Parametrização é o processo de decisão e definição dos parâmetros necessários para uma especificação completa ou relevante de um modelo. Reparametrização é uma mudança de parâmetros em um modelo estatístico, de modo a torná-lo adequado em termos dos objetivos propostos, trazer maior facilidade computacional ou possibilitar a estimação de um modo único.

Vantagens de uma reparametrização

* eficiência numérica e relativa facilidade de implementação.

* transparência estatística, no sentido que os novos parâmetros também podem ter significado estatístico.

* economia de espaço, no sentido que o problema a ser efetivamente resolvido frequentemente é muito menor que o problema original.

* tornar o modelo identificável (isto é, aquele com parâmetros únicos). { θ não é identificável quando existem θ_* e θ_{**}, tais que $F(\underset{\sim}{y}, \theta_*) = F(\underset{\sim}{y}, \theta_{**})$, $\forall\ y \in \mathbb{R}^p$, onde F é a fda de $\underset{\sim}{y}$. }

DESVANTAGEM é que os parâmetros são alterados e o retorno aos parâmetros originais pode não ser possível, obrigando a interpretação dos resultados em termos dos novos parâmetros.

Famílias Exponenciais Canônicas

* bastante útil em MLG's

- Caso Uniparamétrico

Nós obtemos uma importante e útil reparametrização da família exponencial uniparamétrica considerando um modelo indexado por η ao invés de θ. A família exponencial é reparametrizada como

$$g(x|\eta) = h(x)\, c^*(\eta) \exp\{\eta\, t(x)\}, \quad x \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R},$$

$\eta \in A$, tal que η é o parâmetro natural e A é o espaço paramétrico natural,

onde $A = \left\{ \eta, \text{ tal que } \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} h(x) \exp\{\eta\, t(x)\}\, dx}_{\text{finita para que}} < \infty \right\}$

e $c^*(\eta) = \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(x) \exp\{\eta\, t(x)\}\, dx \right]^{-1}$ $\forall \theta$

* explicar c^* de normalização

caso contínuo e a integral é substituída pela soma no caso discreto.

Determinando $c^*(\eta)$:

Como $\int_{-\infty}^{\infty} g(x|\eta) = 1$, então

$$c^*(\eta) \int_{-\infty}^{\infty} h(x) \exp\{\eta t(x)\} dx = 1.$$

O modelo $g(x|\eta)$, com $\eta \in A$, é chamado de família exponencial uniparamétrica canônica. Aqui as funções $h(x)$ e $t(x)$ são as mesmas que na parametrização original.

Exemplo 1: Seja $X \sim$ Poisson (λ), tal que

$$f(x|\lambda) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} I_{(0,1,2,\dots)}(x) =$$

$$\frac{I_{(0,1,2,\dots)}(x)}{x!} e^{-\lambda} e^{x \log \lambda}, \quad \lambda > 0.$$

Assim, temos que $h(x) = I_{(0,1,2,\dots)}(x) / x!$,

$c(\lambda) = e^{-\lambda}$, $w(\lambda) = \log \lambda$ e

$t(x) = x$.

Considere $\eta = \log \lambda \Rightarrow \lambda = \exp\{\eta\}$.

x chama atenção que $c(\lambda) = c^*(\eta)$

Sendo assim, a família Poisson na forma canônica é

$$g(x|\eta) = \frac{I_{(0,1,2,\ldots)}(x)}{x!} \exp\{-\exp\{\eta\}\} \exp\{\eta x\},$$

onde $\eta \in A = \mathbb{R}$.

Cálculo de Momentos de uma Família Exponencial

Teorema:

Se X é distribuída de acordo com $g(x|\eta)$ e η é um ponto no interior de A, a função geradora de momentos da estatística $T(x)$ existe e é dada por

$$M(s) = E\left(e^{sT(x)}\right) = c^*(\eta) / c^*(\eta + s),$$ se s em torno de 0.

