MultipasoSimplectico

Saturday, 5 March 2022 9:42 PM

0.1 Ecuación diferencial no lineal

1. Resolver analíticamente la ecuación diferencial no lineal:

$$\frac{du}{dt} = u^q,\ t \in [0, 10] \tag{1}$$

La solución exacta es: $u(t) = e^t$ para $q = 1$ y $u(t) = (t(1-q)+1)^{\frac{1}{1-q}}$ para $q < 1$ y $t(1-q)+1 > 0$.

Para $q = 1$ tenemos que

$$\int \frac{1}{u}\,du = \int dt \Rightarrow \ln(u) = t + C$$
$$\Rightarrow u = e^{t+c}$$

Para $t=0$ y $u(0)=1$ se tiene que

$$u = e^{c} \Rightarrow 1 = e^{c} \Rightarrow \ln|1| = c$$
$$\ln|1| = 0 \Rightarrow c = 0$$

Por lo tanto

$$u = e^{t}$$

Para $q \neq 1$ tenemos que

$$\int \frac{1}{u^q}\,du = \int dt \Rightarrow \frac{u^{1-q}}{1-q} = t + C$$
$$u^{1-q} = (t+c)(1-q) \Rightarrow u = (t+c)^{\frac{1}{1-q}}(1-q)^{\frac{1}{1-q}}$$

Para $u(0)=1$ y $t=0$ tenemos que

$$u = c^{\frac{1}{1-q}}(1-q)^{\frac{1}{1-q}} = 1$$
$$(1-q)\,c = 1$$
$$c = \frac{1}{1-q}$$

Por lo tanto

$$u(t) = (1-q)^{\frac{1}{1-q}}\left(t + \frac{1}{1-q}\right)^{\frac{1}{1-q}} = (t(1-q)+1)^{\frac{1}{1-q}}$$

De este modo tenemos que $u = (t(1-q)+1)^{\frac{1}{1-q}}$ donde $t(1-q)+1 > 0$ para obtener un valor real