

# Teoria dos Grafos



Cruzeiro do Sul Virtual  
Educação a distância



# Material Teórico



Planaridade e Conectividade

**Responsável pelo Conteúdo:**

Prof. Dr. Cleber Silva Ferreira da Luz

**Revisão Textual:**

Prof. Me. Luciano Vieira Francisco



# UNIDADE

## Planaridade e Conectividade



- **Introdução;**
- **Conexidade;**
- **Grafos Finitos e Infinitos;**
- **Planaridade de Grafo;**
- **Coloração;**
- **Representações de Grafos.**



### OBJETIVO DE APRENDIZADO

- Conhecer todos os conceitos sobre conectividade em grafos, bem como os conceitos de grafos finitos e infinitos e de coloração.



# Orientações de estudo

Para que o conteúdo desta Disciplina seja bem aproveitado e haja maior aplicabilidade na sua formação acadêmica e atuação profissional, siga algumas recomendações básicas:

Determine um horário fixo para estudar.

Mantenha o foco! Evite se distrair com as redes sociais.

Procure manter contato com seus colegas e tutores para trocar ideias! Isso amplia a aprendizagem.

Seja original! Nunca plágie trabalhos.

Aproveite as indicações de Material Complementar.

Conserve seu material e local de estudos sempre organizados.

Não se esqueça de se alimentar e de se manter hidratado.

## Assim:

- ✓ Organize seus estudos de maneira que passem a fazer parte da sua rotina. Por exemplo, você poderá determinar um dia e horário fixos como seu “momento do estudo”;
- ✓ Procure se alimentar e se hidratar quando for estudar; lembre-se de que uma alimentação saudável pode proporcionar melhor aproveitamento do estudo;
- ✓ No material de cada Unidade, há leituras indicadas e, entre elas, artigos científicos, livros, vídeos e sites para aprofundar os conhecimentos adquiridos ao longo da Unidade. Além disso, você também encontrará sugestões de conteúdo extra no item **Material Complementar**, que ampliarão sua interpretação e auxiliarão no pleno entendimento dos temas abordados;
- ✓ Após o contato com o conteúdo proposto, participe dos debates mediados em fóruns de discussão, pois irão auxiliar a verificar o quanto você absorveu de conhecimento, além de propiciar o contato com seus colegas e tutores, o que se apresenta como rico espaço de troca de ideias e de aprendizagem.

# Introdução

Nesta Unidade serão abordados alguns conceitos muito importantes na teoria dos grafos: conexidade de grafos, grafos finitos e grafos infinitos, planaridade de grafos e o teorema de Kuratowski, coloração de grafos e representações de grafos.

O primeiro conceito que estudaremos é **conexidade**. Este conceito visa o estudo da conexidade do grafo. A conexidade analisa se um grafo  $G$  é conexo ou não, isto é, se partindo de um vértice **A** é possível chegar ao vértice **B** ou não. Esta conexidade é observada para todos os vértices do grafo **G**.

O segundo conceito que será abordado é o de **grafos finitos e infinitos**. Um grafo é considerado finito quando possui o número finito de vértices e de arestas; caso contrário, será infinito.

O terceiro conceito a ser abordado é **planaridade de grafos**. Um grafo planar é aquele imerso em um plano no qual as suas arestas nunca se cruzam. Grafos planares são aplicados em:

- Linhas de produção em uma indústria;
- Linhas de transmissão de energia elétrica;
- Rodovias que conectam cidades;
- Circuitos integrados, entre outros.

Planaridade de grafo e o teorema de Kuratowski serão apresentados com mais detalhes na Seção 4.

Após estudar o conceito de planaridade de grafos, o próximo assunto que será abordado é a **coloração de grafos**. O problema da coloração é dos mais conhecidos na teoria dos grafos, e consiste em colorir um grafo  $G = (V, A)$  utilizando a menor quantidade de cores possível. Todavia, colorir um grafo não é tão fácil assim, os vértices adjacentes devem possuir cores diferentes – este problema é apresentado com mais detalhes na Seção 5.

Por fim, o último assunto abordado nesta Unidade é **representações de grafos**. Existem duas formas de representar um grafo, por **listas de adjacências** e por **matriz de adjacências** – este assunto é explorado na Seção 6.

## Conexidade

O conceito de conexidade analisa se um grafo é conexo ou não, ou seja, verifica se partindo do vértice **A** é possível chegar ao vértice **B**. Boa parte das aplicações modeladas por grafos necessita que um vértice esteja ligado ao outro, ou que de um vértice **A** exista um caminho para chegar ao vértice **B**.

## Grafo Conexo

Um grafo  $G = (V, A)$  é dito conexo se existir um caminho entre qualquer par de vértices. Caso contrário, será desconexo. A Figura 1a exemplifica um grafo conexo, enquanto a Figura 1b exemplifica um grafo desconexo:

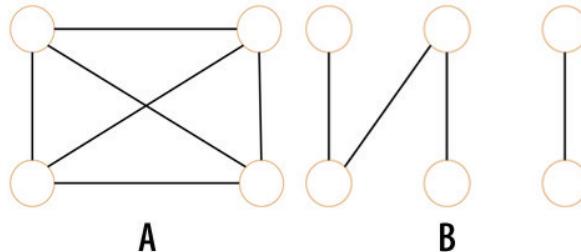


Figura 1 – Grafo conexo e desconexo

Fonte: Acervo do Conteudista

É importante observar que se todos os vértices de um grafo  $G$  com  $n$  vértices tem um grau maior ou igual a  $\frac{n-1}{2}$ , então esse grafo é conexo. Agora, quando no grafo não existe nenhuma aresta, é dito **totalmente desconexo**.

## Componente Conexa

Na teoria dos grafos, uma componente conexa de um grafo  $G = (V, A)$  é um **subgrafo conexo maximal** de  $G$  – para mais detalhes de subgrafos, veja a Unidade II. O número de componentes conexas em  $G$  é denotado por  $c$ . Em palavras mais simples, um grafo  $G$  desconexo é formado por, pelo menos, dois subgrafos conexos; neste caso, cada subgrafo conexo é denominado **componente conexa de  $G$** . A Figura 2 ilustra componentes conexas de um grafo  $G$ . Grafos conexos possuem apenas uma componente conexa.

