns desvios do resultado real, já que um número possui uma representação finita decimal e pode não ter representação finita no sistema binário ou vice-versa. Nesse caso, a máquina fará aproximações do número, o que implica avaliarmos a precisão do resultado.

ARITMÉTICA DE PONTO FLUTUANTE

Agora vamos entender como os números são armazenados na memória do computador. Se uma máquina trabalha com a base β, os números serão representados sob o seguinte formato:

$$\boxed{\pm\ (0,d_1d_2d_3\ldots\ d_t)_{\ \beta}\ \mathrm{x}\ \beta^k}$$

Em que **t** é o número de dígitos do número (o qual chamamos de mantissa), ***k*** um expoente contido em um intervalo com limite superior (M) e um limite inferior (m). Se o expoente ***k,*** necessário para representar um determinado número, for maior que (M), temos "overflow" e, se for menor que (m), temos "underflow".

Considere, por exemplo, uma máquina que opera no sistema de base 10, com 4 dígitos e o expoente de -5 a 5, ou seja:

$$\beta = 10;\ t = 3;\ k \in [-5, 5]\ .$$

Os números serão representados na seguinte forma:

$$0,d_1d_2d_3 \times 10^e\ ,\ \ 0 \le d_j \le 9\ ,\ d_1 \ne 0\ ,\ k \in [\ -5, 5]\ .$$

O que acarreta limitação na forma como os números serão representados, tanto para o menor quanto para o maior número, em valor absoluto:

- Menor número absoluto representado: $m = 0{,}100 \times 10^{-5} = 10^{-6}$
- Maior número absoluto representado: $M = 0{,}999 \times 10^{5} = 99900$

Devido a esta limitação de dígitos e expoentes (inferior e superior), a máquina acusará a ocorrência de um “underflow” caso seja preciso representar um número cujo expoente seja menor do que -5 (limite inferior m), por exemplo, no caso do número $x = 0,243 \times 10^{-8}$, de outra forma acusará a ocorrência de “overflow” quando precisar representar um número cujo expoente seja maior do que 5.

Além disso, se tivermos como resultado o número $127,84 = 0,12784 \times 10^3$, (note que este número possui 5 dígitos na mantissa) a máquina irá armazená-lo, mas como só dispõe de três dígitos, terá duas opções para representá-lo: Arredondamento ou Truncamento.

i) Arredondar: significa determinar o dígito após o último algarismo significativo do número, utilizando o seguinte critério:

- ***Menor que 5:*** desprezamos os demais dígitos após o último algarismo significativo.
- ***Maior que 5:*** somamos um ao último algarismo significativo.

No arredondamento de $0,12784 \times 10^3$, vemos que o dígito após o último algarismo significativo (que é o terceiro, pois t =3) é maior ou igual a 5. Então, somamos um ao último algarismo significativo, e de $0,12784 \times 10^3$ arredondamos para $0,128 \times 10^3$.

ii) Truncar: simplesmente, consideramos os dígitos contidos pelo número de algarismos significativos e desprezamos os demais dígitos. Ao truncarmos o número $0,12784 \times 10^3$ teremos $0,127 \times 10^3$

Poderemos utilizar ambas as representações: $0,127 \times 10^3$ ou $0,128 \times 10^3$. Optar por arredondar ou truncar é uma opção quando realizamos uma operação e estamos cientes da margem de erro.

Chamamos de **erro absoluto** ao módulo ou valor absoluto da diferença entre o valor exato de um número x e o de seu valor aproximado $\bar{x}$. Simbolicamente, seria escrito como $\Delta x = |x - \bar{x}|$. Mas como em geral não conhecemos o valor exato de x, obtemos o que chamamos de **erro relativo** ε dividindo o erro absoluto Δx pelo valor aproximado, $\varepsilon = \frac{\Delta x}{|\bar{x}|} = \frac{|x-\bar{x}|}{|\bar{x}|}$. Por exemplo, sabemos que o valor de π está entre 3,14 e 3,15, ou seja, $\pi \epsilon [3{,}14 ; 3{,}15]$, então qualquer valor assumido como π neste intervalo terá um erro $\varepsilon = \frac{|3{,}14-3{,}15|}{|3{,}15|} = 0{,}003 < 0{,}01 = 1\%$. Mas, se refinarmos nossa precisão, por exemplo, sabendo que $\pi \epsilon [3{,}1415 ;\ 3{,}1416\ ]$, obteremos um erro menor ainda, pois neste caso o erro $\varepsilon = \frac{|3{,}1415-3{,}1416|}{|3{,}1416|} = 0{,}00003 < 0{,}0001 = 0{,}01\%$. Note que o **erro relativo** é dado em termos percentuais.

ZEROS DE FUNÇÕES REAIS

Um número $\bar{x}$ é chamado de zero da função f(x) ou raiz da equação f(x) = 0 se f($\bar{x}$) = 0, ou seja, é o valor que, quando assumido na função, resulta na imagem nula, ou é o valor de x que torna verdadeira a sentença matemática da equação.

Graficamente, o zero da função é o ponto da abscissa no qual o gráfico da função intercepta o eixo OX.

Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 1: Na função afim f(x) = x + 2, temos que o zero da função é o número -2, uma vez que f(-2) = -2 + 2 = 0, ou seja, f(-2) = 0.

Para o cálculo dessa raiz, basta resolver a equação:

$$x + 2 = 0$$

$$x = -2$$

Graficamente, como observamos na Figura 1, comprovamos que a reta que representa f(x) = x + 2 intercepta o eixo OX no ponto (-2, 0), ou seja, na abscissa -2.

