

Sistema de Controle: Análise Discreta com controlador PID

Controle Digital de Sistemas Dinâmicos
Laboratório de Controle Digital de Sistemas Dinâmicos

Gabriel Oliveira Alves
Centro Federal de Educação Tecnológica - CEFET
Departamento de Computação
Divinópolis-MG, Brasil

Abstract—Este trabalho aborda o desenvolvimento de um sistema de controle que utiliza uma interface para plotagem de gráficos. No backend, a linguagem de programação Python foi empregada, com a API sendo desenvolvida através do framework FlaskAPI. Os cálculos e a plotagem dos gráficos foram realizados utilizando as bibliotecas pyControl e Matplotlib. No frontend, JavaScript foi adotado para o tratamento das respostas da API, enquanto HTML e CSS foram utilizados para a estilização da página, complementados pelo framework CSS Bootstrap para otimizar o design e a responsividade da interface. O estudo visou criar um sistema que incorpora técnicas modernas de controle PID (Proporcional, Integral e Derivativo), facilitando a visualização e análise de gráficos de resposta no tempo, tanto contínuo quanto discreto, e na frequência.

I. INTRODUÇÃO

No âmbito da eletrônica os controladores desempenham um papel fundamental, sendo utilizados para garantir o funcionamento preciso, estável e eficiente de diversos sistemas. Eles são responsáveis por ajustar e regular a resposta dos circuitos eletrônicos, assegurando que os dispositivos operem conforme os parâmetros desejados, mesmo diante de variações e perturbações.

Nesse contexto, controladores PID (Proporcional-Integral-Derivativo) são amplamente utilizados, devido à sua capacidade de fornecer uma resposta precisa e eficiente. Eles ajustam continuamente a saída de um sistema de controle utilizando três ações principais: proporcional, integral e derivativa. A combinação dessas ações permite um controle robusto, rápido e estável [1].

Este projeto tem como objetivo desenvolver um sistema web para plotar o diagrama de Bode, a resposta a um sinal degrau e o gráfico de Lugar da Raízes de um sistema dinâmico de primeira ordem que utiliza um controlador PID, a partir de valores de constantes inseridos pelo usuário.

II. FUNDAMENTO TEÓRICOS

A. Sistema de Controle Contínuo no Tempo

O controle contínuo refere-se a uma abordagem de controle de sistemas dinâmicos em que as variáveis de estado e as ações de controle são ajustadas continuamente ao longo do

tempo. Nesse caso, o sistema é monitorado e ajustado de forma ininterrupta, permitindo uma resposta imediata às mudanças nas condições do sistema [2].

Para esse tipo de controle, tanto os sensores quanto os atuadores operam em tempo real, ajustando as entradas do sistema de maneira contínua para alcançar os objetivos propostos, podendo ser eles: minimizar erros, manter a estabilidade ou otimizar o desempenho.

Sistemas de controle contínuos são amplamente utilizados em aplicações analógicas onde a precisão e a rapidez de resposta são necessárias, como em sistemas de aviação, controle de motores, sistemas de climatização, entre outros. Exemplos clássicos de controle contínuo incluem o uso de controladores Proporcional-Integral-Derivativo (PID), que ajustam continuamente a saída com base no erro entre a referência desejada e o estado atual do sistema. [1]

B. Sistema de Controle Discreto no Tempo

O controle discreto no tempo está relacionado a uma abordagem onde as variáveis de estado e as entradas de controle são atualizadas em intervalos de tempo discretos, ou seja, em pontos específicos no tempo, ao invés de continuamente. Isso significa que as ações de controle e a análise do estado do sistema ocorrem em instantes separados e regulares, determinados por uma taxa de amostragem [2].

Essa abordagem é muito utilizada em sistemas digitais, onde o processamento de sinais e a execução de algoritmos de controle são realizados por meio de dispositivos como microcontroladores, computadores, entre outros. Em um sistema de controle discreto, a dinâmica é descrita por equações diferenciais ou de diferenças que modelam a evolução do sistema entre os instantes definidos pela taxa de amostragem [3].

