Estatísticas e suas distribuições

Distribuição da amostra

DEFINIÇÃO: Se $X_1, \dots, X_n$ denota uma amostra de tamanho n. A distribuição da amostra $X_1, \dots, X_n$ é definida como a distribuição conjunta de $X_1, \dots, X_n$.

Comentário: No caso de uma população X contínua, com função densidade de probabilidade $f(x)$, a função densidade de probabilidade conjunta da amostra $X_1, \dots, X_n$ é dada por

$$f(x_1, \dots, x_n).$$

O plano amostral considerado é o de amostragem aleatória simples.

Portanto, $f(x_1, \dots, x_n) = f(x_1) \cdots f(x_n)$.

Exemplo: Suponha que X possa assumir apenas dois valores, 0 e 1, com probabilidades $q = 1-p$ e p, respectivamente. Assim, X é uma variável aleatória discreta com distribuição Bernoulli, ou seja,

$$p(x) = p^{x} q^{1-x} \underset{(0,1)}{I}(x) .$$

A distribuição conjunta para uma amostra aleatória de tamanho 2 proveniente da população X é dada por

$$p(x_1, x_2) = p(x_1)\, p(x_2) =$$

$$p^{x_1} q^{1-x_1} \underset{(0,1)}{I}(x_1) \; p^{x_2} q^{1-x_2} \underset{(0,1)}{I}(x_2) =$$

$$p^{x_1+x_2} q^{2-x_1-x_2} \underset{(0,1)}{I}(x_1) \underset{(0,1)}{I}(x_2) .$$

Vimos que a inferência estatística faz considerações da amostra para a população (raciocínio indutivo)

↳ do qual se vai do específico ao geral.

Além disso, vimos que um parâmetro é uma medida usada para descrever uma característica da população.

Por exemplo, se estivermos colhendo amostras de uma população, identificada pela variável aleatória X, seriam parâmetros a média $E(X) = \mu$ e sua variância $Var(X) = \sigma^2$.

Em geral, os parâmetros são desconhecidos.

Portanto, o problema da inferência estatística é fazer uma afirmação sobre os parâmetros da população através da amostra.

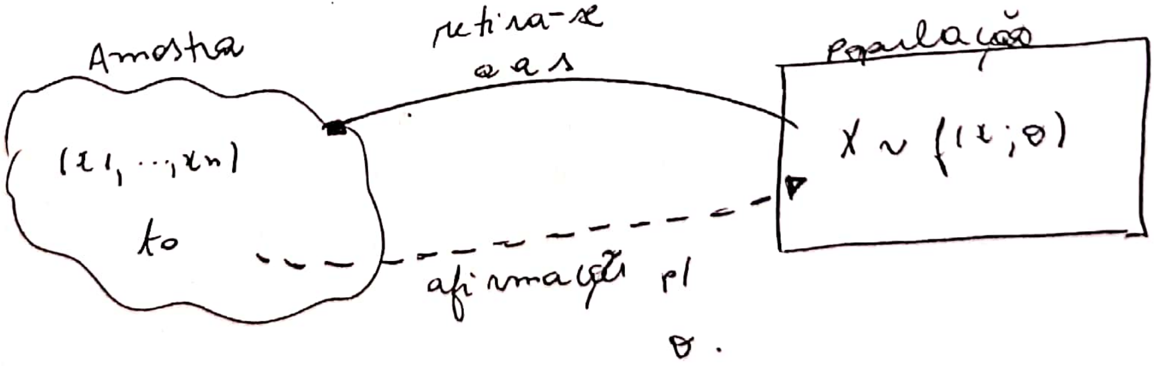
04

Considere θ como o parâmetro da população, por exemplo, a média, a variância ou qualquer outra medida.

Usaremos uma aas de n elementos sorteados dessa população e nossa decisão será baseada na estatística T (função da amostra $X_1, X_2, \dots, X_n$) $= f(X_1, \dots, X_n)$.