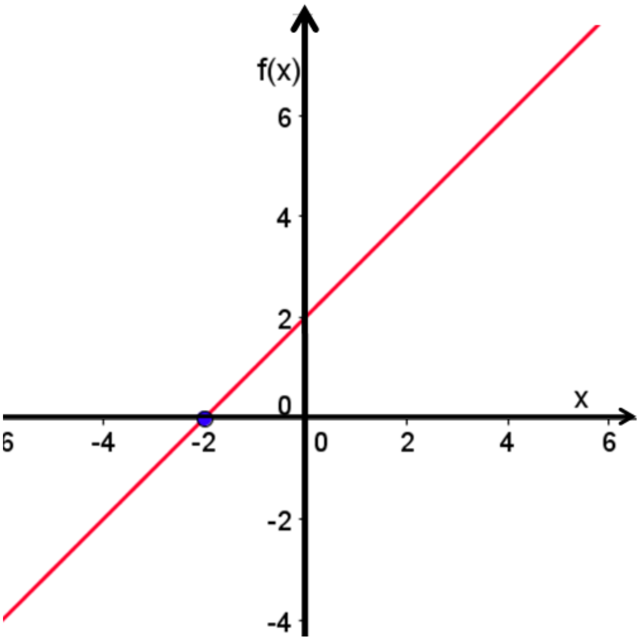

Figura 1 - Zero da função f(x) = x + 2 – Fonte: O Autor.

Exemplo 2: Já no caso da função quadrática f(x) = x^2 + 6x + 5, obtemos essas raízes ao resolvermos a equação x^2 + 6x + 5 = 0, que pode ser pela fórmula de Bhaskara, ou ainda pelo método da soma e produto das duas raízes relacionadas aos coeficientes a, b e c da equação, também conhecidas como fórmulas de Viète. Neste caso temos duas raízes reais, que são $\bar{x}_1$ = -5, pois f(-5) = 0 e $\bar{x}_2$ = -1, pois f(-1) = 0.

Podemos também confirmar no gráfico da função, conforme a Figura 2, os pontos nos quais o gráfico intercepta o eixo OX.

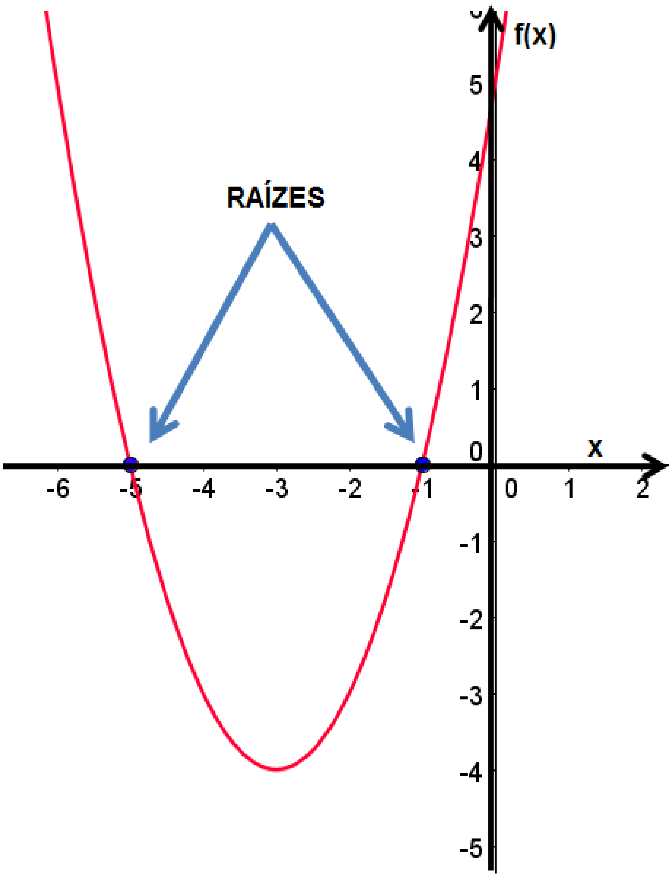

Figura 2 - Zero da função $f(x) = x^2 + 6x + 5$ – Fonte: O Autor.

Exemplo 3 – Neste outro exemplo, temos a função $f(x) = x^2 + 1$ e, ao calcularmos as raízes, temos que:

$x^2 + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 = -1 \quad \rightarrow x = \pm\sqrt{-1}$ o que implica que a função não admite raízes reais e sim, complexas. Graficamente, notamos que a parábola, ao representar a função $f(x) = x^2 + 1$, não intercepta o eixo das abscissas.

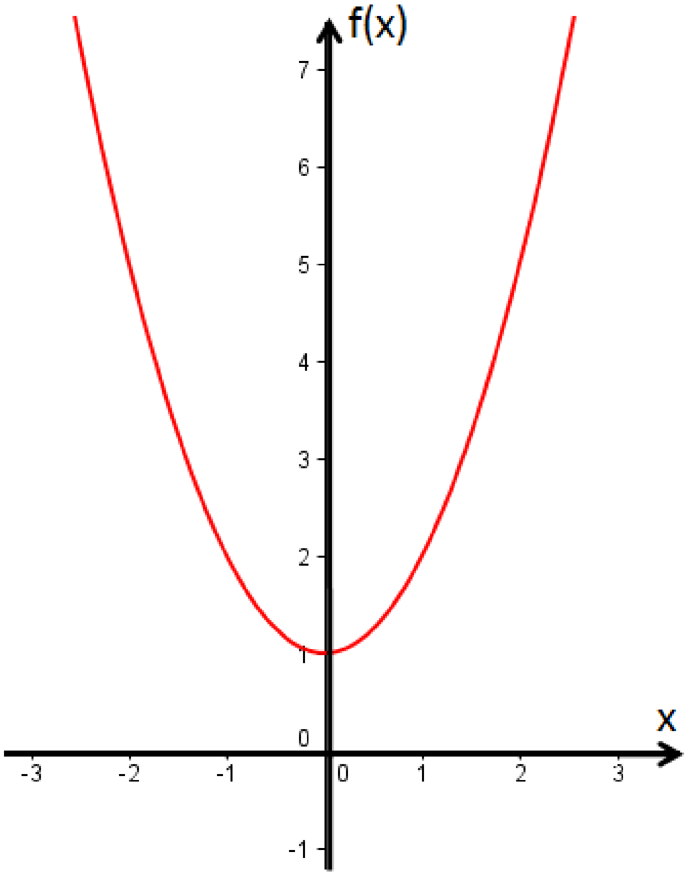

Figura 3 - Gráfico da função f(x) = $x^2 + 1$ - Fonte: O Autor.

