Na próxima aula, consideraremos a relação entre estatísticas suficientes e ancilares.

Conceito de completitude será útil para encontrarmos o ENVVMU (UMVUE).
(veremos adiante)

Estatísticas suficientes, ancilares e completas.

melhor estimador

Mood, Casella e Berger

Definição: (Completitude) (θ pode ser vetor)

Seja $X_1, \ldots, X_n$ aa $X \sim f(\cdot|\theta)$, $\theta \in \Theta$ e seja $T = T(X_1, \ldots, X_n)$ uma estatística. A família de distribuições de T é dita ser completa se e somente se

$$E[g(T)] = 0 \quad \forall \theta \in \Theta$$ o que implica

que $P(g(T) = 0) = 1 \quad \forall \theta \in \Theta$, onde $g(T)$ é uma estatística. Além disso, a estatística T é dita ser completa se e somente se sua família de distribuições é completa.

Comentários: 1- Outra forma de dizer que T é completa é a seguinte:
, ou seja,
a estatística T é completa se e somente se

o único estimador não viciado de θ que é função de T é a estatística identicamente nula (com probabilidade 1).

atrás

* - Observe que o conceito de completitude é relativo à uma família de distribuições, não de uma distribuição em particular. Por exemplo, se $T \sim N(0,1)$, então definindo $g(t)=t$, temos que $E[g(T)] = E[T] = 0$, mas a função $g(t)=t$ satisfaz $P(g(T)=0) = P(T=0) = 0$, não 1. Todavia, esta é uma distribuição específica e não uma família de distribuições. Se $T \sim N(\theta,1)$, $\theta \in \mathbb{R}$, devemos observar que nenhuma função de T, exceto uma que seja 0 com probabilidade 1 para todo θ, satisfaz $E[g(T)]=0$, $\forall \theta$. Portanto, a família de distribuições $N(\theta,1)$, $\theta \in \mathbb{R}$, é completa.

Vejamos alguns exemplos!!

Devemos observar que nenhuma função de T, exceto uma que seja 0 com probabilidade 1, para todo θ, satisfaz $E[g(T)] = 0 \;\; \forall \, \theta \in \Theta$.

Esta propriedade significa que duas quaisquer funções da estatística $T(\cdot)$ que tenham a mesma média para todo parâmetro $\theta \in \Theta$ são idênticas com probabilidade 1.

(idéia de ortogonalidade → discutir na matemática!!

Ver arquivo complete_math

↳ pensamento discreto

$$\sum_{t} g(t)\, p(t)$$ pode ser visto

onde $p(t) = P(X = t)$

como um produto escalar dos vetores

$$(g(t_1), g(t_2), g(t_3), \dots) \text{ e } (p(t_1), p(t_2), p(t_3), \dots)$$

esses dois vetores são ortogonais!

Exemplo 1: Seja $X_1, \dots, X_n$ aa $X \sim \text{Bernoulli}(\theta)$.

Mostre que $T = \sum_{i=1}^{n} X_i$ é uma estatística completa.

$0 < \theta < 1$

$\hookrightarrow T \sim \text{Binomial}(n, \theta)$

Lembrete:

Pela definição, temos que a família de distribuições de T é dita ser completa se e somente se

$$E[g(T)] = 0 \quad \forall \theta \in \Theta$$ o que implica que $P(g(T) = 0) = 1 \quad \forall \theta \in \Theta$, onde $g(T)$ é uma estatística.

T é completa $\Leftrightarrow$ sua família de distribuição é completa

Portanto, temos que mostrar que

$$E[g(T)] = \sum_{t=0}^{n} g(t) \binom{n}{t} \theta^{t} (1-\theta)^{n-t} = 0, \quad \forall \theta \in \Theta,$$

o que implica que $P(g(T) = 0) = 1, \ \forall \theta \in \Theta$.

Note que $$E[g(T)] = (1-\theta)^{n} \sum_{t=0}^{n} g(t) \binom{n}{t} \left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)^{t} =$$

$(1-\theta)^n \sum_{t=0}^{n} g(t) \binom{n}{t} \alpha^t$, onde $\alpha = \frac{\theta}{1-\theta}$ e (9)

$\alpha \in (0, \infty)$, pois $(A) = \{\theta, \ \theta \in (0,1)\}$.

