

Modélisation 2 : Modéliser la propagation d'une maladie contagieuse

Gabrielle ROULLET
Gabriel PIZZO



Résumé

On s'intéresse à la modélisation d'épidémies : comment prévoir l'évolution d'une maladie contagieuse au cours du temps, quels en sont les facteurs, et de ce fait comment prévoir une réponse à un début d'épidémie. Pour cela, nous allons étudier le modèle SIR et le simuler numériquement.

Table des matières

1	Le modèle SIR	3
1.1	Présentation du modèle	3
1.2	Premières remarques sur le modèle	4
1.3	Étude des suites	5
1.4	Simulations numériques avec Python	8
1.4.1	Expression vectorielle	8
1.4.2	Évolution de l'épidémie	8
1.5	Modèle SIGD	12
2	Importance du taux de reproduction	15
2.1	Définition et interprétation du taux de reproduction	15
2.2	Caractériser les cas où il y a épidémie grâce à la valeur de \mathcal{R}_0 . .	20
2.3	Théorème du seuil	21
2.4	Lien entre S_∞ et \mathcal{R}_0	23
3	Calcul de S_∞	25
3.1	Une équation implicite satisfaite par S_∞	25
3.2	La méthode de NEWTON	30
3.3	Exemples de calculs de valeurs de S_∞	33
3.4	Justification de la relation entre S_∞ et \mathcal{R}_0	35
4	Annexe	37
4.1	Codes Python	37
4.1.1	Visualisation des suites du modèle SIR	37
4.1.2	Visualisation des suites du modèle SIGD	38
4.1.3	Étude de la dépendance entre S_∞ et \mathcal{R}_0	39
4.1.4	Calcul de S_∞ à l'aide de la méthode de NEWTON	40
4.1.5	Graphe de S_∞ en fonction de \mathcal{R}_0	40
	Sources et références	42

1 Le modèle SIR

1.1 Présentation du modèle

Pour étudier la propagation d'une épidémie, on se sert ici du modèle SIR. Ce modèle décompose une population de $M > 0$ individus en trois classes :

1. Les individus n'ayant jamais contracté la maladie et qui sont donc **susceptibles** d'être contaminés : ils font partie de la classe **S**;
2. Les individus contaminés et donc infectieux : ils font partie de la classe **I**;
3. Les individus qui n'ont **plus** la maladie, soit les guéris et les décédés. On parle d'individus **retirés**, ils font partie de la classe **R**.

On introduit Δt une durée, et, pour $n \in \mathbb{N}$, on note S_n , I_n et R_n le nombre d'individus dans les classes **S**, **I** et **R** à $t_n = n\Delta t$.

À ce modèle, on ajoute 5 hypothèses :

- (H1) La population est isolée du reste du monde et on peut négliger les taux de naissances et de décès non liés à la maladie étudiée.
- (H2) La variation du nombre d'individus entre t_n et t_{n+1} est proportionnelle au produit $S_n I_n$.
- (H3) La variation du nombre d'individus infectieux entre t_n et t_{n+1} correspond au nombre d'individus sains infectés à t_n moins le nombre d'individus remis à t_n .
- (H4) Un individu remis ne peut plus être infecté.
- (H5) La population comporte un grand nombre d'individus qui forment une population homogène dans laquelle tous les individus sont susceptibles d'interagir.

Grâce à ces hypothèses, on considère les suites $(S_n)_{n \geq 0}$, $(I_n)_{n \geq 0}$ et $(R_n)_{n \geq 0}$ telles que :

$$\begin{cases} S_{n+1} &= S_n - pS_n I_n \Delta t \\ I_{n+1} &= I_n + pS_n I_n \Delta t - \alpha I_n \Delta t \\ R_{n+1} &= R_n + \alpha I_n \Delta t \end{cases} \quad (1)$$

avec $(S_0, I_0, R_0) \in [0, M]^3$, $I_0 > 0$, $S_0 + I_0 + R_0 = M$ et $(p, \alpha) \in]0, 1]^2$.

1.2 Premières remarques sur le modèle

S_0 , I_0 et R_0 représentent le nombre de personnes respectivement saines, infectées et retirées au début de l'étude.

Supposons que A personnes susceptibles d'être contaminées et B personnes infectées se trouvent dans un même espace. Une personne non infectée peut donc faire jusqu'à B rencontres avec une personne infectée.

Ceci est possible pour A personnes saines, ce qui signifie qu'il y a jusqu'à AB rencontres possibles entre une personne saine et une personne infectée.

Nous venons de justifier l'hypothèse (H2) : en effet, à chaque rencontre entre un individu sain et un individu infecté, le premier a une certaine probabilité d'être contaminé par le deuxième. La variation entre t_n et t_{n+1} du nombre d'individus sains est donc bien proportionnel au produit $S_n I_n$, qui correspond à notre AB précédent.

De plus, cette probabilité d'être contaminé est donc p . Ce dernier est donc une fréquence et s'exprime donc, si on suppose que Δt s'exprime en s, en s^{-1} .

Par analogie, α est la probabilité pour une personne infectée de passer dans la catégorie "retiré". C'est donc également une fréquence, en s^{-1} si Δt est en s.

Cas $p = 0$:

$$\begin{cases} S_{n+1} = S_n - 0 \cdot S_n I_n \Delta t \\ I_{n+1} = I_n + 0 \cdot S_n I_n \Delta t - \alpha I_n \Delta t \\ R_{n+1} = R_n + \alpha I_n \Delta t \end{cases} \iff \begin{cases} S_{n+1} = S_n \\ I_{n+1} = I_n - \alpha I_n \Delta t \\ R_{n+1} = R_n + \alpha I_n \Delta t \end{cases}$$

On voit que $(S_n)_{n \geq 0}$ est alors constante : les personnes saines ne sont pas contaminées. De plus, comme $\alpha > 0$, la suite $(I_n)_{n \geq 0}$ est strictement décroissante et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$$

La population fini donc par être composée uniquement de personnes saines et de personnes retirées : le virus ne contamine personne.

Cas $\alpha = 0$:

$$\begin{cases} S_{n+1} = S_n - p S_n I_n \Delta t \\ I_{n+1} = I_n + p S_n I_n \Delta t - 0 \cdot I_n \Delta t \\ R_{n+1} = R_n + 0 \cdot I_n \Delta t \end{cases} \iff \begin{cases} S_{n+1} = S_n - p S_n I_n \Delta t \\ I_{n+1} = I_n + p S_n I_n \Delta t \\ R_{n+1} = R_n \end{cases}$$

Dans ce cas là, c'est la suite $(R_n)_{n \geq 0}$ qui est constante, et, puisque $p > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 0$$

Aucune des personnes infectieuses n'est retirée : personne ne meurt à cause du virus, mais personne ne guérit non plus.

On notera que l'hypothèse (H4) n'est pas adaptée à toutes les maladies contagieuses. Elle affirme en effet que les individus de la classe **R** (retirés) ne changent plus de classe, ce qui signifie que les personnes guéries ne peuvent plus tomber malade.

La deuxième affirmation n'est pas vérifiée pour toutes les maladies, puisque l'immunité due à l'exposition à la maladie n'est dans les fait jamais totale. C'est le cas de la coqueluche et, il semblerait, du coronavirus.

1.3 Étude des suites

On considère maintenant $\Delta t < \min\left(\frac{1}{\alpha}, -\frac{1}{Mp}\right)$.

Commençons par vérifier par récurrence que la proposition $P_n : "S_n + I_n + R_n = M"$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- Initialisation :

Pour $n = 0$: par construction de $(S_n)_{n \geq 0}$, $(I_n)_{n \geq 0}$ et $(R_n)_{n \geq 0}$, on a bien :

$$S_0 + I_0 + R_0 = M$$

Donc P_0 est vraie.

- Hérédité :

Supposons P_n vraie pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé.

$$\begin{aligned} S_{n+1} + I_{n+1} + R_{n+1} &= S_n - pS_n I_n \Delta t + I_n + pS_n I_n \Delta t - \alpha I_n \Delta t + R_n + \alpha I_n \Delta t \\ &= S_n + I_n + R_n \\ &= M \end{aligned}$$

Donc P_{n+1} est vraie.

Par principe de récurrence, on a bien

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad S_n + I_n + R_n = M}$$

Grâce à ce résultat, on peut en déduire l'ensemble de définition des trois suites :

- Dans un premier temps, puisque $M = S_n + I_n + R_n$ et que $M > 0$, il est clair que $S_n, R_n, I_n \leq M$.

— Maintenant, montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n, I_n, R_n \geq 0$. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'au moins une des trois suites est strictement négative.

* Si les trois suites sont strictement négatives :

$$\begin{aligned} S_n + I_n + R_n &< 0 \\ M &< 0 \end{aligned}$$

Ce qui est impossible.

* Si deux suites sont strictement négatives et l'autre est positive ou nulle : supposons $S_n, I_n < 0$ et $R_n \geq 0$

$$\begin{aligned} S_n &< 0 \\ M - I_n - R_n &< 0 \\ M - R_n &< I_n < 0 \\ M &< R_n \end{aligned}$$

Ce qui est une fois de plus impossible.

En répétant ce raisonnement, on obtient qu'il est impossible que deux des suites soient strictement négatives.