Colhida esta amostra, teremos observado um particular valor T, digamos $t_0 = f(x_1, \dots, x_n)$, e baseados nesse valor é que faremos afirmação sobre θ, o parâmetro populacional.

Desenho Esquemático



A validade da nossa resposta seria melhor compreendida se soubéssemos o que acontece com a estatística T, quando retiramos todas as amostras de uma população conhecida segundo o plano amostral adotado.

Isto é, qual a distribuição de T quando $(X_1, \ldots, X_n)$ assume todos os valores possíveis.

Essa distribuição é chamada distribuição amostral da estatística T e desempenha papel fundamental na teoria de inferência estatística.

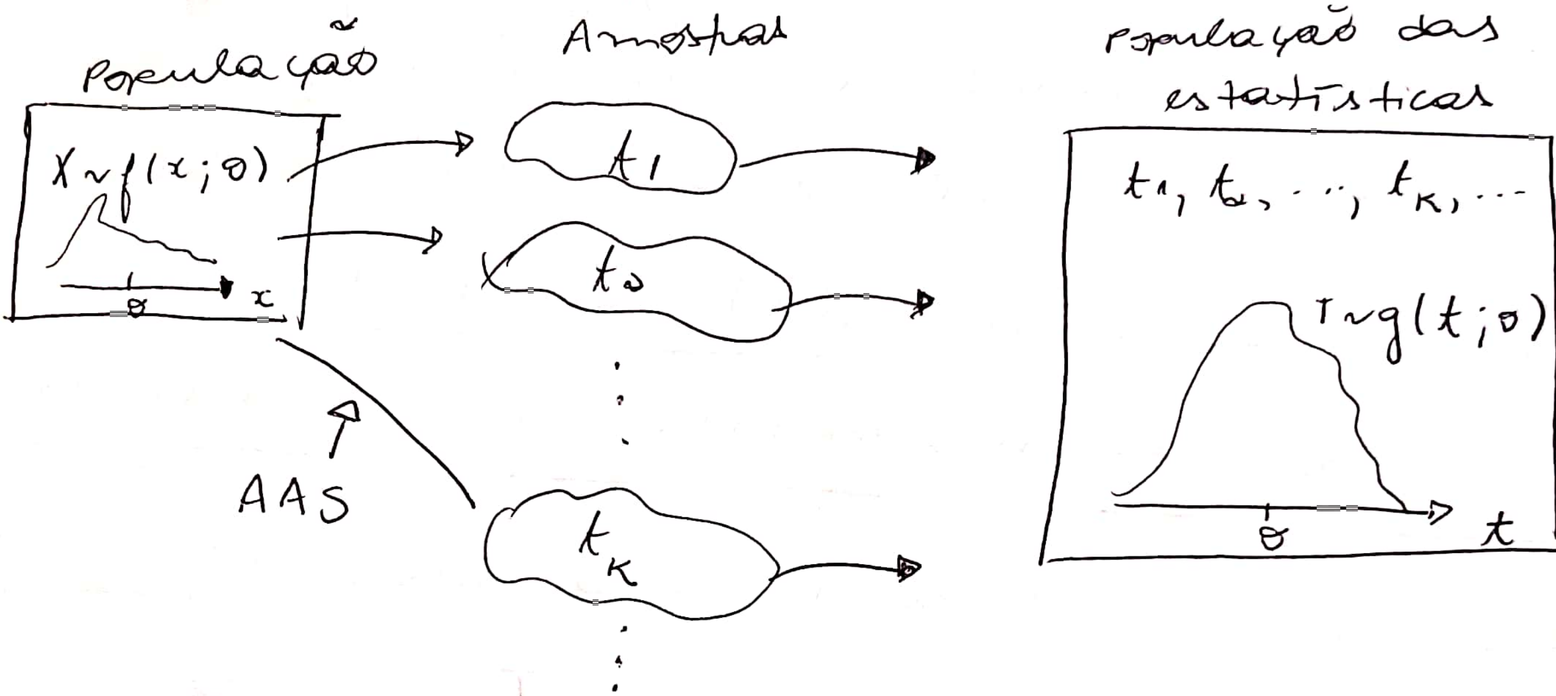
Esquematicamente, teríamos

(a) uma população X, com determinado parâmetro de interesse θ;

(b) todas as amostras retiradas da população, de acordo com certo procedimento;

(c) para cada amostra, calculamos o valor t da estatística T e

(d) os valores t formam uma nova população, cuja distribuição recebe o nome de distribuição amostral de T.



