Adução

① Trabalhar dentro da classe de estimadores não viciados

② Na classe de estimadores não viciados, escolher aquele com menor variância.

⟹ Estimador não viciado de variância mínima uniformemente (ENVVMU)

<u>Definição</u> (ENVVMU)

Seja T um estimador de $\tau(\theta)$. Então, diremos que T é um estimador não viciado de variância mínima uniformemente de $\tau(\theta)$ { o melhor estimador não viciado de $\tau(\theta)$ } se somente se

a) $E(T) = \tau(\theta)$

b) $Var(T) \leq Var(T^*)$, para qualquer estimador não viciado T^* de $\tau(\theta)$.

Desvantagens :

1- Estimadores não viciados nem sempre existem.

2- Se encontro $\hat{\theta}$ ENVVMU para θ e queremos trabalhar com $\tau(\theta)$, a propriedade de invariância não é válida, ou seja, nada garante que

$\tau(\hat{\theta})$ seja ENVVMU para $\tau(\theta)$.

3- Note que se temos T_1 e T_2 dois estimadores não viciados de $\tau(\theta)$ e $Var(T_1) \leq Var(T_2)$, então T_1 é um estimador melhor que T_2, mas não podemos assegurar que não existem outros melhores estimadores não viciados que estejam disponíveis.

$\Rightarrow$ Seria desejável se pudéssemos especificar um limite inferior, digamos $B(\theta)$, sobre a variância de qualquer estimador não viciado de $\tau(\theta)$. Se pudermos, então, encontrar um estimador não viciado T que satisfaz $Var(T) = B(\theta)$, encontramos um melhor estimador não viciado.

Esta é uma abordagem adotada com o uso do Limite Inferior de Cramér-Rao.

Limite inferior para a variância

caso discreto: fp - Σ
caso contínuo: fdp - $\int$

Teorema (Desigualdade de Cramér-Rao)

Seja $X_1, \dots, X_n$ aa de $X \sim f(\cdot|\theta)$, $\theta \in \Theta$, e T um estimador não viciado de $\tau(\theta)$. Se a distribuição de X satisfaz as seguintes condições (conhecidas como condições de regularidade):

$\mathcal{X}$: espaço amostral.

i) O suporte $A(\underset{\sim}{x}) = \{ \underset{\sim}{x}, f(\underset{\sim}{x}|\theta) > 0 \}$ seja independente de θ. (positividade das funções não depende de θ)

ii) $$\frac{d}{d\theta} \int t(\underset{\sim}{x}) f(\underset{\sim}{x}|\theta) \, d\underset{\sim}{x} = \int t(\underset{\sim}{x}) \frac{d}{d\theta} f(\underset{\sim}{x}|\theta) \, d\underset{\sim}{x},$$

Se o suporte dependesse de θ, a derivada seria diferente.

ou seja, que seja possível a troca das ordens das operações de derivação e de integração sob a distribuição da variável aleatória X.

(impondo um bom comportamento da $f(x|\theta)$)

iii) $$0 < E\left[\left(\frac{d}{d\theta} \log f(\underset{\sim}{X}|\theta) \right)^2 \right] < \infty, \quad \forall \theta \in \Theta.$$

derivada parcial!

atrás

Para o caso discreto, basta substituir a integração pela soma. Assim, se $f(x|\theta)$ é uma fp, então devemos ter condições de intercambiar a diferenciação e a soma.

(Naturalmente, devemos assumir que mesmo que $f(x|\theta)$ seja uma fp e não diferenciável em x, ela é diferenciável em θ).

Então,

$$\mathrm{Var}(T) \geq \frac{\left[\tau'(\theta)\right]^2}{E\left[\left(\frac{d}{d\theta}\log f(\underset{\sim}{X}|\theta)\right)^2\right]}, \text{ onde}$$

$\tau(\theta) = E(T)$, ou seja, $\tau'(\theta) = \frac{d}{d\theta} E(T)$.

Comentários: 1- A família de distribuições $U(0,\theta)$ não satisfaz as condições de regularidade, pois o suporte $A(x)$ depende de θ.

2- A família de distribuição exponencial satisfaz as condições de regularidade.

3- Denomina-se Desigualdade de Cramér-Rao a seguinte inequação

$$\boxed{\mathrm{Var}(T) \geq \frac{\left[\tau'(\theta)\right]^2}{E\left[\left(\frac{d}{d\theta}\log f(\underset{\sim}{X}|\theta)\right)^2\right]}}$$

e o lado direito é denominado o limite inferior de Cramér-Rao (LICR).

Definição. A quantidade $\frac{d}{d\theta} \log f(\underset{\sim}{x}|\theta)$ é chamada função escore.