* Si une des trois suites est strictement négative et les deux autres sont positives : supposons $S_n < 0$ et $I_n, R_n \geq 0$

$$\begin{aligned} S_n &< 0 \\ M - I_n - R_n &< 0 \\ M &< I_n + R_n \end{aligned}$$

Ce qui est impossible.

Le raisonnement est le même pour les autres possibilités.

On obtient donc bien que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad S_n, I_n, R_n \geq 0}$.

On en déduit que les suites $(S_n)_{n \geq 0}$, $(I_n)_{n \geq 0}$ et $(R_n)_{n \geq 0}$ sont toutes les trois définies sur $[0, M]$.

Intéressons-nous maintenant au sens de croissance de nos suites.

On peut montrer que $(S_n)_{n \geq 0}$ et $(R_n)_{n \geq 0}$ sont monotones, à savoir la première décroissante et la seconde croissante.

$(S_n)_{n \geq 0}$ décroissante :

On a :

$$\begin{aligned} S_{n+1} - S_n &= S_n - pS_n I_n \Delta t - S_n \\ \iff S_{n+1} - S_n &= -pS_n I_n \Delta t \end{aligned}$$

Or $\forall n \in \mathbb{N} \quad S_n, I_n \geq 0$ et p est positif d'où $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} S_{n+1} - S_n &= -pS_n I_n \Delta t \\ &\leq 0 \\ \iff S_{n+1} &\leq S_n \end{aligned}$$

Finalement, la suite $(S_n)_{n \geq 0}$ est décroissante.

$(R_n)_{n \geq 0}$ croissante :

On a :

$$\begin{aligned} R_{n+1} - R_n &= R_n + \alpha I_n \Delta t - R_n \\ \iff R_{n+1} - R_n &= \alpha I_n \Delta t \end{aligned}$$

Or $\forall n \in \mathbb{N} \quad I_n \geq 0$ et α est positif d'où

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} \quad R_{n+1} - R_n &= \alpha I_n \Delta t \\ &\geq 0 \\ \iff R_{n+1} &\geq R_n \end{aligned}$$

Finalement, la suite $(R_n)_{n \geq 0}$ est croissante.

Les suites $(S_n)_{n \geq 0}$ et $(R_n)_{n \geq 0}$ sont respectivement décroissante et croissante. Or on sait qu'elles sont bornées, elles sont donc convergentes.

De plus, $I_n = M - R_n - S_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$, donc $(I_n)_{n \geq 0}$ converge comme somme de suites convergentes. Notons S_∞ la limite de $(S_n)_{n \geq 0}$, R_∞ la limite de $(R_n)_{n \geq 0}$ et I_∞ la limite de $(I_n)_{n \geq 0}$ en $+\infty$.

Récupérons la troisième ligne de notre système d'équations (1) :

$$R_{n+1} = R_n + \alpha I_n \Delta t$$

Par passage à la limite, on obtient

$$R_\infty = R_\infty + \alpha I_\infty \Delta t$$

c'est-à-dire, puisque $\alpha, \Delta t \neq 0$:

$$\boxed{I_\infty = 0}$$

On en déduit que le nombre d'infectés finit par être nul dans ce modèle.

1.4 Simulations numériques avec Python

On rappelle qu'on peut définir nos suite $(R_n)_{n \geq 0}, (S_n)_{n \geq 0}, (I_n)_{n \geq 0}$ par récurrence à l'aide de ce système :

$$\begin{cases} S_{n+1} &= S_n - pS_n I_n \Delta t \\ I_{n+1} &= I_n + pS_n I_n \Delta t - \alpha I_n \Delta t \\ R_{n+1} &= R_n + \alpha I_n \Delta t \end{cases}$$

avec $p, \alpha, (S_0, I_0, R_0) \in [0, M]^3, I_0 > 0, S_0 + I_0 + R_0 = M$,

1.4.1 Expression vectorielle

$$\text{Soit : } X_n = \begin{pmatrix} S_n \\ I_n \\ R_n \end{pmatrix}$$

$$\text{Soit } f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ définie par : } f(X_n) = \begin{pmatrix} S_n - pS_n I_n \Delta t \\ I_n + pS_n I_n \Delta t - \alpha I_n \Delta t \\ R_n + \alpha I_n \Delta t \end{pmatrix}$$

On a alors $X_{n+1} = f(X_n)$.

1.4.2 Évolution de l'épidémie

Avec les termes initiaux s_0, i_0, r_0 et les coefficients p, α , nous pouvons écrire un programme Python nous permettant de calculer puis tracer les termes des trois suites jusqu'au temps T .

(voir code en annexe 4.1.1)

Prenons maintenant $I_0 = 10$, $S_0 = 990$, $p = 0.002$, $\alpha = 0.8$, $T = 20$ et $N = 1000$. À l'aide de la bibliothèque Python matplotlib, on trace le graphe décrivant l'évolution des trois suites en fonction du temps :

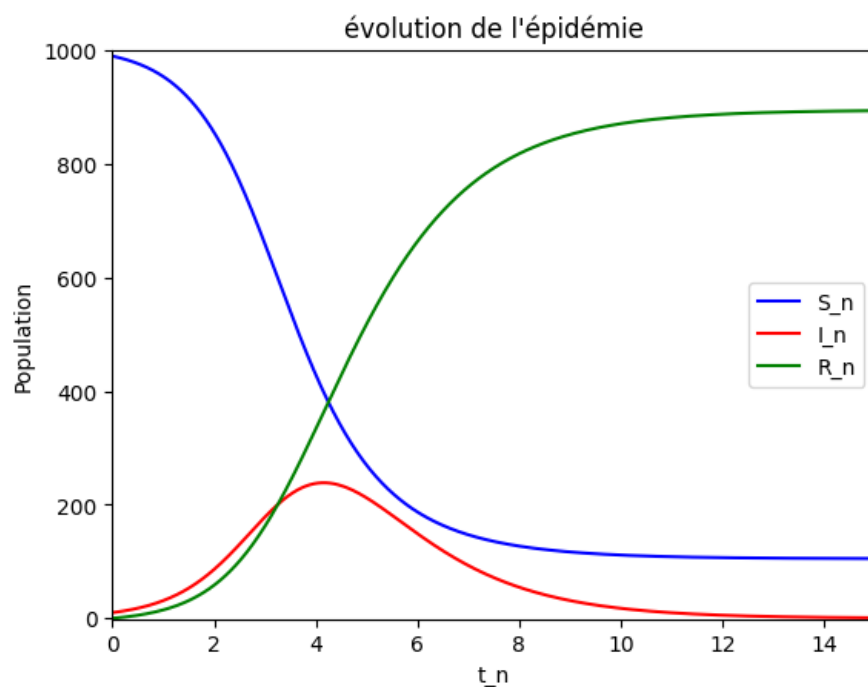


FIGURE 1 – Évolution de l'épidémie pour $I_0 = 10$, $S_0 = 990$, $p = 0.002$ et $\alpha = 0.8$

On peut en déduire plusieurs choses : le nombre de personnes susceptibles est descendu à moins de 200 personnes, le virus a donc touché plus de 80% de la population. Cependant, elle n'évolue visiblement plus.

Prenons maintenant les mêmes paramètres en faisant uniquement varier p , avec $p = 0.004$:

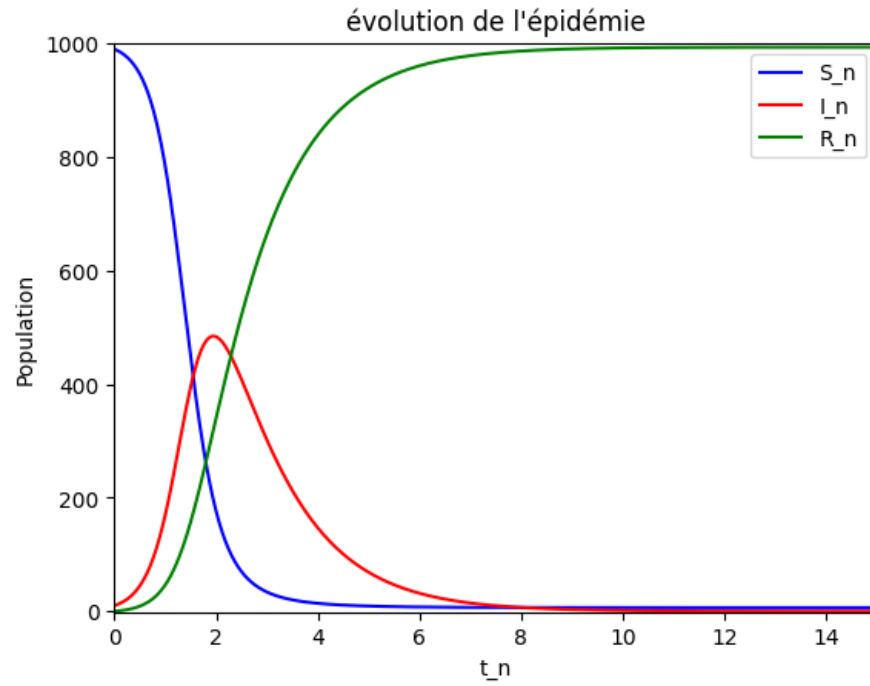


FIGURE 2 – Évolution de l'épidémie pour $I_0 = 10$, $S_0 = 990$, $p = 0.004$ et $\alpha = 0.8$

On peut voir qu'avec ces paramètres p et α , l'intégralité de la population fini dans la catégorie retirés. Toute la population a donc été infectée.

