Existem várias formas de definir estes estimadores, começaremos pelos mais simples, que são utilizados nos textos, em geral, de inferência paramétrica. (1)

<u>Método dos momentos</u>

<u>DEFINIÇÃO</u>: Dizemos que $\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_k$ são estimadores obtidos pelo método dos momentos se eles forem soluções das equações

$$M_r = \mu_r(\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_r), \quad r = 1, \dots, k,$$

onde $M_r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^r$ e $\mu_r = E(X^r)$.

Ou seja, dada uma amostra aleatória $X_1, \dots, X_n$ de uma distribuição com fmp ou fdp $f(x, \theta_1, \dots, \theta_k)$, onde $\theta_1, \dots, \theta_k$ são parâmetros cujos valores são desconhecidos. Então, os <u>estimadores pelo método dos momentos</u> $\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_k$ são obtidos igualando-se <u>os primeiros</u> <u>k momentos da amostra</u> <u>aos primeiros</u> k momentos da <u>população correspondente</u> e <u>resolvendo para</u> <u>$\theta_1, \dots, \theta_k$</u>.

<u>Exemplo 1</u>: Seja $X_1, \dots, X_n$ uma amostra aleatória de uma distribuição $N(\mu, \sigma^2)$.

Neste caso, $(\theta_1, \theta_2) = (\mu, \sigma)$. Encontre os estimadores de μ e σ pelo método dos momentos.

Resolução:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \mu_1 = E(X) = \mu \Rightarrow \boxed{\hat{\mu} = \bar{X}}$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = \mu_2 = E(X^2) = \mathrm{Var}\, X + [E(X)]^2$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = \mu_2 = \sigma^2 + \mu^2.$$ Assim,

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \hat{\mu}^2$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \bar{X}^2$$

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \bar{X}^2} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}.$$

Note que o estimador pelo método dos momentos de σ dado acima não é $\sqrt{S^2}$.

Exemplo 2: Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de uma distribuição de Poisson (λ). Queremos estimar λ pelo método dos momentos.

Resolução: $M_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \mu_1 = E(X) = \lambda \Rightarrow \boxed{\hat{\lambda} = \bar{X}}$

$$\alpha \hat{\beta} = \bar{X} \quad \Longrightarrow$$

$$\hat{\alpha} = \bar{X} / \hat{\beta}, \text{ ou seja,}$$

$$\boxed{\hat{\alpha} = \frac{\bar{X}^2}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \bar{X}^2}}$$

estimador de α

ILUSTRAÇÃO:

152	115	109	94	88	137	152	77	160	165
125	40	128	123	136	101	62	153	83	69

$\bar{x} = 113{,}5 \qquad n = 20 \qquad \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 14.087{,}8$.

As estimativas são

$$\hat{\alpha} = \frac{(113{,}5)^2}{14.087{,}8 - (113{,}5)^2} = 10{,}7 \quad \text{e}$$

Valores numéricos!!

$$\hat{\beta} = \frac{14.087{,}8 - (113{,}5)^2}{113{,}5} = 10{,}6.$$

Exemplo 3: Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de uma distribuição gama com parâmetros α e β. Encontre os estimadores de momentos de α e β. 3

Lembre-se que $E(X) = \alpha\beta$ e $Var(X) = \alpha\beta^2$.

Assim, $E(X^2) = Var(X) + [E(X)]^2 =$

$$\alpha\beta^2 + \alpha^2\beta^2 = \beta^2(\alpha+1)\alpha.$$

$$\begin{cases} M_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = E(X) = \mu_1 = \alpha\beta & (1) \\ M_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = E(X^2) = \mu_2 = \beta^2(\alpha+1)\alpha & (2) \end{cases}$$

De (1), temos que $\alpha\beta = \bar{X}$. Substituindo em (2), temos que

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = \bar{X}\beta + \bar{X}^2 \Rightarrow$$

$$\boxed{\hat{\beta} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \bar{X}^2}{\bar{X}}}$$

estimador de β

Comentários: Os estimadores pelo método dos momentos não são unicamente definidos, como já mencionado anteriormente.

