Estatísticas e Parâmetros

Obtida uma amostra, muitas vezes desejamos usá-la para produzir alguma característica específica. Por exemplo, podemos querer a média da amostra $X_1, X_2, \ldots, X_n$, ou seja, $\bar{X} = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$.

DEFINIÇÃO: Estatística é uma característica da amostra, ou seja, uma estatística T é uma função de $X_1, X_2, \ldots, X_n$ e não contém nenhum parâmetro desconhecido.

DEFINIÇÃO: Parâmetro é uma medida usada para descrever uma característica da população. (em geral desconhecido) ~ (*)

Exemplos: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ — μ e σ^2

$X \sim$ Bernoulli (p) — p

$X \sim$ Poisson (λ) — λ

veja 15 (b)

(K)

DEFINIÇÃO: O conjunto (H) em que θ toma (15) (a)
valores é denominado espaço paramétrico.

Distribuição Normal

Dizemos que X tem distribuição normal com média μ e variância σ^2, que denotamos por $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, se a função de densidade de probabilidade de X é dada por

$$f(x \mid \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} (x-\mu)^2 \right\},$$

$-\infty < x < \infty$, em que $-\infty < \mu < \infty$ e $\sigma^2 > 0$.

Neste caso, μ e σ^2 são denominados parâmetros da distribuição e $\Theta = \{ (\mu, \sigma^2), -\infty < \mu < \infty$ e $\sigma^2 > 0 \}$ e o suporte de X, isto é,

$A(x) = \{ x, f(x) > 0 \}$, é a reta toda.

Notemos também que

$E(X) = \mu$ e $Var(X) = \sigma^2$.

Distribuição Exponencial

Dizemos que X tem distribuição exponencial com parâmetro θ, que denotamos por $X \sim exp(\theta)$, quando a função de densidade de probabilidade de X é dada por

$$f(x|\theta) = \theta e^{-\theta x}, \quad x > 0, \quad \text{em que } \theta > 0,$$

ou seja, $\Theta = \{\theta, \theta > 0\}$ e $A(x) = \{x, x > 0\}$.

Temos também que $E(X) = \frac{1}{\theta}$ e $Var(X) = \frac{1}{\theta^2}$.

Distribuição Binomial

Dizemos que a variável aleatória X tem distribuição binomial, com parâmetros n e θ, que denotamos por $X \sim Binomial(n, \theta)$, se sua função de probabilidade é dada por

$$\begin{array}{l} f(x|\theta) = \binom{n}{x} \theta^{x} (1-\theta)^{n-x}, \quad x = 0, 1, \ldots, n, \\ \quad \| \\ p(x|\theta) \end{array}$$

em que $0 < \theta < 1$, ou seja, $\Theta = \{\theta, \ 0 < \theta < 1\}$.

Neste caso, o suporte de X é discreto e é dado por $A(x) = \{x, \ x = 0, 1, \dots, n\}$. Temos também que

$$E(X) = n\theta \quad \text{e} \quad Var(X) = n\theta(1-\theta).$$

Distribuição de Poisson

Dizemos que a variável aleatória X tem distribuição de Poisson com parâmetro θ, que denotamos por $X \sim Poisson(\theta)$, quando a função de probabilidade é dada por

$$\underset{p(x|\theta)}{\overset{\parallel}{f(x|\theta)}} = \frac{e^{-\theta}\theta^x}{x!}, \quad x = 0, 1, \dots, \quad \text{em que } \theta > 0,$$

ou seja, $\Theta = \{\theta, \ \theta > 0\}$. Neste caso, o suporte de X é o conjunto $A(x) = \{x, \ x = 0, 1, \dots\}$.

Temos também que

$$E(X) = Var(X) = \theta.$$

(15) (e)

Distribuição Uniforme

Dizemos que X tem distribuição uniforme no intervalo $(0, \theta)$, que denotamos por $X \sim U(0, \theta)$, se a função de densidade de X é dada por

$$f(x|\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}, & 0 < x < \theta \\ 0 & cc \end{cases}$$

ou

$$= \frac{1}{\theta} I_{(0,\theta)}(x), \quad \theta > 0,$$

em que

$$I_{(0,\theta)}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 < x < \theta \\ 0 & cc \end{cases},$$

ou seja, $I_{(0,\theta)}(x)$ é a função indicadora do intervalo $(0,\theta)$. Notemos que, neste caso, $A(x) = \{x, 0 < x < \theta\}$, ou seja, o suporte da variável X (ou de $f(x|\theta)$) depende do parâmetro θ. Note que nos casos das distribuições normal, exponencial, binomial e de Poisson, por exemplo, isso não acontece, ou seja, o suporte da distribuição de X é independente de θ.