Vejamos alguns exemplos para aclarar um pouco mais o conceito de distribuição amostral de uma estatística.

<u>Exemplo</u>: Voltemos ao exemplo da aula passada, no qual selecionamos todas as amostras de tamanho 2, com reposição, da população $\{1, 3, 5, 5, 7\}$. A distribuição conjunta da variável bidimensional (X_1, X_2) é dada por

$X_2 \backslash X_1$	1	3	5	7	Total
1	1/25	1/25	2/25	1/25	1/5
3	1/25	1/25	2/25	1/25	1/5
5	2/25	2/25	4/25	2/25	2/5
7	1/25	1/25	2/25	1/25	1/5
Total	1/5	1/5	2/5	1/5	1

Vejamos qual é a distribuição da estatística $\bar{X} = \dfrac{X_1 + X_2}{2}$. Essa distribuição é obtida por meio da distribuição conjunta de X_1 e X_2.

Tipo de Amostra	Frequência	$\bar{x}$	w
(1, 1)	1	1	0
(1, 3)	1	2	2
(1, 5)	2	3	4
(1, 7)	1	4	6
(3, 1)	1	2	2
(3, 3)	1	3	0
(3, 5)	2	4	2
(3, 7)	1	5	4
(5, 1)	2	3	4
(5, 3)	2	4	2
(5, 5)	4	5	0
(5, 7)	2	6	2
(7, 1)	1	4	6
(7, 3)	1	5	4
(7, 5)	2	6	2
(7, 7)	1	7	0
Total	25		

DISTRIBUIÇÃO AMOSTRAL DA ESTATÍSTICA $\bar{X}$.

$\bar{x}$	1	2	3	4	5	6	7	total
$P(\bar{X}=x)$	$\frac{1}{25}$	$2/25$	$5/25$	$6/25$	$6/25$	$4/25$	$1/25$	1

$$E(X_1) = E(X) = \mu = \sum_{x_i \in R_X} x_i \, P(X = x_i) =$$

$$1 \times \frac{1}{5} + 3 \times \frac{1}{5} + 5 \times \frac{2}{5} + 7 \times \frac{1}{5} =$$

$$\frac{1}{5} + \frac{3}{5} + \frac{10}{5} + \frac{7}{5} = \frac{21}{5} = 4{,}2$$

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2, \text{ onde}$$

$$E(X^2) = \sum_{i \in R_X} x_i^2 \, P(X = x_i) =$$

$$1 \times \frac{1}{5} + 9 \times \frac{1}{5} + 25 \times \frac{2}{5} + 49 \times \frac{1}{5} =$$

$$\frac{1}{5} + \frac{9}{5} + \frac{50}{5} + \frac{49}{5} = \frac{109}{5}$$

$$Var(X) = \frac{109}{5} - \left(\frac{21}{5}\right)^2 = 4{,}16$$

$$\boxed{\mu = 4{,}2 \qquad \sigma^2 = 4{,}16}$$

28

$E(\overline{X}) = \sum_{\overline{x}_i \in R_{\overline{X}}} \overline{x}_i \, P(X = \overline{x}_i) = 4,2 = \mu$

$Var(\overline{X}) = E(\overline{X}^2) - [E(\overline{X})]^2 = 2,08 = \frac{4,16}{2} = \sigma^2/n$

exercício!!

Conferir o resultado do corolário!!