O controle discreto é essencial para a implementação de sistemas de controle em ambientes de natureza digital. As aplicações mais comuns incluem automação industrial, sistemas de controle de processos, robótica, entre outras.

C. Transformada Z

A Transformada Z é uma ferramenta matemática fundamental em sistemas de controle digital, permitindo a análise e o projeto de sistemas dinâmicos discretos. Essa transformada é utilizada para converter equações diferenciais em equações de diferença, facilitando o tratamento de sinais digitais em controladores digitais e sistemas amostrados.

Trata-se basicamente uma extensão da Transformada de Laplace aplicada a sinais discretos. Ela transforma uma sequência temporal discreta em uma representação no domínio Z, facilitando a análise de sistemas dinâmicos discretos. Matematicamente, a Transformada Z de uma sequência $x[n]$ é definida por [4]:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} \quad (1)$$

onde z é uma variável complexa que pode ser escrita como $z = re^{j\omega}$, sendo r o raio de convergência e ω a frequência.

Essa transformação mapeia uma sequência de tempo discreto para uma função no domínio complexo z . Contudo, a transformada Z só é válida dentro de uma região de convergência (ROC) no plano z . Dessa forma, ROC é fundamental para determinar a estabilidade do sistema e a aplicabilidade da transformada para diferentes sinais [2].

Utilizando a Transformada Z se torna possível obter a função de transferência discreta do sistema, relacionando a entrada e a saída em tempo discreto. Dessa forma é possível analisar a estabilidade e a resposta em frequência do sistema.

D. Estabilidade do Sistema

Para análise da estabilidade e comportamento de um sistema é possível utilizar algumas técnicas, entre elas estão:

- **Resposta ao Degrau**

A resposta ao degrau de um sistema é a saída do sistema quando a entrada é um sinal de degrau unitário. Essa resposta é uma ferramenta essencial na análise de sistemas dinâmicos, pois fornece informações importantes sobre o comportamento do sistema ao longo do tempo. A partir dela é possível calcular o tempo de subida, tempo de acomodação, o percentual de overshoot e o erro em regime permanente do sistema [2]. Para um sistema linear e invariante no tempo (LTI), a resposta ao degrau é obtida aplicando a função de transferência do sistema ao sinal de degrau.

- **Lugar das Raízes**

O método do Lugar Geométrico das Raízes (LGR) é utilizado para avaliar o comportamento da resposta transitória de um sistema em malha fechada quando submetido a um controlador. Essa abordagem facilita a seleção dos parâmetros do controlador, como o ajuste do ganho e a inserção de polos e/ou zeros, com o objetivo de aproximar o sistema do estado desejado [3].

Traçar o gráfico LGR é essencial para visualizar como o comportamento transitório do sistema se altera à medida que os parâmetros são ajustados, sendo assim

possível avaliar a estabilidade do sistema, seu comportamento em regime transitório, além de proporcionar uma representação gráfica do que ocorre no sistema. [1].

- **Diagrama de Bode**

O diagrama de Bode é uma representação gráfica da resposta em frequência de sistemas lineares e invariantes no tempo. Ele é composto por dois gráficos: um que mostra a magnitude do sistema em decibéis (dB) em função da frequência, e outro que exibe a fase do sistema em graus também em função da frequência [2]. Ambos os gráficos utilizam a escala logarítmica para a frequência, facilitando a visualização do comportamento do sistema em uma ampla faixa de frequências.

A magnitude indica como o sistema amplifica ou minimiza sinais de diferentes frequências, enquanto a fase mostra o atraso ou avanço na resposta do sistema em relação à entrada [3]. Essa representação permite uma análise detalhada do comportamento dinâmico do sistema, incluindo a identificação de ressonâncias, frequências de corte, margens de estabilidade, e características de filtros.

