Escalão B, Fase regional 2017

Enunciado: https://olimpiadas.spf.pt/docs/2017/teorica_B_reg.pdf

1.

(a) Conceitos-chave: 2ª Lei de Newton, Equilíbrio Dinâmico

Solução. As únicas duas forças que atuam no paraquedista são o seu peso e a força de resistência no ar. A velocidade limite é atingida quando o paraquedista atinge equilíbrio dinâmico, ou seja, quando a força resultante que atua nele é nula. Deste modo, a velocidade limite é tal que a força de resistência do ar seja igual, em módulo, ao peso:

$$F_{\text{resultante}} = 0 \implies F_{res} = mg \implies k\, v_{lim}^2 = mg \implies v_{lim} = \sqrt{\frac{mg}{k}}$$

Substituindo os valores de k, m e g dados no enunciado, obtém-se que a velocidade limite sem paraquedas é de 62.6 m/s, e com paraquedas é de apenas 8.1 m/s.

(b) Conceitos-chave: Conservação de Energia

Solução. Desprezando a força de resistência do ar, a única força que atua no paraquedista é o peso, uma força conservativa. Por este motivo, existe conservação da energia mecânica, e pode-se partir daí para determinar as alturas pretendidas:

$$E_m = 0 \implies E_c + E_{pot} = 0 \implies \tfrac{1}{2}m\left(v_f^2 - v_i^2\right) = -mg(h_f - h_i),\ v_i = 0,\ h_f = 0$$

$$\implies \tfrac{1}{2}mv_f^2 = mgh_i \implies h_i = \tfrac{v_f^2}{2g}$$

Deste modo, é possível calcular as alturas a que o paraquedista teria de saltar para atingir as velocidades obtidas na alínea anterior ao atingir o solo. Os valores obtidos são de 200 m sem paraquedas, e apenas 3.3 m com paraquedas.

(c) Conceitos-chave: Queda livre, Cinemática

Solução. À partida, é possível anotar as equações que dão as velocidades de cada uma das caixas, embora no caso da caixa B esta equação ficará em função do parâmetro v_0, a velocidade inicial desconhecida.

$$(1) \quad v_A = -gt \qquad (2) \quad v_B = v_0 - gt$$

A partir da relação entre as velocidades v_B e v_A fornecida no enunciado, é possível extrair uma relação entre o instante do impacto e a velocidade inicial v_0:

$$v_A = -2v_B \implies -gt \;=\; -2v_0 + 2gt \implies v_0 = \frac{3}{2}gt \qquad (3)$$

Por outro lado, também é possível escrever as equações que dão as posições de cada uma das caixas:

$$(4) \;\; y = h - \frac{g}{2}t^2 \qquad\quad (5) \;\; y = v_0 t - \frac{g}{2}t^2$$

Sabendo que, no instante do impacto, as posições y_A e y_B são iguais, podemos obter outra relação:

$$y_A = y_B \implies h - \frac{g}{2}t^2 = v_0 t - \frac{g}{2}t^2 \implies v_0 = \frac{h}{t} \quad (6)$$

Combinando as equações (3) e (6), podemos obter o valor do instante do impacto:

$$v_0 = v_0 \implies \frac{3}{2}gt = \frac{h}{t} \implies t^2 = \frac{2h}{3g} \implies t = 1.01 \ s$$

Substituindo este valor de t na equação (4), obtém-se uma altura de impacto de 10 m.

2.

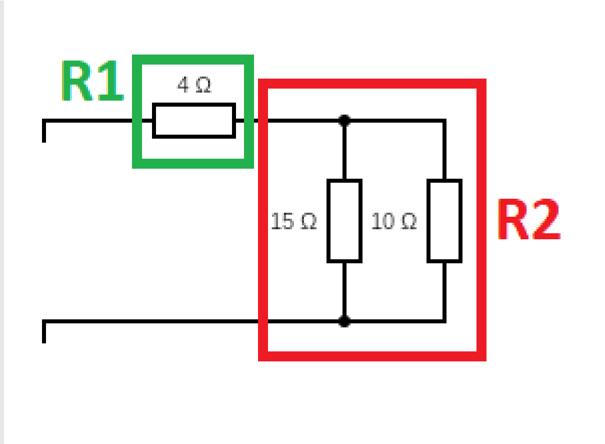
(a) Conceitos-chave: 2ª Lei de Ohm, Resistividade

Solução. Como a resistividade, o comprimento do axónio e a área de secção são dadas no enunciado, só é necessário relembrar a 2ª Lei de Ohm e substituir os valores:

$$R = \rho\frac{l}{A} = 3.2 \times 10^7 \ \Omega$$

(b) Conceitos-chave: Resistências em série, Resistências em Paralelo

Solução. Para resolver este problema, dividimos o circuito em duas resistências associadas em série, R_1 e R_2.