Assim, $E[g(T)] = 0 \iff$

$$(1-\theta)^n \sum_{t=0}^{n} g(t) \binom{n}{t} \alpha^t = 0 \iff$$

$$\sum_{t=0}^{n} g(t) \binom{n}{t} \alpha^t = 0$$. Note que

para um polinômio em α ser identicamente 0, cada coeficiente de α^t, $t=0,\dots,n$, deve ser 0, isto é,

$g(t)\binom{n}{t} = 0$ para $t = 0, \dots, n$. Porém, note que $\binom{n}{t} \neq 0$ e então, $g(t) = 0$, para $t = 0, \dots, n$, $\forall \theta \in (A)$

Portanto, T é uma estatística completa.

Dado que $T(\underline{X}) \in \{0, 1, \dots, n\}$ então segue que $g(T(\underline{X})) = 0$ com probabilidade 1.

$X_1, \ldots, X_n$ a.a. $X \sim$ Bernoulli (θ) ou $\boxed{X \sim N(\theta, 1)}$

(10)

__Pergunta:__ A estatística $T = X_1 - X_2$ é completa?

Note que $E(T) = E(X_1 - X_2) = E(X_1) - E(X_2) = 0$

e $X_1 - X_2$ não é 0 com probabilidade 1.

Portanto, $T = X_1 - X_2$ não é uma estatística completa. $\to$ $X_1 - X_2 \sim N(0, 2)$ $\quad P(X_1 - X_2 = 0) = 0.$

①②

Teorema Fundamental do Cálculo

→ estabelece a conexão entre o Cálculo Diferencial e o Cálculo integral

Parte I

Se f é contínua em $[a,b]$, então a função F definida por

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \quad (\text{com } a \le x \le b)$$

é contínua em $[a,b]$, diferenciável em (a,b) e

$$F'(x) = f(x).$$

A derivada de F corresponde a função f que aparece no integrando. Observa-se que as operações integrar e derivar são operações inversas.

Parte II

⇒ nos permite calcular áreas

Se f é contínua em $[a,b]$, então

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$ sendo F uma antiderivada de f. Isto é, $F'(x) = f(x)$.

Exemplo 2: Seja $X_1, \dots, X_n$ a.a. $X \sim U(0,\theta)$, $\theta > 0$.

Mostre que $T = X_{(n)}$ é uma estatística completa.

Precisamos mostrar que se $E[g(T)] = 0 \ \forall \theta > 0$, então $P(g(T) = 0) = 1 \ \forall \theta > 0$.

Note que temos que encontrar a distribuição de $T = X_{(n)}$.

$$P(T \leq t) = P(\max\{X_1, \dots, X_n\} \leq t) = P(X_1 \leq t, \dots, X_n \leq t) \overset{ind}{=}$$

$$P(X_1 \leq t) \cdots P(X_n \leq t) \overset{id}{=} [P(X \leq t)]^n = [F_X(t)]^n =$$

$$\left(\frac{t}{\theta}\right)^n, \quad 0 < t < \theta, \text{ ou seja,}$$

$$F_T(t) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad t \leq 0 \\ (t/\theta)^n & \text{se} \quad 0 < t < \theta \\ 1 & \text{se} \quad t \geq \theta \end{cases}$$

$$f_T(t) = \frac{n\, t^{n-1}}{\theta^n} \quad \text{se} \quad 0 \leq t \leq \theta.$$

Com efeito,

$$E[g(T)] = \int_0^\theta g(t)\, \frac{n\, t^{n-1}}{\theta^n}\, dt = 0,$$

$\forall \theta \in \Theta$.