E. Controladores

Os controladores são dispositivos ou algoritmos que ajustam a saída de um sistema para alcançar um comportamento desejado, corrigindo desvios entre o valor medido e o valor de referência. Os controladores utilizam diferentes estratégias para modificar a ação de controle, como a proporcional (P), que ajusta a saída com base no erro atual; a integral (I), que considera o acúmulo dos erros passados para eliminar o erro em regime permanente; e a derivativa (D), que antecipa as futuras variações do erro, melhorando a resposta dinâmica. A combinação dessas estratégias resulta nos controladores PI, PD e PID, que oferecem uma solução versátil e ajustável para controlar sistemas dinâmicos.

1) *Controlador P*: O controlador P é o mais simples dos controladores e ajusta a saída proporcionalmente ao erro atual. Sua equação de controle é dada por [1]:

$$u(t) = K_p e(t), \quad (2)$$

onde, $u(t)$ é a saída do controlador, K_p é o ganho proporcional e $e(t)$ é o erro entre o valor desejado e o valor medido. A principal função do controlador P é reduzir o erro rapidamente, mas ele não consegue eliminar o erro em regime permanente, especialmente em sistemas com distúrbios.

2) *Controlador PI*: O controlador PI adiciona uma ação integral ao controlador P, o que permite a eliminação do erro em regime permanente. Sua equação de controle é dada por [5]:

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int_0^t e(\tau) d\tau, \quad (3)$$

onde, K_i é o ganho integral. A ação integral acumula o erro ao longo do tempo e ajusta a saída de forma a corrigir desvios persistentes.

3) *Controlador PD*: O controlador PD combina a ação proporcional com uma ação derivativa, que é responsável por prever a tendência futura do erro. A equação de controle do PD é dada por [1]:

$$u(t) = K_p e(t) + K_d \frac{de(t)}{dt}, \quad (4)$$

onde K_d é o ganho derivativo. A ação derivativa ajuda a melhorar a estabilidade e a resposta transitória do sistema, reduzindo o tempo de estabilização e minimizando oscilações.

4) *Controlador PID*: O controlador PID é a combinação completa das ações proporcional, integral e derivativa, sendo o mais versátil e amplamente utilizado. Sua equação de controle é dada por [1]:

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int_0^t e(\tau) d\tau + K_d \frac{de(t)}{dt}. \quad (5)$$

O controlador PID ajusta a saída do sistema com base no erro atual, na soma dos erros passados e na previsão da tendência futura do erro, proporcionando um controle preciso, com rápida correção de desvios e mínima oscilação.

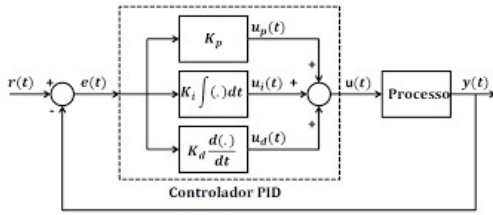


Fig. 1. Diagrama de Blocos de um Controlador PID

F. Discretização com ZOH

A discretização com ZOH (Zero-Order Hold) é uma técnica comum em sistemas de controle digital para converter sinais contínuos em sinais discretos. O ZOH é um método de retenção de sinal onde o valor da amostra é mantido constante até que a próxima amostra seja adquirida. O ZOH age como um sistema de amostragem e retenção, em que o sinal de entrada contínuo é amostrado a intervalos regulares, e cada amostra é mantida constante até a próxima. A equação que caracteriza o ZOH é dada por [5]:

$$\text{ZOH} = \frac{1 - e^{-st}}{s} \quad (6)$$

A função de transferência discreta $G(z)$ pode ser obtida aplicando a Transformada Z à função de transferência contínua $G(s)$, após a transformação inversa de Laplace. A relação entre as funções de transferência é dada por:

$$G(z) = (1 - z^{-1})Z \left\{ L^{-1} \left(\frac{G(s)}{s} \right) \right\} \quad (7)$$

onde L^{-1} representa a transformada inversa de Laplace.

G. Método de Tustin

O Método de Tustin, ou transformação bilinear, é usado na discretização de sistemas de controle digital. Esse método mapeia o plano s para o plano z sem que a estabilidade e as características de frequência do sistema sejam alteradas. A principal vantagem é que ele proporciona uma correspondência exata para frequências baixas entre os sistemas contínuos e discretos.