PROVA :

n 1

$$M(s) = E\left(e^{sT(x)}\right) = \int e^{st(x)}\, g(x|\eta)\, dx :$$

$$\int e^{st(x)}\, h(x)\, c^*(\eta) \exp\{\eta\, t(x)\}\, dx$$

$$= \int h(x)\, c^*(\eta) \exp\{(\eta + s)\, t(x)\}\, dx$$

$$= c^*(\eta) \underbrace{\int h(x) \exp\{(\eta+s)\, t(x)\}\, dx}_{[c^*(\eta+s)]^{-1}}$$

$$= c^*(\eta) \,/\, c^*(\eta+s) \quad // \text{cqd}$$

Além disso, $E(T(X)) = -\dfrac{d}{d\eta} \log c^*(\eta)$ e

$$Var(T(X)) = -\frac{d^2}{d\eta^2} \log c^*(\eta).$$

PROVA (caderno de anotações)

PROVA : O resto do teorema segue usando a propriedade da função geradora de momentos,

tal que, para o caso geral,

$$E(X^r) = \left. \frac{d^r M(t)}{dt^r} \right|_{t=0} .$$

(olhar Mood pág 78)

→ Se $g(x|\eta)$ é densidade então $\int g(x|\eta)\,dx = 1$.

Se $g(x|\eta)$ é família exponencial canônica então

$g(x|\eta) = h(x)\, c^*(\eta) \exp\{\eta\, t(x)\}$. Assim,

$\int h(x)\, c^*(\eta) \exp\{\eta\, t(x)\}\, dx = 1$ e

$$\frac{d}{d\eta}\left[\int h(x)\, c^*(\eta) \exp\{\eta\, t(x)\}\, dx\right] = 0$$

$$\int h(x) \frac{d}{d\eta}\left[c^*(\eta) \exp\{\eta\, t(x)\}\right] dx = 0$$

$$\int h(x) \left[\frac{d}{d\eta} c^*(\eta) \exp\{\eta\, t(x)\} + c^*(\eta) \exp\{\eta\, t(x)\}\, t(x)\right] dx = 0$$

$$\underbrace{\frac{d}{d\eta}\left[\int h(x) \exp\{\eta\, t(x)\}\, dx\right]}_{\frac{1}{c(\eta)}} + \overbrace{\int t(x)\, h(x)\, c^*(\eta) \exp\{\eta\, t(x)\}\, dx}^{E(T(X))} = 0$$

$$E(T(X)) = -\frac{1}{c(\eta)} \frac{d}{d\eta} c^*(\eta) = -\frac{d}{d\eta} \log\left[c^*(\eta)\right].$$

<u>Exemplo 2</u>: [continuação Exemplo 1, tal que $X \sim$ Poisson(λ).]

Vimos que $c^*(\eta) = \exp\{-\exp\{\eta\}\}$,

então $E(T(X)) = E(X) = -\dfrac{d}{d\eta} \log c^*(\eta) =$

$+\dfrac{d}{d\eta} \exp\{\eta\} = \exp\{\eta\}$, onde

$\exp\{\eta\} = \lambda$ // cqd

$Var(T(X)) = Var(X) = -\dfrac{d^2}{d\eta^2} \log c^*(\eta) =$

$\exp\{\eta\} = \lambda$ // cqd

Caso multiparamétrico

Nós obtemos uma importante e útil reparametrização da família exponencial multiparamétrica considerando um modelo indexado por $\underset{\sim}{\eta} = (\eta_1, \dots, \eta_K)$ ao invés de $\underset{\sim}{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_K)$. A família exponencial é reparametrizada como

$$q(x \mid \underset{\sim}{\eta}) = q(x \mid \eta_1, \dots, \eta_K) =$$

$$h(x)\, c^*(\underset{\sim}{\eta}) \exp\left\{ \sum_{i=1}^{K} \eta_i\, t_i(x) \right\},$$

