MultipasoSimplectico
Saturday, 5 March 2022 9:42 PM

0.1 Ecuación diferencial no lineal

1. Resolver analíticamente la ecuación diferencial no lineal:

$$\frac{du}{dt} = u^q, \ t \in [0, 10] \tag{1}$$

La solución exacta es: $u(t) = e^t$ para $q = 1$ y $u(t) = (t(1-q)+1)^{\frac{1}{1-q}}$ para $q < 1$ y $t(1-q)+1 > 0$.

Para $q = 1$ tenemos que

$$\int \frac{1}{u}\, du = \int dt \Rightarrow Ln(u) = t + C$$
$$\Rightarrow u = e^{t+c}$$

Para $t = 0$ y $U(0) = 1$ se tiene que

$$U = e^C \Rightarrow 1 = e^C \Rightarrow Ln(1) = C$$
$$Ln(1) = 0 \Rightarrow C = 0$$

Por lo tanto

$$U = e^t$$

Para $q \neq 1$ tenemos que

$$\int \frac{1}{u^q}\, du = \int dt \Rightarrow \frac{u^{1-q}}{1-q} = t + C$$
$$u^{1-q} = (t+C)(1-q) \Rightarrow U = (t+C)^{\frac{1}{1-q}} (1-q)^{\frac{1}{1-q}}$$

Para $U(0) = 1$ y $t = 0$ tenemos que

$$U = C^{\frac{1}{1-q}} (1-q)^{\frac{1}{1-q}} = 1$$
$$(1-q)C = 1$$
$$C = \frac{1}{1-q}$$

Por lo tanto

$$U(t) = (1-q)^{\frac{1}{1-q}} \left(t + \frac{1}{1-q}\right)^{\frac{1}{1-q}} = (t(1-q)+1)^{\frac{1}{1-q}}$$

De este modo tenemos que $U = (t(1-q)+1)^{\frac{1}{1-q}}$ donde $t(1-q)+1 > 0$ para obtener un valor real

2. Encontrar la solución numéricamente para algunos valores de $q = [0., 0.2, 0.4, 0.7, 0.9, 1.]$.

Para $q = 0$ $\quad U = t + 1$

Para $q = 0{,}2$ $\quad U = (0{,}8t+1)^{5/4}$

Para $q = 0{,}4$ $\quad U = (0{,}6t+1)^{5/3}$

Para $q = 0{,}7$ $\quad U = (0{,}3t+1)^{10/3}$

Para $q = 0{,}9$ $\quad U = (0{,}1t+1)^{10}$

Para $q = 1$ $\quad U = e^t$