Lunar rocket

Thursday, 24 February 2022 9:18 PM

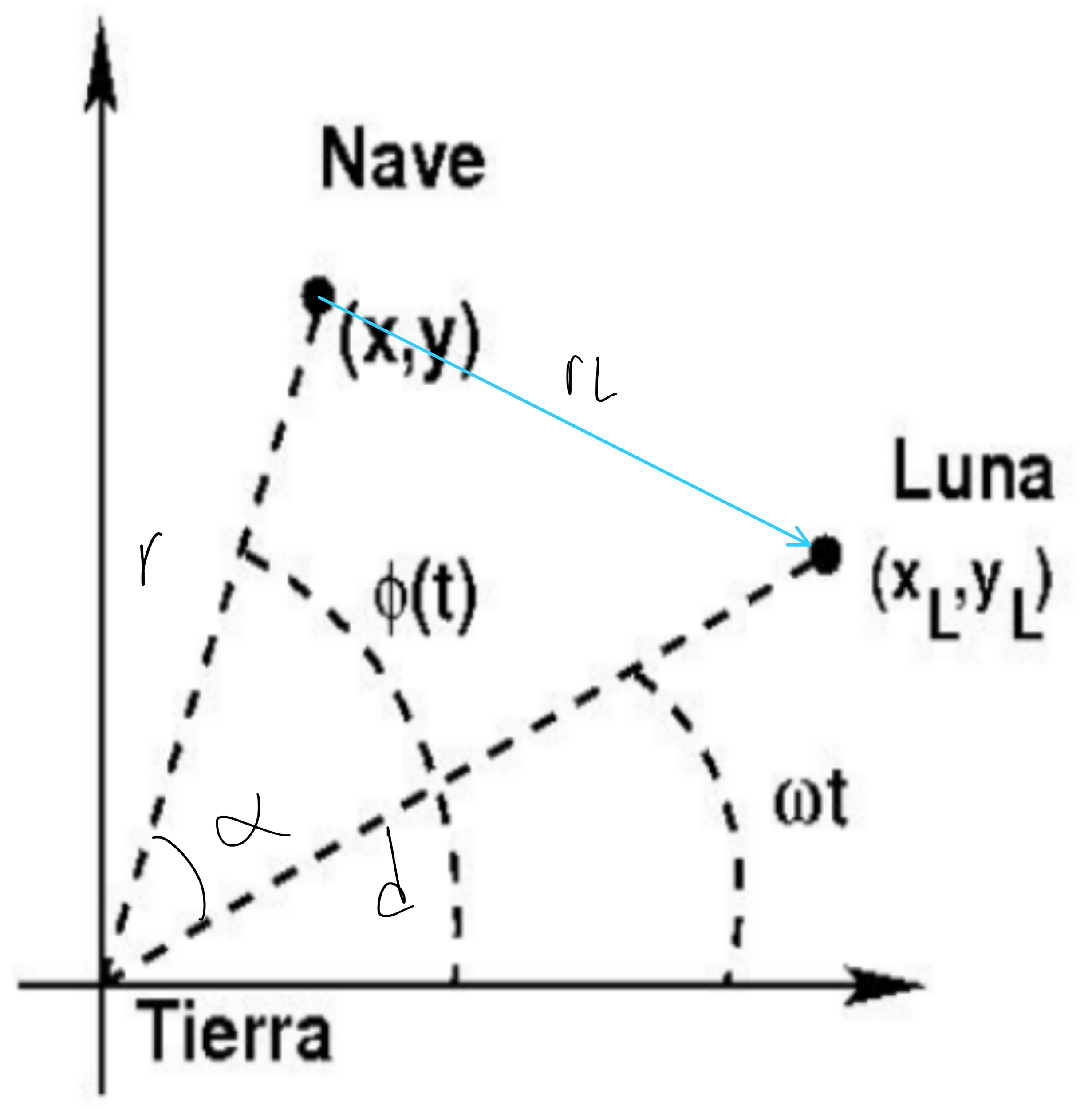

Figure 1: Diagrama de posiciones Nave-Luna

c) Muestre usando la Figura [1] que la distancia Nave-Luna está dada por:

$$r_L(r,\phi,t) = \sqrt{r(t)^2 + d^2 - 2r(t)dcos(\phi - \omega t)}$$

$\alpha = \phi - \omega t$

Por la ley de Cosenos tenemos que:

$\boxed{r_L = \sqrt{r^2 + d^2 - 2rd\cos(\alpha)}}$ [ ]

d) Usando esta distancia muestre que el Hamiltoniano de la nave está dado por:

$$H = p_r\dot{r} + p_\phi\dot{\phi} - L = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\phi^2}{2mr^2} - G\frac{mm_T}{r} - G\frac{mm_L}{r_L(r,\phi,t)} \tag{3}$$

donde L es la energía cinética ~~menos~~ mas la energía potencial de la nave en coordenadas polares.

