Outras distribuições importantes

Vamos introduzir alguns modelos para variáveis aleatórias contínuas que serão bastante utilizadas no decorrer do curso.

1 – Distribuição Gama

DEFINIÇÃO: Diz-se que uma variável aleatória contínua X tem uma distribuição gama se a fdp de X é

$$f(x;\alpha,\beta) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta} & x \geq 0 \\ 0 & cc \end{cases} \qquad (1)$$

onde os parâmetros α e β satisfazem $\alpha>0$, $\beta>0$ e $\Gamma(\alpha)$ é a função gama dada por

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{\alpha-1}\, dx \quad , \alpha>0.$$

Note que $\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)$ e se $\alpha = n$ for um inteiro positivo, $\Gamma(n) = (n-1)!$ e que $\Gamma(1)=1$, $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

Usaremos a notação $X \sim Gama(\alpha, \beta)$ ②

para designar uma variável aleatória dada

por (1).

A distribuição gama padrão tem $\beta = 1$, de forma que a fdp de uma variável aleatória gama padrão é dada

por

$$f(x;\alpha) = \begin{cases} \dfrac{x^{\alpha-1} e^{-x}}{\Gamma(\alpha)} & x \geq 0 \\ 0 & cc \end{cases}$$

A média e a variância de uma variável aleatória X com distribuição gama $f(x;\alpha,\beta)$ são

$$E(X) = \mu = \alpha\beta \quad e \quad Var(X) = \alpha\beta^2.$$

Exemplos gráficos !!!

(outros modelos!)

$\alpha \leq 1$ função decrescente

α: forma

β: escala (comprimir ou esticar a densidade de

Aplica-se a distribuição gama à análise de tempo de vida de equipamentos, de tempo de retorno de mercadorias com falhas e a testes de confiabilidade.

Exemplo: Suponha que o tempo de sobrevivência X em semanas de um camundongo macho selecionado aleatoriamente e exposto a 240 rads de radiação tenha distribuição gama com $\alpha = 8$ e $\beta = 15$. O tempo esperado de sobrevida é $E(X) = (8)(15) = 120$ semanas, enquanto $Var(X) = 8(15)^2 = 1800$ e

$$\sigma_X = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{1800} = 42,43 \text{ semanas}.$$

A probabilidade de um camundongo sobreviver entre 60 e 120 semanas é

$$P(60 \leq X \leq 120) = P(X \leq 120) - P(X \leq 60)$$

computador

outros modelos!

$=$

A probabilidade de um camundongo sobreviver ao menos 30 semanas é

$$P(X \geq 30) = 1 - P(X \leq 30) =$$

computador

Lembrar que é uma distribuição tabelada!!

lembrar outra definição!

Outra Definição: se a variável aleatória X tem densidade dada por

$$f(x; r, \lambda) = \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} x^{r-1} e^{-\lambda x} I(x \geq 0)$$

$$\alpha = r \qquad \frac{1}{\beta} = \lambda$$

$$E(X) = \frac{r}{\lambda} \quad \text{e} \quad Var(X) = \frac{r}{\lambda^2}.$$

2- Distribuição exponencial

DEFINIÇÃO

Diz-se que X tem uma distribuição exponencial com parâmetro λ ($\lambda > 0$) se a fdp de X for

$$f(x;\lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & cc \end{cases}$$

Usaremos a notação $X \sim$ exponencial (λ).

Note que a fdp exponencial é um caso especial da fdp gama em que $\alpha = 1$ e $\beta = \frac{1}{\lambda}$.

