MÉTODO II : Encontrar o ENVVMU de $\tau(\theta)$

- Estimadores baseados em estatísticas suficientes

Até o momento, o conceito de suficiência não foi utilizado em nossa busca por estimativas não viciadas. Veremos agora que a consideração da suficiência é, na verdade, uma poderosa ferramenta.

Teorema (Rao - Blackwell)

Seja $X_1, \dots, X_n$ a a $X \sim f(\cdot|\theta)$, $\theta \in \Theta$ e $S = S(\underset{\sim}{X})$ uma estatística suficiente para θ, se $T = T(\underset{\sim}{X})$ é um estimador não viciado de $\tau(\theta)$, então $T^* = E(T/S)$ tem as seguintes propriedades:

comentário

a) $T^* = E(T/S)$ é uma estatística suficiente para θ.

→ a) T^* é um estimador não viciado de $\tau(\theta)$.

→ b) $Var(T^*) \leq Var(T)$, $\forall \theta \in \Theta$.

PROVA:

a) Lembre-se de que se X e Y são duas variáveis aleatórias quaisquer, então, considerando que as esperanças existem, temos que

$$E(X) = E[E(X|Y)] \quad e$$

$$Var(X) = Var[E(X|Y)] + E[Var(X|Y)].$$

$\boxed{\text{atrás}}$

Assim,

$$E(T^*) = E[E(T/S)] = E(T) = \tau(\theta),$$

pois T é um estimador não viciado de $\tau(\theta)$.

Logo, mostramos que T^* é um estimador não viciado de $\tau(\theta)$.

b) Note que

$$Var(T) = Var[E(T/S)] + E[Var(T/S)]$$

$$= Var(T^*) + \underbrace{E[\underbrace{Var(T/S)}_{\geq 0}]}_{\geq 0}$$

$$\Rightarrow Var(T) \geq Var(T^*), \forall \theta \in \Theta$$

Note que as identidades

$$E(X) = E[E(X|Y)] \text{ e}$$

$$Var(X) = Var[E(X|Y)] + E[Var(X|Y)]$$

não fazem nenhuma menção à suficiência, por isso, em princípio, pode parecer que o condicionamento, em qualquer aspecto, resultará em uma melhoria. Isto é, de fato, verdadeiro, mas o problema é que a quantidade resultante provavelmente dependerá de θ e não será um estimador.

Complemento da prova de (a) e (b)

Falta mostrar que T^* é um estimador !!

Portanto, precisamos mostrar que T^* é uma função somente da amostra e, em particular, é independente de θ. Mas segue, a partir da definição de suficiência e do fato de que T (estimador) é uma função somente da amostra, que a distribuição de T/S é independente de θ.

(distribuição condicional da amostra dado $S(\underset{\sim}{X}) = s$ independe de θ)

// cqd

Resultado do Teorema de Rao - Blackwell

Assim, $T^* = E(T/S)$ ~~estimador~~ estimador de $\tau(\theta)$ ~~que~~ é melhor que T, no sentido que ambos são estimadores não viciados de $\tau(\theta)$, mas $Var(T^*) \leq Var(T)$, $\forall \theta \in \Theta$.

Portanto, o condicionamento de qualquer estimador não viciado em uma estatística suficiente resultará em uma melhoria uniforme levando que precisamos considerar somente estatística que são funções de uma estatística suficiente em nossa busca por melhores estimadores não viciados. (37)

Exemplo 6: Seja $X_1, \ldots, X_n$ aa $X \sim \text{Poisson}(\theta)$ e queremos estimar $\tau(\theta) = e^{-\theta} = P(X=0)$.

Considere
$$T = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad X_1 = 0 \\ 0 & \text{cc} \end{cases},$$

ou seja, $T = I_{\{0\}}(X_1)$, tal que

$E(T) = 1\,P(X_1=0) + 0\,P(X_1 \neq 0) = e^{-\theta}$. Logo, T é um estimador não viciado de $\tau(\theta) = e^{-\theta}$.

Além disso, sabemos que $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$ é uma estatística suficiente para θ.

Note que

$$T^* = E(T \mid S = s) = 1\,P(X_1 = 0 \mid S = s) =$$

$$\frac{P(X_1 = 0, \sum_{i=1}^{n} X_i = s)}{P(\sum_{i=1}^{n} X_i = s)} = \frac{P(X_1=0)\;P(\sum_{i=2}^{n} X_i = s)}{P(\sum_{i=1}^{n} X_i = s)} =$$

$$\frac{e^{-\theta}\, e^{-(n-1)\theta}\, [(n-1)\theta]^{s} / s!}{\frac{e^{-n\theta}(n\theta)^{s}}{s!}} =$$

$$\cancel{e^{-\theta}}\; \cancel{e^{-n\theta+\theta}}\; \frac{(n-1)^{s}\,\cancel{\theta^{s}}}{\cancel{s!}} \cdot \frac{\cancel{s!}}{\cancel{e^{-n\theta}}\, n^{s}\, \cancel{\theta^{s}}} =$$

$$\left(\frac{n-1}{n}\right)^{s}$$ independe de θ!! (estimador) para $n>1$.

