Até o momento, obtivemos um limite inferior para a variância de estimadores não viesados através da desigualdade de Cramér-Rao.

Agora, mostraremos como a desigualdade de Cramér-Rao pode algumas vezes ser útil para encontrar um ENVVMV de $\tau(\theta)$.

Método I: Encontrar o ENVVMV de $\tau(\theta)$

A desigualdade de Cramér-Rao se torna muito útil na comparação do desempenho dos estimadores. Para qualquer função diferenciável $\tau(\theta)$ temos agora um limite inferior para a variância de qualquer estimador T, tal que $E(T) = \tau(\theta)$. Assim, qualquer

Digitalizado com CamScanner

estimador candidato que satisfaça $E(T) = \tau(\theta)$ 18
e atinja o limite inferior de Cramér-Rao
é melhor que um não viciado de $\tau(\theta)$, ou seja,

se T atinge o LIDCR então, T é ENVVMV de $\tau(\theta)$.

Exemplo 2: Seja $X_1, \ldots, X_n$ a.a. $X \sim Poisson(\theta)$. Além disso, sabemos que se $\tau(\theta) = \theta$, o LIDCR $= \dfrac{\theta}{n}$

Verifique que $\bar{X}$ é um ENVVMV de $\tau(\theta)$.

Note que $E(\bar{X}) = \frac{1}{\cancel{n}} \cancel{n} E(X) = \theta$, portanto $\bar{X}$ é um estimador não viciado de $\tau(\theta) = \theta$.

Além disso, observe que a

$$Var(\bar{X}) = Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Var(X_i)$$

$$= \frac{1}{n^2} n\theta = \frac{\theta}{n} = \text{LIDCR}.$$

Assim, $\bar{X}$ é um ENVVMV de $\tau(\theta) = \theta$.

Exercício 3: Seja $X_1, \ldots, X_n$ aa $X \sim \exp(\theta)$. (19)

Mostre que $\bar{X}$ é ENVVMU de $c(\theta) = \frac{1}{\theta}$.

Exercício 4 : Seja $X_1, \dots, X_n$ a.a. $X \sim N(\mu, 1)$. Mostre que $\bar{X}$ é ENVVUMV de $\tau(\mu) = \mu$.

O corolário a seguir é uma ferramenta útil porque nos dá, implicitamente, um modo de encontrar um melhor estimador não viesado. (20)

Corolário (Atingindo o limite)

Seja $X_1, \dots, X_n$ i.i.d $f(x|\theta)$, onde $f(x|\theta)$ satisfaz as condições do Teorema de Cramér-Rao. Se $T = T(\underset{\sim}{X}) = T(X_1, \dots, X_n)$ é qualquer estimador não viesado de $\tau(\theta)$, então T atinge o LIDCR se, e somente se,

$$a(\theta, n)\left[T(\underset{\sim}{x}) - \tau(\theta)\right] = \frac{d}{d\theta} \log f(\underset{\sim}{x}|\theta) \quad \text{ou}$$

não nula!

$$a(\theta, n)\left[T(\underset{\sim}{x}) - \tau(\theta)\right] = \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{d\theta} \log f(x_i|\theta),$$

→ (*) atrás

pois $X_1, \dots, X_n$ i.i.d $f(x|\theta)$.

→ esse corolário acrescenta uma forma de como encontrar um estimador cuja variância coincida com o LIDCR. Na verdade, se existe um $T(\underset{\sim}{X})$ tal que,

Exemplo 3: Seja $X_1, \dots, X_n$ a.a $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, onde μ é conhecida. Considere $\theta = \sigma^2 = \tau(\theta)$.

Note que $f(\underset{\sim}{x}|\theta) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right\}$

$\prod_{i=1}^{n} I_{(-\infty,\infty)}(x_i)$,

* para algumas funções $a(\theta, n)$ e $c(\theta)$, então

T é um ENVVUM para $c(\theta)$.

21

$$\log f(\underset{\sim}{x}\mid\theta) = -\frac{n}{2}\log 2\pi - \frac{n}{2}\log \sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 \quad e$$

$$\frac{\partial \log f(\underset{\sim}{x}\mid\theta)}{\partial\theta} = -\frac{n}{2}\frac{1}{\theta} + \frac{1}{2\theta^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 =$$

$$\frac{-n\theta + \sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2\theta^2}.$$ Observe que

$$\frac{\partial \log f(\underset{\sim}{x}\mid\theta)}{\partial\theta} = \frac{n}{2\theta^2}\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{n} - \theta\right] \quad e$$

então pelo corolário, temos que

$$T(\underset{\sim}{X}) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{n}$$ é um ENVVMV para

$\tau(\theta)=\theta=\sigma^2$, considerando μ conhecida.