$x \in X \subset R$, $\underset{\sim}{\eta} \in A$, tais que $\eta_1, \dots, \eta_K$ são os parâmetros naturais e A é o espaço paramétrico natural, onde

$$A = \left\{ \underset{\sim}{\eta} = (\eta_1, \dots, \eta_K), \text{ tais que } \int h(x) \exp\left\{ \sum_{i=1}^{K} \eta_i\, t_i(x) \right\} dx < \infty \right\} \text{ e } c^*(\underset{\sim}{\eta}) =$$

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(x)\, \exp\left\{\sum_{i=1}^{k} \eta_i\, t_i(x)\right\} dx\right]^{-1}$$ no

caso contínuo e a integral é substituída pela soma no caso discreto.

O modelo $g(x \mid \underset{\sim}{\eta})$, com $\underset{\sim}{\eta} \in A$, é chamado de família exponencial multiparamétrica canônica. Aqui as funções $h(x)$ e $t_i(x)$ $(i=1,\ldots,k)$ são as mesmas que na parametrização original.

Exemplo 1: Seja $X \sim \text{Normal}(\mu, \sigma^2)$, tal que

$$f(x \mid \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right\},$$

$-\infty < x < \infty$, $-\infty < \mu < \infty$ e $\sigma > 0$.

Note que $f(x \mid \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, I_{(-\infty,\infty)}(x)\, \frac{1}{\sqrt{\sigma^2}}$

$\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x^2 - 2x\mu + \mu^2)\right\}$. Assim, 27

$$f(x\mid\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, I_{(-\infty,\infty)}(x)\, \frac{1}{\sqrt{\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\mu^2\right\}$$

$$\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}x^2 + \frac{\mu x}{\sigma^2}\right\}.$$ portanto,

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, I_{(-\infty,\infty)}(x), \quad c(\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\mu^2\right\},$$

$$w_1(\mu,\sigma^2) = -\frac{1}{2\sigma^2}, \quad t_1(x) = x^2, \quad w_2(\mu,\sigma^2) = \frac{\mu}{\sigma^2}$$

e $t_2(x) = x$.

Considere $\eta_1 = w_1(\mu,\sigma^2) = -\frac{1}{2\sigma^2}$ e

$$\eta_2 = w_2(\mu,\sigma^2) = \frac{\mu}{\sigma^2} \Rightarrow \sigma^2 = -\frac{1}{2\eta_1} \text{ e}$$

$$\mu = \frac{-\eta_2}{2\eta_1}.$$ Sendo assim, a família normal na forma canônica é

$$q(x\mid\underset{\sim}{\eta}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, I_{(-\infty,\infty)}(x)\, \sqrt{-2\eta_1}\, \exp\left\{\frac{1}{4}\,\eta_2^2/\eta_1\right\} \exp\left\{\eta_1 t_1(x) + t_2(x)\eta_2\right\}$$

onde $\underset{\sim}{\eta} = (\eta_1, \eta_2) \in A = \{(\eta_1, \eta_2),\ \eta_1 < 0$ e

$-\infty < \eta_2 < \infty\}$ e

$$c(\mu, \gamma^\alpha) = \frac{1}{\sqrt{\gamma^\alpha}} \exp\left\{-\frac{1}{\alpha\gamma^\alpha}\mu^\alpha\right\} \text{ então,}$$

$$c^*(\eta_1, \eta_2) = \sqrt{-\alpha\eta_1}\ \exp\left\{\frac{1}{4}\ \eta_2^\alpha/\eta_1\right\}.$$

→ Exemplo no contexto univariado (POISSON)

Cálculo de Momentos

~~Teorema~~ Lembre-se que para qualquer vetor $\underset{\sim}{T}_{K\times 1}$, nós definimos

$$M(\underset{\sim}{s}) = E\left[e^{\underset{\sim}{s}^T \underset{\sim}{T}}\right] = E\left[e^{\sum_{i=1}^{K} s_i T_i}\right] \text{ como}$$

função geradora de momentos, e

$$E(\underset{\sim}{T}) = [E(T_1), \ldots, E(T_K)]^T \quad \text{e}$$

$$Var(\underset{\sim}{T}) = \|\, cov(T_a, T_b)\,\|_{K\times K}.$$

(Ver Barry e James: livro de probabilidade)!!