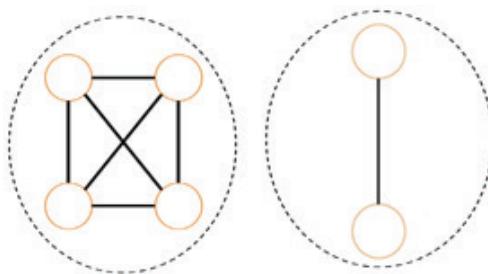


Figura 2 – Componente conexa

Fonte: Acervo do Conteudista

Uma componente conexa  $H = (NH, MH)$  de um grafo  $G = (N, M)$  é chamada de ímpar se  $|NF|$  for ímpar; caso  $|NF|$  for par, será chamada de par. A quantidade de componentes ímpares ou pares de um grafo  $G$  será denotado por  $q(G)$ .

## Conexidade em Arestas

A conexidade em arestas de um grafo conexo de  $G$  é denotada pelo **menor número de arestas cuja remoção resulta na desconexão** de  $G$ . A Figura 3b exemplifica a possibilidade de desconexão do grafo da Figura 3a. Neste exemplo, temos que  $l(G) = 2$ .

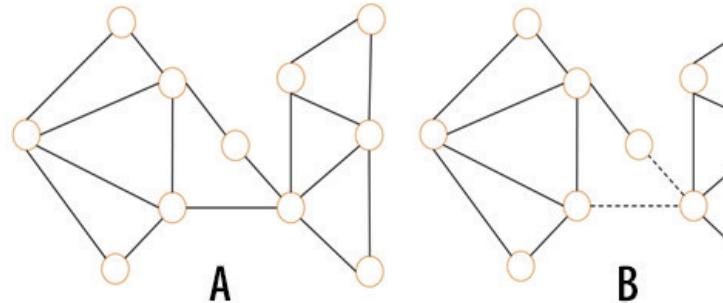


Figura 3 – Conexidade em arestas

Fonte: Adaptado de Goldberg e Goldberg, 2012

## Conexidade em Vértices

Em um grafo  $G$ , a conectividade ou conexidade em vértices é o **menor número de vértices cuja remoção resulta em um grafo desconexo ou em um grafo trivial**. Este número é denotado por  $K(G)$ . A conexidade em vértices é também chamada de **conexidade de grafo**. As figuras 4b e 4c exemplificam as remoções de vértices que resultam em um grafo **desconexo**. Neste exemplo, tem-se  $K(G) = 1$ .

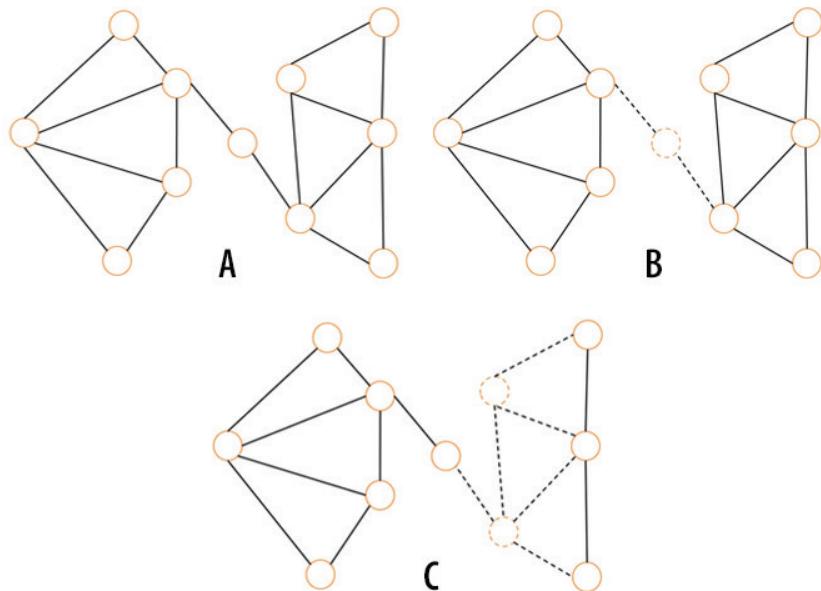


Figura 4 – Conexidade em vértices

Fonte: Adaptado de Goldberg e Goldberg, 2012

## Grafo K-Conexo

Na teoria dos grafos, um grafo é denominado **k-conexo** quando para qualquer par de vértices de G existem, pelo menos, **K** caminhos diferentes entre os quais. As figuras 5b, 5c e 5d ilustram três caminhos diferentes entre o mesmo par de vértice do grafo da Figura 5a. Qualquer que seja o par de vértices do grafo, existirão três caminhos diferentes entre os quais; assim, **k = 3** para o grafo da Figura 5a.

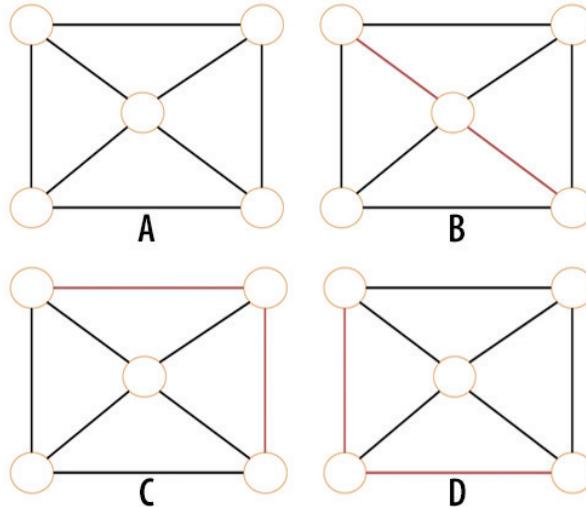


Figura 5 – Grafos k-conexo

Fonte: Adaptado de Goldbarg e Goldbarg, 2012

A Figura 6 Ilustra um grafo 3-conexo (a), uma desconexão em vértices (b) e uma desconexão em arestas (c).

