Cálculo Numérico
Material Complementar do Método da Bissecção

Prof$^{\underline{a}}$. *Dr*$^{\underline{a}}$ **Jussara Maria Marins**

1 Método da Bissecção: Exemplo 1

A idéia desse método parte da antiga estratégia de guerra de "***Dividir para Conquistar***". O gato Garfield repete uma jocosa variação dessa estratégia, frequentemente, com seu dono.[1]

Figura 1: Se você não pode convencê-los, confunda-os (*divida-os*). "

O método divide o intervalo ao meio, **sem confundir**, e se analisa o sinal da função. No intervalo inicial deve haver uma variação do sinal positivo para negativo ou vice-versa.

Havendo uma variação de sinal, se a função for contínua, então haverá um ou um número ímpar de zeros da função.[2]

Para fazer o gráfico da função manualmente, fazemos primeiro uma tabela com um intervalo para x e um determinado incremento.

Vamos acompanhar, com um exemplo da função polinomial: $p(x) = f(x) = 3x^3 - 7x^2 + 3$ no intervalo [-5,5]. Fazendo os cálculos, para $x = -5$, temos na função $3 * (-5)^3 - 7(-5)^2 + 3 = -547$, e depois os demais valores até $x = 5$, temos a seguinte tabela:

Tabela1

x	$f(x) = 3x^3 - 7x^2 + 3$
-5.00	-547.0000
-3.00	-141.0000
-1.00	-7.0000
1.00	-1.0000
3.00	21.0000
5.00	203.0000

Observamos que de x=-5 até x=5 a função passou de um valor negativo para positivo e, portanto, podemos dizer que a função valeu zero e cortou o eixo x, em pelo menos **um** ou **três** lugares. Nesse

[1]A frase é de atribuída a Harry Truman.

[2]Teorema do Cálculo.

caso, só pode ser até 3 lugares, pois sabemos de antemão, que, por ser um polinômio de grau 3, então temos 3 zeros. Eles podem ser todos diferentes, ou iguais ou ainda complexos. Se o polinômio tem grau n ele tem n zeros[3]. Quando a função não é polinomial, não podemos afirmar algo sobre o número de zeros, à priori. Com os dados da tabela 1 podemos fazer um esboço gráfico do polinômio, conforme a figura a seguir.

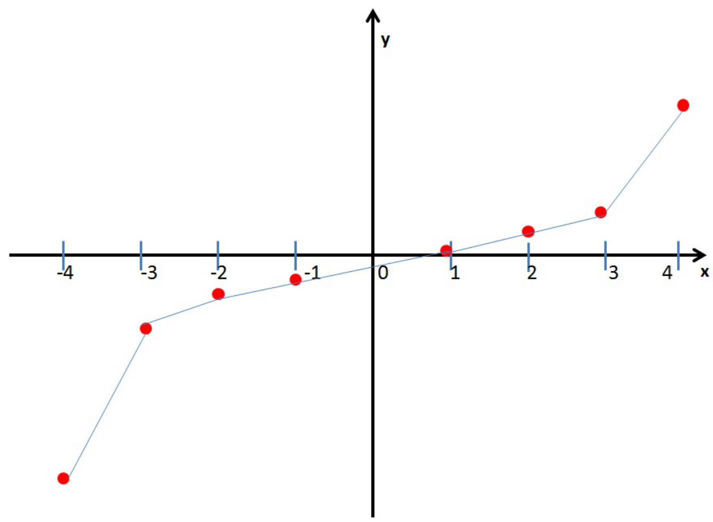

Figura 2: Esboço 1 incompleto de $p(x) = 3x^3 - 7x^2 + 3$

Para detalhar mais, ou dar um "*zoom*", temos a seguinte tabela:

Tabela 2

x	$f(x) = 3x^3 - 7x^2 + 3$
-5.00	-547.0000
-4.00	-301.0000
-3.00	-141.0000
-2.00	-49.0000
-1.00	-7.0000
0.00	3.0000
1.00	-1.0000
2.00	-1.0000
3.00	21.0000
4.00	83.0000
5.00	203.0000

Agora vemos que há mais lugares com variação de sinal. De x=-1 até x=0, no subintervalo [-1,0] a função trocou de sinal, passou de negativo: -7 para positivo: 3, logo, neste subintervalo, deve haver um lugar, onde ela fica nula. De x=0 até x=1, no subintervalo [0,1], houve outra variação de sinal, passou de positivo para negativo. Podemos fazer um segundo esboço do gráfico, conforme a figura 2, usando os pontos $(-2, -49), (-1, -7), (0, 3), (1, -1), (2, -1)$.