Teorema: Seja uma família exponencial multiparamétrica canônica. Então, se A possui interior não vazio (garantia a existência das derivadas) em $\mathbb{R}^k$ e $\underset{\sim}{\eta} \in A$, então a estatística $T(\underset{\sim}{X})$ possui função geradora de momentos dada por

$$M(\underset{\sim}{s}) = c^*(\underset{\sim}{\eta}) \,/\, c^*(\underset{\sim}{\eta} + \underset{\sim}{s}), \quad \forall \underset{\sim}{s}$$

tal que $\underset{\sim}{\eta} + \underset{\sim}{s} \in A$.

Corolário: Nas condições do teorema anterior,

$$E[T_i(X)] = -\frac{\partial}{\partial \eta_i} \log c^*(\underset{\sim}{\eta}) \quad \text{e}$$

$$Cov(T_i(X), T_j(X)) = -\frac{\partial^2}{\partial \eta_i \partial \eta_j} \log c^*(\underset{\sim}{\eta}),$$

(se $i=j$, temos a variância)

ou seja, $E[T(\underset{\sim}{X})] = [E[T_1(X)], \ldots E[T_k(X)]]^T$ e

$$Var[T(\underset{\sim}{X})] = \| Cov[T_i(X), T_j(X)] \|_{k \times k}.$$

PROVA:

$$M(\underset{\sim}{\lambda}) = E\left(e^{\sum_{i=1}^{K} \lambda_i T_i(X)}\right) =$$

$$\int e^{\sum_{i=1}^{K} \lambda_i t_i(x)} \, f(x \mid \underset{\sim}{\eta}) \, dx =$$

$$\int e^{\sum_{i=1}^{K} \lambda_i t_i(x)} \, h(x) \, c^*(\underset{\sim}{\eta}) \exp\left\{ \sum_{i=1}^{K} \eta_i t_i(x) \right\} dx$$

$$= c^*(\underset{\sim}{\eta}) \underbrace{\int h(x) \exp\left\{ \sum_{i=1}^{K} (\eta_i + \lambda_i) t_i(x) \right\} dx}_{[c^*(\underset{\sim}{\eta} + \underset{\sim}{\lambda})]^{-1}} .$$

$$= c^*(\underset{\sim}{\eta}) \,/\, c^*(\underset{\sim}{\eta} + \underset{\sim}{\lambda}) \;//$$

cqd

O resto da prova (corolário) segue usando a propriedade da função geradora de momentos para o caso vetorial.

Para um vetor aleatório $\underset{\sim}{Y}$, a função geradora de momentos é definida como

$$M_{\underset{\sim}{Y}}(\underset{\sim}{t}) = E\left(e^{t_1 Y_1 + \dots + t_p Y_p}\right) = E\left(e^{\underset{\sim}{t}^T \underset{\sim}{Y}}\right),$$

Por analogia ao caso univariado, temos que

$$\frac{\partial M_{\underset{\sim}{Y}}(\underset{\sim}{t} = \underset{\sim}{0})}{\partial \underset{\sim}{t}} \equiv \left.\frac{\partial M_{\underset{\sim}{Y}}(\underset{\sim}{t})}{\partial \underset{\sim}{t}}\right|_{\underset{\sim}{t} = \underset{\sim}{0}} = E(\underset{\sim}{Y}).$$

Similarmente,

$$\left.\frac{\partial^2 M_{\underset{\sim}{Y}}(\underset{\sim}{t})}{\partial t_r \, \partial t_s}\right|_{\underset{\sim}{t} = \underset{\sim}{0}}$$ avaliada em $(t_r = t_s = 0$

fornece $E(Y_r Y_s)$ que pode ser usada no cálculo da covariância entre $Y_r Y_s$.