Relatório da Lista 3
COC473 - Semestre 2020/PLE

Gabriel G. Milan[1]

[1]Departamento de Engenharia Eletrônica e de Computação – Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ)
21.941-909 – Rio de Janeiro – RJ – Brasil

1. Introdução

Para as implementações em código solicitadas nessa lista (e em todas as outras) foi criado um pacote Python chamado "alc"(álgebra linear computacional). Esse pacote foi completamente escrito em Python e não está disponível no *Python Package Index* (ou PyPI). Em outras palavras, não pode ser instalado via *pip install alc*. No entanto, de forma a tornar possível replicar os resultados demonstrados nesse relatório, o código está disponibilizado abertamente em `https://github.com/gabriel-milan/linear-algebra`.

Nesse pacote, são implementadas todas as funcionalidades solicitadas (no caso da lista 3: método dos mínimos quadrados).

A fim de conseguir adquirir tais funcionalidades, também foram utilizadas todas as funcionalidades previamente implementadas e descritas nos relatórios anteriores a esse.

Devido a todas essas funcionalidades serem implementadas do zero, o código tornou-se grande, fazendo-o inviável de ser explicitado por completo nesse relatório. De qualquer forma, as partes mais relevantes serão explicitadas, de forma a tornar compreensível a implementação.

Os nomes de variáveis e comentários espalhados ao longo do código foram escritos em inglês, de forma a, ao final dessa matéria, possibilitar a exposição desse trabalho como portfólio.

Ao final desse relatório, serão acrescentadas páginas escaneadas das resoluções manuais da lista e, portanto, os exercícios cuja resolução for estritamente manual (1 ao 7) não serão citados em seções desse relatório.

Para os exercícios restantes, cada seção desse relatório fará referência a um deles.

2. Exercício 8

2.1. Implementação do Método dos Mínimos Quadrados

A implementação do Método dos Mínimos Quadrados foi realizada na função *least_squares*, disponível em *alc.least_squares*. Esse método é um método que permite o ajuste de uma reta $y = ax + b$ para um conjunto de amostras de x e y fornecidos como argumento.

O algoritmo usado na implementação baseia-se na construção de matrizes P e Y tais que $P = \begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ ... & ... \\ x_n & 1 \end{bmatrix}$ e $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_n \end{bmatrix}$.

Dessa forma, é possível encontrar a matriz $B = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ fazendo $B = (P^T P)^{-1} P^T Y$. A prova para tal formulação é fornecida nos slides da aula.

O código utilizado na implementação é o seguinte:

```
from alc.utils import zeros, ones

def least_squares (x, y):
  # Length of X and Y samples must be the same
  try:
    if (len(x) != len(y)):
      raise ValueError ("Length of X and Y samples must be the same!")
  except Exception as e:
    print ("Failure while comparing X and Y length")
    raise e
  # Start with ones matrix and then just replace with X values on first column
  P = ones((len(x), 2))
  for i, val in enumerate(x):
    P[i][0] = val
  # Then, turn y samples into an array
  Y = zeros((len(y), 1))
  for i, val in enumerate(y):
    Y[i][0] = val
  # Next, do A = P^T * P, C = P^T * Y
  A = P.t * P
  C = P.t * Y
  # Finally, find B = A^(-1) * C
  B = ~A * C
  # a, b are first and second values of B
  return B[0][0], B[1][0]
```

Um código de exemplo de uso dessa função para calcular a e b para a função $y = ax + b$ com o conjunto de pontos fornecido no exercício 7 é o seguinte:

```
import alc

x = [1, 2, 3, 4]
y = [1, 2.5, 3.5, 4.3]

print ("==> Pontos (x,y):")
for i in range(len(x)):
  print ("-- (%3.3s, %3.3s)" % (x[i], y[i]))
print ("")
print ("Ajustando uma função y = ax + b")
a, b = alc.least_squares(x, y)
print ("a = {:.4f}".format(a))
print ("b = {:.4f}".format(b))
```

O resultado obtido após a execução desse código seria o seguinte:

```
==> Pontos (x,y):
-- (  1,   1)
```

```
-- (  2, 2.5)
-- (  3, 3.5)
-- (  4, 4.3)

Ajustando uma função y = ax + b
a = 1.0900
b = 0.1000
```

3. Soluções manuais

A seguir, será anexado a esse relatório as soluções manuais escaneadas.

ÁLGEBRA LINEAR COMPUTACIONAL - COC473

GABRIEL GAZOLA MILAN - DRE 116034377

(1) OBTER O POLINÔMIO DE INTERPOLAÇÃO PARA

X	Y
1	1
2	2
3	9

P/ N=3,

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{bmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}}_{B} = \underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}}_{Y}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 9 \end{bmatrix} \Rightarrow B = \begin{bmatrix} 6 \\ -8 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{y = 6 - 8x + 3x^2}$$

(2) REPETIR O EXERCÍCIO ANTERIOR ADICIONANDO O PONTO $(x, y) = (4, 20)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 9 \\ 20 \end{bmatrix} \Rightarrow B = \begin{bmatrix} 8 \\ -35/3 \\ 5 \\ -1/3 \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{y = 8 - \frac{35x}{3} + 5x^2 - \frac{x^3}{3}}$$