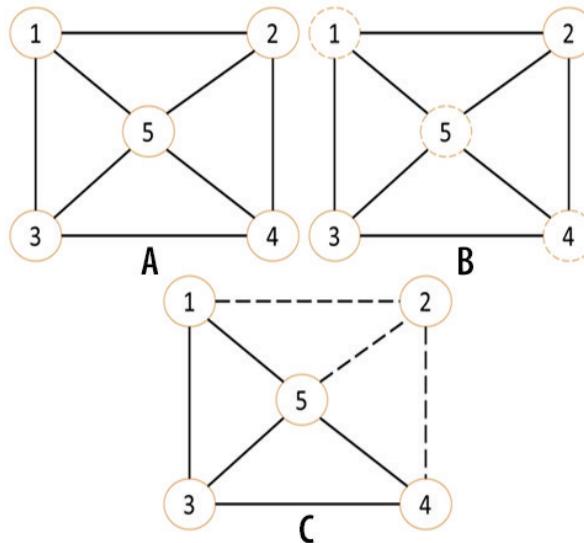


Figura 6 – Grafo conexo, grafo desconexo em vértice e grafo desconexo em arestas

Fonte: Adaptado de Goldbarg e Goldbarg, 2012

## Vértices Fortemente Conexos

Em um **grafo  $G = (V, A)$  direcionado**, é dito que dois vértices  $i$  e  $j$  estão **fortemente conectados**, se existe caminho direcionado de  $i$  para  $j$  e de  $j$  para  $i$  em  $G$ . Agora, dois vértices  $i$  e  $j$  estão **fortemente conectados em um grafo  $G = (V, A)$  não direcionado**, se existem dois caminhos distintos em arestas de  $i$  para  $j$  em  $G$  (GOLDBARG; GOLDBARG, 2012).

## Vértices Fracamente Conexos

Em um **grafo  $G = (V, A)$  direcionado**, é dito que dois vértices  $i$  e  $j$  estão **fracamente conectados**, se existe apenas um caminho direcionado de  $i$  para  $j$  ou de  $j$  para  $i$  em  $G$  (GOLDBARG; GOLDBARG, 2012).

## Grafo Fracamente Conexo

Na teoria dos grafos, um **grafo  $G = (V, A)$  direcionado** é dito **fracamente conexo** quando existe, pelo menos, um par de vértices  $i$  e  $j$  em  $G$  tal que o número de caminhos entre  $i$  e  $j$  seja menor que 1 (GOLDBARG; GOLDBARG, 2012). A Figura 7 ilustra dois grafos conexos. O grafo apresentado na Figura 7a é fortemente conexo, enquanto o grafo apresentado na Figura 7b é fracamente conexo. O grafo da Figura 7b é fracamente conexo porque do vértice 5 não é possível chegar a qualquer outro vértice.

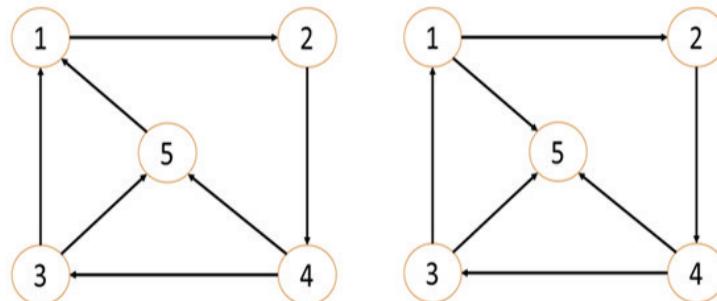


Figura 7 – Exemplo de grafos fortemente conexo e fracamente conexo.

Fonte: Adaptado de Goldbarg e Goldbarg, 2012

## Algoritmo Roy para Encontrar Componentes Conexas

O algoritmo Roy é simples e elegante. Esse algoritmo encontra componentes fortemente conexas de um grafo  $G$  direcionado através de relações de vizinhança. Identifica conjuntos de vértices que possuem sucessores e antecessores comuns. A seguir, o algoritmo Roy é apresentado:

```

1 - Ler G = (N,M)
2 - i ← 0
3 - V ← N
4 - Enquanto V ≠ ∅ Fazer
5 -   Escolher e marcar um vértice qualquer v, v ∈ V, com (+) e (-)
6 -   Enquanto for possível marcar com (+) um vértice w não marcado
        com (+) que tenha sucessor um vértice marcado com (+)
7 -     Marcar w com (+)
8 -   Fim_Enquanto
9 -   Enquanto for possível marcar com (-) um vértice w não marcado
        com (-) que tenha como antecessor um vértice marcado com (-)
10 -     Marcar w com (-)
11 -   Fim_Enquanto
12 -   i ← i + 1
13 -   Si ← vértices que estão marcados com (+) e (-) simultaneamente
14 -   V ← V \ Si
15 -   Desmarcar todos os vértices de v
16 - Fim_Enquanto
  
```

## Grafos Finitos e Infinitos

Duas definições amplamente utilizadas na teoria dos grafos são as de **grafo finito** e **grafo infinito**. Um grafo é denominado **finito** quando possui um número finito de vértices e de arestas. Caso o grafo tenha um número infinito de vértices e arestas é denominado **infinito**. O grafo 1 da Figura 8 é finito, já o grafo 2 da mesma Figura é infinito, o elemento infinito do grafo 2 é representado por linhas pontilhadas.

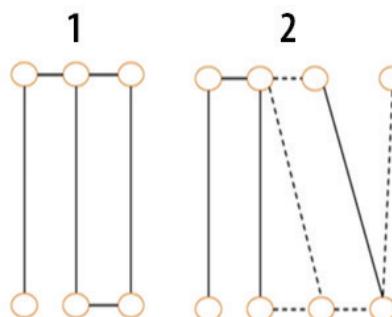


Figura 8 – Grafo finito e infinito

Fonte: Acervo do Conteudista

# Planaridade de Grafo

Segundo a literatura, a planaridade de grafos surgiu com Henry Dudeney em 1913, quem formulou o famoso **problema das três casas**; neste problema é necessário conectar três casas com três infraestruturas básicas – gás, água e energia –, conforme ilustrado na Figura 9. O problema se encontra em realizar estas conexões sem que se cruzem.