27

a

Amostras	$\bar{x}$	$P(\bar{X} = \bar{x})$
(1, 1)	1	1/25
(1, 3) (3, 1)	2	2/25
(1, 5) (3, 3) (5, 1)	3	5/25
(1, 7) (3, 5) (5, 3) (7, 1)	4	6/25
(3, 7) (5, 5) (7, 3)	5	6/25
(5, 7) (7, 5)	6	4/25
(7, 7)	7	1/25

Amostras	w	$P(W = w)$
(1, 1) (3, 3) (5, 5) (7, 7)	0	7/25
(1, 3) (3, 1) (3, 5) (5, 3) (5, 7) (7, 5)	2	10/25
(1, 5) (3, 7) (5, 1) (7, 3)	4	6/25
(1, 7) (7, 1)	6	2/25

Com um procedimento análogo podemos obter as distribuições amostrais de outras estatísticas de interesse, por exemplo W (amplitude total) e $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$.

$\hookrightarrow X_{(n)} - X_{(1)}$

não pode ser negativa

DISTRIBUIÇÃO AMOSTRAL DE W

W	0	2	4	6	TOTAL
P(W=w)	7/25	10/25	6/25	2/25	1

Exercício: Encontre a distribuição amostral de S^2 e verifique que $E(S^2) = \sigma^2$, onde $Var(X) = \sigma^2 = 4,16$.

Aproveitando os cálculos anteriores, obtenha a distribuição amostral de $S_1^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$ e também verifique que $E(S_1^2) = \frac{(n-1)}{n} \sigma^2$.

Dedução da Distribuição Amostral de uma Estatística

A teoria de probabilidades é usada para obter a distribuição de uma estatística, contanto que seja uma função "bem simples" dos X_i's e que haja relativamente poucos valores de X diferentes na população ou então, que a distribuição da população possua uma forma "apropriada".

Os exemplos anteriores ilustram tais situações.

Na prática, é desejável que tenhamos um conjunto de métodos disponíveis para a determinação da distribuição de uma função de variáveis aleatórias.

Problema geral: Dada uma amostra aleatória $X_1, X_2, \ldots, X_n$, queremos obter a distribuição da estatística $T = f(X_1, \ldots, X_n)$.

* Método da Função de Distribuição.

* Função Geradora de Momentos.

Método da Função de Distribuição

Problema geral: dada uma amostra aleatória $X_1, X_2, \ldots, X_n$, queremos obter a distribuição da estatística $T = f(X_1, \ldots, X_n)$.

A distribuição de T poderá ser determinada computando-se

$$F_T(t) = P(T \leq t) = P(f(X_1, \ldots X_n) \leq t)$$

Exemplo: Seja X uma variável aleatória contínua com função de distribuição $F_X(x)$ e densidade $f(x)$. Seja $T = X^2$. Sendo assim,

$$F_T(t) = P(T \leq t) = P(X^2 \leq t) = P(-\sqrt{t} \leq X \leq \sqrt{t}) =$$

$F_X(\sqrt{t}) - F_X(-\sqrt{t})$ é a função de distribuição de T. Ao diferenciarmos F_T com respeito a t, obtemos

$$f_T(t) = f(t) = f(\sqrt{t})\left[\frac{1}{2\sqrt{t}}\right] + f(-\sqrt{t})\left[\frac{1}{2\sqrt{t}}\right]$$

$$= \left[\frac{1}{2\sqrt{t}}\right]\left[f(\sqrt{t}) + f(-\sqrt{t})\right]$$ que é a

densidade de T .

Agora suponha que $X \sim N(0,1)$, qual será a distribuição de $T = X^2$? Sabe-se que

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2} x^2\right\}, \quad -\infty < x < \infty .$$

Aplicando o resultado obtido no exemplo anterior, temos que

$$f_T(t) = f(t) = \left[\frac{1}{2\sqrt{t}}\right]\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2} t\right\} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2} t\right\}\right\} =$$

$$\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{t}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \, \cancel{2} \exp\left\{-\frac{1}{2} t\right\} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2} t\right\}, \quad t \geq 0 .$$

Note que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

3

Assim,

$$f(t) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \frac{t^{\left(\frac{1}{2}\right)-1}}{2^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}t\right\}, \quad t \geq 0 .$$

Portanto, $T \sim \chi^2_1$.