Reprenons les mêmes paramètres initiaux à l'exception de $p = 0.003$ et diminuons α en prenant $\alpha = 0.5$.

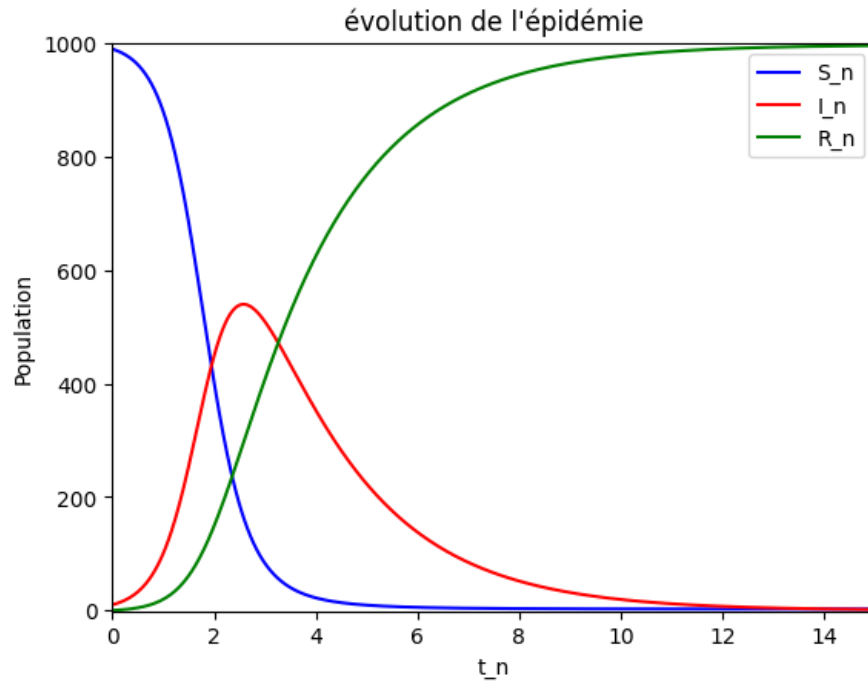


FIGURE 3 – Évolution de l'épidémie pour $I_0 = 10$, $S_0 = 990$, $p = 0.003$ et $\alpha = 0.5$

L'ensemble de la population fini par être infecté mais plus lentement que le modèle précédent, le coefficient p semble être plus important.

Nombre de personnes infectées :

Les personnes retirées ont nécessairement été infectées, et tout individu infecté fini dans la catégorie R au bout d'un certain temps, on peut donc considérer que le nombre total d'individus ayant été infectés est le nombre de retirés à la fin de la simulation s'il n'y a plus de nouveaux infectés, si elle coïncide avec celle de l'épidémie.

1.5 Modèle SIGD

Le modèle SIR ne fait pas la différence entre guéris et personnes décédées. Pour cela nous devons introduire deux nouvelles classes : la classe **G** pour les personnes guéries, et la classe **D** pour les personnes décédées. À ces classes faisons correspondre deux suites : $(G_n)_{n \geq 0}$ et $(D_n)_{n \geq 0}$, qui comptent les personnes dans la classe **G** et la classe **D** respectivement au moment $n\Delta t$.

On note α_1 la probabilité qu'un malade infecté guérisse et α_2 la probabilité qu'un malade infecté décède ; nous pouvons donc exprimer les suites par récurrence de manière quasi-identique au modèle SIR :

$$\begin{cases} S_{n+1} &= S_n - pS_n I_n \Delta t \\ I_{n+1} &= I_n + pS_n I_n \Delta t - (\alpha_1 + \alpha_2) I_n \Delta t \\ G_{n+1} &= G_n + \alpha_1 I_n \Delta t \\ D_{n+1} &= D_n + \alpha_2 I_n \Delta t \end{cases}$$

Nous avons par définition :

$$\boxed{R_n = G_n + D_n}$$

Soulignons que nous avons par cette relation la convergence de $(G_n)_{n \geq 0}$ et $(D_n)_{n \geq 0}$; notons G_∞ et D_∞ leurs limites respectives.

Nous pouvons donc obtenir le nombre total de personnes décédées (i.e D_∞) à partir de R_∞ et des paramètres de notre nouveau modèle. Par passage à la limite :

$$R_\infty = G_\infty + D_\infty \tag{2}$$

Écrivons les premiers termes de $(G_n)_{n \geq 0}$ et de $(D_n)_{n \geq 0}$:

$$\begin{array}{ll} G_0 &= 0 & D_0 &= 0 \\ G_1 &= \alpha_1 I_0 \Delta t & D_1 &= \alpha_2 I_0 \Delta t \\ G_2 &= \alpha_1 I_0 \Delta t + \alpha_1 I_1 \Delta t & D_2 &= \alpha_2 I_0 \Delta t + \alpha_2 I_1 \Delta t \\ &\vdots & &\vdots \end{array}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} G_\infty &= \alpha_1 \Delta t \sum_{n=1}^{\infty} G_n \\ D_\infty &= \alpha_2 \Delta t \sum_{n=1}^{\infty} D_n \end{aligned}$$

En remplaçant dans (2), on obtient

$$\boxed{D_\infty = R_\infty - \alpha_1 \Delta t \sum_{n=1}^{\infty} G_n}$$

De manière identique au modèle SIR nous pouvons calculer les termes de ces suites définies par récurrence à l'aide d'un code Python.
(voir code en annexe 4.1.2)

Avec les paramètres : $n = 1000$, $I = 10$, $S = 990$, $D = 0$, $G = 0$, $T = 20$, $\alpha_1 = 0.1$, $\alpha_2 = 0.2$, $p = 0.003$ la simulation nous donne :

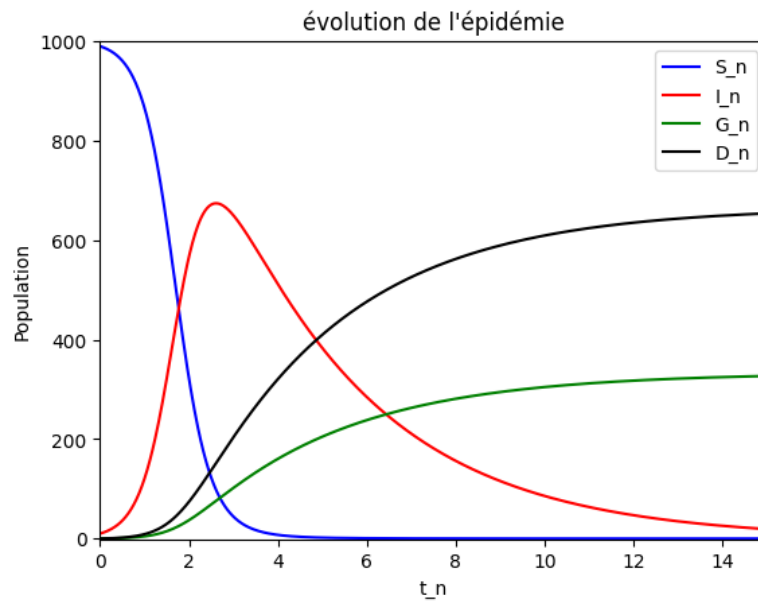


FIGURE 4 – Évolution de l'épidémie pour $I_0 = 10$, $S_0 = 990$, $p = 0.003$, $\alpha_1 = 0.1$ et $\alpha_2 = 0.2$

Avec les mêmes conditions initiales et : $\alpha_1 = 0.2$, $\alpha_2 = 0.05$ et $p = 0.003$, la simulation nous donne :

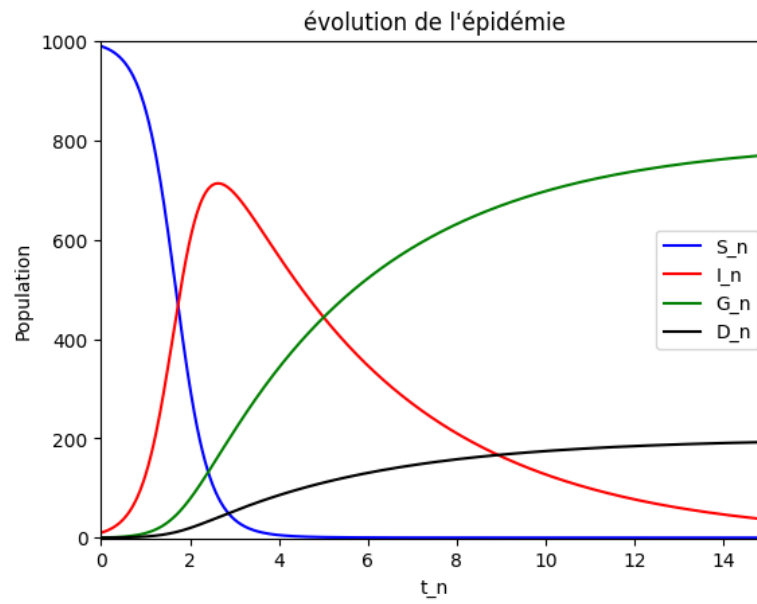


FIGURE 5 – Évolution de l'épidémie pour $I_0 = 10$, $S_0 = 990$, $p = 0.003$, $\alpha_1 = 0.2$ et $\alpha_2 = 0.05$

2 Importance du taux de reproduction

2.1 Définition et interprétation du taux de reproduction

Définition 1. Le taux de reproduction du modèle SIR étudié est donné par

$$\mathcal{R}_0 = \frac{pM}{\alpha}$$

Dans cette partie, nous nous attacherons à montrer que l'on peut considérer que le taux de reproduction correspond au nombre moyen de personnes qu'une personne infectée va contaminer directement.

