Escalão A, Fase nacional 2021

Enunciado: https://olimpiadas.spf.pt/docs/2021/teorica_A_nac.pdf

1. Conceitos-chave: Impulsão, Densidade

   (a)

   Solução. O cubo de gelo irá flutuar e deslocar um certo volume de água. Como o cubo está em equilíbrio, o seu peso e a impulsão têm a mesma intensidade. Logo, a massa de água deslocada (e que sai do recipiente) é igual à massa do cubo. Assim, a balança irá registar 200,0 g.

   (b)

   Solução. À medida que o gelo vai fundindo, temos duas contribuições para a alteração do nível da água: a adição de gelo fundido e a diminuição do cubo de gelo (e consequentemente do seu volume imerso).

   Quando uma pequena massa Δm de gelo funde, o volume imerso, que é dado por $m/\rho_{\text{água}}$, diminui $\Delta m/\rho_{\text{água}}$, pelo que a água "desce" este volume. Por outro lado, o volume de gelo fundido é $\Delta m/\rho_{\text{água}}$, o que faz com que a água "suba" este volume. Assim, não há matéria que transborde neste processo e portanto a balança continua a medir 200,0 g.

   (c)

   Solução. A esfera de cobre irá afundar até assentar no fundo, por ser mais densa que a água, e fará com que um volume de água igual ao seu transborde. Assim, a massa de água que transborda é 1.8 g.

   A massa da esfera é 8.9×1.8 g $= 16$ g.

   Assim, a balança irá registar $(200.0 + 16 - 1.8)$ g $= 214$ g.

2. Conceitos-chave: Análise dimensional, Lei da Gravitação Universal

   (a)

   Solução. Usando por exemplo a equação $F = ma$, como as unidades têm de ser iguais de ambos os lados*, vemos que a unidade SI de força é kg m s^{-2} (que se costuma abreviar por N, Newton).

   Assim, a unidade SI da constante gravitacional será

$$\text{kg m s}^{-2} \times \frac{\text{m}^2}{\text{kg}^2} = \text{m}^3\ \text{kg}^{-1}\ \text{s}^{-2}.$$

*Na verdade, os membros da equação não precisam de ter as mesmas unidades. A área de um retângulo é dada pela fórmula $A = cl$. No entanto podemos, por exemplo, expressar o membro esquerdo em cm^2 e o direito em m cm: $1000\ \text{cm}^2 = 1\ \text{m} \times 10\ \text{cm}$. A chave é que ambas as unidades têm a mesma *dimensão* (referem-se à mesma grandeza): neste caso área. O mais correto seria então trabalhar com as dimensões de massa, comprimento e tempo (M, L, T, resp.) para chegar à conclusão que a dimensão de G é $L^3M^{-1}T^{-2}$ e, portanto, tem unidade $\text{m}^3\ \text{kg}^{-1}\ \text{s}^{-2}$ no Sistema Internacional.

(b)

Solução. O declive do gráfico é a aceleração gravítica à superfície da lua:

$$g_L = \frac{F_g}{m} = \frac{\frac{GM_Lm}{R_L^2}}{m} = \frac{GM_L}{R_L^2}.$$

Do mesmo modo, temos que $g = \frac{GM_T}{R_T^2}$. Assim, a razão entre as massas da Terra e da Lua é

$$\frac{M_T}{M_L} = \frac{gR_T^2/G}{g_LR_L^2/G} = \frac{g}{g_L} \cdot \left(\frac{R_T}{R_L}\right)^2 = \frac{9.8}{1.62} \cdot 3.66^2 = 81.$$

3. Conceitos-chave: Cinemática, Movimento uniforme

Solução. A intensidade da velocidade dos caracóis é aproximadamente

$$v = 33\ \text{cm}/2.33\ \text{min} = 14.1\ \text{cm/min}.$$

Consideremos que o movimento ocorre ao longo do eixo x, com origem em A e sentido positivo para B (na posição $x = L$). Denotemos também as 12h por $t = 0$ e as 12h02m por $t_1 = 2$ min.

A posição do caracol Manuel, em função do tempo, é $x_M(t) = vt$ e a posição do caracol Pedro é $x_P(t) = L - v(t - t_1)$ (note-se que a velocidade escalar é $-v$ e $x_P(t_1) = L$, por isso é esta a equação de movimento).

Queremos saber o instante t em que

$$\begin{aligned} x_P(t) = x_M(t) &\iff vt = L - v(t - t_1) \\ &\iff 2vt = L + vt_1 \\ &\iff t = \frac{L + vt_1}{2v} = \frac{80 + 14.1 \times 2}{2 \times 14.1}\ \text{min} = 38\ \text{min}. \end{aligned}$$

Assim, os caracóis cruzam-se no instante 12h38m.

4.

Solução. Como o Sol está muito longe, os raios de luz são aproximadamente paralelos. O ângulo ao centro que separa as duas cidades (θ_2) é $30° - 27.8° = 2.2°$ (ver figura abaixo). Fazendo agora uma regra de 3 simples, podemos descobrir o comprimento do arco PL, que é a distância entre as duas cidades:

$$d_{PL} = \frac{2.2}{360} \times 2\pi \times 6370 \text{ km} = 245 \text{ km}.$$