Relembrando : Distribuição qui-quadrado

A fdp de uma variável aleatória $X \sim \chi^2_v$

será

$$f(x|v) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\frac{v}{2}}\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} x^{\left(\frac{v}{2}\right)-1} e^{-\frac{x}{2}} & x \geq 0 \\ 0 & cc \end{cases}$$

Função Geradora de Momentos (fgm)

Trataremos mais uma vez do seguinte problema geral:

* dada uma amostra aleatória $X_1, X_2, \ldots, X_n$, queremos obter a distribuição da estatística $T = f(X_1, \ldots, X_n)$.

Função Geradora de Momentos (fgm)

Sheldon Ross
Probabilidade

A função geradora de momentos $m_X(t)$ da variável aleatória X é definida, para todos os valores reais de t, como

$$m_X(t) = E\left(e^{tX}\right) = \begin{cases} \sum_x e^{tx} p(x) & \text{se } X \text{ é discreta com função de probabilidade } p(x) \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)\, dx & \text{se } X \text{ é contínua com função de densidade } f(x). \end{cases}$$

Note que $m_X(0) = 1$.

Importância da fgm:

* é única e determina completamente a distribuição da variável aleatória.

* se duas variáveis aleatórias possuem a mesma fgm, (elas) as mesmas possuem a mesma distribuição.

Chamamos $m_X(t)$ de função geradora de momentos porque todos os momentos de X podem ser obtidos com o cálculo sucessivo da derivada de $m_X(t)$ e então com sua avaliação em $t=0$.

Digitalizado com CamScanner

Desta forma,

$m_X^{n}(0) = E(X^n)$, $n \geq 1$, ou seja,

$m_X'(0) = E(X)$ e $m_X''(0) = E(X^2)$, por exemplo.

$$m_X'(0) = \left.\frac{d\, m_X(t)}{dt}\right|_{t=0} \qquad m_X''(0) = \left.\frac{d\, m_X'(t)}{dt}\right|_{t=0}$$

Podemos obter os momentos centrados a partir dos momentos não centrados.

EXEMPLO

$Var(X) = E(X-\mu)^2 = E(X)^2 - (E(X))^2$, onde

$\mu = E(X)$.

//cqd

Exemplo: Obtenha a fgm de $X \sim Bernoulli(p)$.

$$E(e^{tX}) = m_X(t) = \sum_{x \in R_X} e^{tx} P(X=x) =$$

$$e^{t(0)} P(X=0) + e^{t(1)} P(X=1) =$$

$$(1)(1-p) + e^t p = 1 - p + e^t p =$$

$$q + e^t p \quad \text{, onde}$$

$$q = 1-p.$$

Exemplo: obtenha a fgm de $X \sim Binomial(n, p)$.

$$m_X(t) = E(e^{tX}) = m_X(t) = \sum_{x=0}^{n} e^{tx} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} =$$

$$= \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} (e^t p)^x (1-p)^{n-x} = (e^t p + 1 - p)^{x+n-x} =$$

* Teorema do Binômio de Newton

$$(e^t p + 1 - p)^n = (q + e^t p)^n, \text{ onde } q = 1-p.$$

veja atrás comentário

Teorema do Binômio de Newton

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \quad \text{, onde}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \quad \text{, tal que } n! = n(n-1)(n-2)\cdots$$