A análise gráfica da função é importante para reconhecermos os intervalos nos quais podemos identificar as raízes. Além disso, podemos analisar o comportamento da função como crescimento, decrescimento e estudo do sinal. Vejamos alguns exemplos.

O gráfico da Figura 4 representa uma função quadrática e podemos notar que essa função possui duas raízes reais. Uma delas está no intervalo [-1,0] e a outra no intervalo [2,3].

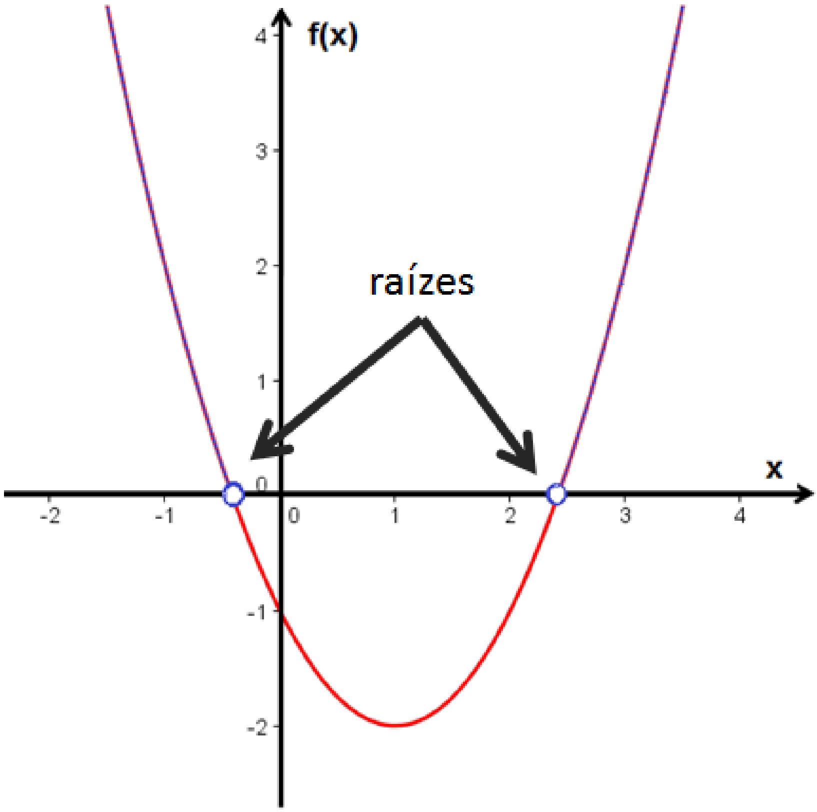

Figura 4 - Gráfico zeros de uma função quadrática – Fonte: O Autor.

Além disso, podemos identificar que a imagem da função é negativa no intervalo entre as duas raízes, e positiva antes da primeira raiz e depois da segunda.

No gráfico da Figura 5, temos uma função cúbica e verificamos as três raízes reais, nos seguintes intervalos: [-2,-1] , [0,1] e [2,3], além de identificar intervalos nos quais as imagens são positivas $f(x) > 0$ e negativas $f(x)<0$.

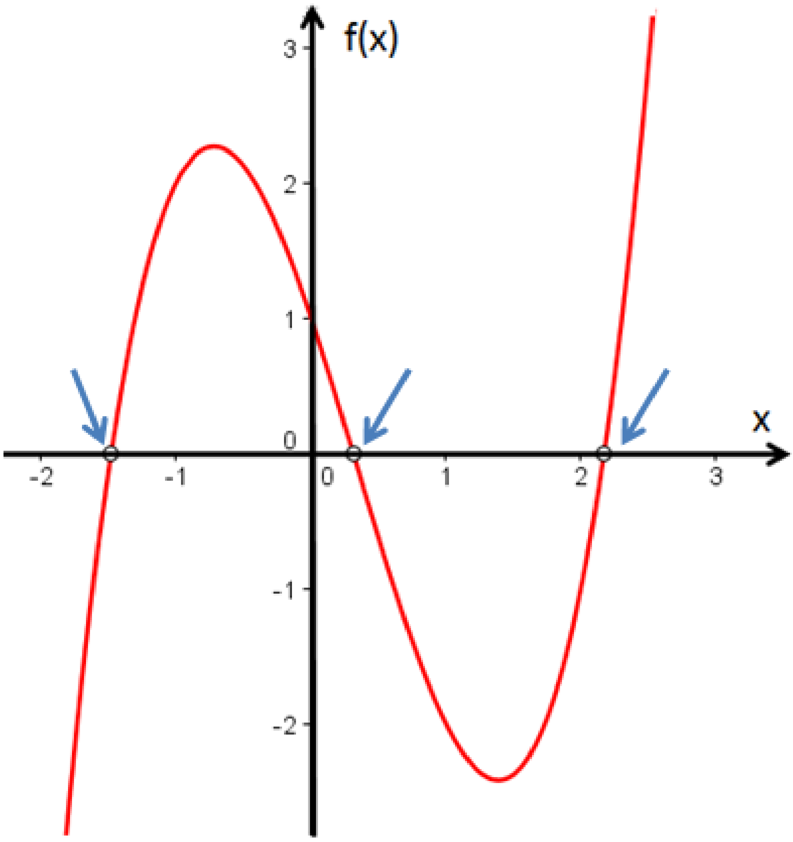

Figura 5 – Gráfico com a representação dos zeros de uma função cúbica – Fonte: O Autor.

Em relação aos cálculos, sabemos que as raízes das funções afins e quadráticas são rapidamente calculadas analiticamente, porém para algumas funções polinomiais de graus mais altos ou funções mais complexas não dispomos de fórmulas explícitas para o cálculo das raízes e recorremos a métodos do Cálculo Numérico que nos fornecem recursos para determinação de zeros de uma forma aproximada, porém de acordo com uma precisão pré-determinada.