[3]Teorema Fundamental da Álgebra.

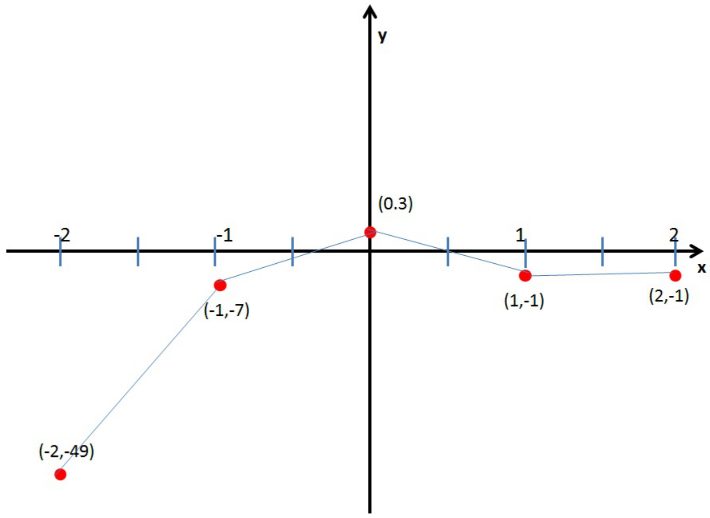

Figura 3: Esboço 2 de $p(x) = 3x^3 - 7x^2 + 3$

Contudo esse esboço ainda não está completo. De x=2 para x=3, em [2,3] houve outra variação de sinal, e portanto a função cruza o eixo x, que não apareceu nesse esboço.

Podemos aumentar a tabela e fazermos mais subdivisões.

Tabela 3

x	$f(x) = 3x^3 - 7x^2 + 3$
-2.00	-49.0000
-1.50	-22.8750
-1.00	-7.0000
-0.50	0.8750
0.00	3.0000
0.50	1.6250
1.00	-1.0000
1.50	-2.6250
2.00	-1.0000
2.50	6.1250
3.00	21.0000

Essa tabela mostra que realmente **esse polinômio possui 3 raízes reais e diferentes entre si**. Logo, para a equação $3x^3 - 7x^2 + 3 = 0$, temos uma raiz negativa em [-1,-0.5] e duas raízes positivas, sendo uma delas no intervalo [0.5,1] e outra no intervalo [2,2.5]. [4]

Usando programas com mais recursos,[5] temos a seguinte figura com os gráficos da mesma função em intervalos diferentes, tanto, para o eixo x como para o eixo y, sendo que no segundo, que está numa visão mais ampliada, vemos claramente que temos 3 raízes de $p(x) = 0$.

[4] Existe um estudo, mais completo para separar as raízes de uma equação polinomial, que não é nosso assunto, agora.

[5] Gnuplot, Geogebra ou outros.