Além disso, $E\left[\frac{d}{d\theta} \log f(\underset{\sim}{x}|\theta)\right] = 0$,

ou seja, o valor esperado da função escore é sempre igual a zero quando as condições de regularidade são satisfeitas.

PROVA: $E\left[\frac{d}{d\theta} \log f(\underset{\sim}{x}|\theta)\right] =$

$$\int \left[\frac{d}{d\theta} \log f(\underset{\sim}{x}|\theta)\right] f(\underset{\sim}{x}|\theta)\, d\underset{\sim}{x} =$$

$$\int \frac{1}{\cancel{f(\underset{\sim}{x}|\theta)}} \left(\frac{d}{d\theta} f(\underset{\sim}{x}|\theta)\right) \cancel{f(\underset{\sim}{x}|\theta)}\, d\underset{\sim}{x}$$

condições de regularidade

$$\Downarrow$$

$$\int \left(\frac{d}{d\theta} f(\underset{\sim}{x}|\theta)\right) d\underset{\sim}{x} = \frac{d}{d\theta} \overbrace{\int f(\underset{\sim}{x}|\theta)\, d\underset{\sim}{x}}^{1} = 0$$

cqd

Definição: A quantidade

$$I_F(\theta) = E\left[\left(\frac{d}{d\theta}\log f(\underset{\sim}{x}|\theta)\right)^{\alpha}\right]$$

$$\| \; I(\theta)$$

é denominada da informação de Fisher de θ.

Note que como consequência de que

$$E\left(\frac{d}{d\theta}\log f(\underset{\sim}{x}|\theta)\right) = 0,$$

temos que

$$I_F(\theta) = Var\left[\frac{d}{d\theta}\log f(\underset{\sim}{x}|\theta)\right],$$

pois para uma variável aleatória X qualquer com $E(X)=0$, $Var(X) = E(X^{\alpha})$.

Além disso, observe que

$$E\left[\left(\frac{d}{d\theta}\log f(\underset{\sim}{x}|\theta)\right)^{\alpha}\right] = n\, E\left[\left(\frac{d}{d\theta}\log f(X|\theta)\right)^{\alpha}\right]$$

quando $X_1, \ldots, X_n$ são variáveis aleatórias iid com fdp $f(x|\theta)$.

Definição: A quantidade de

$$I_F(\theta) = E\left[\left(\frac{d}{d\theta}\log f(\underset{\sim}{x}\mid\theta)\right)^2\right]$$
$$\| \; I(\theta)$$

é denominada informação de Fisher de θ.

Note que como consequência de que

$$E\left(\frac{d}{d\theta}\log f(\underset{\sim}{x}\mid\theta)\right) = 0,$$ temos que

$$I_F(\theta) = Var\left[\frac{d}{d\theta}\log f(\underset{\sim}{x}\mid\theta)\right],$$ pois para

uma variável aleatória X qualquer com

$E(X)=0$, $Var(X) = E(X^2)$.

Além disso, observe que

$$E\left[\left(\frac{d}{d\theta}\log f(\underset{\sim}{x}\mid\theta)\right)^2\right] = n\, E\left[\left(\frac{d}{d\theta}\log f(X\mid\theta)\right)^2\right]$$

quando $X_1, \ldots, X_n$ são variáveis aleatórias iid com fdp $f(x\mid\theta)$.

PROVA:

$x_1, \dots, x_n$ iid

$$E\left[\left(\frac{d}{d\theta}\log f(\underset{\sim}{X}|\theta)\right)^2\right] = E\left[\left(\frac{d}{d\theta}\log \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\theta)\right)^2\right]$$

$$= E\left[\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{d}{d\theta}\log f(x_i|\theta)\right)^2\right] =$$

propriedade do log

expande o quadrado

$$= \sum_{i=1}^{n} E\left[\left(\frac{d}{d\theta}\log f(x_i|\theta)\right)^2\right] +$$

$$\sum_{i \neq j} E\left[\frac{d}{d\theta}\log f(x_i|\theta)\,\frac{d}{d\theta}\log f(x_j|\theta)\right].$$

Note que para $i \neq j$, temos que

$$E\left[\frac{d}{d\theta}\log f(x_i|\theta)\,\frac{d}{d\theta}\log f(x_j|\theta)\right] \overset{\text{independência}}{=}$$

$$\overbrace{E\left(\frac{d}{d\theta}\log f(x_i|\theta)\right)}^{0}\;\overbrace{E\left(\frac{d}{d\theta}\log f(x_j|\theta)\right)}^{0} = 0$$

(valor esperado da função escore)