Portanto, pelo Teorema de Rao-Blackwell, temos que o estimador $T^{*} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{\sum_{i=1}^{n} X_i}$ é não viciado para $g(\theta) = e^{-\theta}$ e é melhor que o estimador T, pois apresenta menor ERM.

LEMBRETE!

$ERM(\hat{\theta}, \theta) = Var(\hat{\theta}) + V^2$, onde

$V = E(\hat{\theta}) - \theta$ é o viés.

$ERM(\hat{\theta}, \theta) = Var(\hat{\theta})$ se $E(\hat{\theta}) = \theta$.

Exemplo 7: Condicionamento em uma estatística não suficiente

Sejam X_1, X_2 a.a $X \sim N(\theta, 1)$. A estatística $\bar{X} = \frac{X_1 + X_2}{2}$ tem

$$E(\bar{X}) = \theta \quad e \quad Var(\bar{X}) = \frac{1}{2}.$$

Considere o condicionamento em X_1, que não é suficiente. Então,

$$T^* = E(\bar{X} / X_1) = E\left(\frac{X_1 + X_2}{2} \mid X_1\right) =$$

$$\frac{1}{2} E(X_1 \mid X_1) + \frac{1}{2} E(X_2 \mid X_1) =$$

$$\frac{1}{2} X_1 + \frac{1}{2} . E(X_2)$$, pois $E(X_2 / X_1) = E(X_2)$ já que X_1 e X_2 são independentes.

Assim, $T^* = E(\bar{X} / X_1) = \frac{1}{2} X_1 + \frac{1}{2}\theta$ que não é um estimador, pois depende de θ.

Estimador uma função somente da amostra!!

Agora, sabemos que ao procurar um melhor (33)
estimador não viciado de $\tau(\theta)$, precisamos considerar
somente estimadores com base em uma estatís-
tica suficiente. A questão que surge agora é
se temos $E(\psi^*) = \tau(\theta)$ e ψ^* com base em uma
estatística suficiente, isto é, $E(\psi | T) = \psi^*$,
tal que $E(\psi) = \tau(\theta)$, como sabemos que
ψ^* é o melhor não viciado, ou seja, ENVVMU ?
Naturalmente, se ψ^* atinge o LIDCR, então é o
melhor não viciado, mas se não atinge,
obtemos alguma coisa ? NÃO

O teorema a seguir resume a relação
entre completitude e suficiência, o que
possibilita a obtenção do estimador ótimo,
isto é, um ENVVMU.

Teorema (Lehmann - Scheffé) ~~Sejam~~ $X_1, \ldots, X_n$
uma amostra aleatória da variável
aleatória X com fdp (ou fp) $f(x|\theta)$. Seja
S uma estatística suficiente e completa p/ θ.
Seja T um estimador não viciado de $\tau(\theta)$.
Assim, $\hat{\theta} = E(T/S)$ [ou seja, $\hat{\theta} = f(S)$]

é o único estimador não viciado de $\tau(\theta)$ (34)
baseado em S e é o estimador não viciado de variância mínima uniformemente (ENVVMU) de $\tau(\theta)$.

PROVA: Note que

$\hat{\theta} = E(T|S)$, então $E(\hat{\theta}) = E(E(T|S))$

$= E(T) = \tau(\theta)$ e $Var(\hat{\theta}) =$

$$Var(E(T|S)) \leq Var(T),$$

pois $Var(T) = Var(E(T|S)) + \underbrace{E(Var(T|S))}_{\geq 0}$.

Falta provar, então, que há um único estimador não viciado de $\tau(\theta)$ que é função de S (estatística suficiente e completa para θ). Para isso, suponha que existam $\hat{\theta}_1$ e $\hat{\theta}_2$, ambos funções de S, tais que

$E(\hat{\theta}_1) = E(\hat{\theta}_2) = \tau(\theta)$, de modo que

$E(\hat{\theta}_1 - \hat{\theta}_2) = 0$ e como S é estatística completa para θ, temos que $P(\hat{\theta}_1 - \hat{\theta}_2 = 0) = 1$ e portanto, $\hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_2$ com probabilidade 1.

