Inferência Estatística Paramétrica

Propriedades dos Estimadores Pontuais

Camila Borelli Zeller

Introdução

- Já vimos três métodos de construção de estimadores pontuais para parâmetros desconhecidos.
  - Método dos Momentos.
  - Método de Máxima Verossimilhança.
  - Método dos Mínimos Quadrados.
- Em alguns casos, estes métodos obtém o mesmo estimador e em diversos outros casos não.

Questões

- **Qual estimador devo utilizar?**
- **Como selecionar o melhor estimador?**
- **Quais as propriedades que um bom estimador deve ter?**

Comentários - Propriedades dos Estimadores

- O estimador $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$ de um parâmetro desconhecido $\boldsymbol{\theta}$ é uma estatística e como tal uma variável aleatória que tem uma lei de probabilidade.

- Se consideramos dois estimadores $\widehat{\boldsymbol{\theta}_1}$ e $\widehat{\boldsymbol{\theta}_2}$ para o mesmo parâmetro $\boldsymbol{\theta}$, podemos derivar as leis de probabilidades dos estimadores e compará-las de algum modo.

- Por exemplo, se $\widehat{\boldsymbol{\theta}_1} \sim U(\boldsymbol{\theta} - 0.5, \boldsymbol{\theta} + 0.5)$ e $\widehat{\boldsymbol{\theta}_2} \sim U(\boldsymbol{\theta} - 0.01, \boldsymbol{\theta} + 0.01)$, qual estimador devo utilizar? (Questão 1)
- **Em geral, esta comparação não é tão direta!!!**

Comentários - Propriedades dos Estimadores

- A distribuição de $\widehat{\boldsymbol{\theta}} = \widehat{\boldsymbol{\theta}}(X_1, \ldots, X_n)$ nos diz como os valores observados $\widehat{\boldsymbol{\theta}} = \widehat{\boldsymbol{\theta}}(x_1, \ldots, x_n)$ (estimativas) estão distribuídos e gostaríamos de ter valores de $\widehat{\boldsymbol{\theta}} = \widehat{\boldsymbol{\theta}}(X_1, \ldots, X_n)$ distribuídos próximos de $\boldsymbol{\theta}$.

- Como selecionar o melhor estimador? (Questão 2)

- Intuitivamente, **queremos um estimador que seja "próximo" do verdadeiro valor do parâmetro.**

Comentários - Propriedades dos Estimadores

- Sabemos que a média e a variância são medidas de locação e dispersão, daí o sentido de $\widehat{\boldsymbol{\theta}} = \widehat{\boldsymbol{\theta}}(X_1, \ldots, X_n)$ ser "próximo" de $\boldsymbol{\theta}$ seria

$$\begin{aligned} E[\widehat{\boldsymbol{\theta}} &= \widehat{\boldsymbol{\theta}}(X_1, \ldots, X_n)] \text{ “próximo” de } \boldsymbol{\theta} \text{ e} \\ Var[\widehat{\boldsymbol{\theta}} &= \widehat{\boldsymbol{\theta}}(X_1, \ldots, X_n)] \text{ “próximo” de } 0. \end{aligned}$$

Propriedades dos Estimadores

- **Precisamos definir propriedades desejáveis para os estimadores.**

- Quais as propriedades que um bom estimador deve ter? (Questão 3)

- Vejamos um exemplo!!

Estimadores Não Viesados

Um estimador $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$ é considerado um estimador não viesado (não tendencioso ou não viciado) de θ se

$$\mathbf{E}[\widehat{\boldsymbol{\theta}}] = \boldsymbol{\theta}, \tag{1}$$

para todo $\boldsymbol{\theta}$.

- Em outras palavras, um estimador é não viesado se o seu valor esperado coincide com o parâmetro de interesse.

- Se (1) não valer, $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$ diz-se viesado e a diferença

$$E(\widehat{\boldsymbol{\theta}}) - \boldsymbol{\theta}$$

é chamada viés (ou vício, desvio) de $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$.

Exemplos: Estimadores Não Viesados

- Desenho esquemático!!

- Vejamos exemplos!!

Primeiro Critério

Princípio da Estimação Não Viesada

Ao escolher dentre diversos estimadores diferentes de θ, selecione um que seja não viesado.

- Será que apenas este critério é suficiente?

Proposição

Se $X_1, \ldots, X_n$ forem uma amostra aleatória de uma distribuição com média $\mu = E[X]$, então $\overline{X}$ é um estimador não viesado de μ. Se além disso, a distribuição for contínua e simétrica, então $\tilde{X}$ (mediana amostral) é também um estimador não viesado de μ.

- **Precisamos de um meio de selecionar os estimadores não viesados.**

Comentários - Propriedades dos Estimadores

A propriedade de ser não viesado, embora desejável para um estimador, não deve ser o único critério utilizado para comparar estimadores, também devemos ter estimadores mais "concentrados" em torno do verdadeiro valor do parâmetro.

Erro Padrão do Estimador

Convém notar que a variância ou o desvio padrão de um estimador fornece uma idéia da sua precisão.

O erro padrão de um estimador $\boldsymbol{\theta}$ é o seu desvio padrão $\sigma_{\widehat{\theta}} = \sqrt{Var[\widehat{\boldsymbol{\theta}}]}$.

- Vejamos um exemplo!!

Estimadores Eficientes

Dados dois estimadores $\widehat{\boldsymbol{\theta}_1}$ e $\widehat{\boldsymbol{\theta}_2}$, não viesados para um parâmetro $\boldsymbol{\theta}$, dizemos que $\widehat{\boldsymbol{\theta}_1}$ é mais eficiente do que $\widehat{\boldsymbol{\theta}_2}$ se

$$Var[\widehat{\boldsymbol{\theta}_1}] < Var[\widehat{\boldsymbol{\theta}_2}].$$

- Vejamos exemplos!!

Segundo Critério

Princípio da Estimação Não Viesada de Mínima Variância

Dentre todos os estimadores não viesados de $\boldsymbol{\theta}$, escolha aquele que tiver variância mínima. O $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$ é chamado estimador não viesado de mínima variância de $\boldsymbol{\theta}$.

- Mais detalhes serão dados em Inferência II