RAZONAMIENTO CON INCERTIDUMBRE

Lic. Carmen R. Garcia Perez

Razonamiento con Incertidumbre

- En algunas ocasiones, un agente sólo tiene información incierta acerca de su tarea y del entorno o ambiente donde se encuentre.

- **Que es Incertidumbre?**

Razonamiento con Incertidumbre

- En algunas ocasiones, un agente sólo tiene información incierta acerca de su tarea y del entorno o ambiente donde se encuentre.

- **Incertidumbre:** Falta de información adecuada para tomar una decisión o realizar un razonamiento. Puede impedir llegar a una conclusión correcta.

Razonamiento con Incertidumbre

- Cuando se utiliza la lógica, para representar y razonar con conocimiento incierto no se puede realizar ya que tiene limitaciones.

- Por ejemplo, una sentencia como P v Q permite expresar la incertidumbre acerca de cuál de los dos átomos es cierto, pero aún no se a hablado de cómo podríamos representar *cuánta certeza tenemos acerca de P, o de Q.*

- *En la lógica clásica, se puede deducir Q a partir de P. A partir de P -> Q; es decir, si un agente conoce P -> Q.*

Algunas definiciones de Conceptos:

- ***Definición de Suceso:*** Es aquel que antes de realizarlo no se puede predecir el resultado que se va a obtener.
- ***Espacio muestral:*** Es el conjunto de todos los resultados posibles de un experimento aleatorio, donde cada uno de los posibles resultados es un suceso.
- ***Definición de Probabilidad:*** La probabilidad del suceso ***A*** mide la frecuencia relativa con la que ocurre dicho suceso.

$$P(A) = \frac{casosfavorables}{casosposibles}$$

Algunas definiciones de Conceptos:

- *Por ejemplo:*
  - *Ejemplo 1: Si se lanza un dado bien hecho, Cuál es la probabilidad de obtener un 3?*
  - *Ejemplo 2: Probabilidad de sacar un número par.*

Algunas definiciones de Conceptos:

- *Por ejemplo:*
  - *Ejemplo 1: Si se lanza un dado bien hecho, Cuál es la probabilidad de obtener un 3?*

$$P(3) = \frac{1}{6} \approx \underline{17\ \%}$$

  - *Ejemplo 2: Probabilidad de sacar un número par.*

$$P(n^o\ par) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = \underline{0.50 \rightarrow 50\%}$$

Algunas definiciones de Conceptos:

- Probabilidad de la Unión: Supongamos 2 sucesos cualesquiera   A y B

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

- Ejemplo: determinar el valor de la probabilidad de obtener los números 2 y 4 y los números 4 y 6 .

Suceso A= que salgan los números 2 y 4, A={2, 4}

Suceso B= que salgan los números 4, 6, B={4,6}

Es exactamente la probabilidad de que nos salgan la mitad de los números del dado, por tanto la probabilidad =1/2

Algunas definiciones de Conceptos:

- Otra forma de hacerlo:

  P(A)=2/6=1/3; P(B)= 1/3 $P(A \cap B)=\frac{1}{6}$

$$P(A \cup B)=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=\frac{2+2-1}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

Algunas definiciones de Conceptos:

- Si los sucesos A y B son incompatibles, entonces

$$P(A \bigcup B) = P(A) + P(B)$$

- Probabilidad Compuesta: La probabilidad condicional se calcula cuando se incorpora información adicional a las condiciones iniciales

Algunas definiciones de Conceptos:

- *La suma de todos los sucesos elementales de un mismo espacio es 1.*

$$\sum_{i=1}^{i=n} P_i = 1$$

- *La probabilidad de no ocurrencia es:*

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

Algunas definiciones de Conceptos:

Probabilidades condicionales

- La Probabilidad de ocurrencia de un suceso B condicionado por la ocurrencia del suceso A se denomina Probabilidad a Posteriori: P(B/A)

Probabilidad de ocurrencia simultánea de A y B

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$p(A \cap B) = P(A) \times P(B/A)$$

Algunas definiciones de Conceptos:

Probabilidad Compuesta

- Si A y B son sucesos independientes, entonces

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

- Corolario:

Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son sucesos independientes

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) \times P(A_2) \times \ldots \times P(A_n)$$