Comentário: Se $\hat{\theta}$ é a estimativa de máxima verossimilhança de θ, digamos $\hat{\theta} = \hat{\theta}(x_1, \ldots, x_n)$, obtida como solução da equação

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \log L(\theta) = 0 \quad \text{e se} \quad T = T(\underset{\sim}{X})$$

é um estimador não viciado de $\tau(\theta)$ tal que $Var(T) = LIDCR$, então $T(\underset{\sim}{X}) = \tau(\hat{\theta}(\underset{\sim}{X}))$.

Sob as condições acima, o estimador de máxima verossimilhança é um ENVVUMV !!

Sob as condições acima, temos que

PROVA:

$$0 = \frac{\partial}{\partial\theta} \log \prod_{i=1}^{n} f(x_i \mid \theta) \Big|_{\theta=\hat{\theta}} = a(\theta, n) \Big[$$

$$t(\underset{\sim}{x}) - \tau(\theta) \Big] \Big|_{\theta=\hat{\theta}} \Rightarrow$$

$$\tau(\hat{\theta}(\underset{\sim}{x})) = t(\underset{\sim}{x}) \text{, então}$$

$\tau(\hat{\theta}(\underset{\sim}{x})) = T(\underset{\sim}{x})$ é ENVVUMU para algum $\tau(\theta)$.

__EXEMPLOS__: Seja $X_1, \ldots, X_n$ a.a. $X \sim$ Poisson(θ) e $\tau(\theta) = e^{-\theta} = P(X=0)$. Encontre um ENVVMU para $\tau(\theta)$.

Sabemos que $I(\theta) = \frac{n}{\theta}$ e assim,

$$LIDCR = \frac{[\tau'(\theta)]^2}{I(\theta)} = \frac{(-e^{-\theta})^2}{\frac{n}{\theta}} = \frac{e^{-2\theta}\,\theta}{n}.$$

24

Note que $T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} I_{\{0\}}(X_i)$ é um estimador não viciado para $c(\theta) = e^{-\theta}$, pois

$$E(T) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} E\left(I_{\{0\}}(X_i) \right) = \frac{1}{\cancel{n}} \cancel{n} \left[1\, P(X=0) + 0 \cdot P(X \neq 0) \right] = e^{-\theta}.$$

Além disso, temos que $Var(T) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} Var\left(I_{\{0\}}(X_i) \right) = \frac{1}{n} Var\left(I_{\{0\}}(X) \right)$, onde

$$E\left(I_{\{0\}}^2(X) \right) = 1^2\, P(X=0) + 0^2\, P(X \neq 0) = e^{-\theta}.$$

Então,

$$Var(T) = \frac{1}{n} \left[e^{-\theta} - \left(e^{-\theta}\right)^2 \right] = \frac{1}{n}\left(e^{-\theta} - e^{-2\theta} \right) = \frac{1}{n} e^{-\theta}\left(1 - e^{-\theta}\right).$$

Observe que a $Var(T)$ não atinge o LIDCR e pela desigualdade de

Cramér-Rao, temos que

$$Var(T) = \frac{1}{n} e^{-\theta}(1-e^{-\theta}) \geq \frac{e^{-N\theta}}{n}.$$

E agora? Existe ou não ENVVMU para $\tau(\theta) = e^{-\theta}$?

Uma dificuldade com esta abordagem para encontrar melhores estimadores não viesados é que, mesmo que o Teorema de Cramér-Rao seja aplicável (no sentido que $f(x|\theta)$ satisfaça as condições de regularidade), em geral, o limite inferior de Cramér-Rao é não atingível, isto é, frequentemente existe um limite inferior para variância que é maior que o LIDCR.

página 25 ⓐ

Comentários: ① Se T atinge o LIDCR então T é ENVVMU para $\tau(\theta)$, tal que $E(T) = \tau(\theta)$, mas se não atinge o LIDCR não quer dizer que não exista ENVVMU para $\tau(\theta)$.

②
Veremos em breve diversos exemplos de ENVVMU cujas variâncias não coincidem com o LIDCR.

③ Em vez de adotar esta abordagem, continuaremos com o estudo dos melhores estimadores não viesados

Na verdade, no caso igualmente favorável de $f(x|\theta)$ ser uma família exponencial uniparamétrica, o máximo que podemos dizer é que existe um parâmetro $\tau(\theta)$ com estimador não viesado que atinge o limite inferior de Cramér-Rao.

Em outras palavras, se $T = T(X_1, \ldots, X_n)$ é um estimador não viesado de algum $\tau(\theta)$ cuja variância coincide com o limite inferior de Cramér-Rao, então $f(x|\theta)$ é um membro da família exponencial e reciprocamente se $f(x|\theta)$ é um membro da família exponencial, então existe um estimador não viesado, digamos, T, de alguma função, digamos $\tau(\theta)$, cuja variância coincide com o LIDCR.

demonstração desta observação será omitida!!

a partir de outro ponto de vista, utilizando o conceito de suficiência. Enfatizamos que a desigualdade de Cramér-Rao não é um método de construção de estimadores. Daí, é importante que sejam estabelecidos métodos para construção de estimadores que tenham alguma propriedade interessante, ou que levem a estimadores com "boas" propriedades.