Commençons par calculer la durée moyenne de la période pendant laquelle un individu est infecté, durée que l'on notera T_m . On construit la suite $(J_n)_{n \geq 0}$ en considérant J_0 le nombre d'individus infectés à un temps t_0 , puis J_n le nombre d'individus infectés au temps t_{n-1} qui sont toujours infectés à t_n .

Expression de J_n :

On connaît α , qui représente notre coefficient de rémission pour notre modèle, c'est-à-dire la fréquence de passage de la catégorie infecté à remis. On a alors, pour $J_n > 0$:

$$\begin{aligned} J_{n+1} &= J_n - \alpha \Delta t J_n \\ \iff J_{n+1} &= J_n (1 - \alpha \Delta t) \\ \iff \frac{J_{n+1}}{J_n} &= 1 - \alpha \Delta t \end{aligned}$$

La suite (J_n) est donc géométrique et, pour J_0 le nombre d'individus infectés à un temps $t = 0$ on peut l'exprimer sous la forme :

$$\boxed{J_n = J_0 (1 - \alpha \Delta t)^n}$$

Individus guéris :

Considérons maintenant les individus guéris à t_n qui étaient malades à t_{n-1} , qu'on note \mathcal{F}_n . On note le cardinal de \mathcal{F}_n F_n . Ceux-ci correspondent par définition aux individus qu'on a retirés de la catégorie “malade à l'instant $n - 1$ ”, c'est-à-dire J_{n-1} .

Alors, on a :

$$\begin{aligned} F_n &= J_{n-1} - J_n \\ &= J_0(1 - \alpha\Delta t)^{n-1} - J_0(1 - \alpha\Delta t)^n \\ &= J_0(1 - \alpha\Delta t)^{n-1} - J_0(1 - \alpha\Delta t)(1 - \alpha\Delta t)^{n-1} \\ &= (1 - \alpha\Delta t)^{n-1}(J_0 - J_0(1 - \alpha\Delta t)) \\ F_n &= \alpha\Delta t(1 - \alpha\Delta t)^{n-1}J_0 \end{aligned}$$

$$\boxed{F_n = \alpha\Delta t(1 - \alpha\Delta t)^{n-1}J_0}$$

Temps de rémissions :

Soit l'ensemble des temps de rémission possibles $\{n\Delta t \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Par approximation, on considérera que les individus de la classe \mathcal{F}_n sont malades pendant une durée égale à $n\Delta t$.

On considère :

$$\boxed{S = \frac{1}{J_0} \sum_{n=1}^{\infty} n\Delta t F_n}$$

la moyenne des temps de rémission possibles $n\Delta t$, pondérée par la fraction de personnes qui se remettent en ce temps, représentée par F_n : cette somme représente donc bien T_m . On a alors :

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{J_0} \sum_{n=1}^{\infty} n\Delta t F_n \\ &= \frac{1}{J_0} \sum_{n=1}^{\infty} n\Delta t (\alpha\Delta t(1 - \alpha\Delta t)^{n-1}J_0) \\ S &= \frac{1}{J_0} \sum_{n=1}^{\infty} (\Delta t)^2 \alpha J_0 n (1 - \alpha\Delta t)^{n-1} \end{aligned}$$

Pour plus de clarté notons $k = (\Delta t)^2 \alpha J_0$. On obtient :

$$S = \frac{k}{J_0} \sum_{n=1}^{\infty} n(1 - \alpha\Delta t)^{n-1}$$

Or on peut utiliser le fait que $\forall x \in]-2, 2[$:

$$\frac{1}{x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n(1-x)^{n-1}$$

En effet, pour $(1-x) \in]-1, 1[$, soit pour $x \in]0, 2[$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (1-x)^n = \frac{1}{1-x}$$

En dérivant cette série sur le le disque $]0, 2[$ on obtient bien :

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(1-x)^{n-1} = \frac{1}{x^2}$$

Revenons à notre série. On a supposé que :

$$\Delta t < \min \left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{Mp} \right)$$

donc :

1. Si $\min \left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{Mp} \right) = \frac{1}{\alpha}$: alors $\alpha \Delta t < 1$
2. Si $\min \left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{Mp} \right) = \frac{1}{Mp}$: alors $\alpha \Delta t < \frac{\alpha}{Mp} < 2$.

En considérant $x = \alpha \Delta t$ avec $\alpha \Delta t \in]0, 2[$,

$$\begin{aligned} S &= \frac{k}{J_0} \sum_{n=1}^{\infty} n(1 - \alpha \Delta t)^{n-1} \\ S &= \frac{k}{J_0} \frac{1}{\alpha^2 (\Delta t)^2} \\ S &= \frac{(\Delta t)^2 \alpha J_0}{J_0 \alpha^2 (\Delta t)^2} \\ S &= \frac{1}{\alpha} \end{aligned}$$

Ainsi la série S converge.

$$S = \frac{1}{\alpha} = T_m$$

Calcul de α :

Considérons un ensemble de données épidémiologiques. Alors nous pouvons retrouver le paramètre α .

Soit un ensemble de données représentées par :

t_n	t_0	t_1	t_2	\dots	t_n
S_n	S_0	S_1	S_2	\dots	S_n
I_n	I_0	I_1	I_2	\dots	I_n
R_n	R_0	R_1	R_2	\dots	R_n

On peut calculer : $S =$

Si on considère l'approximation que les individus de la classe F_n sont malades pendant une durée $n\Delta t$:

On peut donc en déduire que le taux de reproduction correspond au nombre moyen qu'une personne va contacter directement :

$$\boxed{\mathcal{R}_0 = pMT_m}$$

c'est-à-dire :

$$\boxed{\mathcal{R}_0 = \frac{pM}{\alpha}}$$

Supposons p une fonction de M de la forme $p(M) = \frac{q}{M}$. Alors on peut obtenir une expression de \mathcal{R}_0 indépendante de M :

$$\mathcal{R}_0 = \frac{q}{\alpha}$$

2.2 Caractériser les cas où il y a épidémie grâce à la valeur de \mathcal{R}_0

Définition 2. Étant donné des conditions initiales $(S_0, I_0, R_0) \in [0, M]^3$, on dira qu'il y a épidémie s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $I_{n_0+1} > I_{n_0}$.

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$, $\varepsilon \in [0, M]$. Supposons $S_{n_0} = M - \varepsilon$.
Alors :

$$\begin{aligned} I_{n_0+1} \leq I_{n_0} &\iff I_{n_0} + pS_{n_0}I_{n_0}\Delta t - \alpha I_{n_0}\Delta t \leq I_{n_0} \\ &\iff p(M - \varepsilon) - \alpha \leq 0 \\ &\iff pM - p\varepsilon - \alpha \leq 0 \\ &\iff \mathcal{R}_0 - \varepsilon \frac{p}{\alpha} \leq 1 \end{aligned}$$

Condition sur \mathcal{R}_0 :

Soit $\mathcal{R}_0 \leq 1$ (respectivement $\mathcal{R}_0 < 1$) , on dit par définition que I_n décroissante si elle vérifie :

$$\boxed{\forall n_0 \in \mathbb{N} \quad I_{n_0+1} \leq I_{n_0}}$$

Reprenons la condition précédente :

$$\mathcal{R}_0 - \varepsilon \frac{p}{\alpha} \leq 1$$

Si $\mathcal{R}_0 \leq 1$ (respectivement $\mathcal{R}_0 < 1$) on a $\mathcal{R}_0 - 1 \leq 0$ (resp $\mathcal{R}_0 - 1 < 0$) donc la condition implique :

$$-\varepsilon \frac{p}{\alpha} \leq 1 - \mathcal{R}_0 \leq 0$$

Or $p \geq 0$, $\varepsilon \geq 0$ et $\alpha \geq 0$, donc :

$$-\varepsilon \frac{p}{\alpha} \leq 0$$

La condition étant vérifiée, $(I_n)_{n \geq 0}$ est décroissante.

$\mathcal{R}_0 > 1$:
Si $\mathcal{R}_0 > 1$: en prenant la condition précédente de décroissance de $(I_n)_{n \geq 0}$
c'est-à-dire :

$$\mathcal{R}_0 - \varepsilon \frac{p}{\alpha} \leq 1$$

qui est équivalente à (p non nul) :

$$\varepsilon \geq \frac{\alpha}{p}(\mathcal{R}_0 - 1)$$

Il suffit de prendre la négation de la condition alors :

$$\varepsilon < \frac{\alpha}{p}(\mathcal{R}_0 - 1)$$

ce qui nous donne une condition sur $S_{n_0} = M - \varepsilon$ tel que $(I_n)_{n \geq 0}$ soit strictement croissante, et qu'il ait donc épidémie.