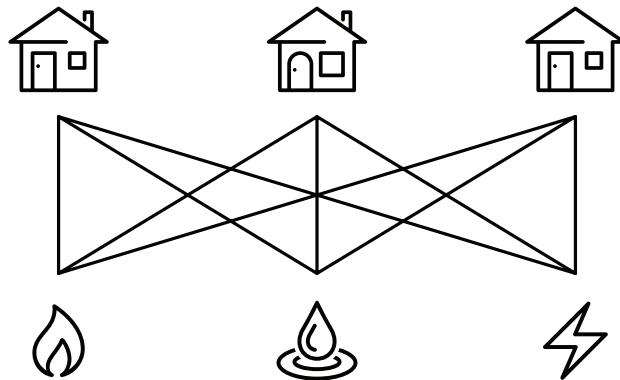


Figura 9 – Problema das três casas

Fonte: Adaptado de Getty Images

Matematicamente, tal problema pode ser formulado da seguinte maneira: dado um grafo  $K_{3,3}$  que é bipartido e completo, gostaríamos de saber se esse grafo pode ser desenhado no plano de tal forma que as suas arestas nunca se cruzem.

Depois de entender toda a contextualização da origem da planaridade de grafos, podemos, finalmente, definir um grafo plano. Um grafo  $G$  é planar se admite uma representação no plano de modo que neste não exista cruzamento de arestas. A Figura 10 exemplifica dois grafos planares:

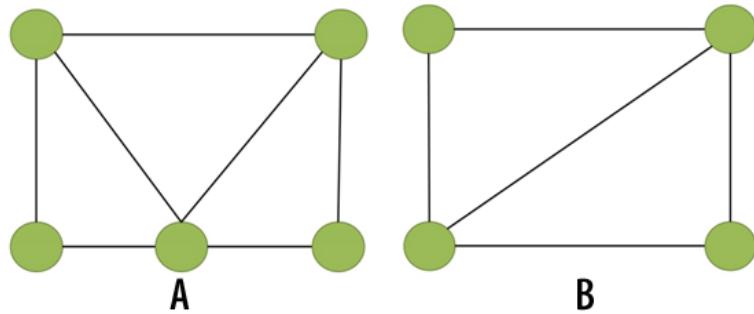


Figura 10 – Exemplos de grafos planares

Fonte: Acervo do Conteudista

Um grafo planar divide o plano em várias regiões. Uma região é finita se a sua área é finita, caso contrário, a região será infinita. A Figura 11 exemplifica dois grafos planos em regiões. O grafo da Figura 11a divide o plano em 4 regiões, enquanto o grafo da Figura 11b divide o plano em 10 regiões, sendo a região 10 infinita.

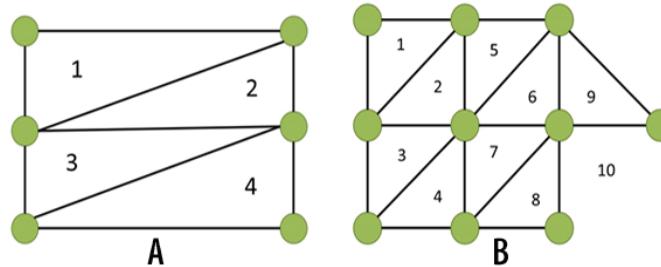


Figura 11 – Divisão de regiões em grafos planos

Fonte: Acervo do Conteudista

## Teorema de Kuratowski

O teorema de Kuratowski diz que um grafo  $G = (V, A)$  é planar se e somente se  $G$  não contiver uma subdivisão  $K_5$  ou  $K_{3,3}$ . Define uma caracterização de grafos planares em termos de um número essencialmente finito de subgrafos proibidos. A Figura 12a ilustra uma representação do  $K_5$ , enquanto a Figura 12b uma representação do  $K_{3,3}$ . Como é possível observar, estes grafos não podem ser planos, pois as suas arestas se cruzam.

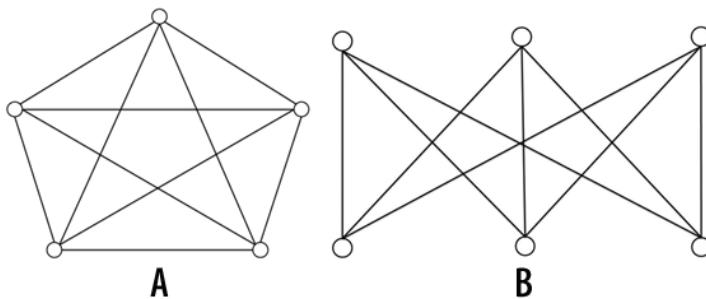


Figura 12 – Representação do  $K_5$  e  $K_{3,3}$

Fonte: Acervo do Conteudista

## Coloração

Segundo Goldbarg e Goldbarg (2012), colorir um grafo  $G = (V, A)$  é atribuir cores aos seus vértices de forma que os vértices adjacentes recebam cores distintas – tal procedimento é denominado **coloração própria**. Colorir um grafo é fácil, uma vez que se pode imaginar distribuir uma cor diferente para cada vértice. Todavia, o problema da coloração surge quando é necessário colorir o grafo  $G = (V, A)$  utilizando o menor número possível de cores.

É importante ressaltar que em uma **coloração própria** todos os vértices adjacentes do grafo **possuem** cores diferentes. O **menor número de cores** que pode ser utilizado para coloração própria de um grafo recebe o nome de **número cromático**. Este número é denotado por  $X(G)$ .

A Figura 13b mostra a coloração do grafo apresentado na Figura 13a. Nesta coloração, cada cor diferente é codificada por um número sublinhado:

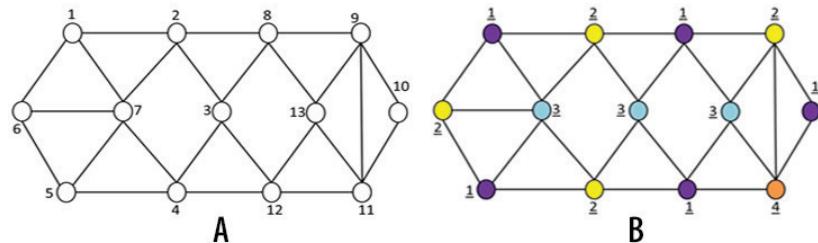


Figura 13 – Coloração de grafo

Fonte: Adaptado de Goldbarg e Goldbarg, 2012

Outro exemplo de coloração pode ser observado na Figura 14. A Figura 14b mostra a coloração do grafo apresentado na Figura 14a:

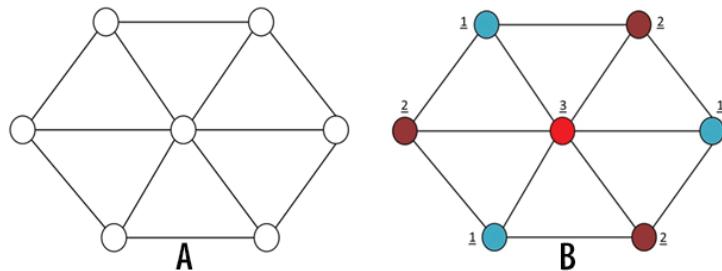


Figura 14 – Coloração de grafo

Fonte: Adaptado de Goldbarg e Goldbarg, 2012

## Grau de Saturação

Na coloração de um grafo, **grau de saturação** de um vértice é o número de cores diferentes que são associadas aos vértices vizinhos a V. Por exemplo, observe o grafo apresentado na Figura 15, no qual os vértices são tingidos com quatro cores diferentes. Observemos o vértice  $v_1$ : o grau de saturação deste vértice é 3, uma vez que os seus vizinhos estão coloridos com três cores diferentes (1, 2, 4); enquanto o vértice  $v_2$  também possui um grau de saturação 3, isto é, os seus três vizinhos são tingidos com três cores diferentes.

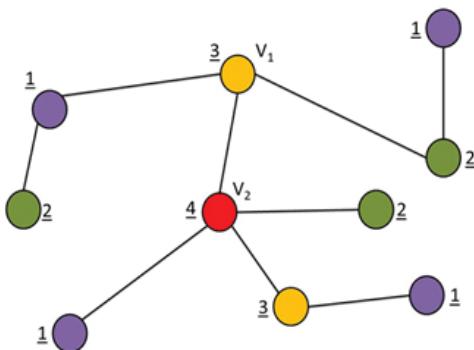


Figura 15 – Grau de saturação

Fonte: Goldbarg e Goldbarg, 2012

## Coloração Harmoniosa

Na coloração de grafos, uma coloração é denominada harmoniosa quando cada par de cores aparece, **no máximo, em um par de vértices adjacentes** no grafo **G**. Encontrar uma coloração harmoniosa em um grafo **G** é NP-Difícil – a Figura 16 ilustra uma coloração harmoniosa.

Na coloração harmoniosa, às vezes é importante obter o **número cromático harmonioso**, o qual corresponde ao número mínimo de cores necessário a uma coloração harmoniosa em **G**.

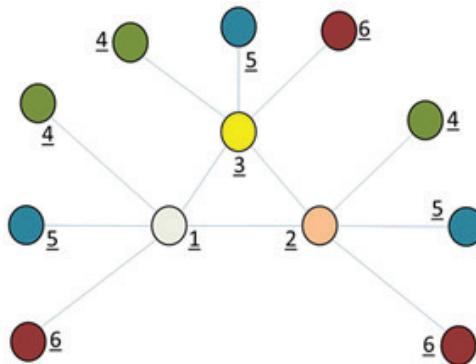


Figura 16 – Coloração harmoniosa

Fonte: Goldbarg e Goldbarg, 2012

## Coloração Exata

Uma **coloração exata** pode ser definida como uma **coloração própria** em que **cada par de cores aparece exatamente uma vez em cada par de vértices adjacentes** em **G** – a Figura 17 ilustra uma coloração exata:

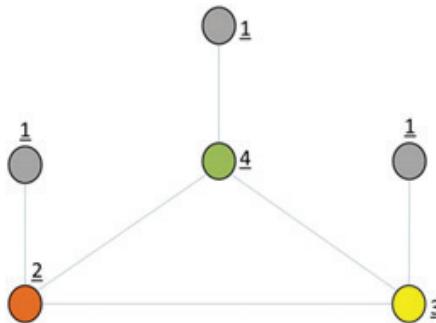


Figura 17 – Coloração exata

Fonte: Goldbarg e Goldbarg, 2012

## Grafo Crítico, Vértice Crítico e Aresta Crítica

Na coloração, um grafo **G** é denominado **crítico** quando a remoção de qualquer vértice ou aresta acarreta o decréscimo de seu número cromático.

Um grafo  $\mathbf{G}$  é denominado vértice crítico se  $X(\mathbf{G}) > X(\mathbf{G} - v)$ , para qualquer que seja o vértice  $v \in \mathbf{G}$ ; ao passo que um  $\mathbf{G}$  é denominado aresta crítica se  $X(\mathbf{G}) > X(\mathbf{G} - a)$  para qualquer que seja a aresta  $a \in \mathbf{G}$  – observe a Figura 18:

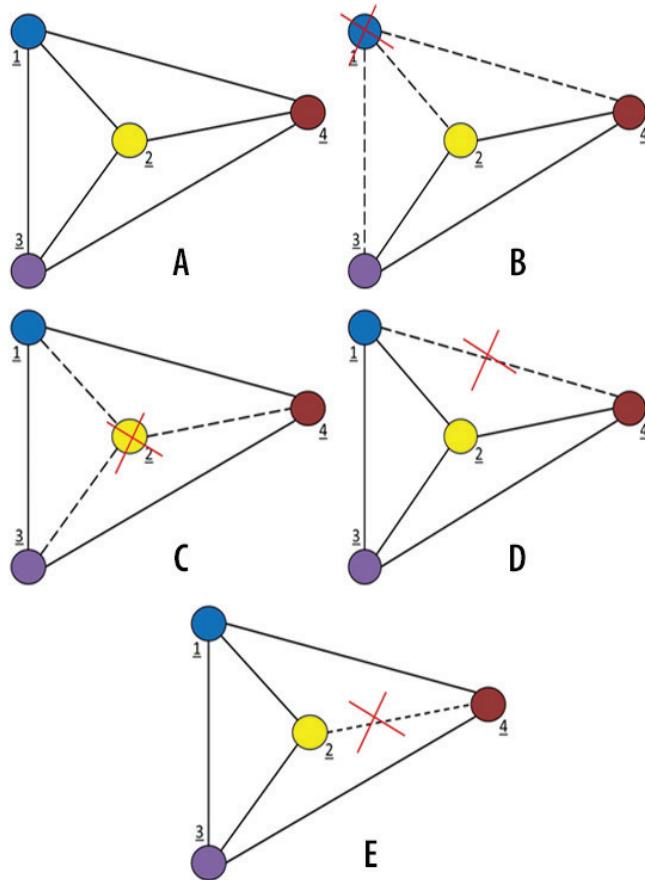


Figura 18 – Grafo crítico

Fonte: Adaptado de Goldbarg e Goldbarg, 2012

As Figuras 18b e 18e exemplificam as possibilidades de remoção de vértices e arestas do grafo apresentado na Figura 18a, confirmando a sua condição de grafo crítico.