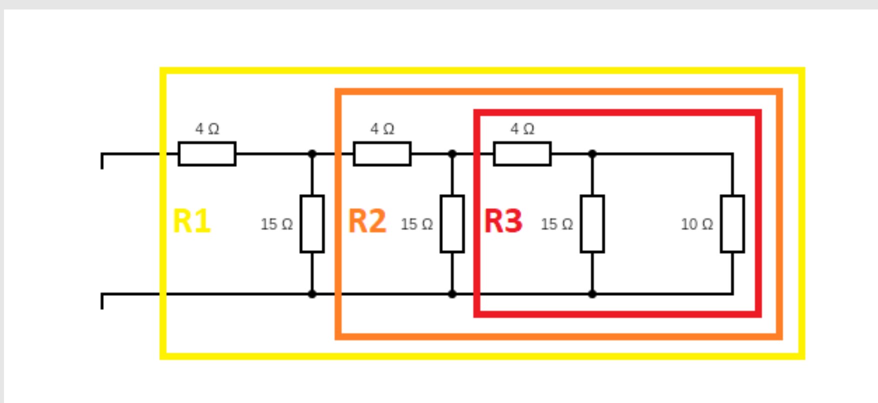
Como R_1 e R_2 estão associadas em série, a resistência total R_t é calculada somando as duas. Falta calcular o valor de R_2, que é constituída por duas resistências associadas em paralelo. O cálculo da resistência equivalente R_2 é feito então da seguinte forma:

$$\frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_{10}} + \frac{1}{R_{15}} \implies \frac{1}{R_2} = \frac{1}{10} + \frac{1}{15} \implies \frac{1}{R_2} = \frac{1}{6} \implies R_2 = 6\ \Omega$$

Agora, é fácil calcular a resistência $R = R_1 + R_2 = 4 + 6 = 10\ \Omega$.

(c) Conceitos-chave: Resistências em série, Resistências em Paralelo

Solução. Depois do cálculo da alínea anterior, é possível perceber o que acontece à medida que mais e mais resistências vão sendo adicionadas ao circuito, segundo a regra do enunciado. Tudo o que é preciso é agrupar as resistências de forma conveniente, como a figura indica:



Da alínea anterior, sabemos que R_3 é igual a 10 Ω. Mas, então, R_2 é igual à resistência da alínea anterior também, e também vale 10 Ω. Isto continua a verificar-se à medida que se adicionam mais resistências ”em escada”, pelo que o valor da resistência do circuito com infinitas resistências associadas continua a ser de 10 Ω.

3.

(a) Conceitos-chave: Calorimetria, Densidade

Solução. A energia necessária para a água vaporizar pode ser calculada somando a energia que é preciso fornecer para a sua temperatura aumentar dos 20 ºC para os 100 ºC, e a energia necessária para a água mudar de fase:

$$Q_{vap} = m_{água} c_{água} \Delta T + m_{água} \Delta H_{vap} = \rho_{água} V c_{água} \Delta T + \rho_{água} V \Delta H_{vap} = 1.29 \times 10^6 \ J$$

A resposta, portanto, é de $1.29 \times 10^6 \ J$.

(b) Conceitos-chave: Irradiância, Potência

Solução. Para resolver este último exercício, é preciso relembrar que a irradiância corresponde à potência fornecida ao sistema por unidade de área. É de notar que esta "área" não pode ser a verdadeira área de superfície do forno: como a luz chega com diferentes ângulos a diferentes partes da superfície, algumas partes absorvem a luz melhor do que outras. As partes que absorvem a luz melhor são aquelas em que os raios solares embatem com um ângulo de 90º. Por este motivo, a área que queremos considerar é a *secção eficaz*, a projeção da semiesfera no plano perpendicular aos raios de luz. Essa área será de $\pi \ r^2$. Lembrando-nos também que a potência é a energia recebida por unidade de tempo, podemos resolver o exercício:

$$P = \frac{E}{\Delta t} \implies \Delta t = \frac{E}{P} \implies \Delta t = \frac{Q_{vap}}{\eta \ E_r \ A}$$

$$\implies \Delta t = \frac{Q_{vap}}{\eta \ E_r \ \pi \ r^2} = 5142 \ s \ \approx 1h \ 26min$$

Portanto, o tempo necessário para evaporar completamente toda a água é de 1h 26min.