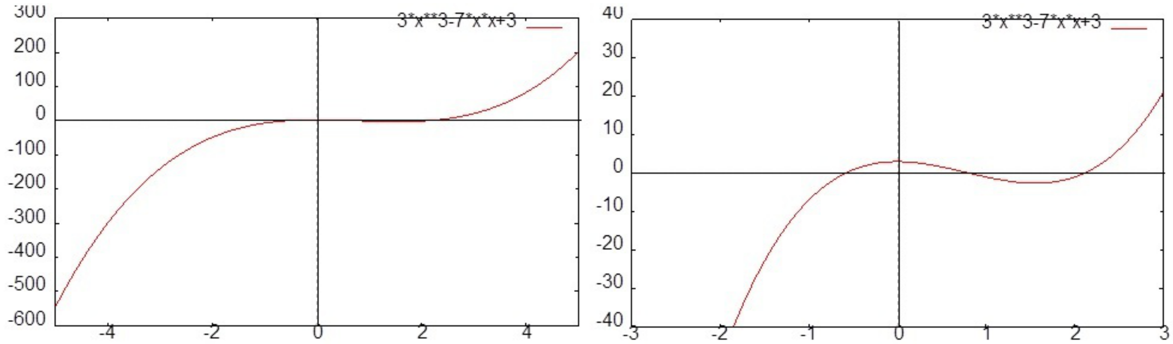

Figura 4: Esboço 2 - incompleto de $p(x) = 3x^3 - 7x^2 + 3$

Vimos que, no método da Bissecção, temos que determinar **o ponto médio** do intervalo $[a, b]$ calculado por

$$\overline{x_m} = \frac{a+b}{2} \text{ Método da Bissecção}$$

e verificar o sinal da função neste ponto. De acordo com a variação de sinal entre os valores de

$$f(a), f(\overline{x_m}), f(b)$$

escolhemos outro intervalo para continuar o processo de bissecção. Como a função pode ir de sinal positivo para negativo ou de negativo para positivo, um critério simples e automático [6] é observarmos a seguinte regra:

$$Se f(a) * f(x_m) < 0 \quad \text{então} \qquad (I) \begin{cases} \text{a extremidade } a \text{ permanece} \\ b \leftarrow x_m \\ f(b) \leftarrow f(x_m) \end{cases}$$

$$\text{caso contrário} \quad (II) \begin{cases} a \leftarrow x_m \\ f(a) \leftarrow f(x_m) \\ \text{a extremidade } b \text{ permanece} \end{cases}$$

Visualmente, basta olharmos o sinal de $f(x_m)$ e comparar com o sinal das extremidades $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ e escolhermos adequadamente o próximo intervalo.

Vamos nos deter no intervalo [0.5,1] onde há uma variação de sinal e uma raiz e aplicar o método da Bissecção.

Vamos seguir os seguintes passos, uma vez que já sabemos qual é o intervalo: [0.5,1.0] e que $f(a) = f(0.5) = 0.1625$ e $f(b) = f(1.0) = -1.0$.

1. cálculo de x_m

$$x_m = \frac{0.5+1}{2} = 0.75$$

2. cálculo de $f(x_m)$

$$f(x_m) = f(0.75) = +0.3281250$$

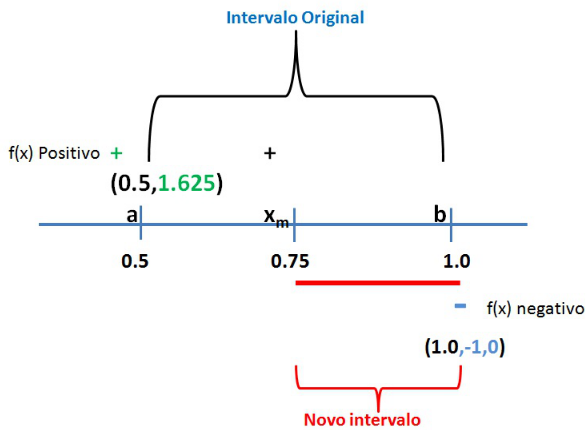

Figura 5: Bissecção do intervalo no ponto médio de [0.5,1]

3. aplicar o critério, ou um esboço gráfico:

   Como $f(a) * f(x_m) > 0$,(caso II) temos que $a \leftarrow x_m = 0.75$ e a extremidade b permanece no lugar.

4. determinar o novo intervalo $[a, b]$.

5. calcular o erro no valor de x, $|x_m - x_{m-1}|$ ou de $|f(x)|$, conforme especificado, pelo problema.

6. se atingiu o erro desejado, então parar, senão voltar ao item 1.