Pela definição anterior, temos que os estimadores pelo método dos momentos $\hat{\theta}_1, \ldots, \hat{\theta}_k$ são obtidos igualando-se os primeiros k momentos da amostra aos primeiros k momentos da população correspondente.

Esta definição tem a vantagem de levar, quase sempre, a uma solução única. No entanto, nem sempre leva a uma solução.

Exemplo 4: Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de uma distribuição $N(\mu, \sigma^2)$, tal que μ é conhecida.

Neste caso, $\theta_1 = \sigma$. Encontre o estimador de σ pelo método dos momentos.

Pela 1.ª definição, temos que

$$M_1 = \bar{X} = \mu_1 = E(X) = \mu \rightarrow \text{não obtemos solução!!}$$

Para evitar o problema de não obter nenhum estimador pode-se generalizar a definição escolhendo-se de forma adequada k momentos amostrais e populacionais para serem igualados.

Dessa forma, momentos amostrais maiores que os primeiros k momentos da amostra podem ser usados para obter estimadores. Tais estimadores também são denominados como estimadores de momentos ou estimadores pelo método dos momentos.

<u>DEFINIÇÃO</u> Um estimador pelo método dos momentos é qualquer solução de um sistema de equações dado por

$$M_i = \mu_i(\hat{\theta}_1, \ldots, \hat{\theta}_k), \qquad i \in I,$$

onde I é um conjunto de índices.

<u>Exemplo 5</u>: Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de uma distribuição $N(\mu, \sigma^2)$, tal que μ é conhecida.

Neste caso, $\theta_1 = \sigma$. Note que

$$M_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = \mu_2 = E(X^2) = \sigma^2 + \mu^2.$$

Assim,

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \mu^2}.$$

Exemplo 6: Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de uma distribuição exponencial(θ). Queremos encontrar $\hat{\theta}$ pelo método dos momentos.

Resolução:

$$M_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i = \mu_1 = E(X) = \frac{1}{\theta}$$

$$\boxed{\hat{\theta} = \frac{1}{\bar{X}}}$$

Lembre-se que $E(X) = 1/\lambda$ e $Var(X) = 1/\lambda^2$.

Verifique a solução caso fosse escolhido o segundo momento, ou seja,

$Var(X) + [E(X)]^2$

$$M_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^2 = \mu_2 = E(X^2) = \frac{1}{\theta^2} + \frac{1}{\theta^2}$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^2 = \frac{2}{\theta^2} \Rightarrow$$

$$\boxed{\hat{\theta} = \sqrt{\left(\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{n} X_i^2\right)^{-1}}}$$

Comentário: Na realidade, podemos ter, às vezes, mais de um estimador dos momentos.

Dada a liberdade de escolha dos momentos utilizados, esta definição não produz um estimador único.

Em geral, procura-se utilizar os momentos de mais baixa ordem. Isto se deve ao fato dos momentos amostrais com menor ordem terem menor variabilidade e serem menos afetados por valores aberrantes.

Exemplo 8: Sejam $X_1, \dots, X_n$ amostra aleatória de uma distribuição $U(0,\theta)$, onde θ é o parâmetro de interesse. Encontre o estimador de momentos para θ.

Lembre-se que $E(X) = \frac{\theta}{2}$.

Resolução:

$$M_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \mu_1 = E(X) = \frac{\theta}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{\theta} = 2\bar{X}}$$

Suponha que $x_1 = 4$, $x_2 = 6$ e $x_3 = 50$.

Assim, $\bar{x} = 20$ e $\hat{\theta} = 40$.

Este é um resultado absurdo, pois sabemos que $0 \leq x_i \leq \theta$, $\forall i$ e consequentemente $0 \leq x_{(n)} \leq \theta$. Portanto, sabemos que $\theta \geq 50 = x_{(n)}$, ou seja, o método dos momentos pode produzir péssimas estimativas. Um estimador melhor seria, por exemplo, $\hat{\theta} = T(\underline{X}) = \max\{X_{(n)}, 2\bar{X}\}$.

⇒ Necessidade de outros métodos de estimação !!

* método de máxima verossimilhança !!

⇓

Estimadores de máxima verossimilhança

Observação : Os estimadores de momentos também podem ser obtidos através dos momentos amostrais centrais.