Exemplo 8: Seja $X_1, \ldots, X_n$ aa $X \sim \text{Poisson}(\theta)$.

Desejamos encontrar um ENVVMU de $\tau(\theta) = \theta$.

Sabendo que $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$ é uma estatística suficiente e completa para θ, pois a família de distribuições $\text{Poisson}(\theta)$ pertence à família exponencial uniparamétrica e $\Theta = \{\theta, \theta > 0\}$ contém um conjunto aberto em $\mathbb{R}$.

Além disso, note que $T = \bar{X}$ é um estimador não viciado de $\tau(\theta) = \theta$, pois

$$E(T) = E(\bar{X}) = \frac{1}{\cancel{n}}\, \cancel{n}\, E(X) = \theta.$$

Como $\bar{X}$ é um estimador não viciado de $\tau(\theta) = \theta$ e é função de S, então pelo Teorema de Lehmann-Scheffé $\bar{X}$ é um ENVVMU de $\tau(\theta) = \theta$.

Exercício 7: Seja $X_1, \dots, X_n$ aa $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Encontre um ENVVMU de $\tau(\theta) = \sigma^2$,

onde $\theta = (\mu, \sigma^2)^T$.

Exercício 8 : Seja $X_1, \dots, X_n$ a.a $X \sim$ exponencial(θ).

Desejamos encontrar um ENVVMU de $\tau(\theta) = \frac{1}{\theta}$.

EXEMPLO 9 : Seja $X_1, \dots, X_n$ a.a. $X \sim$ exponencial (θ).

Desejamos encontrar um ENVVUMV de $\tau(\theta) = \theta$.

Sabemos que $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$ é uma estatística suficiente e completa para θ, pois a família de distribuições exponencial (θ) pertence à família exponencial uniparamétrica e $\Theta = \{\theta, \theta > 0\}$ contém um conjunto aberto em $\mathbb{R}$.

Precisamos propor um estimador não viciado para $c(\theta) = \theta$ que seja função de S. Sabemos que $E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{n}{\theta}$ e qual será

$$E\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} X_i}\right) = ?$$

Note que

$$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \text{Gama}(n, \theta),$$ então

$$E\left(\frac{1}{Y}\right) = \int_0^\infty \frac{1}{y} \frac{1}{\Gamma(n)} \theta^n y^{n-1} e^{-\theta y} \, dy$$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(n)} \theta^n y^{n-2} e^{-\theta y} \, dy =$$

$$\frac{\Gamma(n-1)\theta}{\Gamma(n)} \underbrace{\int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(n-1)} \theta^{n-1} y^{n-2} e^{-\theta y} \, dy}_{\text{Gama}(n-1,\, \theta) \;=\; 1} = \frac{\theta \, \Gamma(n-1)}{\Gamma(n)} =$$

$$\theta \frac{(n-2)!}{(n-1)!} =$$

$$\frac{\theta \, \cancel{(n-2)!}}{(n-1)\,\cancel{(n-2)!}} = \frac{\theta}{n-1},$$

$n>1$.

Portanto, iremos propor $T = \dfrac{n-1}{\sum_{i=1}^{n} X_i}$, pois

$$E(T) = (n-1)\, E\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} X_i}\right) = \frac{\cancel{(n-1)}\,\theta}{\cancel{(n-1)}} = \theta,$$

ou seja, T é um estimador não viciado de θ.

Então, pelo Teorema de Lehmann-Scheffé $\dfrac{n-1}{\sum_{i=1}^{n} X_i}$ é um ENVVMU de $\tau(\theta)=\theta$, $n>1$.

<u>Exemplo 10</u>: Seja $X_1, \ldots, X_n$ a.a. $X \sim Bernoulli(\theta)$. Encontre o ENVVMU de $\tau(\theta)=\theta$.

Sabemos que $S=\sum_{i=1}^{n} X_i$ é uma estatística suficiente e completa para θ, pois a família de distribuição $Bernoulli(\theta)$ pertence à família exponencial uniparamétrica e $\Theta = \{\theta,\ 0<\theta<1\}$ contém um conjunto aberto em $\mathbb{R}$.

Note que $E(X_1) = \theta$, portanto $T = X_1$ é um estimador não viciado para $\tau(\theta) = \theta$.