A média e a variância de X são

$$E(X) = \mu = \alpha\beta = \frac{1}{\lambda} \quad e \quad Var(X) = \sigma^2 = \alpha\beta^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

Uma aplicação importante da distribuição exponencial é modelar a distribuição do tempo de vida de um componente

Exemplos gráficos !! (outros modelos)

$\boxed{\text{O motivo da popularidade destas aplicações é a propriedade de "falta de memória" da distribuição exponencial.}}$

Suponha que o tempo de vida de um componente seja distribuído exponencialmente com o parâmetro λ. Após o componente ser colocado em serviço, saímos por um período de t_0 horas e então retornamos para encontrar o componente ainda funcionando. Neste caso, qual é a probabilidade dele durar ao menos t horas adicionais?

ou seja, $P(X \geq t + t_0 \mid X \geq t_0) =$

$$\frac{P[(X \geq t + t_0) \cap (X \geq t_0)]}{P(X \geq t_0)} =$$

$$\frac{P(X \geq t + t_0)}{P(X \geq t_0)} = \frac{1 - P(X \leq t + t_0)}{1 - P(X \leq t_0)} =$$

$$\frac{\cancel{1} - [\cancel{1} - e^{-\lambda(t+t_0)}]}{\cancel{1} - [\cancel{1} - e^{-\lambda t_0}]} = \frac{e^{-\lambda(t+t_0)}}{e^{-\lambda t_0}} = e^{-\lambda t}$$

$= P(X \geq t)$: probabilidade do componente ter durado t horas. Assim, a distribuição do tempo de vida adicional é exatamente igual à distribuição original de tempo de vida, de forma que em cada ponto no tempo o componente não dá sinais de desgaste. Em outras palavras, a distribuição do tempo de vida restante é independente da idade atual.

3- Distribuição Qui-quadrado

χ^2_{α} se $\nu = \alpha$, temos uma exponencial $\frac{1}{\alpha}$ (2)

DEFINIÇÃO: Seja ν um inteiro positivo. Diz-se que uma variável aleatória X possui uma distribuição qui-quadrado com parâmetro ν se a fdp de X for a densidade gama com $\alpha = \frac{\nu}{\alpha}$ e $\beta = \alpha$. A fdp de uma variável aleatória qui-quadrado será

$\beta = 1/\alpha$ α - a definição

$$f(x;\nu) = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha^{\nu/\alpha}\,\Gamma(\nu/\alpha)}\, x^{\left(\frac{\nu}{\alpha}\right)-1}\, e^{-x/\alpha} & x \geq 0 \\ 0 & cc \end{cases}$$

O parâmetro ν é denominado número de graus de liberdade.

Graus de liberdade

É a quantidade de informações livres que serão utilizadas para o cálculo de uma estatística.

Exemplo: Variância da Amostra

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

$\bar{X}$

observações n

$\Rightarrow$ $n-1$ observações

$\Rightarrow$ $n-1$ graus de liberdade

Usaremos a notação $X \sim \chi^2_\nu$.

A média e a variância de uma variável aleatória X com distribuição χ^2_ν são

$$E(X) = \mu = \alpha\beta = \frac{\nu}{2} 2 = \nu \quad \text{e}$$

$$\mathrm{var}(X) = \sigma^2 = \alpha\beta^2 = \frac{\nu}{2} 4 = 2\nu.$$

$\frac{\alpha}{\beta} = E(X)$

$\frac{\alpha}{\beta^2} = \mathrm{var}(X)$

α-a definição

{ Exemplos gráficos !! (outros modelos!)

$\rightsquigarrow$ atrás

Teorema: Se as variáveis aleatórias X_i, $i = 1, 2, \ldots, K$, são normalmente e independentemente distribuídas com médias μ_i e variâncias σ_i^2, então

$$U = \sum_{i=1}^{K} \left(\frac{X_i - \mu_i}{\sigma_i} \right)^2$$ tem distribuição qui-quadrado com K graus de liberdade.

Corolário: Se $X_1, \ldots, X_n$ é uma amostra aleatória de uma população X com distribuição normal com média μ e variância σ^2, então $U = \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2 / \sigma^2 \sim \chi^2_n$.

Teorema: Se $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ é uma ~~amostra~~ amostra aleatória de uma população Z com distribuição $N(0, 1)$, então

(i) $\bar{Z} \sim N(0, 1/n)$.

(ii) $\bar{Z}$ e $\sum_{i=1}^{n} (Z_i - \bar{Z})^2$ são variáveis aleatórias independentes.

(iii) $\sum_{i=1}^{n} (Z_i - \bar{Z})^2 \sim \chi^2_{n-1}$.