Com o Cálculo Numérico, temos métodos distintos para o cálculo aproximado das raízes de uma equação qualquer, mas a ideia central dos métodos é partir de uma aproximação inicial para a raiz e, em seguida, refinar essa aproximação por meio de uma sequência de cálculos que são repetidos a cada passo e que chamamos de ITERAÇÃO.

Assim, os métodos numéricos consistem de duas etapas:

- **Primeira etapa:** localização ou isolamento das raízes – consiste na obtenção de um intervalo fechado [a,b] que contenha uma única raiz ($\bar{x}$) da função.
- **Segunda etapa:** aproximação ou refinamento – consiste na obtenção de aproximações cada vez melhores para a raiz, até a precisão fixada (ε) ou, em outras palavras, dentro do erro pré-estabelecido.

Em nossa disciplina, dentre os métodos para o cálculo das raízes de funções reais, estudaremos dois, são eles:

- **Método da Bissecção**
- **Método de Newton-Raphson**

Para cada um desses métodos, realizamos as Etapas 1 e 2, e cada um tem sua característica, mas ambos convergem para a raiz dentro de um intervalo estabelecido.

LOCALIZAÇÃO OU ISOLAMENTO DAS RAÍZES

Nessa etapa, vamos utilizar a construção de gráficos para localização e isolamento das raízes. A construção do gráfico pode auxiliar com relação ao domínio da função, aos pontos de descontinuidade, aos intervalos de crescimento e decrescimento, aos pontos de máximo e mínimo, à concavidade, aos pontos de inflexão e às assíntotas da função.

Exemplo 1: localizar as raízes reais da função $f(x)=x^3-4x^2+2$.

1° passo: construir uma tabela, atribuindo valores para *x e* analisar o comportamento do sinal de função f(x).

Tabela 1 – Valor e análise do comportamento de sinal da função f(x) = x³ -4x² + 2 .

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x) = x^3 - 4x^2 + 2$	-223	-126	-61	-22	-3	2	-1	-6	-7	2	27

Ao analisarmos a tabela, verificamos que a função alternou de sinal entre x= -1 *e* x= 0, assim como em x= 0 *e* x =1 *e*, em x =3 *e* x = 4. Então, existe pelo menos uma raiz em cada intervalo. No entanto, por se tratar de um polinômio de terceiro grau, sabemos que f(x) possui três raízes. Assim sendo, existe apenas uma raiz em cada intervalo:

Intervalo I_1 = [-1,0]; Intervalo I_2 = [0,1]; Intervalo I_3 = [3,4].

Utilizando os mesmos valores da tabela, podemos fazer a construção do esboço de um gráfico para visualizarmos os intervalos em que existem as raízes.

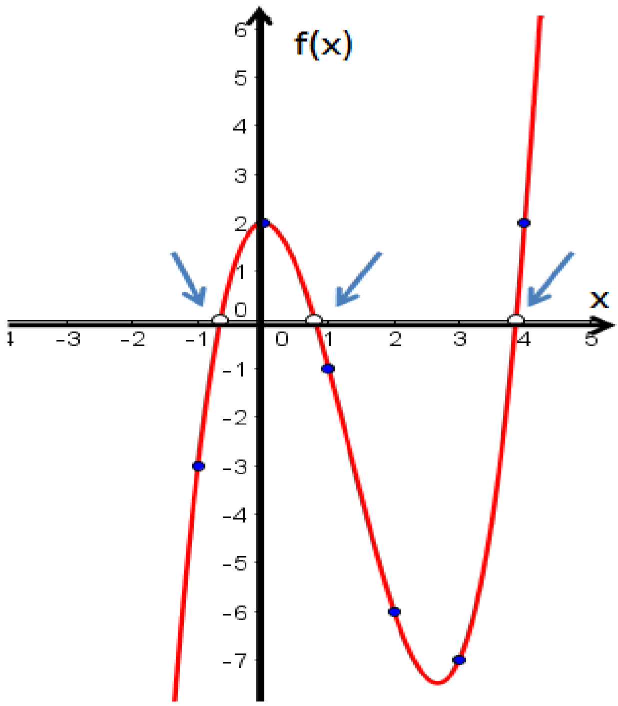

Figura 6 - Gráfico da função $f(x)=x^3-4x^2+2$ com a localização dos intervalos das raízes – **Fonte:** O Autor.

Exemplo 2: localizar a raiz positiva da função $f(x)=4\cos x - e^x$.

Estamos interessados em isolar a raiz positiva dessa função. Se formos utilizar a análise gráfica, não será trivial a construção do gráfico. Neste caso, faremos a função inicial $f(x) = 0$ e dessa forma poderemos desmembrar a função f(x) inicial em dois membros, separando f(x) em duas funções g(x) e h(x). Essa etapa é importante, pois a abscissa da intersecção das funções g(x) e h(x) é a abscissa da raiz de f(x).

Por exemplo: $f(x)=4\cos x - e^x$

$4\cos x - e^x = 0$ e, separando as funções, temos:

$4\cos x = e^x$.

Do lado esquerdo da equação, temos g(x) e do lado direito, h(x). Assim:

$g(x) = 4\cos x$ e $h(x) = e^x$.

Depois, elaboramos uma tabela com pontos, partindo de x=0, já que queremos a raiz positiva. Não se esqueça de trabalhar com a calculadora em radianos, pois vamos trabalhar com uma função trigonométrica!

Tabela 2 - Valor e análise do comportamento de sinal de g(x) e h(x).

x	0	0,5	1	1,5	2
g(x)=4cosx	4	3,51033	2,161209	0,282949	-1,66459
h(x)=e^x	1	1,648721	2,718282	4,481689	7,389056

Ao analisarmos a Tabela 2, podemos verificar que, no intervalo entre 0,5 e 1, a imagem de $g(x) = 4\cos x$ vai de 3,51 para 2,16, enquanto que $h(x) = e^x$ vai de 1,64 para 2,71. Dessa forma, podemos verificar que os valores convergem, e que neste intervalo há um determinado ponto em que $g(x) = h(x)$ e a abscissa desse ponto é o zero da função $f(x)=4\cos x-e^x$.