Utilizando o teorema de Lehmann-Scheffé, iremos buscar o ENVVMU de $\tau(\theta) = \theta$.

$$T^* = E\left(X_1 \,\middle|\, \sum_{i=1}^n X_i = s\right) = 1\, P\left(X_1 = 1 \,\middle|\, \sum_{i=1}^n X_i = s\right)$$

$$+ \underbrace{0 \cdot \cancel{P\left(X_1 = 0 \,\middle|\, \sum_{i=1}^n X_i = s\right)}}_{0} =$$

$$P\left(X_1 = 1 \,\middle|\, \sum_{i=1}^n X_i = s\right) = \frac{P\left(X_1 = 1, \sum_{i=1}^n X_i = s\right)}{P\left(\sum_{i=1}^n X_i = s\right)} =$$

$$\frac{P\left(X_1 = 1, \sum_{i=2}^n X_i = s-1\right)}{P\left(\sum_{i=1}^n X_i = s\right)} = \frac{P(X_1 = 1)\, P\left(\sum_{i=2}^n X_i = s-1\right)}{P\left(\sum_{i=1}^n X_i = s\right)},$$

onde $\sum_{i=2}^n X_i \sim \text{Binomial}(n-1, \theta)$ e

$\sum_{i=1}^n X_i \sim \text{Binomial}(n, \theta)$.

40

$$T^* = E\left(X_1 \mid \sum_{i=1}^{n} X_i = s\right) = \frac{\cancel{\theta}\binom{n-1}{s-1}\cancel{\theta^{s-1}}\cancel{(1-\theta)^{(n-1)-(s-1)}}}{\binom{n}{s}\cancel{\theta^{s}}\cancel{(1-\theta)^{n-s}}}$$

$$= \frac{\binom{n-1}{s-1}}{\binom{n}{s}} = \frac{\dfrac{(n-1)!}{(s-1)!\,(n-s)!}}{\dfrac{n!}{s!\,(n-s)!}} =$$

$$\frac{(n-1)!}{(s-1)!\,\cancel{(n-s)!}} \quad \frac{\cancel{(n-s)!}\;\; s!}{n!} =$$

$$\frac{\cancel{(n-1)!}\quad s\,\cancel{(s-1)!}}{n\,\cancel{(n-1)!}\quad \cancel{(s-1)!}} = \frac{s}{n}.$$

Portanto, $T^* = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} = \overline{X}$ é

um ENVVMU para $\tau(\theta) = \theta$.

Exemplo 11: Seja $X_1, \dots, X_n$ a.a $X \sim$ Binomial(K, θ). (41)

Encontre o ENVVMU para $\tau(\theta) = P(X=1) = K\theta(1-\theta)^{K-1}$.

Sabemos que $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$ é uma estatística suficiente e completa para θ, pois a família de distribuições Binomial(n, θ) pertence à família exponencial uniparamétrica e $\Theta = \{\theta, 0 < \theta < 1\}$ contém um conjunto aberto em $\mathbb{R}$.

Note que $T = \begin{cases} 1 & \text{se } X_1 = 1 \\ 0 & \text{c.c} \end{cases}$ é

um estimador não viciado para $\tau(\theta) = K\theta(1-\theta)^{K-1} = P(X_1 = 1)$.

Portanto, utilizaremos o teorema de Lehmann-Scheffé para obter o ENVVMU de $\tau(\theta) = P(X=1)$.

$$T^* = E\left(T \,/\, \sum_{i=1}^{n} X_i = s\right) = P\left(X_1 = 1 \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} X_i = s\right) =$$

(2)

$$\frac{P(X_1 = 1, \sum_{i=1}^{n} X_i = s)}{P(\sum_{i=1}^{n} X_i = s)} = \frac{P(X_1 = 1, \sum_{i=2}^{n} X_i = s-1)}{P(\sum_{i=1}^{n} X_i = s)} =$$

$$\frac{P(X_1 = 1)\, P(\sum_{i=2}^{n} X_i = s-1)}{P(\sum_{i=1}^{n} X_i = s)}, \text{ onde}$$

$$\sum_{i=2}^{n} X_i \sim \text{Binomial}((n-1)K, \theta) \quad \text{e}$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \text{Binomial}(nK, \theta).$$

$$T^* = E(T \mid \sum_{i=1}^{n} X_i = s) =$$

$$\frac{K \cancel{\theta} (1-\theta)^{K-1} \binom{(n-1)K}{s-1} \cancel{\theta}^{s-1} (1-\theta)^{(n-1)K-s+1}}{\binom{nK}{s} \cancel{\theta}^{s} (1-\theta)^{nK-s}} =$$

$$= \frac{K \cancel{(1-\theta)^{K-1}} \binom{(n-1)K}{s-1} \cancel{(1-\theta)^{nK-K-s+1}}}{\binom{nK}{s} \cancel{(1-\theta)^{nK-s}}}$$

$$= \frac{K \binom{(n-1)K}{s-1}}{\binom{nK}{s}} .$$

Pelo Teorema de Lehmann-Scheffé, temos que

$$T^{*} = \frac{K \binom{(n-1)K}{\sum_{i=1}^{n} X_i - 1}}{\binom{nK}{\sum_{i=1}^{n} X_i}}$$

é

Um ENVVMU para $\tau(\theta) = P(X_i = 1) = K\theta(1-\theta)^{K-1}$.