Cohérence avec les résultats précédents :

Dans les simulations précédentes on avait par exemple épidémie avec

$$p = 0.002$$

$$\alpha = 0.8$$

$$M = 1000$$

$$S_{n_0} = 990.$$

Ce qui donne :

$$— R_0 = 2.5 > 1$$

$$— S_{n_0} = M - \varepsilon = 990, \varepsilon = 10$$

$$— \frac{\alpha}{p}(1 - \mathcal{R}_0) = \frac{0.8}{0.002}(2.5 - 1) = 600$$

On a donc bien ε respectant la condition ; la simulation ayant représenté une épidémie, nos résultats sont cohérents.

2.3 Théorème du seuil

On définit le taux de reproduction effectif \mathcal{R}_t comme le taux de reproduction à l'instant t , et on note N le nombre de personnes immunisées parmi une population de taille M .

$$\mathcal{R}_t = \mathcal{R}_0 \times \left(1 - \frac{N}{M}\right)$$

On a $\mathcal{R}_t < 1$ si :

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_t < 1 &\iff \mathcal{R}_0\left(1 - \frac{N}{M}\right) < 1 \\ &\iff 1 - \frac{N}{M} < \frac{1}{R_0} \\ &\iff \frac{N}{M} > 1 - \frac{1}{R_0}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{R}_t < 1 \iff \frac{N}{M} > 1 - \frac{1}{R_0}}$$

On a donc le théorème du seuil : il n'y a plus épidémie si et seulement si la fraction d'individus immunisés vérifie :

$$\frac{N}{M} > 1 - \frac{1}{R_0}.$$

Calcul pour $R_0 = 2.5$:

$$1 - \frac{1}{R_0} = 1 - \frac{1}{2.5} = 0.6$$

On peut en déduire que si le taux de reproduction de base R_0 vaut 2.5 il faut 60% de la population immunisée pour qu'il n'y ai pas épidémie.

2.4 Lien entre S_∞ et \mathcal{R}_0

Dans cette partie, nous cherchons à obtenir une majoration de S_∞ par \mathcal{R}_0 .

Supposons $I_0 > 0$. Alors, par définition de la suite $(I_n)_{n \geq 0}$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= I_n(1 - p \underbrace{S_n}_{\geq S_\infty} \Delta t - \alpha \Delta t) \quad \text{car } (S_n)_{n \geq 0} \text{ est décroissante} \\ &\geq I_n(1 - p S_\infty \Delta t - \alpha \Delta t) \end{aligned}$$

Raisonnons maintenant par l'absurde et supposons que $S_\infty \geq \frac{M}{\mathcal{R}_0}$, en remplaçant dans l'inégalité précédent il vient :

$$\begin{aligned} I_{n+1} &\geq I_n(1 - p \underbrace{\frac{M}{\mathcal{R}_0}}_{=\alpha} \Delta t - \alpha \Delta t) \\ I_{n+1} &\geq I_n(1 - 0) \\ I_{n+1} &\geq I_n \end{aligned}$$

et ce, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Nous avons donc montré que $(I_n)_{n \geq 0}$ était décroissante dans ce cas précis, ce qui signifie notamment que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad I_n \geq I_0$$

Or, on a montré plus haut que $I_\infty = 0$ nécessairement, donc en passant à la limite on obtient

$$I_0 \leq 0$$

ce qui va à l'encontre de notre postulat de départ qui est que $I_0 > 0$.

Ainsi, $S_\infty < \frac{M}{\mathcal{R}_0}$.

Pour affiner cette majoration, on remarque que si $\mathcal{R}_0 < 1$, alors $\frac{M}{\mathcal{R}_0} > M$. Or $(S_n)_{n \geq 0} \in [0, M]$ et est décroissante, donc $S_\infty < M$. On peut donc préciser

$$S_\infty < \min\left(M, \frac{M}{\mathcal{R}_0}\right)$$

Nous ne connaissons pas (encore) de formule pour calculer S_∞ , mais nous pouvons calculer S_n pour n très grand, puis faire varier \mathcal{R}_0 .

En pratique, nous ne possédons pas S_∞ directement en fonction de \mathcal{R}_0 , ce que nous allons donc faire varier sera donc α ou p .

Fixons $M = 1000$, $S_0 = 990$ et $p = 0.002$ et faisons varier α . Nous prendrons ici $S_\infty = S_{2000}$, que nous obtiendrons avec le code 4.1.1 légèrement modifié.

(voir code en annexe 4.1.3)

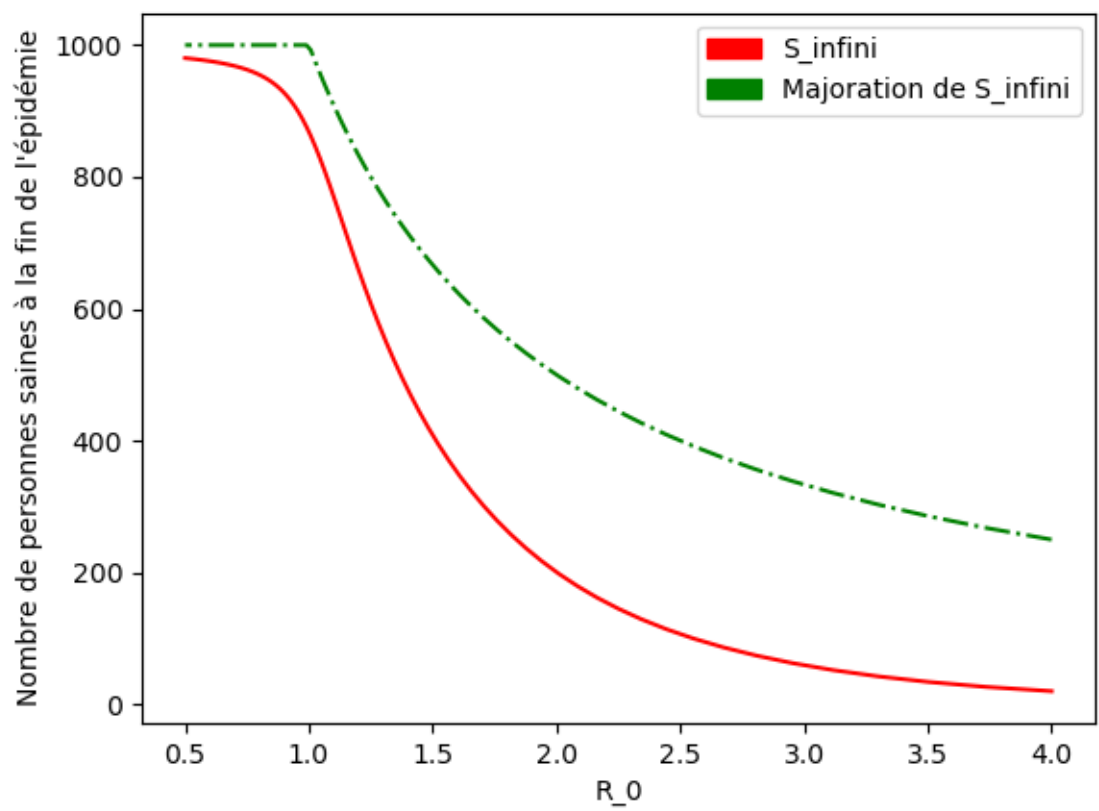


FIGURE 6 – Majoration de S_{∞} en fonction de \mathcal{R}_0

3 Calcul de S_∞

3.1 Une équation implicite satisfaite par S_∞

On admet que S_∞ vérifie l'équation :

$$\frac{S_\infty}{S_0} = \exp \left(\mathcal{R}_0 \left(\frac{S_\infty}{M} - 1 \right) \right) \quad (3)$$

et dans la suite, on suppose que S_0 , \mathcal{R}_0 et M sont fixés. Nous cherchons alors à prouver que cette équation admet une unique solution pertinente du point de vue de notre modélisation.

En réécrivant l'équation, on a :

$$\begin{aligned} 0 &= \exp \left(\mathcal{R}_0 \left(\frac{S_\infty}{M} - 1 \right) \right) - \frac{S_\infty}{S_0} \\ 0 &= f(S_\infty) \end{aligned}$$

avec $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \exp \left(\mathcal{R}_0 \left(\frac{x}{M} - 1 \right) \right) - \frac{x}{S_0} \end{cases}$. On voit très clairement que l'on ne peut pas exprimer S_∞ en fonction des autres paramètres : f est une **fonction implicite de S_∞** .

Dans ce qui suit, on suppose $S_0 < M$.