Temos também que, se $X \sim U(0, \theta)$, então,

$$E(X) = \frac{\theta}{2} \quad e \quad Var(X) = \frac{\theta^2}{12}.$$

<u>Comentário</u>: Veremos que tais distribuições são membros de uma família bastante geral que é a família exponencial.

<u>Exercício</u>: Considere que

a) $X \sim N(\mu, 1)$

b) $X \sim N(0, \sigma^2)$. Para tais casos, defina o espaço paramétrico e o suporte de X.

Exemplos de Estatística

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$ média da amostra

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$$: variância da amostra

$X_{(1)} = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$; o menor valor da amostra

$X_{(n)} = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$: o maior valor da amostra

$W = X_{(n)} - X_{(1)}$: amplitude amostral

Exercício Considere

X , $X+3$, $X-\eta$, $X^2 + \log X^2$

e X/ρ , onde η e ρ são parâmetros desconhecidos. Quais são estatísticas?

X, $X+3$ e $X^2 + \log X^2$.

E se η e ρ são parâmetros conhecidos?

Outras estatísticas importantes

- Momentos amostrais / simples \ centrados

DEFINIÇÃO:
Dada uma amostra aleatória $X_1, X_2, \ldots, X_n$ de tamanho n de uma população X. Então, o momento amostral (simples) de ordem r é definido por

$$M_r = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^r .$$

Comentário: Em particular, se $r=1$, obtemos a média amostral, ou seja,

$$M_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i = \overline{X} .$$

DEFINIÇÃO:
Dada uma amostra aleatória $X_1, X_2, \ldots, X_n$ de uma população X. Então, o momento amostral centrado de ordem r é definido por

$$M_r^c = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^r .$$

→ atrás

Comentário: Em particular, se $r = 2$, obtemos $M_2^c = S_1^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2$.

Comentários

Antes de obter os dados, existe a incerteza quanto ao valor que resultará de qualquer estatística específica. Portanto, estatística é uma variável aleatória e será representada por uma letra maiúscula. Uma letra minúscula será usada para representar o valor calculado ou observado da estatística.

Exemplo: A média amostral é uma estatística e será representada por

$\bar{X}$ (antes da amostra ser selecionada)

e o valor calculado dessa estatística

é $\bar{x}$.

Momentos Amostrais também são uma estatística. Portanto, são variáveis aleatórias e podemos obter suas distribuições, calcular valor esperado e variância, por exemplo.

Teorema: Dada uma amostra aleatória $X_1, X_2, \ldots, X_n$ proveniente de uma população X, o valor esperado do momento amostral (simples) de ordem r é igual ao $\boxed{\text{momento populacional de ordem } r}$, isto é,

$\hookrightarrow E(X^r) = \mu_r$

$$E(M_r) = \mu_r, \quad (\text{se } \mu_r \text{ existe})$$

Além disso,

$$Var(M_r) = \frac{1}{n}\left\{E(X^{2r}) - [E(X^r)]^2\right\}$$

$$= \frac{1}{n}\left\{\mu_{2r} - \mu_r^2\right\}, \quad (\text{se } \mu_{2r} \text{ existe}).$$

PROVA:

$$Var(M_r) = Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^r\right) = \frac{1}{n^2} Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^r\right)$$

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ amostra aleatória (i.i.d)

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Var(X_i^r) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\left[E(X_i^{2r}) - (E(X_i^r))^2\right] =$$

$$\frac{1}{n^2}\, n\left[\mu_{2r} - \mu_r^2\right] = \frac{1}{n}\left\{\mu_{2r} - \mu_r^2\right\}.$$

Em particular, se $r=1$, temos o seguinte corolário. (26)

valor esperado

Corolário: Dada uma amostra aleatória $X_1, \dots, X_n$ de uma população X, onde μ e σ^2 são, respectivamente, a média e a variância de X. Considere $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, então

$$E(\bar{X}) = \mu_1 = E(X) = \mu$$

$$Var(\bar{X}) = \frac{1}{n}\{\mu_2 - \mu_1^2\}$$

$$E(\bar{X}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{1}{\cancel{n}}\, n\mu$$

$$\Downarrow$$

$$Var(\bar{X}) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Var(X_i) = \frac{1}{n}\sigma^2. \quad \frac{1}{n}\{E(X^2) - E(X)^2\}$$

$$= \frac{1}{n} Var(X) = \frac{1}{n}\sigma^2.$$

Comentário: Observe que, conforme n vai aumentando a variância vai diminuindo!!

$$\lim_{n \to \infty} Var(\bar{X}) = 0.$$

Da mesma forma que podemos calcular (a) (b)

o valor esperado e a variância dos (1)

momentos amostrais (simples) de ordem r,

podemos obter o valor esperado e a

variância dos momentos amostrais centrados

de ordem r.