Podemos agora esboçar o gráfico de g(x) =4cosx e h(x) =e^x, pois ao obtermos a equação equivalente g(x) = h(x) e tabelarmos valores e esboçarmos os respectivos gráficos, localizaremos o intervalo no qual g(x) = h(x), o que também representa f(x) = 0. Analisaremos os respectivos gráficos:

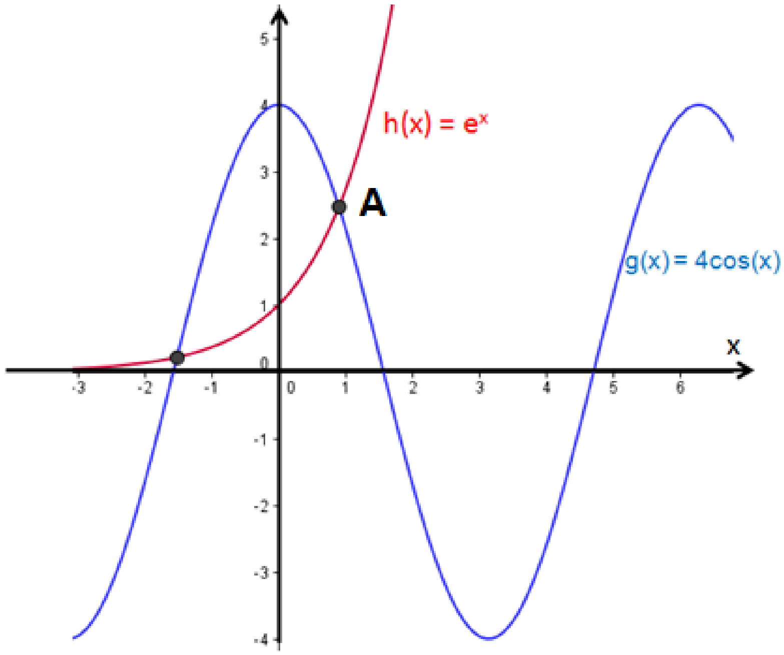

Figura 7 - Gráficos das funções g(x)=4cosx e h(x)=e^x, indicando a localização da intersecção A – **Fonte:** O Autor.

Verificamos no gráfico da Figura 7 que o ponto A, que é o ponto de intersecção entre g(x) e h(x), está localizado no intervalo [0,5 ; 1].

Já na Figura 8, vemos que a abscissa de A coincide com a abscissa da raiz da função no intervalo entre [0,5 ; 1]. Notamos também que há ainda outra raiz, mas, neste exemplo, vamos nos ater somente à raiz positiva.

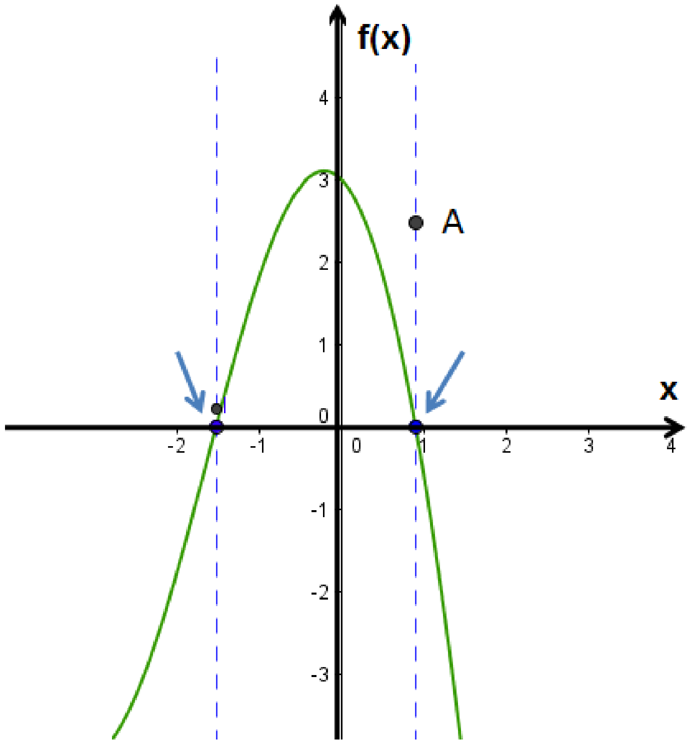

Figura 8 - Gráfico da função f(x) = 4cosx - e^x - **Fonte:** O Autor.

Exemplo 3: Localizar a raiz positiva da função f(x)=lnx + x .

1° passo: para separar as funções, primeiro vamos igualar f(x) a zero para então desmembramos lnx + x. Dessa forma, teremos que lnx + x = 0 e depois, lnx = -x . Do lado esquerdo da equação temos g(x) e do lado direito, h(x). Assim:

g(x) = lnx e h(x) =-x .

2° passo: construir a tabela com valores para x, em g(x) e h(x).

Além de o exemplo solicitar a raiz positiva, sabemos que o domínio da função lnx é R_{+}^{*}, portanto, para construirmos a tabela, usaremos números positivos.

Tabela 3 - Valor e análise do comportamento de sinal das funções g(x) e h(x) - **Fonte:** O Autor.