Algunas definiciones de Conceptos:
Probabilidad Compuesta

- Ejemplo: determinar el valor de la probabilidad de obtener un 2 sabiendo que ha salido un nº par al lanzar al aire un dado.
- Suceso P= salir un nº par P{2,4,6}
- Suceso D=salir el nº 2

$$P \bigcap D = \{2\} \qquad P(P \bigcap D) = \frac{1}{6} \qquad P(P) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$P(D/P) = \frac{P(P \bigcap D)}{P(p)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \rightarrow 33{,}33\,\%$$

Algunas definiciones de Conceptos:

Probabilidad Total

- Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$ un conjunto completo de sucesos incompatibles entre si. Sea B el suceso del que se conocen las probabilidades condicionales $P(B/A_i)$, entonces

$$P(B) = P(A_1) \times P(B/A_1) + P(A_2) \times P(B/A_2) + \ldots + P(A_n) \times P(B/A_n)$$

- La Probabilidad Total puede entenderse como la suma de las probabilidades compuestas $P(A_i \cap B)$

Repaso a la Teoría de Probabilidades

- Se asume que se tiene un conjunto de variables aleatorias V_1, V_2, ….. V_k.
- Cuando se quiere hablar acerca del valor de V_i, sin decir qué valor es, se utiliza el símbolo v_i.
- En las aplicaciones, las variables aleatorias pueden ser diferentes tipos. Si las variables representan proposiciones, sus valores son Verdadero o Falso (o Numéricamente, 1 o 0).

Repaso a la Teoría de Probabilidades

- Si las variables representan medidas físicas (tales como altura, ancho, velocidad, u otras) los valores son numéricos.

- Si las variables representan categorías (como color, letras, sexo, salud, u otras), los valores son categóricos.

Repaso a la Teoría de Probabilidades

- Por ejemplo, el resultado de lanzar una moneda se podría representar por la variable M, cuyo valor podría ser uno de los dos valores categóricos como ser: CA (cara) o CR (cruz). Si se está hablando del resultado de lanzar ***k*** veces una moneda, se necesita ***k*** variables (M_1,…….M_k), cada una de las cuales podría tener el valor CA o CR.

Repaso a la Teoría de Probabilidades

- Se denota las probabilidades conjuntas de que los valores de las variables $V_1, V_2, \ldots V_k$ sean $v_1, v_2 \ldots\ldots v_k$, respectivamente con la siguiente expresión:

$$p(V_1 = v_1, V_2 = v_2, \ldots, V_k = v_k)$$

- Dicha expresión se denomina ***función de probabilidad conjunta*** sobre las variables $V_1, V_2, \ldots V_k$.
- Esta función proyecta las variables de $p(V_1, V_2, \ldots V_k)$ a los números reales en el intervalo entre 0 y 1.
- La sustitución de las variables de $p(V_1, V_2, \ldots V_k)$ por valores concretos de la expresión $p(v_1, v_2 \ldots\ldots v_k)$.

Repaso a la Teoría de Probabilidades

- De este modo, para un lanzamiento de una moneda, se podría tener p(CA)=1/2; y si se lanza una moneda cinco veces se podría tener p(CA,CR,CR,CA,CR)= 1/32.

  Donde p(CA, CR, CR, CA, CR) es la probabilidad conjunta de que primer lanzamiento sea cara, el segundo cruz, el tercero cruz, el cuarto cara, y el quinto cruz.

Repaso a la Teoría de Probabilidades

- Las funciones de probabilidad deben satisfacer ciertas propiedades; entre ellas, se tiene:

a) $0 <= p(V_1, V_2,\ldots.. V_k) <= 1$

Para cualquier asignación de las variables, y

b) $\Sigma p(V_1, V_2,\ldots.. V_k) = 1$

Repaso a la Teoría de Probabilidades

- Un ejemplo concreto para la introducción sobre los conceptos más importantes de la teoría de las probabilidades.
- Los átomos proposicionales : Bateria_Ok, Se_mueve y Objeto_elevable, se definen para representar, respectivamente, que la batería estaba cargada, que el brazo del robot se mueve (cuando sujeta un bloque) y que un bloque se puede levantar.