Pour trouver les zéros de f , on cherche à dresser son tableau de variation. Commençons par calculer sa dérivée :

$$f'(x) = \frac{\mathcal{R}_0}{M} \exp \left(\mathcal{R}_0 \left(\frac{x}{M} - 1 \right) \right) - \frac{1}{S_0}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} f'(x) \geq 0 &\iff \frac{\mathcal{R}_0}{M} \exp \left(\mathcal{R}_0 \left(\frac{x}{M} - 1 \right) \right) \geq \frac{1}{S_0} \\ &\iff \exp \left(\mathcal{R}_0 \left(\frac{x}{M} - 1 \right) \right) \leq \frac{M}{\mathcal{R}_0 S_0} \\ &\iff \mathcal{R}_0 \left(\frac{x}{M} - 1 \right) \leq \ln \left(\frac{M}{\mathcal{R}_0 S_0} \right) \\ &\iff \boxed{x \geq \frac{M}{\mathcal{R}_0} \ln \left(\frac{M}{\mathcal{R}_0 S_0} \right) + M = z} \end{aligned}$$

Puisque f est définie sur tout \mathbb{R} , on calcule ses limites en $\pm\infty$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \exp\left(\mathcal{R}_0\left(\frac{x}{M} - 1\right)\right) - \frac{x}{S_0} \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \exp\left(\mathcal{R}_0\left(\frac{x}{M} - 1\right)\right) \left[1 - \underbrace{\frac{x}{S_0 \exp\left(\mathcal{R}_0\left(\frac{x}{M} - 1\right)\right)}}_{\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0} \right] \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \exp\left(\mathcal{R}_0\left(\frac{x}{M} - 1\right)\right)
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty}$$

De même,

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \underbrace{\exp\left(\mathcal{R}_0\left(\frac{x}{M} - 1\right)\right)}_{\xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0} - \frac{x}{S_0} \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{x}{S_0}
\end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} +\infty}$$

Finalement, étudions le signe de $f(z)$:

$$\begin{aligned}
f(z) &= \exp\left[\mathcal{R}_0\left(\frac{1}{\mathcal{R}_0} \ln\left(\frac{M}{S_0 \mathcal{R}_0}\right) + 1 - 1\right)\right] - \frac{z}{S_0} \\
&= \frac{M}{S_0 \mathcal{R}_0} - \frac{1}{S_0} \left(\frac{M}{\mathcal{R}_0} \ln\left(\frac{M}{S_0 \mathcal{R}_0}\right) + M\right) \\
&= \omega - \omega \ln(\omega) - \mathcal{R}_0 \omega \quad \text{avec } \omega = \frac{M}{S_0 \mathcal{R}_0} > 0 \\
&= \omega(1 - \mathcal{R}_0 - \ln(\omega))
\end{aligned}$$

On pose la fonction $g : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto x(1 - \mathcal{R}_0 - \ln(x)) \end{cases}$, dont on dresse rapidement le tableau de variations :

$$\begin{aligned}
g'(x) &= 1 - \mathcal{R}_0 - \ln x - \frac{x}{x} \\
g'(x) &= -(\mathcal{R}_0 + \ln x)
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} g'(x) \geq 0 &\iff -(\mathcal{R}_0 + \ln(x)) \geq 0 \\ &\iff -\mathcal{R}_0 \geq \ln(x) \\ &\iff e^{-\mathcal{R}_0} \geq x \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} g(e^{-\mathcal{R}_0}) &= e^{-\mathcal{R}_0} (1 - \mathcal{R}_0 - \ln(e^{-\mathcal{R}_0})) \\ &= e^{-\mathcal{R}_0} (1 - \mathcal{R}_0 + \mathcal{R}_0) \\ &= e^{-\mathcal{R}_0} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

De plus

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} x(1 - \mathcal{R}_0 - \ln(x)) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} x - x\mathcal{R}_0 - \underbrace{x \ln(x)}_{\xrightarrow{x \rightarrow 0} 0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x(1 - \mathcal{R}_0 - \underbrace{\ln(x)}_{\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty}) \\ &= -\infty \end{aligned}$$

Ces résultats nous permettent de dresser le tableau de variations de g :

x	0	$e^{-\mathcal{R}_0}$	θ	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-	
g	0	$\nearrow e^{-\mathcal{R}_0}$	$\searrow 0$	$-\infty$

g est continue sur $[e^{-\mathcal{R}_0}, +\infty[= I$ comme composée de fonctions continues sur ce même intervalle, et strictement décroissante sur I .
Alors, par le théorème des valeurs intermédiaires (TVI), g admet un unique zéro sur I . Soit θ ce zéro :

$$\begin{aligned}
g(\theta) = 0 &\iff \theta(1 - \mathcal{R}_0 - \ln(\theta)) = 0 \\
&\iff 1 - \mathcal{R}_0 - \ln(\theta) = 0 \quad \text{car } \theta \neq 0 \text{ car } \ln \text{ n'est pas défini en } 0 \\
&\iff \theta = e^{1-\mathcal{R}_0}
\end{aligned}$$

Comparons maintenant θ et ω . Pour cela, nous devons montrer que $\omega > \theta$.
Raisonnons par l'absurde et supposons $\theta \geq \omega$:

$$\begin{aligned}
\theta &\geq \omega \\
e^{1-\mathcal{R}_0} &\geq \frac{M}{S_0 \mathcal{R}_0} \\
\mathcal{R}_0 e^{1-\mathcal{R}_0} &\geq \frac{M}{S_0} \\
&> 1 \quad \text{car } M > S_0
\end{aligned}$$

Or la fonction $h : x \mapsto x \exp(1-x)$ est majorée par 1 ; pour le montrer, on dresse son tableau de variations sur $[0, +\infty[$:

x	0	1	$+\infty$
$h'(x)$	+	0	-
h	0	1	0

Nous sommes donc arrivés à une contradiction : ainsi $\theta < \omega$.
Puisque g est continue et décroissante, on obtient

$$\begin{aligned}
g(\theta) &> g(\omega) \\
0 &> f(z)
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{f(z) < 0}$$

Nous pouvons enfin dresser le tableau de variations de f :

x	$-\infty$	$S_{\infty,1}$	z	$S_{\infty,2}$	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow 0$	$f(z)$	$\nearrow 0$	$+\infty$

En appliquant le TVI sur les intervalles $] -\infty, z]$ et $[z, +\infty[$, on obtient que f possède un unique zéro sur chacun de ces intervalles, soit **2 zéros au total**.

Ceci est problématique, puisque nous avons défini S_{∞} comme la limite d'une suite : il devrait donc être unique.

Afin de nous sortir de ce mauvais pas, étudions le signe de $f(S_0)$. Pour cela, partons de notre hypothèse de départ de cette partie :

$$\begin{aligned}
S_0 &< M \\
\frac{S_0}{M} &< 1 \\
\frac{S_0}{M} - 1 &< 0 \\
\mathcal{R}_0\left(\frac{S_0}{M} - 1\right) &< 0 \\
\exp\left(\mathcal{R}_0\left(\frac{S_0}{M} - 1\right)\right) &< e^0 = 1 \\
\exp\left(\mathcal{R}_0\left(\frac{S_0}{M} - 1\right)\right) - \underbrace{1}_{\frac{S_0}{S_0}} &< 0
\end{aligned}$$

On obtient donc :

$$\boxed{f(S_0) < 0}$$

Cela nous donne donc deux possibilités de placement dans le tableau de variations de f :

x	$-\infty \quad S_{\infty,1} \quad S_0 ? \quad z \quad S_0 ? \quad S_{\infty,2} \quad +\infty$
$f'(x)$	$\quad \quad \quad - \quad \quad \quad 0 \quad \quad \quad + \quad \quad \quad$
f	$ \begin{array}{c} +\infty \quad \quad \quad +\infty \\ \swarrow \quad \quad \searrow \\ 0 \quad \quad \quad 0 \\ \swarrow \quad \quad \searrow \\ f(S_0) ? \quad \quad f(S_0) ? \\ \swarrow \quad \quad \searrow \\ \quad \quad \quad f(z) \quad \quad \end{array} $

Dans les deux cas, $S_{\infty,2} > S_0$, ce qui signifierait que $(S_n)_{n \geq 0}$ est croissante, ce qui est impossible. Ainsi, seul $S_{\infty,1}$ convient.

$$\boxed{\exists ! 0 < x_* < S_0 \quad f(x_*) = 0}$$

3.2 La méthode de NEWTON

Puisque S_∞ est un zéro de la fonction f définie ci-avant, mais qu'on ne lui connaît pas de formule explicite, on introduit une méthode de calcul numérique de zéro d'une fonction : la méthode de NEWTON.

L'idée de cette méthode est la suivante :
Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, on peut l'approcher par son développement de TAYLOR-YOUNG à l'ordre 1. Pour $x_0 \in \mathbb{R}$ fixé, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Alors, chercher x tel que $f(x) = 0$ revient à chercher x tel que $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 0$. La solution est unique et

$$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

si $f'(x_0) \neq 0$.

On construit ainsi la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

$$\begin{cases} x_0 & \in \mathbb{R} \\ x_{n+1} & = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{cases}$$

L'objectif de cette partie est de démontrer que cette suite converge et que sa limite est un zéro de f , sous certaines conditions.

Théorème 1 (Convergence de la méthode de NEWTON). Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert de \mathbb{R} et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2(I)$.

Soit $x_* \in I$ tel que $f(x_*) = 0$ et $f'(x_*) \neq 0$, alors il existe $\delta > 0$ tel que $]x_* - \delta, x_* + \delta[\subset I$ et tel que, pour tout $x_{init} \in]x_* - \delta, x_* + \delta[$, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} x_0 &= x_{init} \\ x_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{cases}$$

est bien définie et converge vers x_* .

Démonstration. Commençons par introduire la quantité suivante :

$$N_f(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

avec $x \in J$, $J \subset I$ un intervalle ouvert qui reste à déterminer.