## Coloração Forte

Na coloração, dado um conjunto de partições diferentes – no qual os conjuntos não possuem vértices em comum – em vértices de  $\mathbf{G}$  com cardinalidade  $k$ , uma coloração forte de  $\mathbf{G}$  é uma coloração própria em que cada cor aparece exatamente uma vez em cada possível partição.

## Coloração Fraca

Uma coloração fraca é aquela não própria de  $\mathbf{G}$  em que cada vértice é adjacente a, pelo menos, um vértice de cor diferente.

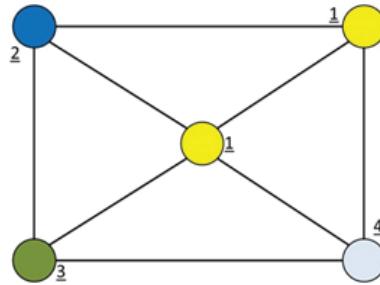


Figura 19 – Coloração fraca

Fonte: Goldbarg e Goldbarg, 2012

## Número Cromático Forte

Segundo (BOAVENTURA, 2012), o número cromático forte é o número mínimo de cores necessárias a uma coloração forte em  $\mathbf{G}$ .

## Coloração de Arestas

Uma coloração de arestas de  $\mathbf{G}$  é uma atribuição de  $k$  cores a tais **arestas** de forma que **duas arestas incidentes ao mesmo vértice recebam cores distintas**.

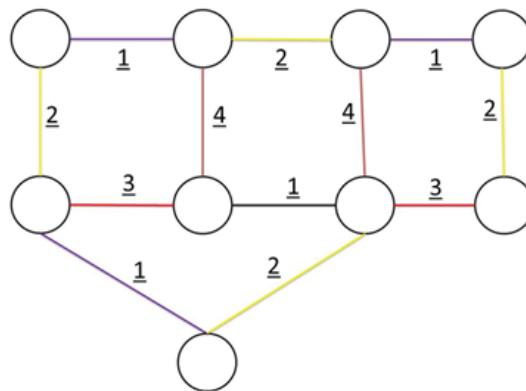


Figura 20 – Coloração de arestas

Fonte: Goldbarg e Goldbarg, 2012

## Representações de Grafos

Existem duas maneiras padronizadas para representar um grafo  $G(V,A)$ :

- Listas de adjacências;
- Matriz de adjacência.

Habitualmente, a representação de **lista de adjacência** é mais utilizada, uma vez que fornece um modo compacto de representar grafos **esparsos**. Grafos esparsos são aqueles nos quais  $|A|$  é consideravelmente menor que  $|V|^2$ . A representação

de grafo na forma de **matriz de adjacência** é mais utilizada quando o grafo é **denso**, ou quando é necessário saber com rapidez se existe uma aresta conectando dois vértices dados. Um grafo denso é aquele onde  $|A|$  está próximo de  $|V|^2$  (CORMEN *et al.*, 2002).

## Representação de Grafo por Lista de Adjacência

Dado um grafo  $G = (V, A)$ , a sua representação por **lista de adjacência** consiste em um arranjo adj. de  $|V|$  lista, uma para cada vértice em  $V$ . Para cada  $u \in V$ , a lista de adjacência  $\text{Adj}[u]$  possui um ponteiro para todos os vértices  $V$  tais que existe uma aresta  $(u, v) \in A$ . Isto é,  $\text{Adj}[u]$  consiste em todos os vértices adjacentes a  $u$  em  $G$ . Em geral, os vértices em cada lista de adjacências estão armazenados em uma ordem arbitrária (CORMEN *et al.*, 2002).

A Figura 21a apresenta um grafo  $G = (5, 7)$ , ao lado, a Figura 21b apresenta a representação deste grafo em forma de listas de adjacências:

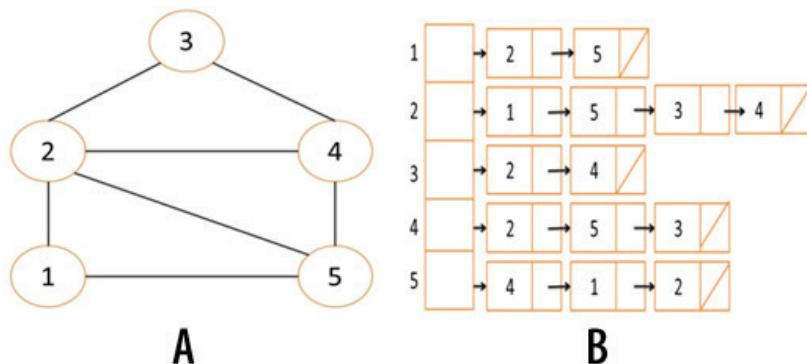


Figura 21 – Exemplo de lista de adjacência

Fonte: Adaptado de Cormen e colaboradores, 2002

A representação de grafo na forma de lista de adjacência pode ser perfeitamente adaptada para **grafos ponderados**, isto é, grafos que possuem pesos associados em suas arestas. Habitualmente, os pesos são denotados por uma **função peso w**:  $E \rightarrow R$ . Para facilitar, considere  $G = (V, A)$  como um grafo ponderado com função peso  $w$ . O peso  $w(u, v)$  da aresta  $(u, v) \in A$  está simplesmente armazenado com o vértice  $v$  na lista de adjacência de  $(u)$ . A representação de grafo na forma de lista de adjacência é bastante robusta nesse aspecto, podendo ser totalmente modificada para admitir muitas outras formas de grafos (CORMEN *et al.*, 2002).