PROVA (incompleta) (i) Resultado que já vimos. (9)

(ii) $\boxed{\text{PROVA para } n=2 \text{ no Mood}}$

Se $n=2$, temos que $\bar{Z} = \frac{Z_1 + Z_2}{2}$ e

$$\sum_{i=1}^{2} (Z_i - \bar{Z})^2 = \left[Z_1 - \left(\frac{Z_1 + Z_2}{2} \right) \right]^2 + \left[Z_2 - \left(\frac{Z_1 + Z_2}{2} \right) \right]^2$$

$$= \frac{(Z_1 - Z_2)^2}{4} + \frac{(Z_2 - Z_1)^2}{4} = \frac{(Z_2 - Z_1)^2}{2}.$$

Então, $\bar{Z}$ é uma função de $Z_1 + Z_2$

e $\sum_{i=1}^{2} (Z_i - \bar{Z})^2$ é uma função de $Z_2 - Z_1$.

Para provar que $\bar{Z}$ e $\sum_{i=1}^{2} (Z_i - \bar{Z})^2$ são independentes, basta mostrar que $Z_1 + Z_2$ e $Z_2 - Z_1$ são independentes.

Note que $M_{Z_1 + Z_2}(t_1) = E\left[e^{t_1 (Z_1 + Z_2)} \right] = E\left[e^{t_1 Z_1 + t_2 Z_2} \right]$

$= E\left[e^{t_1 Z_1} e^{t_2 Z_2} \right] = E\left[e^{t_1 Z_1} \right] E\left[e^{t_2 Z_2} \right] =$

$\exp\left\{ \frac{1}{2} t_1^2 \right\} \exp\left\{ \frac{1}{2} t_1^2 \right\} = \exp\left\{ t_1^2 \right\}.$

$\boxed{Z_1 + Z_2 \sim N(0, 2)}$

e similarmente,

$M_{Z_2 - Z_1}(t_2) = \exp\left\{ t_2^2 \right\}.$

$\boxed{Z_2 - Z_1 \sim N(0, 2)}$

Note também que

$$M_{Z_1+Z_2,\, Z_2-Z_1}(t_1,t_2) = E\left[e^{t_1(Z_1+Z_2)+t_2(Z_2-Z_1)}\right] =$$

$$=$$

$$E\left[e^{(t_1-t_2)Z_1 + (t_1+t_2)Z_2}\right] =$$

$$E\left[e^{(t_1-t_2)Z_1}\, e^{(t_1+t_2)Z_2}\right] =$$

$$E\left[e^{(t_1-t_2)Z_1}\right] E\left[e^{(t_1+t_2)Z_2}\right] =$$

$$\exp\left\{\frac{1}{2}(t_1-t_2)^2\right\} \exp\left\{\frac{1}{2}(t_1+t_2)^2\right\}$$

$$= \exp\left\{t_1^2\right\} \exp\left\{t_2^2\right\}$$

$$= M_{Z_1+Z_2}(t_1)\, M_{Z_2-Z_1}(t_2)$$

$\Rightarrow$ Fatoração da função geradora de momentos. Portanto,

Z_1+Z_2 e Z_2-Z_1 são independentes.

(iii) Resultado útil

$$\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2 = \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2 + n(\bar{X} - \mu)^2 .$$

Conforme enunciado do teorema, temos que $\mu = 0$ e $\sigma^2 = 1$. Portanto,

$$\sum_{i=1}^{n} Z_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (Z_i - \bar{Z})^2 + n\bar{Z}^2 ,$$ onde

$$\sum_{i=1}^{n} Z_i^2 \sim \chi^2_n \quad \text{e} \quad n\bar{Z}^2 \sim \chi^2_1 .$$

Como $\bar{Z}$ e $\sum_{i=1}^{n} (Z_i - \bar{Z})^2$ são independentes então,

$$\sum_{i=1}^{n} (Z_i - \bar{Z})^2 \sim \chi^2_{n-1} .$$

(1) (a)

O teorema anterior considera uma amostra aleatória proveniente de uma distribuição normal padrão. E se nós desejarmos realizar inferências para μ e σ^2. Desta forma,

μ → média

σ^2 → variância

Considere $X_1, \dots, X_n$ uma amostra aleatória proveniente de uma distribuição normal com média μ e variância σ^2, então Z_i, do teorema anterior, seria igual a $\dfrac{X_i - \mu}{\sigma}$.