1. Commençons par montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que $]x_* - \delta, x_* + \delta[\subset I$ et tel que si $x \in]x_* - \delta, x_* + \delta[$, alors $N_f(x) \in]x_* - \delta, x_* + \delta[$.

- (a) Tout d'abord, montrons qu'il existe $\delta_1 > 0$ tel que, pour tout $x \in]x_* - \delta_1, x_* + \delta_1[\subset I$, on a $f'(x) \neq 0$.
 $f \in \mathcal{C}^2(I)$ donc f' est continue sur I . On écrit donc cette continuité de manière quantifiée :

$$\forall a \in I, \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \in I \quad |x - a| < \eta \implies |f'(x) - f'(a)| < \varepsilon$$

On écrit cette continuité en $a = x_*$. De plus, on le fait pour un ε bien choisi, à savoir $\varepsilon = \frac{|f'(x_*)|}{2} > 0$ par hypothèse sur $f'(x_*)$. On note un η correspondant δ_1 , et on écrit :

$$\forall x \in I, \quad |x - x_*| < \delta_1 \implies |f'(x) - f'(x_*)| < \frac{|f'(x_*)|}{2} \quad (4)$$

$$\implies f'(x_*) - \frac{|f'(x_*)|}{2} < f'(x) < f'(x_*) + \frac{|f'(x_*)|}{2} \quad (5)$$

Pour conclure que $f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in]x_* - \delta_1, x_* + \delta_1[$, on fait une disjonction de cas :

— Si $f'(x_*) > 0$: L'inégalité (5) donne

$$\underbrace{\frac{3}{2}f'(x_*)}_{>0} < f'(x) < -\frac{1}{2}f'(x_*)$$

$$0 < f'(x)$$

— Si $f'(x_*) < 0$: L'inégalité (5) donne

$$\frac{3}{2}f'(x_*) < f'(x) < \underbrace{\frac{1}{2}f'(x_*)}_{<0}$$

$$0 > f'(x)$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall x \in]x_* - \delta_1, x_* + \delta_1[\quad f'(x) \neq 0}$$

(b) Montrons maintenant que

$$\forall x \in \left[x_* - \frac{\delta_1}{2}, x_* + \frac{\delta_1}{2} \right] \quad \exists C > 0 \quad |N_f(x) - x_*| \leq C(x_* - x)^2$$

Pour cela, puisque $f \in \mathcal{C}^2$, on peut utiliser la formule de Taylor avec reste intégral pour f en $x \in [x_* - \frac{\delta_1}{2}, x_* + \frac{\delta_1}{2}]$:

$$f(y) = f(x) + f'(x)(y - x) + \int_x^y (y - t)f''(t)dt$$

En $y = x_*$:

$$\begin{aligned} 0 &= f(x_*) \\ 0 &= f(x) + f'(x)(x_* - x) + \int_x^{x_*} (x_* - t)f''(t)dt \\ 0 &= \frac{f(x)}{f'(x)} + (x_* - x) + \frac{\int_x^{x_*} (x_* - t)f''(t)dt}{f'(x)} \end{aligned}$$

On obtient donc

$$N_f(x) - x_* = \frac{\int_x^{x_*} (x_* - t)f''(t)dt}{f'(x)}$$

Posons $\begin{cases} M_2 & \text{une majoration de } |f''| \\ m_1 & \text{une minoration de } |f'| \end{cases}$ sur I .

Alors

$$\begin{aligned} |N_f(x) - x_*| &\leq \frac{1}{m_1} \left| \int_x^{x_*} (x_* - t)f''(t)dt \right| \\ &\leq \frac{M_2}{m_1} \left| \int_x^{x_*} (x_* - t)dt \right| = \frac{M_2}{2m_1} (x_* - x)^2 \end{aligned}$$

En posant $C = \frac{M_2}{2m_1}$, on obtient le résultat souhaité.

(c) Enfin, il existe $\delta_2 > 0$, $|x - x_*| < \delta_2$ tel que $C|x_* - x| < \frac{1}{2}$.
En effet, $\delta_2 = \frac{1}{2C}$ convient.

Ainsi, en posant $\delta = \min\left(\frac{\delta_1}{2}, \delta_2\right)$, on obtient

$$|N_f(x) - x_*| < \frac{1}{2}|x - x_*| \quad (6)$$

Nous obtenons donc bien que $N_f(x) \in]x_* - \delta, x_* + \delta[$, ce qui signifie que si $x_{init} \in]x_* - \delta, x_* + \delta[$, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie.

2. On note $x_{init} \in]x_* - \delta, x_* + \delta[$ et $x_{n+1} = N_f(x_n)$. En remplaçant dans l'équation (6), nous obtenons :

$$|x_{n+1} - x_*| < \frac{1}{2}|x_n - x_*|$$

Par une récurrence immédiate,

$$|x_n - x_*| < \frac{1}{2^n}|x_0 - x_*|$$

Comme $\frac{1}{2} < 1$, on a bien

$$\boxed{x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x_*}$$

□

En pratique, on constate plusieurs problèmes.

La méthode de NEWTON ne converge que sous certaines conditions : la fonction dont on cherche un zéro doit être \mathcal{C}^2 sur l'ouvert où on cherche ce zéro, et ledit zéro ne peut être un zéro de la dérivée ; et ça, on ne peut pas le savoir à l'avance !

Par exemple, pour une fonction sinusoïdale, la méthode de NEWTON ne fonctionne pas si notre x_{init} est pris sur un extremum.

De plus, pour une fonction avec plusieurs zéros, on ne peut pas savoir quel zéro on va obtenir.

Enfin, un problème moindre est que nous devons nous-même fournir la fonction ainsi que sa dérivée.

3.3 Exemples de calculs de valeurs de S_∞

À l'aide de la méthode de NEWTON, dont nous venons de démontrer la convergence, écrivons une fonction Python qui prend en entrée M , S_0 , \mathcal{R}_0 , mais aussi le point de départ x_0 et le nombre d'itérations n et qui renvoie en sortie une approximation de S_∞ .

(voir code en annexe 4.1.4)

Dans la suite, nous prendrons $M = 1000$ et $S_0 = 990$.

Ainsi, en prenant $n = 500$ et $x_0 = 300$ (le seul critère pour x_0 étant qu'il soit compris entre 0 et S_0 , et que la fonction termine avec), on obtient :

- pour $\mathcal{R}_0 = 0,5$: $S_\infty \approx 980$
- pour $\mathcal{R}_0 = 1$: $S_\infty \approx 865$
- pour $\mathcal{R}_0 = 2,5$: $S_\infty \approx 106$

On remarque une chute de S_∞ à partir d'un certain \mathcal{R}_0 . En important la bibliothèque Matplotlib, traçons donc, à l'aide d'un programme Python, le graphe de S_∞ en fonction de \mathcal{R}_0 .
(voir code en annexe 4.1.5).

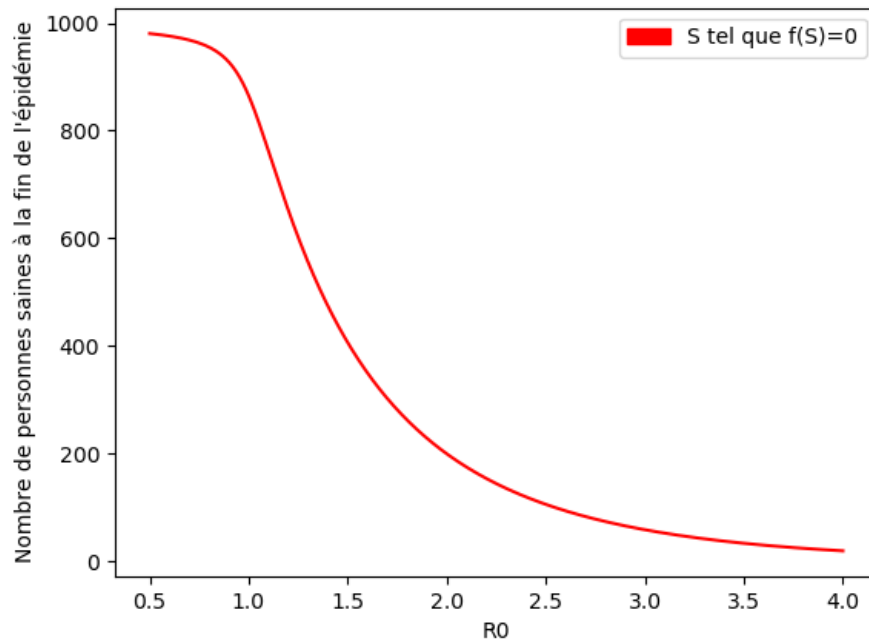


FIGURE 7 – Évolution de S_∞ en fonction de \mathcal{R}_0 pour $M = 1000$, $S_0 = 990$

3.4 Justification de la relation entre S_∞ et \mathcal{R}_0

Nous avons jusque là admis la relation (3), c'est pourquoi nous allons dans cette partie tenter de la démontrer, c'est-à-dire de démontrer que :

$$\exp \left[\mathcal{R}_0 \left(\frac{S_\infty}{M} - 1 \right) \right] = \frac{S_\infty}{S_0}$$

Pour cela, établissons quelques résultats intermédiaires.