(3) AJUSTAR UMA FUNÇÃO DO TIPO $g(x) = b_1 . x^{b_2}$ AO CONJUNTO DO EX. ANTERIOR

$$y = b_1 x^{b_2} \Rightarrow \ln(y) = \ln(b_1 x^{b_2}) \Rightarrow \ln(y) = \ln(b_1) + \ln(x^{b_2})$$

$$\Rightarrow \ln(y) = \ln(b_1) + b_2 . \ln(x)$$

$$y' = b_1' + b_2 . x'$$

$$\begin{cases} y' = \ln(y) \\ b_1' = \ln(b_1) \Rightarrow b_1 = e^{b_1'} \\ x' = \ln(x) \end{cases}$$

x'	y'
0	0
0,69	0,69
1,10	2,20
1,39	3

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \ln(2) \\ 1 & \ln(3) \\ 1 & \ln(4) \end{bmatrix} \quad Y = \begin{bmatrix} 0 \\ \ln(2) \\ \ln(9) \\ \ln(20) \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_1' \\ b_2 \end{bmatrix} \Rightarrow A = P^T P$$

$$C = P^T Y$$

$$B = A^{-1} C = \begin{bmatrix} -0,2658 \\ +2,1866 \end{bmatrix}$$

$b_1 = e^{b_1'} = +0{,}7666$

$$\boxed{y = +0{,}7666 \cdot x^{2{,}1866}}$$

④ OBTER A FUNÇÃO INTERPOLADORA PELO PROCEDIMENTO DE LAGRANGE

x	y
1	1
2	2
3	9
4	20

$$f(x) = y_1\,\phi_1(x) + \dots + y_n\,\phi_n(x)$$

$$\phi_i(x) = \frac{\prod_{k=1,\,k\neq i}^{N}(x - x_k)}{\prod_{k=1,\,k\neq i}^{N}(x_i - x_k)}$$

$$\phi_1(x) = \frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(1-2)(1-3)(1-4)} = \frac{(x^2-5x+6)(x-4)}{-6} = \frac{x^3-9x^2+26x-24}{-6}$$

$$\phi_2(x) = \frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(2-1)(2-3)(2-4)} = \frac{(x^2-4x+3)(x-4)}{2} = \frac{x^3-8x^2+19x-12}{2}$$

$$\phi_3(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(3-1)(3-2)(3-4)} = \frac{(x^2-3x+2)(x-4)}{-2} = \frac{x^3-7x^2+14x-8}{-2}$$

$$\phi_4(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(4-1)(4-2)(4-3)} = \frac{(x^2-3x+2)(x-3)}{6} = \frac{x^3-6x^2+11x-6}{6}$$

$$f(x) = 1\cdot\left(\frac{-x^3+9x^2-26x+24}{6}\right) + \cancel{2}\cdot\left(\frac{x^3-8x^2+19x-12}{\cancel{2}}\right) + 9\cdot\left(\frac{-x^3+7x^2-14x+8}{2}\right)$$

$$+20\left(\frac{x^3-6x^2+11x-6}{6}\right) = \left(\frac{-1}{6}+1-\frac{9}{2}+\frac{10}{3}\right)x^3 + \left(\frac{9}{6}-8+\frac{63}{2}-20\right)x^2$$

$$+\left(\frac{-13}{3}+19-63+\frac{110}{3}\right)x + (4-12+36-20)$$

$$= \boxed{\frac{-x^3}{3} + 5x^2 - \frac{35x}{3} + 8 = y}$$

⑤ $y = b_1 + b_2 x + b_3 x^2$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{bmatrix} \quad Y = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 9 \\ 20 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \Rightarrow A = P^T P$$

$$C = P^T Y$$

$$B = A^{-1} C = \begin{bmatrix} 4{,}5 \\ -6{,}1 \\ 2{,}5 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{y = 4{,}5 - 6{,}1x + 2{,}5x^2}$$

6) OBTER O VALOR DE y p/ $x = 3,5$ USANDO AS FUNÇÕES DOS EXS. ANTERIORES.

$y_1(x) = 6 - 8x + 3x^2$	$y_1(3,5) = 14,75$
$y_2(x) = 8 - \frac{35}{3}x + 5x^2 - \frac{x^3}{3}$	$y_2(3,5) = 14,125$
$y_3(x) = 0,7666 \cdot x^{2,1966}$	$y_3(3,5) = 11,8639$
$y_4(x) = -\frac{x^3}{3} + 5x^2 - \frac{35}{3}x + 8$	$y_4(3,5) = 14,125$
$y_5(x) = 4,5 - 6,1x + 2,5x^2$	$y_5(3,5) = 13,775$ //

7) AJUSTAR a, b / $g(x) = a\ln(x) + \frac{b}{x^2+1}$ PARA

x	y
1	1
2	2,5
3	3,5
4	4,3

COM MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS

$$P = \begin{bmatrix} \ln(1) & 1/2 \\ \ln(2) & 1/5 \\ \ln(3) & 1/10 \\ \ln(4) & 1/17 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 1 \\ 2,5 \\ 3,5 \\ 4,3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \quad A = P^T P$$

$$C = P^T Y$$

$$B = A^{-1} C = \begin{bmatrix} 3,0138 \\ 2,0049 \end{bmatrix} //$$

$$\boxed{y = g(x) \approx 3\ln(x) + \frac{2}{x^2+1}} //$$