Vejamos um exemplo.

Exemplo: Considere uma amostra aleatória

$X_1, \dots, X_n$ de uma população X com

média (valor esperado) μ e variância

$$E(X) = \mu$$

σ^2.

$$Var(X) = \sigma^2 = E[(X-\mu)^2] \Rightarrow$$

NOTAÇÃO: $\mu_r^c = E[(X-\mu)^r]$.

qual o valor esperado de $S_1^2 = \mu_2^c =$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2 ?$$

$$E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2\right] = \frac{1}{n} E\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2\right]$$

$$= \frac{1}{n} E\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 - n(\bar{X}-\mu)^2\right]$$

$$= \frac{1}{n}\left\{E\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\right] - n\,E\left[(\bar{X}-\mu)^2\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{n}\left\{\sum_{i=1}^{n} E\left[(X_i-\mu)^2\right] - n\,E\left[(\bar{X}-\mu)^2\right]\right\}$$

$$\frac{1}{\cancel{n}}\left\{\cancel{n}\,\sigma^2 - \cancel{n}\,\sigma^2_{\bar{X}}\right\} = \sigma^2 - \sigma^2_{\bar{X}} =$$

$$\sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n} = \frac{n\sigma^2 - \sigma^2}{n} = \frac{\sigma^2(n-1)}{n}.$$

$$E\left[M_2^C\right] = \sigma^2\frac{(n-1)}{n}.$$

Note que M_2^C mede a dispersão da amostra, mas $E(M_2^C)$ não é igual a σ^2.

variância populacional

observe o seguinte resultado

que será útil no cálculo do valor

esperado de S_1^2.

$$\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2 = \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2 + n(\bar{X} - \mu)^2 .$$

PROVA : $\boxed{\sum (X_i - \mu)^2} = \sum (\overbrace{X_i - \bar{X}}^{a} + \overbrace{\bar{X} - \mu}^{b})^2 =$

$\sum [(\overbrace{X_i - \bar{X}}^{a}) + (\overbrace{\bar{X} - \mu}^{b})]^2 = \sum [(X_i - \bar{X})^2 +$

$2 (X_i - \bar{X})(\bar{X} - \mu) + (\bar{X} - \mu)^2] =$

$\sum (X_i - \bar{X})^2 + 2(\bar{X} - \mu) \sum_i \underbrace{(X_i - \bar{X})}_{\to 0} +$

$\sum (\bar{X} - \mu)^2 = \sum (X_i - \bar{X})^2 + \sum (\bar{X} - \mu)^2 =$

$\boxed{\sum (X_i - \bar{X})^2 + n(\bar{X} - \mu)^2}$.

DEFINIÇÃO : Variância Amostral.

Dada uma amostra aleatória $X_1, \dots, X_n$ de uma população X, então

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2 \quad \text{para } n > 1$$

é definida como variância amostral.

Teorema : Dada uma amostra aleatória $X_1, X_2, \dots, X_n$ de uma população X, com média $\mu = E(X)$ e variância $\sigma^2 = Var(X)$ e considere $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$. Então,

$$E(S^2) = \sigma^2 \quad \text{e} \quad Var(S^2) = \frac{1}{n}\left(\mu_4^c - \frac{(n-3)}{(n-1)} \sigma^4 \right)$$

para $n > 1$,

onde $\mu_r^c = E\left[(X - \mu)^r \right]$.

PROVA :

$$E(S^2) = E\left[\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2 \right] = \frac{(n-\cancel{1})\sigma^2}{(n-\cancel{1})} \;!!$$

utilizando os cálculos anteriores

$\Rightarrow$

Portanto, a razão por considerar S^2 ao invés de $M_2^C = S_1^2$ como a variância amostral (apesar de ambas medirem a dispersão da amostra) é que o valor esperado de S^2 é igual a σ^2 (variância populacional).

O cálculo da variância de S^2 pode ser obtido através do resultado dado anteriormente, ou seja,

$$\sum(x_i-\mu)^2 = \sum(x_i-\bar{x})^2 + n(\bar{x}-\mu)^2$$ e

será omitido, pois é extenso!!