X	0	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	2
g(x) =lnx	-∞	-1,38	-0,69	-0,29	0	0,22	0,41	0,69
h(x) = -x	0	-0,25	-0,5	-0,75	-1	-1,25	-1,5	-2

3º passo: verificamos que há uma convergência de valores entre 0,5 e 0,75, porém para auxiliar a localização da intersecção, podemos construir o esboço dos gráficos de g(x) = lnx e de h(x) = -x

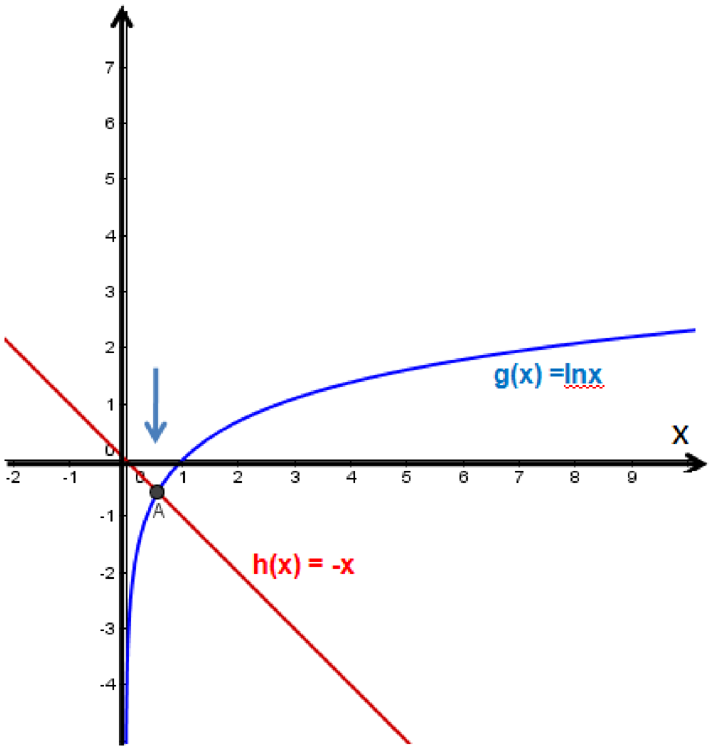

Figura 9 - Gráfico das funções g(x) = lnx e h(x) = -x .

Assim, verificamos a intersecção entre g(x) e h(x), conforme a Figura 10:

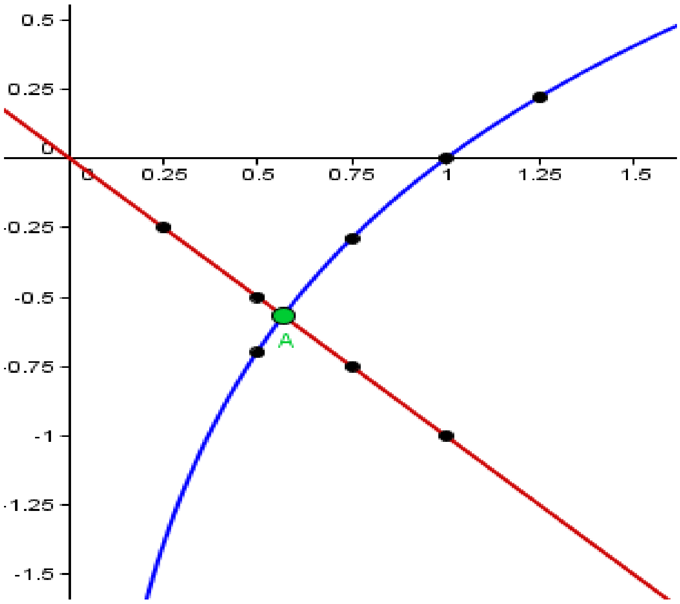

Figura 10 - Gráfico com detalhe da intersecção entre g(x) e h(x) .

Note que a intersecção entre g(x) e h(x) ocorre justamente no intervalo entre 0,5 e 0,75, e para confirmar essa informação, podemos verificar se na função f(x) = lnx + x existe a inversão de sinal entre o intervalo 0,5 e 0,75. Assim, sendo f(x) = lnx + x, temos que:

f(0,5) = ln(0,5) + (0,5) = -0,69 e, portanto, f(x) < 0 ;

f(0,75) = ln(0,75) + (0,75) = 0,46 e, portanto, f(x) > 0 .

Como temos uma inversão de sinal de f(x) no intervalo $I = [0{,}5; 0{,}75]$, podemos concluir que há uma raiz real nesse intervalo.

Para treinar

Agora isole os zeros reais, definindo o intervalo das seguintes funções:

Raiz positiva em f(x) = 1 – xlnx . Resposta: [1, 2]

Raiz positiva em f(x) = $3x^2$ - 5x – 4 . Resposta: [2 , 3]

Raiz positiva em f(x) = 4senx – e^x . Resposta: [0, 1]

Ao identificarmos o intervalo no qual temos uma raiz real, nós chegamos a uma aproximação muito superficial do valor da raiz. No exemplo da função f(x) = 4cosx – e^x, identificamos a existência de uma raiz positiva no intervalo [0,5; 1], mas podemos identificar melhor essa raiz por meio da segunda etapa do processo que consiste no refinamento, ou seja, dado este intervalo, podemos identificar com maior precisão qual é o valor da raiz procurada.

REFINAMENTO

Na etapa anterior, aprendemos a isolar as raízes de uma função. Como resultado, obtivemos um ou mais intervalos fechados [a,b], contendo uma única raiz em cada um deles. Nessa etapa, veremos os métodos numéricos para o cálculo de uma aproximação para a raiz, o método da **Bissecção** e, a seguir, o método de **Newton-Raphson**. Começaremos pelo primeiro.

MÉTODO DA BISSECÇÃO

Se f(x) é contínua em [a,b], com inversão de sinal entre f(a) e f(b), por consequência, f(a)*f(b)<0 e, com apenas uma raiz nesse intervalo, podemos utilizar esse método. O objetivo é diminuir ou fechar o intervalo [a,b] até atingirmos a precisão desejada ($\frac{|b-a|}{2} < \varepsilon$). A cada iteração, dividimos o intervalo ao meio, modificando o valor de a ou de b. Nossa estimativa inicial ($\overline{x_1}$) para a raiz é:

$$\boxed{\overline{x_1} = \frac{a+b}{2}\,.}$$

Seguiremos então os seguintes passos:

Calculamos f(a), f(b) e f($\overline{x_1}$) .

