Teorema Invariância do estimador de máxima verossimilhança (18)

Seja $\hat{\theta} = \hat{\theta}(x_1, \ldots, x_n)$ o estimador de máxima verossimilhança de θ. Se $\tau(\theta) = (\tau_1(\theta), \ldots, \tau_r(\theta))$, $1 \leq r \leq k$, é uma transformação no espaço paramétrico Θ, então o estimador de máxima verossimilhança de $\tau(\theta)$ é $\tau(\hat{\theta}) = (\tau_1(\hat{\theta}), \ldots, \tau_r(\hat{\theta}))$

Exemplo Suponha que retiramos uma amostra aleatória de tamanho n de uma distribuição normal com média 10 e variância σ^2. Se $x_1, \ldots, x_n$ é a amostra aleatória, a função de verossimilhança da amostra é

$$L(\sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i; \sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x_i - 10)^2\right\}$$

$$= (2\pi)^{-n/2} (\sigma^2)^{-n/2} \exp\left\{\frac{-1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - 10)^2\right\} \quad e$$

$$\ell(\sigma^2) = -\frac{n}{2}\log 2\pi - \frac{n}{2}\log\sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - 10)^2, \text{ onde}$$

$\sigma^2 > 0$.

$$\frac{d\, l(\sigma^2)}{d\sigma^2} = -\frac{n}{2}\frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(x_i-10)^2 .$$

$$\frac{d\, l(\sigma^2)}{d\sigma^2} = -\frac{n}{2}\frac{1}{\hat{\sigma}^2} + \frac{1}{2(\hat{\sigma}^2)^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-10)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad -n\hat{\sigma}^2 + \sum_{i=1}^{n}(x_i-10)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-10)^2}{n}}$$

Dessa forma, o estimador de máxima verossimilhança de σ^2 é $\hat{\sigma}^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-10)^2}{n}$.

Por invariância do EMV, temos que o EMV de σ é $\hat{\sigma} = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-10)^2}{n}}$

Similarmente, o EMV de $\log \sigma^2$ é

$$\log \hat{\sigma}^2 = \log \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - 10)^2 \right].$$

Exemplo: Suponha que retiramos uma amostra aleatória de tamanho n de uma distribuição $N(\mu, \sigma^2)$.

Já obtemos o EMV de $\theta = (\mu, \sigma^2)$ dado por

$$\hat{\theta} = (\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2), \text{ onde } \hat{\mu} = \bar{X} \text{ e } \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{X})^2.$$

Se desejamos obter o EMV de $\tau(\theta) = \mu + 10\sigma$,

temos que $\tau(\hat{\theta}) = \hat{\mu} + 10\hat{\sigma}$, ou seja,

$$\tau(\hat{\theta}) = \bar{X} + 10 \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{X})^2}.$$

Outros métodos de Estimação pontual

- → métodos Bayesianos
- → Método dos Mínimos Quadrados
- → Método do Qui-quadrado Mínimo
- → Método da Distância Mínima