Exemplo: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, ou seja,

$$\sum_{k=0}^{2} \binom{2}{k} a^k b^{2-k} = \cancelto{1}{\binom{2}{0}} a^0 b^2 + \cancelto{2}{\binom{2}{1}} a^1 b^1$$

$$+ \cancelto{1}{\binom{2}{2}} a^2 b^0 = a^2 + b^2 + 2ab \ // \ \text{cqd}$$

Exemplo: $X \sim \text{Binomial}(n, p)$, então

$$P(X=x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \, I_{(0,1,\dots,n)}(x)$$

$$\sum_{\forall x} P(X=x) = 1 \Rightarrow \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} =$$

$$(p+1-p)^{x+n-x} = 1^n = 1_{\text{cqd}}$$

5

Exemplo: obtenha a fgm de $X \sim Poisson(\lambda)$.

$$E(e^{tX}) = m_X(t) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx} P(X=x) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} =$$

$$e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(e^t\lambda)^x}{x!} = e^{-\lambda} e^{\lambda e^t} = e^{\lambda(e^t-1)},$$

pois

$$e^\lambda = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!}.$$

(série de TAYLOR ou série de potências

⇓

uma expansão de uma função real $f(x)$ ao redor do ponto em que x assume um valor qualquer (digamos, "a").

Exemplo:

$$f(x) = f(a)(x-a)^0 + \frac{f'(a)(x-a)^1}{1!} + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2!} +$$

$$\dots + \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i$$

Se $a=0$, a série também é chamada de MacLaurin.

<u>Exemplo</u>: obtenha a fgm de $X \sim U(a,b)$.

$$m_X(t) = E(e^{tX}) = \int_a^b e^{tx} \frac{1}{(b-a)} \, dx =$$

$u = tx$

$du = t\,dx$

$$\frac{1}{(b-a)} \frac{1}{t} e^{tx} \Big|_a^b =$$

$$\frac{1}{t(b-a)} \left(e^{bt} - e^{at} \right).$$

<u>Exemplo</u>: obtenha a fgm de $X \sim exp(\lambda)$.

$$m_X(t) = E(e^{tX}) = \int_0^\infty e^{tx} \lambda e^{-\lambda x} \, dx = \lambda \int_0^\infty e^{-(\lambda - t)x} \, dx$$

$u = -(\lambda - t)x$

$du = -(\lambda - t)dx$

$$= \frac{\lambda}{-(\lambda - t)} e^{-(\lambda - t)x} \Big|_0^\infty =$$

essa integral converge somente se

$$\frac{\lambda}{-(\lambda - t)} (0 - 1) = \frac{\lambda}{\lambda - t} \; ; \; \text{se } \lambda > t.$$

Exemplo: Obtenha a fgm de $X \sim Gama(\alpha, \beta)$.

$$m_X(t) = \int_0^{\infty} e^{tx} \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} dx =$$

$$\frac{\beta^{\alpha}}{\cancel{\Gamma(\alpha)}} \frac{\cancel{\Gamma(\alpha)}}{(\beta-t)^{\alpha}} \underbrace{\int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-(\beta-t)x} (\beta-t)^{\alpha} dx}_{= 1 \text{, pois } Gama(\alpha, \beta-t)}$$

$$= \left(\frac{\beta}{\beta-t}\right)^{\alpha}, \quad \beta > t.$$

Relembrar a distribuição gama

Diz-se que uma variável aleatória contínua X tem uma distribuição gama se a fdp de X é

$$f(x \mid \alpha, \beta) = \begin{cases} \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} & x \geq 0 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

Notação: $X \sim Gama(\alpha, \beta)$

Exemplo: obtenha a fgm de $X \sim N(0,1)$.

$$m_X(t) = E(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x^2 - 2tx)} dx =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x-t)^2 + \frac{t^2}{2}} dx =$$

$$e^{\frac{t^2}{2}} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x-t)^2} dx}_{= 1 \quad N(t,1)} = e^{t^2/2}.$$

E se quisermos a fgm de $Z \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Sabe-se que $Z = \mu + \sigma X$, onde $X \sim N(0,1)$. Assim,

$$m_Z(t) = E(e^{tZ}) = E(e^{t(\mu + \sigma X)}) = E(e^{t\mu + t\sigma X}) =$$

$$E(e^{t\mu} e^{t\sigma X}) = e^{t\mu} E(e^{t\sigma X}) = e^{t\mu} m_X(t\sigma) =$$

$$= e^{t\mu} \; e^{\frac{t^2 \sigma^2}{2}} = e^{t\mu + \frac{t^2 \sigma^2}{2}} .$$

Uma importante propriedade das funções geradoras de momentos é a de que a função geradora da soma de variáveis aleatórias independentes é igual ao produto das funções geradoras individuais.