$\dot{r} = \frac{p_r}{m}$, $\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2}$

$L = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{mr^2}{2}\dot{\theta}^2 + G\frac{mm_T}{r} + G\frac{mm_L}{r_L}$

$L = \frac{\cancel{m}}{2}\frac{p_r^2}{m^{\cancel{2}}} + \frac{\cancel{mr^2}}{2}\frac{p_\theta^2}{m^2r^{\cancel{4}}} + G\frac{mm_T}{r} + G\frac{mm_L}{r_L}$

$L = \frac{1}{2m}p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + G\frac{mm_T}{r} + G\frac{mm_L}{r_L}$

$H = \frac{p_r^2}{m} + \frac{p_\theta^2}{mr^2} - \frac{p_r^2}{2m} - \frac{p_\theta^2}{2mr^2} - G\frac{mm_T}{r} - G\frac{mm_L}{r_L}$

$\boxed{H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} - G\frac{mm_T}{r} - G\frac{mm_L}{r_L}}$ [ ]

e) Muestre que las ecuaciones de Hamilton, que son las ecuaciones de movimiento están dadas por:

$$\begin{aligned}
\dot{r} &= \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m} \\
\dot{\phi} &= \frac{\partial H}{\partial p_\phi} = \frac{p_\phi}{mr^2} \\
\dot{p}_r &= -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{p_\phi^2}{mr^3} - G\frac{mm_T}{r^2} - G\frac{mm_L}{r_L(r,\phi,t)^3}[r - dcos(\phi - \omega t)] \\
\dot{p}_\phi &= -\frac{\partial H}{\partial \phi} = -G\frac{mm_L}{r_L(r,\phi,t)^3}rdsin(\phi - \omega t)
\end{aligned} \tag{4}$$

Note que las dos primeras ecuaciones se refiere al momento lineal y angular de la nave y las segundas a la fuerza. Adicionalmente, este sistema de ecuaciones diferenciales no tiene solución analítica al ser no lineales. Este tipo de sistemas son de gran estudio numérico para establecer órbitas más reales.

$H = \frac{p_r^2}{m} + p_\theta\dot{\theta} - \frac{p_r^2}{2m} - \frac{mr^2}{2}\dot{\theta}^2 - G\frac{mm_T}{r} - G\frac{mm_L}{r_L}$

1. $\frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{2p_r}{m} - \frac{\cancel{2}p_r}{\cancel{2}m} \Rightarrow \frac{p_r}{m} = \dot{r}$
2. $\frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{2p_\theta}{mr^2} - \frac{\cancel{2}p_\theta}{\cancel{2}mr^2} \Rightarrow \frac{p_\theta}{mr^2} = \dot{\theta}$
3. $-\frac{\partial H}{\partial r} = -\left[\frac{-\cancel{2}p_\theta^2}{\cancel{2}mr^3} + \frac{Gmm_T}{r^2} + \frac{1}{\cancel{2}}\frac{Gmm_L(\cancel{2}r - \cancel{2}d\cos(\alpha))}{\sqrt[3]{r^2+d^2-2rd\cos(\alpha)}}\right]$

   $-\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{p_\theta^2}{mr^3} - \frac{Gmm_T}{r^2} - \frac{Gmm_L(r - d\cos(\alpha))}{r_L^3}$
4. $-\frac{\partial H}{\partial \theta} = -\left[\frac{1}{\cancel{2}}\frac{Gmm_L(\cancel{2}rd\sin(\alpha))}{\sqrt[3]{r^2+d^2-2rd\cos(\alpha)}}\right]$

   $= -\frac{Gmm_L rd\sin(\alpha)}{r_L^3}$

f) Para reducir el error de redondeo se pueden definir nuevas variables normalizadas a la distancia lunar: $\tilde{r} = r/d$,ϕ,$\tilde{p}_r = p_r/md$ y $\tilde{p}_\phi = p_\phi/md^2$. Muestre que el sistema se puede escribir como sigue:

$$\begin{aligned}
\dot{\tilde{r}} &= \tilde{p}_r, \\
\dot{\phi} &= \frac{\tilde{p}_\phi}{\tilde{r}^2}, \\
\dot{\tilde{p}}_r &= \frac{\tilde{p}_\phi^2}{\tilde{r}^3} - \Delta\left\{\frac{1}{\tilde{r}^2} + \frac{\mu}{\tilde{r}'^3}[\tilde{r} - cos(\phi - \omega t)]\right\} \\
\dot{\tilde{p}}_\phi &= -\frac{\Delta\mu\tilde{r}}{\tilde{r}'^3}sin(\phi - \omega t)
\end{aligned} \tag{5}$$

donde $\Delta \equiv Gm_T/d^3$, $\mu \equiv m_L/m_T$ y $\tilde{r}' \equiv \sqrt{1 + \tilde{r}^2 - 2\tilde{r}cos(\phi - \omega t)}$.

1. $\tilde{r} = \frac{r}{d} \Rightarrow \dot{\tilde{r}} = \frac{\dot{r}}{d} = \frac{p_r}{md} = \tilde{p}_r$
2. $\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2} \Rightarrow \frac{\tilde{p}_\theta\, md^2}{m\tilde{r}^2 d^2} = \frac{\tilde{p}_\theta}{\tilde{r}^2}$
3. $\dot{\tilde{p}}_r = \frac{\dot{p}_r}{md} = \frac{1}{md}\left[\frac{p_\theta^2}{mr^3} - G\frac{mm_T}{r^2} - \frac{Gmm_L}{r_L^3}(r - d\cos(\alpha))\right]$

   $= \frac{\tilde{p}_\theta^2}{\tilde{r}^3} - \Delta\left\{\frac{1}{\tilde{r}^2} + \frac{\mu}{\tilde{r}'^3}[\tilde{r} - \cos(\alpha)]\right\}$
4. $\dot{\tilde{p}}_\theta = \frac{\dot{p}_\theta}{md^2} = -\frac{1}{md^2}\frac{Gmm_L rd\sin(\alpha)}{r_L^3}$

   $= -\frac{\Delta\mu\tilde{r}}{\tilde{r}'^3}\sin(\alpha)$