A Figura 22 apresenta um exemplo de representação de lista de adjacência para um grafo  $G = (6, 8)$  orientado:

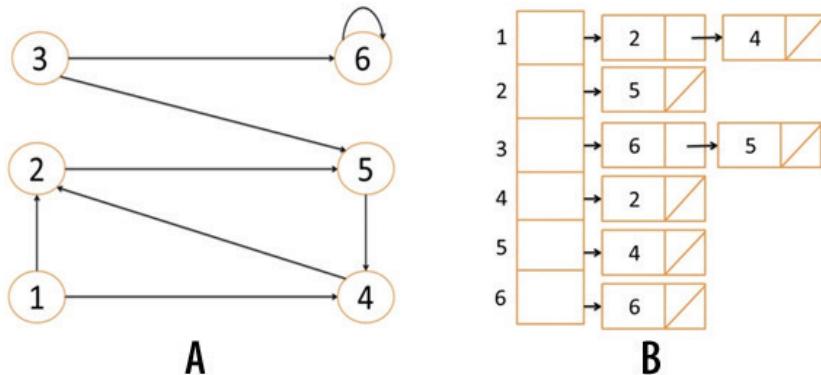


Figura 22 – Exemplo de lista de adjacência para grafos orientados

Fonte: Adaptado de Cormen e colaboradores, 2002

Em grafos **orientados**, a **soma dos comprimentos** de todas as listas de adjacências é  $|A|$ , porque uma aresta da forma  $(u,v)$  é representada fazendo-se  $v$  aparecer em  $\text{Adj}[u]$ . Já em grafos **não orientados**, a **soma dos comprimentos** de todas as listas de adjacências é  $2|A|$ , porque se  $(u,v)$  é uma aresta não orientada, então  $u$  aparece na lista de adjacências de  $v$  e vice-versa (CORMEN *et al.*, 2002).

Em questão de memória, a representação de grafo na forma de lista de adjacência exige  $\theta(V+A)$ .

A grande desvantagem da representação na forma de lista de adjacência é que não é possível determinar se uma dada aresta está presente no grafo quando se procura por  $v$  na lista de  $\text{Adj}[u]$ . Para contornar essa desvantagem, podemos utilizar uma matriz de adjacência cuja representação é apresentada na próxima Seção.

## Representação de Grafo por Matriz de Adjacência

A representação de um grafo  $G = (V, A)$  na forma de matriz de adjacência consiste em uma matriz  $|V| \times |V|$   $A = (a_{ij})$  tal que:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } (i,j) \in A \\ 0 & \text{em caso contrário} \end{cases}$$

Por exemplo, se o vértice 3 possui uma conexão com o vértice 4, isto é, se existir uma aresta que ligue o vértice 3 ao vértice 4, colocamos 1 no elemento  $a_{34}$  da matriz de adjacência.

A matriz de adjacência pode ser conceituada como uma matriz na qual os vértices são representados por linhas e colunas. Se houver uma ligação entre os vértices, é colocado 1 no seu respectivo elemento; caso não haja uma ligação entre os vértices, é colocado 0 em seu respectivo elemento. A Figura 23b ilustra uma matriz de adjacência para um grafo  $G = (5,7)$ :

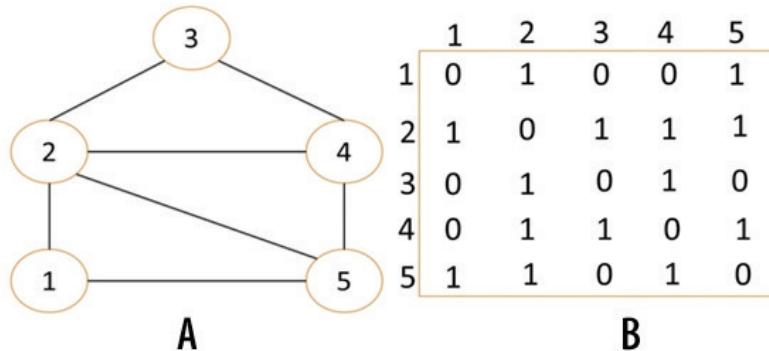


Figura 23 – Exemplo de matriz de adjacência

Fonte: Adaptado de Cormen e colaboradores, 2002

A matriz de adjacência também pode ser aplicada para grafos orientados. A Figura 24b ilustra uma matriz de adjacência de um grafo orientado:

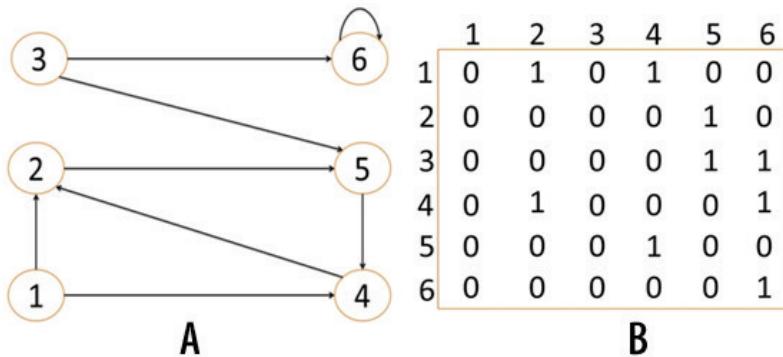


Figura 24 – Exemplo de matriz de adjacência para grafos orientados

Fonte: Adaptado de Cormen e colaboradores, 2002

A representação de um grafo na forma de matriz de adjacência de um consome  $\Theta(V^2)$  de memória do outro, independentemente da quantidade de arestas no grafo.

Observe a matriz de adjacência apresentada na Figura 24b. Veja a simetria ao longo da diagonal principal da matriz. Nesta simetria, a parte superior da diagonal principal é igual a parte inferior da diagonal principal. Quando essa simetria ocorre, é possível obter a **matriz transposta**. A transposta de uma matriz  $A = (a_{ij})$  é definida como a matriz  $A^T = (a_{ij}^T)$  dada por  $(a_{ij}^T) = a_{ji}$ . Partindo do princípio que em um grafo não orientado,  $(u,v)$  e  $(v,u)$  representam a mesma aresta, a matriz de adjacência  $A$  de um grafo não orientado é sua própria transposta:  $A = A^T$ . Vale ressaltar que dependendo da aplicação, compensa armazenar apenas as entradas contidas na diagonal e acima da diagonal da matriz de adjacência, possibilitando reduzir quase pela metade a memória necessária para armazenar o grafo.