Conseqüências: Por (i)

$$\bar{Z} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right) =$$

$$\frac{1}{n\sigma}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu\right] = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma} \sim N(0, 1/n)$$

$$\Rightarrow \bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n).$$

Por (ii) Temos que $\bar{Z}$ e $\sum_{i=1}^{n}(Z_i - \bar{Z})^2$ são variáveis aleatórias independentes. Então,

$$\bar{Z} = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma} \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{n}(Z_i-\bar{Z})^2 = \sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right) - \left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma}\right)\right]^2$$

$$= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} \left[X_i - \mu - \bar{X} + \mu \right]^2 = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2 .$$

Portanto, $\bar{Z} = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma}$ e $\sum_{i=1}^{n} (Z_i - \bar{Z})^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2}$

são variáveis aleatórias independentes.

Por iii $\sum_{i=1}^{n} (Z_i - \bar{Z})^2 \sim \chi^2_{n-1}$, então

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1} .$$

<u>Corolário</u> Se $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$

é a variância de uma amostra aleatória proveniente de uma distribuição normal com média μ e variância σ^2, então

$$U = \frac{(n-1) S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}.$$

Note que estes resultados são válidos apenas para populações que seguem distribuição normal. De fato, para nenhuma outra distribuição

(i) a média amostral e a variância amostral são independentes.

(ii) a média amostral tem distribuição exata normal.

4- Distribuição Beta

DEFINIÇÃO: Diz-se que uma variável aleatória X possui distribuição Beta com parâmetros a e b se a fdp de X for

$$f_X(x) = f_X(x; a, b) = f(x; a, b) = \frac{1}{B(a,b)} x^{a-1} (1-x)^{b-1} I_{(0<x<1)},$$

onde

$a > 0$, $b > 0$ e $B(a,b)$ é a função beta dada por

$$B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} \, dx .$$

Note que se $a = b = 1$, temos que a distribuição beta reduz para a distribuição uniforme.

Usaremos a notação $X \sim Beta(a,b)$.

Comentário: a função geradora de momentos da distribuição Beta não tem uma forma simples. Assim, seus momentos são obtidos diretamente da sua definição.

shape 1 shape 2

Parâmetros α e β definem a forma da distribuição!!

$\alpha = \beta$: a distribuição é simétrica.

$\alpha > \beta$: " " é assimétrica negativa.

$\alpha < \beta$: " " " " positiva.

exemplos gráficos : distribuição Beta

A média e a variância de uma variável aleatória com distribuição

Beta são

$$E(X) = \frac{a}{a+b} \quad e \quad Var(X) = \frac{ab}{(a+b+1)(a+b)^2}$$

A distribuição beta normalmente é usada (por causa do seu domínio (0,1)) para modelar a proporção, tal como a proporção de um dia de 24 horas em que um indivíduo está dormindo ou a proporção de determinado elemento em um composto químico.

5- Distribuição F de Snedecor

Teorema: Sejam U e V duas variáveis aleatórias independentes, cada uma com distribuição qui-quadrado, com v_1 e v_2 graus de liberdade, respectivamente. Então, a variável aleatória

$$W = \frac{U/v_1}{V/v_2} \sim F(v_1, v_2).$$

Diremos que W tem distribuição F de Snedecor, com v_1 e v_2 graus de liberdade. Assim, a variável aleatória W tem densidade dada por

$$f(w; v_1, v_2) = \frac{\Gamma\left(\frac{(v_1+v_2)}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{v_2}{2}\right)} \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{\frac{v_1}{2}}$$

$$\frac{w^{(v_1-2)/2}}{\left[1 + v_1 (w/v_2)\right]^{(v_1+v_2)/2}} \quad I_{(w>0)}$$

Corolário: Seja $X_1, \dots, X_m$ uma amostra aleatória $N(\mu_1, \sigma^2)$ e $Y_1, \dots, Y_n$ uma amostra aleatória $N(\mu_2, \sigma^2)$, independentes. Se definimos

$$S_X^2 = \frac{\sum_{i=1}^{m} (X_i - \bar{X})^2}{m-1} \quad e \quad S_Y^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (Y_i - \bar{Y})^2}{n-1}.$$

Então, temos que $\frac{(m-1) S_X^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{m-1}$,

$\frac{(n-1) S_Y^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$ e são independentes.

