(*)

Definição (Família exponencial curva)

Uma família exponencial curva é um grupo de densidades da forma

$$f(x|\underset{\sim}{\theta}) = f(x|\theta_1, \dots, \theta_d) = h(x)\, c(\underset{\sim}{\theta}) \exp\left\{ \sum_{i=1}^{K} w_i(\underset{\sim}{\theta})\, t_i(x) \right\}$$

para a qual a dimensão do vetor $\underset{\sim}{\theta}$ é igual a $d < K$.

Se $d = K$, é uma família exponencial completa.

Exemplo 1: A família $N(\mu, \sigma^2)$ de fdps é uma exponencial completa. No entanto, se assumirmos que $\sigma^2 = \mu^2$, a família se torna curva (modelo útil em análise de variância; planejamento de experimentos).

Então,

$$f(x|\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu^2}} \exp\left\{ -\frac{(x-\mu)^2}{2\mu^2} \right\} I_{(-\infty,\infty)}(x) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} I_{(-\infty,\infty)}(x) \frac{1}{\sqrt{\mu^2}} \exp\left\{ -\frac{1}{2\mu^2} (x^2 - 2x\mu + \mu^2) \right\} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\right\} I_{(-\infty,\infty)}(x) \; \frac{1}{\sqrt{\eta^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\eta^2} x^2 + \frac{x}{\eta}\right\}.$$

Para a família normal, a família exponencial completa teria espaço paramétrico $\Theta = \{(\mu, \sigma^2)$, tal que $-\infty < \mu < \infty$ e $\sigma^2 > 0\}$, ou seja, $\Theta = \{(\mu, \sigma^2) = \mathbb{R} \times (0,\infty)\}$, enquanto que o espaço paramétrico da família curva $\Theta = \{(\mu, \sigma^2) = (\mu, \eta^2)$, ~~[illegible]~~$\}$ é uma parábola.
$\eta \in \mathbb{R}^*$ (não pode assumir zero)

<u>Exemplo 2</u>: Já sabemos que se $X_1, \ldots, X_n$ é uma amostra aleatória de uma população de Poisson (λ), então, para n suficientemente grande, a distribuição de $\bar{X} = \dfrac{\sum_{j=1}^{n} X_j}{n}$

é aproximadamente $N(\lambda, \lambda/n)$, uma família exponencial curva. Como sabemos esta aproximação é justificada pelo Teorema do Limite Central. Na verdade, podemos perceber que a maioria das aproximações com base no Teorema do Limite Central resultarão em uma família normal curva. 18

EXEMPLOS 1 e 2

(2) Note que os parâmetros estão relacionados!

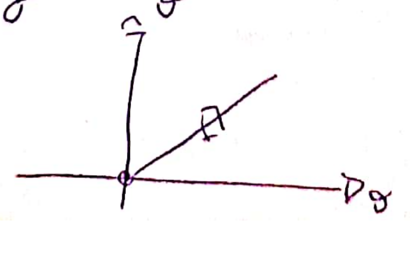
$X_1, \dots, X_n$ a.a. $N(\theta, \theta)$, $\theta > 0$.

$$f(\underset{\sim}{x}) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}}\right)^n \exp\left\{-\frac{1}{2\theta}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)^2\right\}\prod_{i=1}^{n} I_{(-\infty,\infty)}(x_i)$$

$$= \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \prod_{i=1}^{n} I_{(-\infty,\infty)}(x_i)\exp\left\{\sum_{i=1}^{n} x_i\right\}}_{h(\underset{\sim}{x})}\ \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{\theta}}\exp\left\{-\frac{\theta}{2}\right\}\right)^n}_{c(\theta)}\ \exp\left\{\underbrace{-\frac{1}{2\theta}}_{w(\theta)}\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right\}$$

$t(\underset{\sim}{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$ é família exponencial CURVA? Por quê?

A família não é exponencial completa pois há uma restrição no $\Theta = \{(\mu, \sigma^2),\ \mu \in \mathbb{R}$ e $\sigma^2 > 0\}$ resultando em um novo $\Theta_c = \{(\theta, \theta),\ \theta > 0\}$ que não contém um retângulo em $\mathbb{R}^2$.



| Comentário EXTRAS |

A curved exponential family is a k-parameter exponential family where the elements of $\underset{\sim}{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_k)$ are completely determined by $d < k$ of the elements. For example if $\underset{\sim}{\theta} = (\theta, \theta^2)$ then the elements of $\underset{\sim}{\theta}$ are completely determined by $\theta_1 = \theta$. A curved exponential family is not full since it places a restriction on the parameter space Θ resulting in a new parameter space Θ_c where Θ_c does not contain a k-dimensional rectangle.

EXEMPLOS $N(\theta, \theta)$

$N(\theta, \theta^2)$

Pelo Bickel, em geral as famílias exponenciais curvas não tem a forma canônica.

Porém, pelo Cordella, apesar de perderem algumas propriedades, o Teorema 3.4.9 é ainda válido.

versão de fronk do Teorema dos momentos que apresenta.

$\boxed{K > d}$

$$\sum_{i=1}^{K} w_i(\underset{\sim}{\theta})\, t_i(x)$$

contraste

li linearmente independentes

$v_1, v_2, \ldots, v_K$ são li se

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_v = 0 \iff \forall_i \; a_i = 0.$$

$N(0, \theta^2)$

$$w_1(\theta) = \frac{1}{2\theta^2} \quad e \quad w_2(\theta) = \frac{1}{\theta}$$

$$w_1(\theta) = \frac{1}{2}\frac{1}{[w_2(\theta)]^2}$$

são ld (linearmente dependentes)