Portanto,

$$E\left[\left(\frac{d}{d\theta}\log f(\underline{X}|\theta)\right)^2\right] = \sum_{i=1}^{n} E\left[\left(\frac{d}{d\theta}\log f(X_i|\theta)\right)^2\right]$$

$$= n\, E\left[\left(\frac{d}{d\theta}\log f(X|\theta)\right)^2\right].$$

identicamente distribuídos

Portanto, para o caso de variáveis aleatórias (a.a.) i.i.d com fdp $f(x|\theta)$, temos que a desigualdade de Cramér-Rao pode ser reescrita como

$$Var(T) \geq \frac{[\tau'(\theta)]^2}{n\, E\left[\left(\frac{d}{d\theta}\log f(X|\theta)\right)^2\right]} = \frac{[\tau'(\theta)]^2}{n\, I_1(\theta)}.$$

$I(\theta) = I_F(\theta)$: informação de Fisher de θ baseada em uma amostra de tamanho n.

$I_1(\theta)$: informação de Fisher de θ baseada em uma amostra de tamanho 1, ou seja, uma única observação.

Portanto, para uma amostra aleatória $X_1, \dots, X_n$ da variável aleatória X com fdp (fp) $f(x|\theta)$ e informação de Fisher de θ $I_F(\theta) = I(\theta)$, a informação total de Fisher de θ correspondente à amostra observada é a soma da informação de Fisher de θ $\left(I_1(\theta) \right)$ das n observações da amostra.

resultado útil que pode facilitar os cálculos!!

Lema : Suponha que $f(\cdot|\theta)$ verifica as condições de regularidade, $f(\cdot|\theta)$ é duas vezes derivável (em θ) e assumimos ainda que a integração permuta com $\frac{d^2}{d\theta^2}$. Então,

$$I(\theta) = E\left[\left(\frac{d}{d\theta}\log f(\underset{\sim}{X}|\theta)\right)^2\right] = -E\left(\frac{d^2}{d\theta^2}\log f(\underset{\sim}{X}|\theta)\right)$$

(resultado útil que pode facilitar os cálculos)!!

PROVA: Note que $\frac{d}{d\theta} \log f(\underset{\sim}{x}|\theta) =$

$$\frac{1}{f(\underset{\sim}{x}|\theta)} \frac{d}{d\theta} f(\underset{\sim}{x}|\theta),$$ então

$$\frac{d^2}{d\theta^2} \log f(\underset{\sim}{x}|\theta) = \frac{1}{f(\underset{\sim}{x}|\theta)} \frac{d^2}{d\theta^2} f(\underset{\sim}{x}|\theta) + \left(-\frac{1}{f^2(\underset{\sim}{x}|\theta)}\right)\left[\frac{d}{d\theta} f(\underset{\sim}{x}|\theta)\right]^2 =$$

$$\frac{1}{f(\underset{\sim}{x}|\theta)} \frac{d^2}{d\theta^2} f(\underset{\sim}{x}|\theta) - \left[\frac{d}{d\theta} \log f(\underset{\sim}{x}|\theta)\right]^2.$$

Portanto, $E\left[\frac{d^2}{d\theta^2} \log f(\underset{\sim}{X}|\theta)\right] =$

$$E\left[\frac{1}{f(\underset{\sim}{X}|\theta)} \frac{d^2}{d\theta^2} f(\underset{\sim}{X}|\theta)\right] - E\left[\frac{1}{f^2(\underset{\sim}{X}|\theta)}\left(\frac{d}{d\theta} f(\underset{\sim}{X}|\theta)\right)^2\right],$$

mas note que

$$E\left[\frac{1}{f(\underset{\sim}{X}|\theta)} \frac{d^2}{d\theta^2} f(\underset{\sim}{X}|\theta)\right] =$$

$$\int \frac{1}{\cancel{f(\underset{\sim}{x}|\theta)}} \frac{d^2}{d\theta^2} f(\underset{\sim}{x}|\theta) \, \cancel{f(\underset{\sim}{x}|\theta)} \, dx$$

$$= \frac{d^2}{d\theta^2} \overbrace{\int f(\underset{\sim}{x}|\theta) \, dx}^{1} = 0$$

2.ª condição de regularidade !!