<u>1ª condição</u>: se f(a)<0, f(b)>0 e f($\overline{x_1}$)>0, devemos fazer b= $\overline{x_1}$, pois devemos lembrar que entre os extremos do intervalo, deveremos ter a inversão de sinal. Então, nesse caso, teremos como novo intervalo [a, $\overline{x_1}$], já que f(x) <0 e f($\overline{x_1}$) > 0.

<u>2ª condição:</u> se f(a)<0, f(b)>0 e f($\overline{x_1}$)<0, devemos fazer a= $\overline{x_1}$. Neste caso, o novo intervalo será $[\overline{x_1}, b]$, já que f($\overline{x_1}$) < 0 e f(b) > 0.

A partir daí repetimos o processo, ou seja, dividimos novamente o intervalo ao meio, e fazemos novamente a análise do sinal de f(x) para cada um dos extremos e de $\overline{x_n}$, a fim de definirmos o novo intervalo.

Exemplo: f(x) = 4cosx – e^x.

Na etapa da definição de intervalo, nós trabalhamos a função f(x) = 4cosx - e^x. Vamos partir para o refinamento da raiz no intervalo [0,5;1], para isso utilizaremos 4 casas decimais, optando pelo arredondamento e adotando um erro ε inferior a 0,01.

1º passo, calculamos $\overline{x_1}$ a partir da média entre a e b, sendo a = 0,5 e b =1, temos: $\overline{x_1} = \frac{a+b}{2} = \frac{0,5+1}{2} = 0,75$.

Agora, partiremos para a análise dos sinais:

f(a) = 4cos(0,5) - $e^{0,5}$ = 1,8616, assim f(a) > 0 ;

f(b) = 4cos(1) - e^1 = -0,5571, assim f(b) < 0 ;

f(x_1) = 4cos(0,75) - $e^{0,75}$ = 0,8098, assim f(x_1) > 0 .

Como sabemos, a condição para que o intervalo contenha a raiz é a de que o produto das imagens dos extremos tenha sinais inversos, ou seja, f(a)*f(b) < 0, o novo intervalo será [b, x_1] e dividiremos novamente esse intervalo ao meio, fazendo a média entre b e x_1 , obtendo x_2.

Podemos executar esse processo por meio de uma tabela, acompanhando cada iteração:

Tabela 4 - Início da iteração do método da bissecção

I	**n**	**a**	**b**	x_n	**f(a)**	**f(b)**	**f(x_n)**	**Erro** $\varepsilon = \left\|\frac{b-a}{2}\right\|$
1	1	0,5	1,0	0,75	**1,8616**	**-0,5571**	**0,8098**	0,25

Fazendo agora a média entre 0,75 e 1,0 temos o novo x_n, que chamaremos x_2 = 0,8750 e analisaremos os sinais das respectivas imagens.

Tabela 5 - Análise do sinal no método da bissecção.

I	**n**	**a**	**b**	x_n	**f(a)**	**f(b)**	**f(x_n)**	**Erro** $\varepsilon = \left\|\frac{b-a}{2}\right\|$
1	1	0,5	1,0	0,75	**1,8616**	**-0,5571**	**0,8098**	0,25
2	2	0,75	1,0	0,8750	**0,8098**	**-0,5571**	**0,1651**	0,1250

De acordo com os cálculos acima, temos que o novo intervalo será composto por b e x_1, ou seja [0,75; 0,8750] e repetimos o processo, agora para x_3. E assim sucessivamente. O critério de parada será de acordo com a margem de erro pré-estabelecida. No caso de nosso exemplo queremos erro menor que 0,001, portanto consideraremos o x_n a raiz aproximada de acordo com a margem de erro.

Tabela 6 – Tabela mostrando todas as iterações para se atingir a precisão desejada no método da bissecção para o exemplo em questão.

I	**n**	**a**	**b**	x_n	**f(a)**	**f(b)**	**f(x_n)**	**Erro**$\varepsilon = \left\|\frac{b-a}{2}\right\|$
1	1	0,5	1,0	0,75	1,8616	-0,5571	0,8098	0,25
2	2	0,75	1,0	0,8750	0,8098	-0,5571	0,1651	0,1250
3	3	0,8750	1,0	0,9375	0,1651	-0,5571	-0,1864	0,0625
4	4	0,8750	0,9375	0,9063	0,1651	-0,1864	-0,0085	0,0313
5	5	0,8750	0,9063	0,8907	0,1651	-0,0085	0,0786	0,0157
6	6	0,8907	0,9063	0,8985	0,0786	-0,0085	0,0352	0,0078
7	7	0,8985	0,9063	0,9024	0,0352	-0,0085	0,0134	0,0039
8	8	0,9024	0,9063	0,9044	0,0134	-0,0085	0,0022	0,0020
9	9	0,9044	0,9063	0,9054	0,0022	-0,0085	-0,0034	0,0010
10	10	0,9044	0,9054	0,9049	0,0022	-0,0034	-0,0006	0,0005

Como 0,0005 < 0,001, podemos considerar $x_{10} = 0{,}9049$ como a raiz procurada dentro do erro estabelecido.

Pontos importantes:

Convergência: estamos estudando métodos iterativos em que partimos de uma estimativa inicial e, por meio do método numérico utilizado, obtemos aproximações sucessivas com erro cada vez menor. Quando isso ocorre, dizemos que o método é convergente. O método da bissecção é convergente, quando sabemos da existência de uma raiz em determinado intervalo.

Estimativa do número de iterações: podemos saber quantas iterações são necessárias para atingirmos a precisão desejada, utilizando o método da bissecção. Basta utilizarmos a seguinte equação:

$$n > \frac{\log(b_0 - a_0) - \log \varepsilon}{\log 2}.$$

No exemplo que resolvemos, podemos verificar o número de iterações. Sendo a_0=0, $b = 1$ e $\varepsilon = 0{,}01$, temos:

$$n > \frac{\log(1 - 0) - \log 0{,}001}{\log 2};$$

$$n > \frac{\log(1) - \log 0{,}001}{\log 2};$$

$$n > \frac{0 - (-3)}{0{,}301030};$$

$$n > 9{,}965.$$

Com a precisão estabelecida, comprovamos que o resultado será obtido após 10 iterações, a partir de nosso exemplo.

MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON

O método de refinamento de Newton-Raphson é um método iterativo no qual converge para a raiz da função $f(x)$ por intermédio da seguinte função:

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \ .$$

Ou seja, para o cálculo da raiz, por esse método, deveremos determinar a primeira derivada da função em questão para, a partir dela, gerar as possíveis raízes $\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x_3}$ .... , onde:

$\overline{x_1} = \varphi\ (\overline{x_0})$; $\overline{x_2} = \varphi\ (\overline{x_1})$; $\overline{x_3} = \varphi\ (\overline{x_2})$ .... até que o processo seja interrompido de acordo com a margem de erro pré-estabelecida, ou seja, $|f(\overline{x_1})| < \varepsilon$.

Exemplo: utilizando o método de Newton-Raphson, obter a raiz da função f(x) = x^2 +x -6 contida no intervalo I=[1,3], partindo de $x_0 = 1{,}5$ com uma precisão menor ou igual a 0,001.

Primeiro passo: devemos obter a derivada $f'(x)$ da função f(x):

Se f(x) = x^2 +x -6, então $f'(x)$= 2x + 1 .

Segundo passo: substituir a função f(x) e sua derivada $f'(x)$ na equação:

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

$$\varphi(x) = x - \frac{x^2+x-6}{2x+1} \quad \text{e} \quad \varphi(x) = \frac{2x^2+x-x^2-x+6}{2x+1}, \quad \text{logo} \quad \varphi(x) = \frac{x^2+6}{2x+1} \ .$$

Terceiro passo: a partir daí, devemos fazer a substituição dos valores, e utilizaremos uma tabela para organizar e facilitar os cálculos:

Tabela 7 - Tabela de Iteração - Método de Newton Raphson

n	$\overline{x_n} = \varphi\ (\overline{x_{n-1}})$	$\lvert f(\overline{x_n})\rvert < \varepsilon$
1	$\overline{x_1} = \varphi\ (\overline{x_0})$ $\overline{x_1} = \frac{(1,5)^2 + 6}{2(1,5) + 1} = 2,0625$	$f(\bar{x}_1)$ $f(\bar{x}_1) = (2,0625)^2 + (2,0625) - 6$ $f(\bar{x}_1) = 0,31640625$
2	$\overline{x_2} = \varphi\ (\overline{x_1})$ $\overline{x_1} = \frac{(2,0625)^2 + 6}{2(2,0625) + 1} = 2,00076$	$f(\bar{x}_2)$ $f(\bar{x}_2) = (2,00076)^2 + (2,00076) - 6$ $f(\bar{x}_2) = 0,0038$
3	$\overline{x_3} = \varphi\ (\overline{x_2})$ $\overline{x_3} = \frac{(2,00076)^2 + 6}{2(2,00076) + 1}$ $= 2,0000$	$f(\bar{x}_3)$ $f(\bar{x}_3) = (2,0000)^2 + (2,0000) - 6$ $f(\bar{x}_3) = 0$

Como o erro na iteração 3 é menor que o erro estabelecido pelo enunciado do problema (0<0,001), concluímos que o mesmo está resolvido e a solução é: $\bar{x} = 2,0000 \pm 0$

Observe que, assim como o método da Bissecção, o método de Newton-Raphson é convergente.

É importante observarmos que a convergência no método de Newton-Raphson está sempre garantida para um intervalo [a,b] contendo a raiz de f(x), desde que f(x) e sua derivada $f'(x)$ sejam contínuas nesse intervalo. Portanto, se utilizarmos uma estimativa inicial para $\overline{x_0}$ tal que $\overline{x_0}$ Є [a,b], obteremos a convergência e, consequentemente, a raiz procurada. Assim, nesse método, é muito importante realizar a etapa 1 da localização do intervalo no qual sabemos da existência da raiz.

Para treinar:

Seguindo o que aprendemos no final esta unidade, procure determinar as raízes com o método de Newton-Raphson para as seguintes funções:

1) $f(x) = \sqrt{x} - 5e^{-x}$, contida no intervalo $I = [1,2]$, com precisão igual a 0,0001 e partindo de $\bar{x}_0 = 1{,}5$. Resolva o problema considerando 6 casas decimais.

   A resposta esperada é: 3 iterações, sendo $\bar{x}_3 = 1{,}430443$ e $\varepsilon = 0{,}000003$.

2) $f(x) = 4cosx - e^x$, contida no intervalo [0,5; 1,0], com precisão igual a 0,0001 e partindo de $\bar{x}_0 = 0{,}75$. Resolva o problema arredondando para 6 casas decimais.

Chegamos ao final de nossa unidade! Você deve rever os exemplos, refazer os exercícios, ouvir o material narrado, acessar o material complementar assim como a bibliografia, pois eles irão enriquecer sua aprendizagem. Procure sempre seu tutor para esclarecer pontos e aprofundar o sua aprendizagem.

ANOTAÇÕES

REFERÊNCIAS

FRANCO, N.M.B. - **Cálculo Numérico.** São Paulo: Editora Pearson, 2006.

HUMES, A.F.P.C., MELO, I.S.H., YOSHIDA, L.K., MARTINS, W.T. – **Noções de Cálculo Numérico**. São Paulo: Editora McGraw Hill, 1984.

BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D. – **Análise Numérica**. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2003.

RUGGIERO, M. A. G., LOPES, V.L.R. **Cálculo Numérico: Aspectos Teóricos e Computacionais**, 2ª ed. São Paulo: Editora Makron Books, 1998.

SPERANDIO, D., MENDES, J.T., SILVA, L.H.M. **Cálculo Numérico: Características Matemáticas e Computacionais dos Métodos Numéricos**. São Paulo: Editora Pearson, 2003.

Campus Virtual
Cruzeiro do Sul
Educação a Distância

www.cruzeirodosul.edu.br

Campus Liberdade

Rua Galvão Bueno, 868

01506-000

São Paulo SP Brasil

Tel: (55 11) 3385-3000