Suponha que X e Y sejam independentes e possuam funções geradoras de momentos $m_X(t)$ e $m_Y(t)$, respectivamente. Então,

$$m_{X+Y}(t) = E\left(e^{t(X+Y)}\right) = E\left[e^{tX+tY}\right] =$$

$$E\left(e^{tX}e^{tY}\right) = E\left(e^{tX}\right)E\left(e^{tY}\right) = m_X(t)\,m_Y(t),$$

já que X e Y são independentes.

Generalizando o resultado acima: seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória proveniente de uma população X com fgm $m_X(t)$.

$$m_{\sum_{i=1}^{n} X_i}(t) = E\left(e^{t\sum_{i=1}^{n} X_i}\right) = m_{X_1}(t)\,m_{X_2}(t)\ldots m_{X_n}(t), \text{ pois}$$

$X_1, \ldots, X_n$ são independentes. Porém,

$X_1, \ldots, X_n$ são identicamente distribuídas e portanto,

$$m_{\sum_{i=1}^{n} X_i}(t) = \left[m_X(t) \right]^n .$$

Além disso,

$$m_{\bar{X}}(t) = E\left(e^{t \sum_{i=1}^{n} X_i / n} \right) = E\left(e^{\frac{t}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i} \right) = m_{\sum_{i=1}^{n} X_i}\left(t/n \right)$$

$$= \left[m_X\left(t/n \right) \right]^n .$$

E faremos uso do resultado acima para obtermos a distribuição amostral de $\bar{X}$.

Exercício: Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória proveniente de uma população $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.
Encontre a distribuição amostral de $T_n = X_1 + \cdots + X_n$ e de $\bar{X} = \frac{T_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$.

$$m_{T_n}(t) = \left[m_X(t) \right]^n = \left(e^{t\mu + \frac{t^2 \sigma^2}{2}} \right)^n = e^{tn\mu + \frac{t^2 n \sigma^2}{2}}$$

$\Rightarrow T_n \sim N(n\mu, n\sigma^2)$ (Resultado 1)

$$m_{\bar{X}}(t) = \left[m_X\left(t/n\right) \right]^n = \left(e^{\frac{t}{n}\mu + \frac{t^2}{n^2}\frac{\sigma^2}{2}} \right)^n =$$

$$e^{t\mu + \frac{t^2}{2}\frac{\sigma^2}{n}}$$

$$\Rightarrow \bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$ (Resultado 2)

De acordo com o resultado 2, a distribuição amostral de $\bar{X}$ é centrada precisamente na média da população da qual a amostra foi selecionada. O resultado 2 mostra que a distribuição de $\bar{X}$ se torna mais concentrada em torno de $\mu = E(X)$ à medida que o tamanho da amostra (n) aumenta.

Com diferença marcante, a distribuição de T_n se dispersa mais à medida que n aumenta.

Exemplo: Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória proveniente de uma população $X \sim exp(\lambda)$. Encontre a distribuição amostral de $T_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ e de $\bar{X}$.

$$m_{T_n}(t) = \left[m_X(t) \right]^n = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t} \right)^n, \quad \lambda > t.$$

$\Rightarrow T_n \sim Gama(n, \lambda)$

$$m_{\bar{X}}(t) = \left[m_X\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t/n}\right)^n = \left(\frac{\lambda}{\frac{n\lambda - t}{n}}\right)^n =$$

$$\left(\frac{n\lambda}{n\lambda - t}\right)^n$$

$\Rightarrow \bar{X} \sim \text{Gama}(n, n\lambda)$.

Digitalizado com CamScanner