Desta forma,

$$\frac{\dfrac{(\cancel{m-1})\, S_X^2}{\cancel{\sigma^2}} \Big/ (\cancel{m-1})}{\dfrac{(\cancel{n-1})\, S_Y^2}{\cancel{\sigma^2}} \Big/ (\cancel{n-1})} \sim F_{(m-1,\, n-1)} .$$

Resumindo, temos que $\dfrac{S_X^2}{S_Y^2} \sim F_{(m-1,\, n-1)}$.

A média e a variância de uma variável aleatória com distribuição $F(v_1, v_2)$ são

$$E(W) = \frac{v_2}{v_2 - 2} \quad \text{e} \quad Var(W) = \frac{2 v_2^2 (v_1 + v_2 - 2)}{v_1 (v_2 - 2)^2 (v_2 - 4)}$$

para $v_2 > 2$. para $v_2 > 4$.

Comentário: Momentos são obtidos pela definição

$W = \dfrac{U/v_1}{V/v_2}$, tal que $U \sim \chi^2_{v_1}$ e $V \sim \chi^2_{v_2}$, independentes.

O gráfico típico de uma variável aleatória com distribuição F está na figura a seguir !! (exemplo no computador - distribuição F).

Na tabela VI são dados os pontos f_c, tais que

$$P\{F(v_1, v_2) > f_c\} = \alpha, \text{ para } \alpha = 0{,}05$$

e alguns valores de v_1 e v_2.

Para encontrar os valores inferiores, usa-se a identidade

$$F(v_1, v_2) = \frac{1}{F(v_2, v_1)}.$$

(igualdade *)

Exemplo: Considere, por exemplo, $W \sim F(5, 7)$. Consultando a Tabela VI, $P(F > 3{,}97) = 0{,}05$ ou, então, $P(F \leq 3{,}97) = 0{,}95$. Digamos, agora, que desejamos encontrar o valor f_0, tal que $P(F < f_0) = 0{,}05$. Da igualdade *, temos

(18)

$0{,}05 = P\{F(5,7) < f_0\} = P\left(\frac{1}{F(7,5)} < f_0\right)$

$= P\{F(7,5) > 1/f_0\}$, e procurando na tabela

VI, para $F(7,5)$, obtemos $\frac{1}{f_0} = 4{,}88$ e,

portanto, $f_0 = 0{,}205$.

Usando outra tabela

EXEMPLO: (17) (a)

$P(W \leq 3,97) = 0,95$ ou

$P(W > 3,97) = 0,05.$

$P(W < f_0) = 0,05 = P\left(\frac{1}{W_1} < f_0\right)$, onde

$W = \frac{1}{W_1}$, tal que $W \sim F(5,7)$ e

$W_1 \sim F(7,5)$

Usando a relação

$F(\nu_1, \nu_2) = \frac{1}{F(\nu_2, \nu_1)}$

Portanto,

$P(W_1 > 1/f_0) = 0,05$, ou seja,

$P(W_1 < 1/f_0) = 0,95$, tal que $W_1 \sim F(7,5)$,

olhando na tabela $\frac{1}{f_0} = 4,88$ e $f_0 = 0,205.$

6- Distribuição t - Student

A distribuição t - Student é importante no que se refere a inferências sobre médias populacionais. A obtenção da densidade está contida no teorema abaixo.

Teorema: Seja Z uma variável aleatória normal com média 0 e variância 1 e Y uma variável aleatória χ^2_v, com Z e Y independentes. Então, a variável aleatória

$$T = \frac{Z}{\sqrt{Y/v}}$$ tem densidade dada por

$$f(t;\nu) = \frac{\Gamma\left(\frac{(\nu+1)}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\sqrt{\pi\nu}} \left(1+t^2/\nu\right)^{-\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}, \quad -\infty < t < \infty.$$

Diremos que tal variável tem uma distribuição t-student com ν graus de liberdade e a indicaremos por t_ν.