A transformação bilinear é dada por:

$$s = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \quad (8)$$

onde T é o período de amostragem. Essa substituição mapeia o eixo imaginário do plano s para o círculo unitário do plano z , garantindo que as frequências importantes do sistema contínuo sejam preservadas no sistema discreto [1].

III. METODOLOGIA

A. Software de Controle e Interface

- **Python** foi utilizado como a linguagem de programação no *backend*.
 - A API foi desenvolvida utilizando o framework **FlaskAPI**.
 - Os cálculos e a plotagem dos gráficos foram realizados com as bibliotecas **pyControl** e **Matplotlib**.
- **JavaScript** foi adotado como a linguagem de programação no *frontend* para o tratamento das respostas da API.
 - HTML e CSS foram utilizados para a estilização da página do sistema.
 - O framework CSS **Bootstrap** foi empregado para otimizar o design e a responsividade da interface.

B. Software de Controle

O modelo de Função de Transferência utilizado é conhecido como canônica de 1ª ordem e é dada por:

$$G(s) = \frac{K}{s + 1} \quad (9)$$

Sendo o K correspondente ao ganho definido pelo usuário.

Conforme o repositório do projeto [6], temos as seguintes principais funções:

O código fornece funções para controle contínuo e discreto de sistemas. A função `controller` cria uma função de transferência para diferentes tipos de controladores: Proporcional (P), Proporcional-Integral (PI), Proporcional-Derivativo (PD) e Proporcional-Integral-Derivativo (PID). Para controle discreto, se um período de amostragem (T) é especificado, a função de transferência é ajustada usando o método de zero-order hold.

A função `firstOrder` cria o sistema de primeira ordem, com a opção de discretização se um período de amostragem for fornecido.

Para a análise de sistemas, `make_open_loop` combina o sistema e o controlador em série, criando um sistema

de malha aberta. A função `make_closed_loop` gera um sistema de malha fechada aplicando `feedback` ao sistema de malha aberta. Finalmente, `make_step_response` fornece a resposta ao degrau de um sistema de malha fechada. Essas funções permitem projetar, discretizar e analisar o comportamento dos sistemas de controle.

C. Interface

A interface minimalista solicita inicialmente ao usuário que escolha entre o sistema de controle contínuo ou o sistema de controle discreto. Conforme a figura 2.

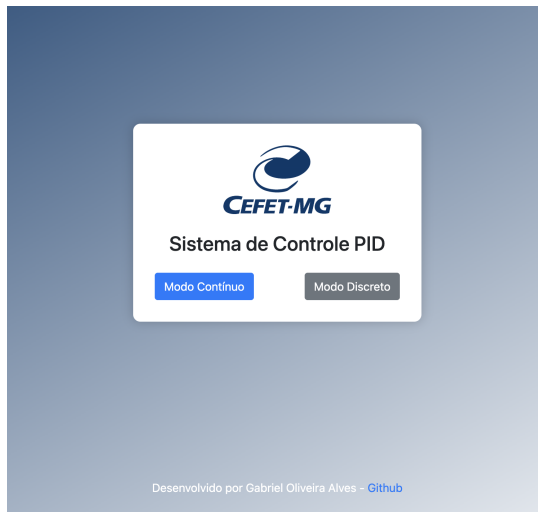


Fig. 2. Página inicial da Interface do Usuário

Logo em seguida o usuário é encaminhado para a página na qual irá colocar os valores referentes aos ganhos: Proporcional-Integral-Derivativo, Proporcional-Integral, Proporcional-Derivativo e Proporcional. Além do valor do ganho K , da constante de tempo τ (Tau) e do tempo de amostragem, no caso do modo discreto. Isso é exemplificado na figura 6