Assim, como queríamos demonstrar

$$E\left[\frac{d^2}{d\theta^2} \log f(\underset{\sim}{x}|\theta)\right] = -E\left[\frac{1}{f^2(\underset{\sim}{x}|\theta)}\left(\frac{d}{d\theta} f(\underset{\sim}{x}|\theta)\right)^2\right]$$

$$= -E\left[\left(\frac{d}{d\theta} \log f(\underset{\sim}{x}|\theta)\right)^2\right].$$

Ou seja,

$$I(\theta) = E\left[\left(\frac{d}{d\theta} \log f(\underset{\sim}{x}|\theta)\right)^2\right] = -E\left[\frac{d^2}{d\theta^2} \log f(\underset{\sim}{x}|\theta)\right].$$

Exemplo 1: Seja $X_1, \dots, X_n$ aa $X \sim$ Poisson(θ).

(Distribuição de X satisfaz as condições de regularidade)!!

a) Encontre a quantidade de $I_F(\theta) = I(\theta)$, ou seja, a informação de Fisher de θ.

$\boxed{CFE}$!!

b) Se $\tau(\theta) = \theta$, determine o limite inferior de Cramér-Rao (LIDCR).

a) $$I_F(\theta) = I(\theta) = E\left[\left(\frac{d}{d\theta} \log f(\underset{\sim}{X}|\theta)\right)^2\right]$$ por definição. Observe que estamos trabalhando com uma amostra aleatória, então

$$I_F(\theta) = I(\theta) = n I_1(\theta),$$ onde

$$I_1(\theta) = E\left[\left(\frac{d}{d\theta} \log f(X|\theta)\right)^2\right].$$

com uma amostra aleatória)

$$I_{(n)}(\theta) = I(\theta) = n\, I_1(\theta), \quad \text{onde}$$

$$I_1(\theta) = E\left[\left(\frac{d}{d\theta}\log f(x|\theta)\right)^2\right].$$

Sabemos que

$$f(x|\theta) = \frac{e^{-\theta}\,\theta^x}{x!}\, I_{\{0,1,\dots\}}(x)$$

$$\log f(x|\theta) = -\theta + x\log\theta - \log x!$$

$$\frac{d}{d\theta}\log f(x|\theta) = -1 + \frac{x}{\theta}.$$

Assim,

$$I_1(\theta) = E\left[\left(\frac{X}{\theta}-1\right)^2\right] = \frac{1}{\theta^2}E\left[(X-\theta)^2\right].$$

$$= \frac{1}{\theta^2}\,\mathrm{Var}(X) = \frac{\theta}{\theta^2} = \frac{1}{\theta}\ \text{e}$$

$$I_F(\theta) = I(\theta) = \frac{n}{\theta} \ //$$

ou

Pelo ~~...~~, temos que

$$I(\theta) = E\left[\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(\underset{\sim}{x}|\theta)\right)^2\right] = -E\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log f(\underset{\sim}{x}|\theta)\right].$$

Sabemos que

$$f(\underset{\sim}{x}|\theta) = \frac{e^{-n\theta}\,\theta^{\sum_{i=1}^n x_i}}{\prod_{i=1}^n x_i!}\prod_{i=1}^n I_{\{0,1,\dots\}}(x_i)$$

$$\log f(\underset{\sim}{x}|\theta) = -n\theta + \sum_{i=1}^n x_i \log\theta - \log\left(\prod_{i=1}^n x_i!\right).$$

$$\frac{\partial \log f(\underset{\sim}{x}|\theta)}{\partial \theta} = -n + \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\theta}$$

$$\frac{\partial^2 \log f(\underset{\sim}{x}|\theta)}{\partial \theta^2} = -\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\theta^2}.$$ Assim,

$$I_F(\theta) = I(\theta) = E\left(+\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{\theta^2}\right) =$$

$$+\frac{1}{\theta^2} E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{n}{\theta^2} E(X) = \frac{n\theta}{\theta^2} = \frac{n}{\theta}. \quad //$$

b)

$$LIDCR = \frac{[\tau'(\theta)]^2}{I_F(\theta)} \underset{\boxed{aa}}{=} \frac{[\tau'(\theta)]^2}{n\, I_1(\theta)}$$

$$= \frac{1}{\frac{n}{\theta}} = \frac{\theta}{n}.$$

15

Exercício 1: Seja $X_1, \ldots, X_n$ a.a. $X \sim \exp(\theta)$

a) Encontre $I_F(\theta)$ e $I(\theta)$.

b) Se $\tau(\theta) = \theta$, determine o limite inferior de Cramér-Rao.

c) Se $\tau(\theta) = \frac{1}{\theta}$, determine o LIDCR.

Exercício 2: Seja $X_1, \dots, X_n$ a.a. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, σ^2 desconhecido.

↳ $\in$ FE (satisfaz as condições de regularidade)

a) Encontre $I_F(\mu) = I(\mu)$.

b) Se $\tau(\mu) = \mu$, determine o limite inferior de Cramér-Rao.