Exercício 9 : Seja $X_1, \dots, X_n$ aa $X \sim \text{Poisson}(\theta)$ (44)

Encontre um ENVVUMV para $c(\theta) = e^{-\theta} = P(X=0)$.

Digitalizado com CamScanner

Exemplo 12: Seja $X_1, \dots, X_n$ a.a. $X \sim N(\mu, 1)$. (45)

(caso contínuo)

Encontre o ENVVUMU para $\tau(\mu) = P(X_1 \leq c)$, c fixo, ou seja, $\tau(\mu) = P(X_1 \leq c) =$

$$P\left(\frac{X_1 - \mu}{1} \leq \frac{c - \mu}{1} \right) = \Phi(c - \mu), \ c \text{ fixo}.$$

Sabemos que $\sum_{i=1}^{n} X_i$ é uma estatística suficiente e completa para μ, pois a família de distribuições $N(\mu, 1)$ pertence à família exponencial uniparamétrica e $\Theta = \{\mu, \mu \in \mathbb{R}\}$ contém um conjunto aberto em $\mathbb{R}$.

Além disso, note que $T = \begin{cases} 1 & \text{se } X_1 \leq c \\ 0 & \text{cc} \end{cases}$

é um estimador não viciado para $\tau(\mu)$.

Assim, pelo Teorema de Lehmann-Scheffé, temos que $T^* = E(T / \sum_{i=1}^{n} X_i)$ é

ENVVMU para $\tau(\mu)$.

Note que $E(T / \sum_{i=1}^{n} X_i) = P(X_1 \leq c \mid \sum_{i=1}^{n} X_i)$

$= ?$ — obter a distribuição condicional de $X_1 \mid X_1 + \dots + X_n$

— $P(X_1 - \bar{X} \leq c - \bar{x} \mid \sum_{i=1}^{n} X_i)$, pois

$X_1 - \bar{X}$ é uma estatística ancilar dado que a família de distribuições $N(\mu, 1)$ é família locação e, $\sum_{i=1}^{n} X_i$ é uma estatística suficiente e completa para μ. Então, pelo Teorema de Basu, temos que $\sum_{i=1}^{n} X_i$ é independente de $X_1 - \bar{X}$.

Assim, $P(X_1 - \bar{X} \leq c - \bar{x} \mid \sum_{i=1}^{n} X_i) =$

$P(X_1 - \bar{X} \leq c - \bar{x})$ e basta encontrar a distribuição de $X_1 - \bar{X}$.

Observe que $X_1 - \bar{X} = X_1 - \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n) =$

$$X_1 - \frac{1}{n} X_1 - \frac{1}{n}(X_2 + \cdots + X_n) =$$

$$X_1\left(1 - \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}(X_2 + \cdots + X_n)$$, onde

$E(X_1 - \bar{X}) = 0$ e

$$Var(X_1 - \bar{X}) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 Var(X_1) +$$

$\left(\frac{1}{n}\right)^2 Var(X_2 + \cdots + X_n)$, pois $X_1, \ldots, X_n$ a.a.

$X \sim N(\mu, 1)$. Então, $Var(X_1 - \bar{X}) =$

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2 (n-1) = 1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{(n-1)}{n^2} =$$

$$\frac{n^2 - 2n + \cancel{1} + n - \cancel{1}}{n^2} = \frac{n^2 - n}{n^2} = \left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

$$X_1 - \bar{X} \sim N\left(0, 1 - \frac{1}{n}\right).$$

Portanto, $P(X_1 - \bar{X} \leq c - \bar{x}) =$

$$P\left(\frac{X_1 - \bar{X} - 0}{\sqrt{1 - \frac{1}{n}}} \leq \frac{c - \bar{x} - 0}{\sqrt{1 - \frac{1}{n}}}\right) = \Phi\left(\frac{c - \bar{x}}{\sqrt{1 - \frac{1}{n}}}\right)$$, ou seja

$\Phi\left(c - \bar{X} / \sqrt{1 - \frac{1}{n}}\right)$ é um ENVVUMV p/ $\tau(\mu)$.

Comentários;

* Nem sempre existe ENVVMU, pois nem sempre existe estimador não viciado, mas caso exista devemos condicionar em uma estatística suficiente e completa (Teorema Lehmann- Scheffé)