Escalão B, Fase nacional 2018

Enunciado: https://olimpiadas.spf.pt/docs/2018/teorica_B_nac.pdf

1.

(a) Conceitos-chave: Conservação de energia

Solução. Como as forças dissipativas são desprezáveis, a energia mecânica do carrinho E_m mantém-se constante. Assim, como o carro parte do repouso, tomando o solo como referência de potencial gravítico, vem que

$$E_m = E_c + E_p = 0 + E_{p,\text{ elast.}} = \frac{1}{2}kx_e^2$$

A volta circular, para ocorrer, requer $F_c = N + F_g = \frac{mv^2}{R}$ no ponto mais elevado; no limite, $N = 0 \Rightarrow v = \sqrt{gR}$. Calculando a energia mecânica nesse ponto,

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}mgR + mg2R = \frac{1}{2}kx_e^2 \Rightarrow x_e = \sqrt{\frac{5mgR}{k}}.$$

(b) Conceitos-chave: Movimento de projéteis

Solução. Pelo resultado anterior, continuando a aplicar a conservação de E_m, vem que, para x_e mínimo, $E_m = \frac{5}{2}mgR = mg\frac{2}{3}R + \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v_{\text{lan}} = \sqrt{\frac{11gR}{3}}$. Não havendo dissipação no troço horizontal, esta velocidade v_{lan}, horizontal, corresponde ao ponto de lançamento, pelo que basta encontrar o tempo de queda a partir daí, a partir da lei do movimento (seja y vertical de baixo para cima).

$$F_{\text{res, y}} = ma_y \Rightarrow a_y = -g \Rightarrow y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + 0 + \frac{2}{3}R$$

Por $y(t) = 0$, $t_{\text{queda}} = \sqrt{\frac{4R}{3g}}$; o que corresponde a um deslocamento horizontal

$$A = v_{\text{lan}}t_{\text{queda}} = \frac{2\sqrt{11}}{3}R.$$

(c) Conceitos-chave: Trabalho-energia

Solução. Pela conservação de E_m (após a volta), obtém-se, no final do troço circular, $E_m = E_c = \frac{1}{2}mv_f^2 = \frac{5}{2}mgR \Rightarrow v_f = \sqrt{5gR}$. No troço circular, a variação de altura é nula, pelo que $W_{F_g} = 0$ e a reação normal é perpendicular ao movimento, pelo que $W_N = 0$. Resta-nos apenas a força de atrito F, constante e não conservativa, havendo um trabalho resultante de $W = Fd$. Aplicando o Teorema do Trabalho-Energia na volta circular,

$$\Delta E_c = W_{res} \Rightarrow \frac{1}{2}m\left(v_f^2 - v_i^2\right) = -F2\pi R \Rightarrow v_i = \sqrt{5gR + \frac{4\pi FR}{m}}$$

. Regressando ao primeiro troço horizontal, volta a haver conservação de E_m, permitindo a obtenção do resultado.

$$E_m = \frac{1}{2}kx_e^2 = \frac{1}{2}m\left(5gR + \frac{4\pi FR}{m}\right) \Rightarrow x_e = \sqrt{\frac{1}{k}\left(5mgR + 4\pi FR\right)}.$$

2.

(a) Conceitos-chave: Potencial eletrostático

Solução. Pelo fluxo médio Φ, o número de protões incididos será $N = \Phi 4\pi R^2 \Delta t$, pelo que, sendo a Terra uma esfera uniformemente carregada, $V = 9\times 10^9 \Phi e 4\pi R \Delta t$. A chegada de protões cessará quando a sua energia não for suficiente para ultrapassar o potencial da terra.

$$V = \frac{E}{e} \Rightarrow \Delta t = \frac{E}{9\times 10^9 \Phi 4\pi R e^2} = 8.67\times 10^13\text{s} = 2.75\times 10^6\text{anos}$$

(b) Conceitos-chave: Distribuição não uniforme de carga elétrica

Solução. O resultado obtido na alínea anterior é três ordens de grandeza inferior ao valor aceite. Isto ocorre porque a Terra não pode ser aproximada a uma esfera uniformemente carregada. O fluxo de raios cósmicos, ao interagir com a atmosfera, ioniza as suas camadas superiores. Consequentemente, a acumulação de carga positiva na atmosfera exterior gera uma diferença de potencial ao longo desta. A carga negativa na parte interior da Terra é mantida através de relâmpagos, descargas que ocorrem por esta diferença de potencial. Esse processo trará cargas negativas à atmosfera, mantendo a distribuição de cargas aproximadamente constante.