Podemos continuar e colocar os valores na seguinte tabela:

Tabela 3

	a	b	f(a)	f(b)	x_m	$f(x_m)$	erro
1	0.5	1.0	1.625000	-1.0	0.75	0.328125	0.250000
2	0.75	1.0	0.328125	-1.0	0.875	-0.349609	0.125
3	0.75	0.875	0.328125	-0.349609	0.8125	-0.011963	-0.0625
4	0.75	0.8125	0.328125	-0.011963	0.78125	0.158051	-0.03125
5	0.78125	0.8125	0.158051	-0.011963	0.796875	0.073002	0.015625
6	0.796875	0.8125	0.073002	-0.011963	0.804688	0.030505	0.007813
7	0.804688	0.8125	0.030505	-0.011963	0.808594	0.009267	0.003906

Com isso ficamos com a aproximação final para a raiz com $x_7 = 0.808594$ e o erro $|x_7 - x_6| = 0.003906 < \epsilon = 0.005$. Logo, se substituirmos x_7 no polinômio $p(x) = 3x^3 - 7x^2 + 3$ teremos $p(x) \cong 0$.

2 Raiz negativa em [-1,-0.5]

Determine a raiz negativa da mesma equação $3x^3 - 7x^2 + 3 = 0$, partindo de $[-1.0, -0.5]$, com erro em x dado por $\epsilon = 0.001$.

Temos: $f(a) = f(-1.0) = -7$ e $f(b) = f(-0.5) = 0.875$, mostrando que podemos aplicar o método da Bissecção.

[6]Serve para ser usado em programas e planilhas.

	a	b	f(a)	f(b)	x_m	$f(x_m)$	erro
1	-1.0	-0.5	-7.0	0.875	-0.75	-2.203125	0.25
2	-0.75	-0.5	-2.203125	0.875	-0.625	-0.466797	0.125
3	-0.625	-0.5	-0.466797	0.875	-0.5625	0.251221	0.0625
4	-0.625	-0.5625	-0.466797	0.251221	-0.593750	-0.095734	-0.031250
5	-0.59375	-0.5625	-0.095734	0.251221	-0.578125	0.080723	0.015625
6	-0.59375	-0.578125	-0.095734	0.080723	**-0.585938**	-0.006756	-0.007813

Logo a raiz negativa é $x_6 =$ **-0.585938**.

3 Raiz positiva em [2,3]

Ainda com o mesmo polinômio calcule a terceira raiz, em [2,3],com erro em x dado por $\epsilon = 0.005$. Onserve que não podemos partir de [1.2], pois nesse intervalo não há variação de sinal.

	a	b	f(a)	f(b)	x_m	$f(x_m)$	erro
1	2.000000	3.000000	-1.000000	21.000000	2.500000	6.125000	0.500000
2	2.000000	2.500000	-1.000000	6.125000	2.250000	1.734375	-0.250000
3	2.000000	2.250000	-1.000000	1.734375	2.125000	0.177734	-0.125000
4	2.000000	2.125000	-1.000000	0.177734	2.062500	-0.456299	-0.062500
5	2.062500	2.125000	-0.456299	0.177734	**2.093750**	-0.150848	0.031250

A Bissecção é um método bem simples e se aplica em várias situações onde temos variação de sinal. Este método tem convergência lenta para a raiz, desde que não tenhamos erros de arredondamento no cálculo do valor da função, o que em certos casos pode acontecer.

Quando queremos um processo mais rápido ou que a função possui um zero, mas não chega a cortar o eixo x, causando variação de sinal, como ocorre nas raízes duplas, quadrúplas, etc., podemos usar o método de **Newton**.

4 Exercício

Calcular uma aproximação das seguintes funções com erro em x e $\epsilon = 0.005$. Faça um esboço gráfico e um estudo das funções, antes de determinar os intervalos com raízes.

1. $\sqrt{x} - sin(3x) = 0$

   Resposta: $x_m = 0.710938$ e erro $=0.007813$.

   Verifique que a função tem outra raiz em [0.1,0.25] e além disso, o valor de $x = 0$ também anula a função. Existem mais raízes nessa função?

2. $p(x) = 4x^3 - 32x^2 + 72x - 49 = 0$

   Este polinômio tem 3 raízes distintas. Encontre-as.

   Resposta: $x_m = 0.71875$

3. $p(x) = 4x^3 - 32x^2 + 77x - 49$ Este polinômio tem uma raíz dupla, e portanto não pode ser calculada pela bissecção e uma raiz simples que é muito fácil de ser encontrada.

Dê-nos um retorno, para ver se o esse documento lhe ajudou a esclarecer o assunto e se ficou mais claro!