Étudions tout d'abord la série

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} \ln \left(1 - \frac{p}{\alpha} (R_{n+1} - R_n) \right)$$

Pour $n \geq 0$, nous avons par définition

$$\begin{aligned} \begin{cases} S_{n+1} &= S_n - pS_n I_n \Delta t \\ R_{n+1} &= R_n + \alpha I_n \Delta t \end{cases} &\iff \begin{cases} \frac{S_{n+1}}{S_n} &= 1 - pI_n \Delta t \\ \frac{1}{\alpha} R_{n+1} - R_n &= I_n \Delta t \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \frac{S_{n+1}}{S_n} &= 1 - \frac{p}{\alpha} (R_{n+1} - R_n) \\ \frac{1}{\alpha} R_{n+1} - R_n &= I_n \Delta t \end{cases} \end{aligned}$$

En appliquant le logarithme népérien à la première ligne, on obtient :

$$\boxed{\ln(S_{n+1}) - \ln(S_n) = \ln \left(1 - \frac{p}{\alpha} (R_{n+1} - R_n) \right)} \quad (7)$$

On peut donc réécrire S :

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} \ln(S_{n+1}) - \ln(S_n)$$

Notons ses sommes partielles :

$$S_m = \sum_{n=0}^{m-1} \ln(S_{n+1}) - \ln(S_n)$$

On remarque alors une somme télescopique, il vient :

$$S_m = -\ln(S_0) + \ln(S_m) = \ln \left(\frac{S_m}{S_0} \right)$$

Ainsi, la série de terme général $\ln(S_{n+1}) - \ln(S_n)$ converge, ce qui entraîne la convergence de la suite $\ln(S_n)$ en $+\infty$ vers une limite finie.

Par limite de composée de fonctions, nous obtenons

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(S_n) = \ln(S_\infty)$$

Puisque $\ln(S_\infty)$ est finie, on a nécessairement :

$$S_\infty \neq 0$$

Ainsi, S est convergente et son expression se simplifie par télescopage :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \ln \left(1 - \frac{p}{\alpha} (R_{n+1} - R_n) \right) = \ln \left(\frac{S_\infty}{S_0} \right)}$$

Maintenant, montrons qu'il existe c constant tel que :

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} \ln \left(1 - \frac{p}{\alpha} (R_{n+1} - R_n) \right) + \frac{p}{\alpha} R_\infty \right| \leq c \Delta t$$

Commençons par minorer la valeur absolue du terme général de cette série ; en effet,

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} \ln \left(1 - \frac{p}{\alpha} (R_{n+1} - R_n) \right) + \frac{p}{\alpha} R_\infty \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \left| \ln \left(1 - \frac{p}{\alpha} (R_{n+1} - R_n) \right) + \frac{p}{\alpha} R_\infty \right|$$

Pour cela, remarquons que le terme général de notre série est à peu près de la forme $\ln(1-x) + x$.

$\ln(1-x)$ de classe C^∞ sur $]0,1[$ comme fonction usuelle alors par l'inégalité de Taylor-Lagrange du développement à l'ordre 1 en 0 de $\ln(1-x) + x$

$$\ln(1-x) + x = -x - R_1(x) = R_1(x)$$

la dérivée de n-ième de $\ln(1-x)$ est borné par 1 alors :

$$\ln(1-x) + x \leq \frac{x^2}{2}$$

4 Annexe

4.1 Codes Python

Dans tous les codes, on suppose importées les librairies Matplotlib, Numpy et Math comme suit :

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import matplotlib.patches as mpatches
from math import *
```

4.1.1 Visualisation des suites du modèle SIR

```
def suites (N,x0,y0,z0,alpha,p,T):
```

```
    X=[x0,y0,z0]
    suite_s=X[0]
    suite_i=X[1]
    suite_r=X[2]
```

```
    dt=T/N
    i=0
    t=[0]
```

```
    while i < T:
```

```
        S=X[0] -(p*X[0]*X[1])*dt
        I=X[1]+(p*X[0]*X[1]-alpha*X[1])*dt
        R=X[2]+(alpha*X[1])*dt
```

```
        X= [S,I,R]
```

```
        suite_s.append(X[0])
        suite_i.append(X[1])
        suite_r.append(X[2])
```

```
        i=i+dt
        t.append(i)
```

```
plt.plot(t,suite_s,color='blue')
plt.plot(t,suite_i,color='red')
plt.plot(t,suite_r,color='green')
plt.legend(["S_n","I_n","R_n"])
plt.xlabel("t_n")
plt.ylabel("Population")
```

```

plt.title("evolution_de_l'epidemie")
plt.xlim(0,15)
plt.ylim(-1.25,1000)
plt.savefig("plot.png", bbox_inches='tight')
plt.show()

n=1000
I=10
S=990
R=0
T=20
alpha= 0.5
p = 0.003
suites(n,S,I,R,alpha,p,T)

```

4.1.2 Visualisation des suites du modèle SIGD

```

def suites(N,x0,y0,g0,d0,alpha1,alpha2,p,T):

    X=[x0,y0,g0,d0]
    suite_s=[X[0]]
    suite_i=[X[1]]
    suite_g=[X[2]]
    suite_d=[X[2]]
    dt =T/N
    i=0
    t=[]
    t.append(i)

    while i < T:

        S=X[0] -(p*X[0]*X[1])*dt
        I=X[1]+(p*X[0]*X[1])*dt-(alpha1+alpha2)*X[1]*dt
        G=X[2]+alpha1*X[1]*dt
        D=X[3]+alpha2*X[1]*dt
        X= [S,I,G,D]

        suite_s.append(X[0])
        suite_i.append(X[1])
        suite_g.append(X[2])
        suite_d.append(X[3])
        i=i+dt
        t.append(i)

    plt.plot(t,suite_s,color='blue')

```

```

plt.plot(t,suite_i,color='red')
plt.plot(t,suite_g,color='green')
plt.plot(t,suite_d,color='black')
plt.legend(["S_n","I_n","G_n","D_n"])
plt.xlabel("t_n")
plt.ylabel("Population")
plt.title("evolution_de_l'epidemie")

plt.xlim(0,15)
plt.ylim(-1.25,1000)
plt.savefig("plot2.png",bbox_inches='tight')
plt.show()

n=1000
I=10
S=990
D=0
G=0
T=20
alpha1= 0.2
alpha2= 0.05
p = 0.003
suites(n,S,I,G,D,alpha1,alpha2,p,T)

```

4.1.3 Étude de la dépendance entre S_∞ et \mathcal{R}_0

def S_n(N,S0,I0,R0,alpha,p,T):

```

S,I,R = S0,I0,R0
suite_s=[S0]
suite_i=[I0]
suite_r=[R0]
dt=T/N
i=0
t=[0]

while i<T:
    S-=(p*S*I)*dt
    I+=(p*S*I-alpha*I)*dt
    R+=(alpha*I)*dt
    suite_s.append(S)
    suite_i.append(I)
    suite_r.append(R)
    i=i+dt
    t.append(i)
return suite_s[-1]

```

```

def majoration_S_infini(M,R0):
    return min(M, M/R0)

Alpha=np.linspace(0.5,4,100)
R0=[2/alpha for alpha in Alpha]
S_n_grand=[S_n(2000,990,10,0,alpha,0.002,15) for alpha in Alpha]

maj= [majoration_S_infini(1000,r0) for r0 in R0]

red_patch = mpatches.Patch(color='red', label='S_infini')
green_patch = mpatches.Patch(color='green', label='Majoration_de_S_infini')

plt.plot(R0,S_n_grand,'r-')
plt.plot(R0,maj,'g-')
plt.xlabel('R_0')
plt.ylabel("Nombre_de_personnes_saines_a_la_fin_de_l_epidemie")
plt.legend(handles=[red_patch,green_patch])
plt.show()

```

4.1.4 Calcul de S_∞ à l'aide de la méthode de NEWTON

```

def S_inf_Newton(M,S0,R0,x0,n):

    def f(x,R0,S0,M):
        return exp(R0*(x/M -1))-x/S0
    def f_prime(x,R0,S0,M):
        return R0/M * exp(R0*(x/M -1))-1/S0
    x=x0
    for i in range(n):
        x=f(x,R0,S0,M)/f_prime(x,R0,S0,M)
    return x

```

4.1.5 Graphe de S_∞ en fonction de \mathcal{R}_0

```

import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import matplotlib.patches as mpatches

R0 = np.linspace(0.5,4,1000)
Sinfy = [S_inf_Newton(1000,990,r0,300,100) for r0 in R0]

red_patch = mpatches.Patch(color='red', label='S_tel_que_f(S)=0')

```



```
plt.plot(R0, Sinfy, 'r-')
plt.xlabel('R0')
plt.ylabel('Nombre_de_personnes_saines_a_la_fin_de_l_epidemie')
plt.legend(handles=[red_patch])

plt.show()
```

Sources et références

- <https://www.fondation-lamap.org/fr/page/35700/epidemie-recherche-4-eclairages-scientifi>
Image page 1
- https://www.youtube.com/watch?v=c_VGCnUWbWU
Théorème du seuil.
- https://fr.wikipedia.org/wiki/Mod%C3%A8les_compartimentaux_en_%C3%A9pid%C3%A9miologie Ouverture sur les modèles compartimentaux.