<u>Corolário</u>: Se $X_1, \ldots, X_n$ é uma amostra aleatória de uma distribuição normal com média μ e variância σ^2, então $Z = \dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$ e

$Y = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$. Além disso, Z e Y são independentes. Assim,

$$Z\Big/\sqrt{Y/(n-1)} \sim t_{n-1}.$$

<u>Resumindo</u>: $\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \Bigg/ \sqrt{\dfrac{\cancel{(n-1)}S^2}{\sigma^2} \Big/ \cancel{n-1}} =$

$$= \frac{(\bar{X} - \mu)\sqrt{n}}{\cancel{\sigma}} \frac{\cancel{\sigma}}{S} = \frac{(\bar{X} - \mu)}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}.$$

A média e a variância de uma variável aleatória com distribuição t_v são

$E(T) = 0$ se $v > 1$ e

$Var(T) = \frac{v}{v-2}$, se $v > 2$.

Comentário, momentos são obtidos pela definição

$T = \frac{Z}{\sqrt{Y/v}}$, tal que $Z \sim N(0,1)$ e $Y \sim \chi^2_v$, independentes.

Exemplos gráficos: distribuição t

olhar comentário em (20a)

⇒ Distribuição simétrica assim como a normal.

Observações adicionais: Note que quando $v = 1$, a distribuição t-Student reduz para a distribuição Cauchy e que quando o número de graus de liberdade aumenta, a distribuição t-Student se aproxima da distribuição normal padrão.

Além disso, o quadrado de uma variável aleatória que segue distribuição t_v é uma variável aleatória com distribuição $F(1, v)$.

Ou seja, se $X \sim t_v$ então $Y = X^2 \sim F(1, v)$.

Como esta distribuição é bastante utilizada na prática, existem tabelas fornecendo probabilidades relativas a ela. A tabela V fornece os valores de t_c tais que

$$P(-t_c < T < t_c) = 1 - p,$$ para alguns

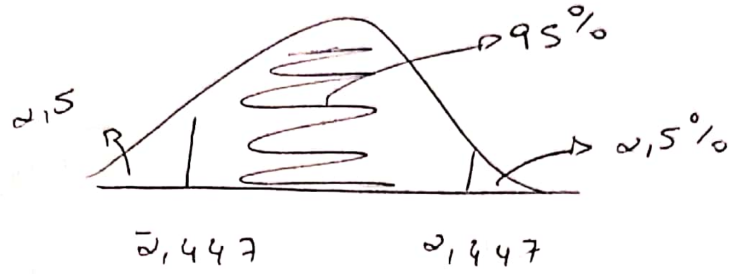
valores de p e de v.

Exemplo: Se $v = 6$, então, usando a Tabela V,

$P(-1,943 < T < 1,943) = 1 - 0,10 = 0,90$, onde

$T \sim t_6$. Além disso, $P(T > 2,447) = 0,025$,

pois $P(-2,447 < T < 2,447) = 1 - 0,05 = 0,95$.



Observe que, nessa tabela, há uma linha com $\nu = \infty$, que corresponde a usar os valores da $N(0,1)$.

Para $n > 100$ essa aproximação é muito boa.

A distribuição t é simétrica e muito similar à distribuição gaussiana, exceto que nesta distribuição a probabilidade de valores extremos é maior. Isto é equivalente a dizer que as caudas da distribuição são mais pesadas que a de uma Gaussiana.

A distribuição t é controlada por um parâmetro só, ν, chamado grau de liberdade. Este parâmetro pode assumir qualquer valor positivo, com as maiores diferenças com respeito à Gaussiana produzidas quando ν é pequeno.

Note que as distribuições Gama, χ^2 e F são assimétricas.

Gama e χ^2: são assimétricas positivas

F também

$\chi^2_\nu \quad \nu \to \infty \quad \to$ Normal

$F_{m,n} \quad m,n \to \infty \quad \to$ Normal

E assim por diante

Olhar as relações no quadro dado em sala de aula!! (enviado por email)

também disponível no Integra.