Da mesma maneira que a lista de adjacência, a matriz de adjacência também pode ser usada no caso de grafos ponderados. Considere o seguinte exemplo, se  $G = (V, A)$  é um grafo ponderado com função peso de aresta  $w$ , o peso  $w(u,v)$  da aresta  $(u,v) \in A$  é simplesmente armazenado como a entrada na linha  $u$  e na coluna  $v$  da matriz de adjacência. Caso uma aresta não exista, pode ser armazenado o valor *null* ou 0, como sua entrada de matriz correspondente.

Embora a representação de grafo na forma de lista de adjacência seja assintoticamente tão eficiente quanto a representação de matriz adjacência, a simplicidade de uma matriz de adjacência pode ser preferível quando os grafos são consideravelmente pequenos. É interessante observar também que, se o grafo é não ponderado, existe uma vantagem adicional na questão de espaço de armazenamento, sendo favorável à representação de matriz de adjacência. A matriz de adjacência utiliza menos memória, pelo fato de armazenar apenas um *bit* (0 ou 1) por entrada.



## Em Síntese

Nesta Unidade estudamos conceitos importantes sobre a teoria dos grafos. Conceitos como: conexidade de grafos, grafos finitos e infinitos, planaridade de grafos e o teorema de Kuratowski, coloração de grafos e representações de grafos.

O conceito de conexidade é amplamente aplicado na modelagem de problemas utilizando grafos. Um grafo  $G = (V, A)$  é dito conexo se existir um caminho entre qualquer par de vértices; caso contrário, será desconexo.

Duas definições amplamente utilizadas na teoria dos grafos são as de **grafo finito** e **grafo infinito**. Um grafo é denominado **finito** quando possui um número finito de vértices e de arestas. Caso tenha um número infinito de vértices e arestas é denominado **infinito**.

O conceito de **planaridade de grafos** permite definir se um grafo é planar ou não – um grafo planar é aquele imerso no plano e as suas arestas nunca se cruzam.

A coloração de um grafo consiste em colorir um grafo  $G = (V, A)$  utilizando a menor quantidade de cores possível. Todavia, um vértice  $A$  não pode ser colorido com a mesma cor do seu adjacente.

Habitualmente, grafos podem ser representados por duas formas padronizadas, **listas de adjacências** e **matriz de adjacências**. Tanto a lista de adjacência como a matriz de adjacência representam o conjunto de vértices e arestas de um grafo  $G$ .

# Material Complementar

## Indicações para saber mais sobre os assuntos abordados nesta Unidade:

### Livros

#### **Grafos: Teoria, Modelos, Algoritmos**

AVENTURA NETTO, P. O. **Grafos: teoria, modelos, algoritmos.** 5. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 2012.

#### **Introdução à Teoria dos Grafos**

CLÁUDIO, L. L. **Introdução à teoria dos grafos.** [S.l.]: Impar, 2016.

#### **Fundamentos da Teoria dos Grafos para Computação**

NICOLETTI, A. M.; HRUSCHKA JÚNIOR, E. R. **Fundamentos da teoria dos grafos para computação.** São Carlos, SP: Edufscar, 2006.

### Leitura

#### **Matemática Discreta: Combinatória, Teoria dos Grafos e Algoritmos**

CARDOSO, M.; SZYMANSKI, J.; ROSTAMI, M. **Matemática discreta: combinatória, teoria dos grafos e algoritmos.** [S.l.]: Escolar, 2009

<https://bit.ly/2KON8LQ>

# Referências

- BOAVENTURA NETTO, P. O. **Grafos**: teoria, modelos, algoritmos. 2. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 2001.
- \_\_\_\_\_.; JURKIEWICZ, S. **Grafos**: introdução e prática. 2. ed. [S.l.]: Blucher, 2017.
- CORMEN, T. *et al.* **Algoritmos** – teoria e prática. 2. ed. [S.l.]: Campus, 2002.
- FEOFILOFF, P.; KOHAYAKAWA, Y.; WAKABAYASHI, Y. **Uma introdução sucinta à teoria dos grafos**. 2018. Disponível em: <<http://www.ime.usp.br/~pf/teoriadosgrafos>>. Acesso em: 24 nov. 2018.
- FURTADO, A. L. **Teoria dos grafos algoritmos**. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1973.
- GOLDBARG, M.; GOLDBARG, E. **Grafos** – conceitos, algoritmos e aplicações. [S.l.]: Campus, 2012.
- HOLANDA, B. **Teoria dos grafos**. 2011. Disponível em: <[https://www.obm.org.br/content/uploads/2017/01/Nivel1\\_grafos\\_bruno.pdf](https://www.obm.org.br/content/uploads/2017/01/Nivel1_grafos_bruno.pdf)>. Acesso em: 28 nov. 2018.
- NICOLETTI, A. M.; HRUSCHKA JÚNIOR, E. R. **Fundamentos da teoria dos grafos para computação**. São Carlos, SP: Edufscar, 2006.
- SIMÕES, J. M. S. **Grafos e redes**: teoria e algoritmos básicos. [S.l.]: Interciência, 2013.
- SZWARCFITER, J. L. **Teoria computacional de grafos**. [S.l.]: Elsevier, 2018.
- TEORIA dos grafos**. [20--a]. Disponível em: <[https://miltonborba.org/AlgF/Grafos.htm#Def\\_basicas](https://miltonborba.org/AlgF/Grafos.htm#Def_basicas)>. Acesso em: 28 nov. 2018.
- TEORIA dos grafos** – aula 2. 20--b]. Disponível em: <[http://www.riopomba.if-sudestemg.edu.br/dcc/dcc/materiais/1469415723\\_Teoria%20dos%20Grafos%20-%20aula2.pdf](http://www.riopomba.if-sudestemg.edu.br/dcc/dcc/materiais/1469415723_Teoria%20dos%20Grafos%20-%20aula2.pdf)>. Acesso em: 28 nov. 2018.



**Cruzeiro do Sul**  
Educacional