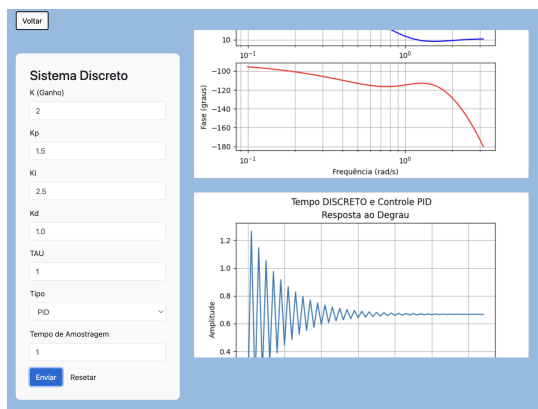


Fig. 3. Interface de input e visualização dos gráficos

Na coluna de visualização foi implementado um *scrolling* vertical para visualizar os três gráficos.

Além disso, caso o usuário queira voltar e escolher outro modo, há o botão de voltar no canto superior esquerdo em destaque.

IV. RESULTADOS

Para exemplificar, foi escolhido o modo discreto para análise. Inserindo os seguintes valores:

- $K = 2.0$
- $K_p = 1.5$
- $K_i = 2.5$
- $K_d = 1.0$
- $\text{Tau} = 1.0$
- **Tipo = PID**
- **Tempo de Amostragem = 1.0**

Obteve-se as seguintes imagens correspondentes aos gráficos de Bode, Resposta ao Degrau e Lugar das Raízes:

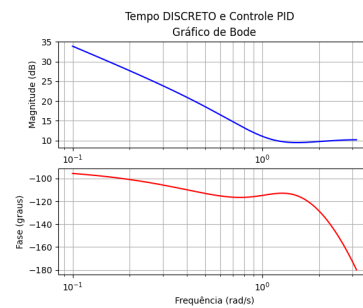


Fig. 4. Diagrama de Bode.

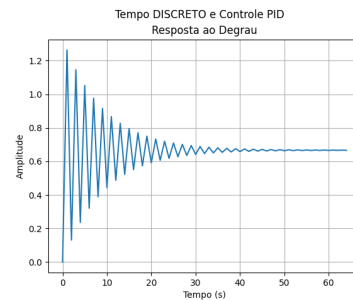


Fig. 5. Gráfico de Resposta ao Degrau.

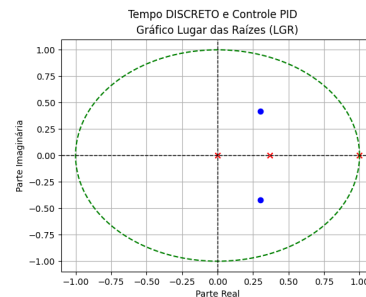


Fig. 6. Gráfico de Lugar das Raízes.

V. CONCLUSÃO

Conclui-se que os resultados do diagrama de Bode e da Resposta ao Degrau foram satisfatórios e alinhados com a literatura abordada. No entanto, o gráfico do Lugar das Raízes apresentou ressalvas, não se comportando como esperado, geralmente exibindo um polo no eixo real com valor 1.0. Para trabalhos futuros, é essencial revisar os métodos e a estrutura utilizados para criar as funções de transferência e para a paralelização do controle. Além disso, seria vantajoso integrar um elemento para o input físico analógico das variáveis de ganho do sistema de controle.

REFERENCES

- [1] K. Ogata, *Engenharia de Controle Moderno*. Pearson Education, 5 ed., 2010.
- [2] B. P. Lathi, *Sinais e Sistemas Lineares*. BOOKMAN, 2 ed., 2008.
- [3] Dorf, B. Richard, and Robert, *Sistemas de Controle Modernos*. LTC EDITORA, 8 ed., 2001.
- [4] R. W. S. Allan V Oppenheim and J. R. Buck., *Discrete-Time Signal Processing*. Prentice-Hall Inc., 2 ed., 1999.
- [5] M. S. F. A. Visioli, *Digital Control Engineering*. ELSEVIER, 2 ed., 2013.
- [6] G. Alves, "Control work complement;" 2024. Accessed: 2024-09-09.