Repaso a la Teoría de Probabilidades

- Se añade el átomo Indicador, que es para indicar si la batería está completamente cargada.
- Para hacer los diagramas y fórmulas menos pesadas se renombra estos átomos con las letras B, S, O e I.
- No se está seguro acerca de si estos átomos si tienen el valor ***Verdadero o Falso.***

Repaso a la Teoría de Probabilidades

- Como se tiene cuatro variables binarias, entonces se tiene 16 probabilidades sobre estas variables, cada una en la forma *p(B =b, S =s, O=o, I= i, donde b, s, o e i pueden ser Verdadero o Falso.*
- *El diseñador del agente debe especificar estos 16 valores, sujetos a las restricciones de que cada uno esté entre O y 1, Y que el sumatorio de todos ellos debe ser 1.*

Repaso a la Teoría de Probabilidades

- *Como ejemplo se tiene la siguiente tabla se lista algunas de estas probabilidades conjuntas:*

(B, S, O, I)	**Probabilidad conjunta**
Verdadero, Verdadero, Verdadero, Verdadero	0,5686
Verdadero, Verdadero, Verdadero, Falso	0,0299
Verdadero, Verdadero, Falso, Verdadero	0,0135
Verdadero, Verdadero, Falso, Falso	0,0007

Repaso a la Teoría de Probabilidades

- Cuando se conoce los valores de todas las probabilidades conjuntas del conjunto de variables aleatorias, se puede calcular la **Probabilidad Marginal** de una variable aleatoria.
- Por ejemplo, la Probabilidad Marginal p(B = b) se define como la sumatoria de las 8 probabilidades conjuntas(la mitad de las 16) en las que B=b:

$$p(B=b) = \Sigma p(B,S,O,I)$$

Repaso a la Teoría de Probabilidades

- Al utilizar esta fórmula, se obtendrá la Probabilidad Marginal p(B= Verdadero) = 0,95, que es sumatoria de las 8 probabilidades conjuntas en las que B es Verdadero.

- Las probabilidades conjuntas de orden menor, también se pueden calcular mediante la sumatoria de las probabilidades conjuntas correspondientes.

Repaso a la Teoría de Probabilidades

- Por ejemplo, la probabilidad conjunta p(B=b, S=s) es la sumatoria de las 4 probabilidades conjuntas en las que B=b y S=s.

$$p(B{=}b,\ S{=}s) = \Sigma p(B,S,O,I) \quad `B{=}b\ ,S{=}s$$

Repaso a la Teoría de Probabilidades

- Cuando se conocen las probabilidades conjuntas de orden menor, se puede utilizar estas para calcular Probabilidades Marginales:

p(B=b) = Σp(B,S) `$B=b$

y

p(B=b, S=s) = Σp(B,S,O) `$B=b$,$S=s$

Repaso a la Teoría de Probabilidades

- Cuando se trata con variables proposicionales, a menudo se emplea una notación abreviada, por ejemplo algunas veces, en vez de tener que escribir p(B=Verdadero, S=Falso), se escribe p(B,~S), asumiendo que las variables afirmadas han sido instanciadas a Verdadero y las negadas a Falso.
- A partir de la Función Probabilidad Conjunta para un conjunto de variables aleatorias, en principio, se podrá calcular todas las Probabilidades Marginales y todas Probabilidades Conjuntas de Orden Menor.

Probabilidades Condicionales

- *La **Función de Probabilidad Condicional** de V_i, dado V_j se denota por $p(V_i \text{ I } V_j)$. Para cualquier valor de V_i y V_j, está función se define como:*

$$p(Vi|Vj) = \frac{\mathrm{p}(\mathrm{Vi}, \mathrm{Vj})}{\mathrm{p}(\mathrm{Vj})}$$

Donde: - p(Vi, Vj) es la **Probabilidad Conjunta** de Vi y Vj

- p(Vj) es la **Probabilidad Marginal** de Vj

Probabilidades Condicionales

- A partir de la **Función de Probabilidad Condicional**, se puede escribir la **Probabilidad Conjunta** sobre la base de la probabilidad condicional:

$$\mathrm{p}(\mathrm{Vi}\,\mathrm{Vj}) = p(Vi|Vj)\,\mathrm{p}(\mathrm{Vj})$$

- Volviendo al ejemplo del robot apilador de bloques, se puede calcular la Probabilidad de que la batería está cargada dado que el brazo del robot no se mueve mediante:

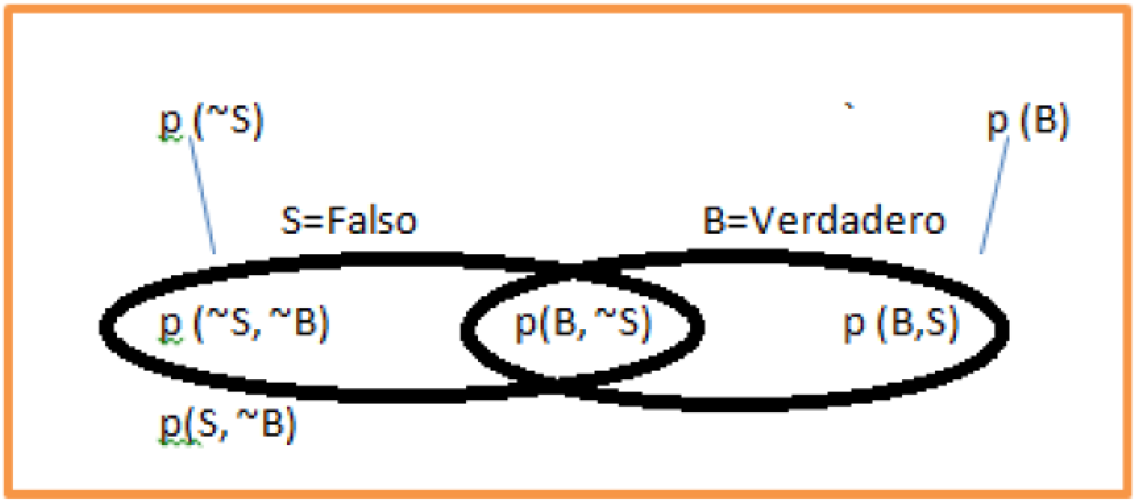
$$p(B = Verdadero|S = Falso) = \frac{\mathrm{p}(B = Verdadero, S = Falso)}{\mathrm{p}(S = Falso)}$$

Probabilidades Condicionales

- Las **Probabilidades Condicionales** son fáciles de entender bajo una interpretación de las probabilidades como frecuencias.
- En esta interpretación, por ejemplo , es la relación entre el número de veces que el brazo no se mueve y el total de veces que se intenta mover.
- Entonces, la probabilidad de que la batería esté cargada, dado que el brazo no se mueve, es el número de veces en que el brazo no se mueve y que la batería está cargada, en la relación al número de veces en que el brazo no se mueve.

Probabilidades Condicionales

- Los diagramas de Venn son muy útiles para ilustrar los conceptos de probabilidad conjunta y condicional (para número pequeño de variables).



p(B|~S) = p(B, ~S)/p(~S)

- En este diagrama, se muestra dos eclipses que se solapan, una denota las veces que el brazo no se mueve , y la otra denota las veces que la batería está cargada . El área exterior a ambos eclipses se corresponde con las veces en las que el brazo se mueve y la batería no está cargada.

Probabilidades Condicionales

- La forma en que se calcula una **Probabilidad Marginal** a partir de las **Probabilidades Conjuntas** se saca fácilmente del diagrama:

$$p(B) = p(B, S) + p(B, \neg S)$$

- También se puede expresar una Probabilidad Conjunta sobre la base de una cadena de **Probabilidades Condicionales**. Por ejemplo:

$$p(B, O, I, S) = p(B \mid O, I, S)\, p(O \mid I, S)\, p(I \mid S)\, p(S)$$

Probabilidades Condicionales

- La forma genérica de esta fórmula encadenada es:

$$p(V_1, V_2, \ldots, V_K) = \prod_{i=1}^{k} p(V_i | V_{i-1}, V_2, \ldots, V_1)$$

- La expresión de la regla encadenada depende de la forma en que se escoja el orden de V_i.

- Distintas ordenaciones dan distintas expresiones, pero todas ellas deben dar el mismo resultado.

Probabilidades Condicionales

- Como el orden en que estén las variables en una **Función de Probabilidad Conjunta**, se puede escribir:

$$\mathrm{p}(\mathrm{Vi},\mathrm{Vj}) = p(Vi|Vj)\mathrm{p}(\mathrm{Vj}) = p(Vj|Vi)\mathrm{p}(\mathrm{Vi}) = \mathrm{p}(\mathrm{Vj},\mathrm{Vi})$$

- Entonces:

$$p(Vi|Vj) = \frac{p(Vj|Vi)\,\mathrm{p}(\mathrm{Vi})}{\mathrm{p}(\mathrm{Vj})}$$

- Esta última ecuación es muy importante. Se llama **Teorema de Bayes**.