Escalão B, Fase nacional 2021

Enunciado: https://olimpiadas.spf.pt/docs/2021/teorica_B_nac.pdf

1. Conceitos-chave: Movimento de projéteis

   (a) Conceitos-chave: Conservação de energia

   Solução. Como as forças dissipativas são desprezáveis, a energia mecânica do saltador mantém-se constante. Assim, se h for a altura pedida, temos que

   $$mgh = \frac{1}{2}mv_x^2 \iff h = \frac{v_x^2}{2g} = 32 \text{ m.}$$

   (b)

   Solução. Considerando um referencial cartesiano com origem na posição de salto, podemos escrever a posição do saltador em função do tempo do seguinte modo:

   $$\begin{cases} x(t) = v_x t \\ y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

   A superfície do terreno é a reta de equação $y = -\tan(30°)x$ (este é o declive porque quando nos deslocamos um metro horizontalmente, descemos $1 \times \tan 30°$ m para baixo).

   Juntando as 3 condições, podemos então determinar o tempo de voo e a posição do saltador no momento de aterragem. Note-se que o que estamos a fazer é intersetar a trajetória do saltador com a superfície, pelo que iremos também obter a solução $x = y = t = 0$.

   $$\begin{cases} x = v_x t \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 \\ y = -\tan(30°)x \end{cases} \implies \begin{cases} y = -\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_x}\right)^2 \\ y = -\tan(30°)x \end{cases}$$

   $$\implies -\tan(30°)x = -\frac{gx^2}{2v_x^2}$$

   $$\implies x = 0 \lor x = \frac{2v_x^2\tan(30°)}{g}.$$

Assim, o saltador aterra na posição $x = \frac{2v_x^2 \tan(30°)}{g} = 74$ m e $y = -\frac{2v_x^2 \tan^2(30°)}{g} = -43$ m.

(c)

Solução. Usando a primeira equação da alínea anterior, obtemos $t = \frac{x}{v_x} = 2.9$ s. A velocidade vertical é dada por $v_y = -gt$, logo na eminência de aterrar esta vale $v_y = -9.8 \cdot 2.9 = 28$ m/s.

2.

(a) Conceitos-chave: Associação de resistências

Solução. Temos que $R_{BC} = 10\ \Omega$ e $R_{AC} = 1\ \Omega$. Sejam i, j e k lados do triângulo. Se escolhermos para terminais as extremidades do lado i, a resistência da configuração será

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_j + R_k} \iff R = \frac{R_i(R_j + R_k)}{R_i + R_j + R_k}$$

Dado que a soma no denominador é constante, para minimizar a resistência devemos minimizar o numerador e por isso escolher $i = AC$:

$$R = \frac{1 \times (10 + 100)}{1 + 10 + 100}\ \Omega = 0.99\ \Omega$$

(b) Conceitos-chave: Lei de Joule

Solução. Se a resistência do circuito delta for R, a resistência interna r e ε a força eletromotriz da bateria, a potência dissipada será

$$\varepsilon I = \frac{\varepsilon^2}{(R + r)}.$$

Assim, a potência máxima dissipada ocorre para a resistência R mínima ($0.99\ \Omega$), valendo portanto 13 W.

(c) Conceitos-chave: Lei de Ohm

Solução. A corrente fornecida pela bateria será $I = \frac{\varepsilon}{R+r}$. Por isso, a corrente máxima ocorre quando R é mínimo, valendo 1.1 A.

3. Conceitos-chave: Refração, Lei de Snell-Descartes

(a)

Solução. Aplicando a lei de Snell-Descartes à interface água-sedimentos (1-2), temos

$$\begin{aligned} n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 &\iff \frac{k}{v_1}\sin\theta_1 = \frac{k}{v2}\sin\theta_2 \\ &\iff \sin\theta_1 = \frac{v_1}{v_2}\sin\theta_2 \\ &\iff \sin\theta_1 = 0.64. \end{aligned}$$

Com o ângulo entre a onda e a vertical (θ_1) e a profundidade (z_1), podemos agora calcular a distância que a onda viajou até aos sedimentos:

$$\cos\theta_1 = \frac{z_1}{d} \iff d = \frac{z_1}{\cos\theta_1} = \frac{z_1}{\sqrt{1-\sin^2\theta_1}} = 1.30 \text{ km}.$$

Por fim, dividindo pela velocidade da onda, obtemos o tempo que esta demora a atingir os sedimentos, $t_1 = 0.87$ s.

(b)

Solução. Seja t_2 o tempo que a onda demora a propagar-se pelos sedimentos até encontrar o tesouro. O tempo entre a emissão e receção do sinal é $T = 2 \times (t_1 + t_2)$, pelo que $t_2 = 1.63$ s.

Por outro lado, se z_2 for a profundidade do tesouro em relação à interface água-sedimentos, $z_2/\cos\theta_2$ será a distância que a onda percorre nos sedimentos e portanto

$$\frac{z_2}{\cos\theta_2} = v_2 t_2 \iff z_2 = v_2 t_2 \cos\theta_2 = 1.89 \text{ km}.$$

Assim, a profundidade do tesouro será $z_1 + z_2 = 2.9$ km.

(c)

Solução. A distância horizontal entre o barco e o tesouro é

$$z_1 \tan\theta_1 + z_2 \tan\theta_2 = 3.1 \text{ km}.$$