Assim,

$$\int_0^\theta g(t)\, \frac{n\, t^{n-1}}{\theta^n}\, dt = 0 \iff$$

$$G(\theta) \quad \int_0^\theta g(t)\, t^{n-1}\, dt = 0, \quad \forall \theta \in \Theta.$$

Derivando a expressão acima com respeito a θ, temos que

$$g(\theta)\, \theta^{n-1} = 0,$$ pelo [ver I] [9a] [ver atrás]

Teorema Fundamental do Cálculo

Portanto, $E[g(T)] = 0, \forall \theta \in \Theta$, se e somente se

(12)

$g(\theta)\,\theta^{n-1} = 0 \quad , \forall \theta \in \Theta \quad \Leftrightarrow$

$g(\theta) = 0, \quad \forall \theta \in \Theta \quad \Rightarrow$

$\Theta = \{\theta, \theta > 0\}$

$g(t) = 0 \quad , \forall t$ valor de $T \Rightarrow g(t) = 0, \quad \forall \theta \in \Theta$. ,

Portanto, $T = X_{(n)}$ é estatística completa.

Exemplo → Discussão no Casella em formato de exercício! (1a) (a)

$X_1, \dots, X_n$ a.a. $X \sim U(\theta, \theta+1)$.

Já vimos que $T(\underline{X}) = (X_{(1)}, X_{(n)})$ é estatística conjuntamente suficiente minimal para θ, mas T não é completa.

Já vimos que a família $U(\theta, \theta+1)$ é família locação e $R = X_{(n)} - X_{(1)}$ é estatística ancilar, portanto sua distribuição não depende de θ.

Assim,

$$E\left(X_{(n)} - X_{(1)}\right) = c$$

↳ que não depende de θ

e $E(X_{(n)} - X_{(1)} - c) = 0 \quad \forall\, \theta \in \Theta$ e

$P(X_{(n)} - X_{(1)} - c = 0) \neq 1 \quad \forall\, \theta \in \Theta$.

Assim, considerando $g(T) = X_{(n)} - X_{(1)} - c$, vimos que T não é completa.

1) (b)

Este problema pode ser generalizado para mostrar que se a função de estatística suficiente é ancilar, então a estatística suficiente não é completa, porque a esperança da função não depende de θ. Isto fornece a oportunidade para construir um estimador não nulo não viciado de zero.

Em geral, demonstrar a completitude é um problema de análise realmente difícil. O teorema a seguir será uma ferramenta útil para argumentar a completitude.

<u>Teorema</u> : (<u>Estatísticas</u> <u>completas</u> <u>na</u> <u>família</u> <u>exponencial</u>)

Sejam $X_1, \ldots, X_n$ observações i.i.d de uma família exponencial K-paramétrica com fp ou fdp na forma

$$f(x \mid \underset{\sim}{\theta}) = h(x)\, c(\underset{\sim}{\theta}) \exp\left\{ \sum_{i=1}^{K} w_i(\underset{\sim}{\theta})\, t_i(x) \right\},$$

onde $\underset{\sim}{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_K)$. Então, a estatística, associada à amostra,

$$T(\underset{\sim}{X}) = \left(\sum_{j=1}^{n} t_1(X_j), \sum_{j=1}^{n} t_2(X_j), \ldots, \sum_{j=1}^{n} t_K(X_j) \right) \text{ é}$$

completa desde que o espaço paramétrico ⑬ ② contenha um retângulo de $\mathbb{R}^k$ / em outras palavras, um conjunto aberto em $\mathbb{R}^k$
L (vai a pág.)

$\Rightarrow$ condição necessária, mas não suficiente

$\nLeftarrow$?

Ⓗ contém um retângulo k-dimensional A tal que A ⊆ Ⓗ ⊆ $\mathbb{R}^k$

Comentário:

* A família de distribuição $N(\mu, \sigma^2)$ tem como $\Theta = \{(\mu, \sigma^2)$, tal que $\mu \in \mathbb{R}$ e $\sigma^2 > 0\}$, ou seja, $\Theta = \{(\mu, \sigma^2) = \mathbb{R} \times (0, \infty)\}$.

→ Note que a família de distribuição $N(\mu, \sigma^2)$ pertence à família exponencial K-paramétrica, onde $K = 2$. Como $\Theta = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ contém um retângulo de $\mathbb{R}^2$ então

$$T(\underset{\sim}{X}) = \left(\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{i=1}^{n} X_i^2\right)$$ é completa $\Leftrightarrow$ sua família de distribuição é completa.

Lembrete: Definição (Completitude)

A estatística T é dita ser completa se e somente se sua família de distribuição é completa

* A família de distribuições $N(\mu, \mu^2)$ (13) (b)

tem como $\Theta = \{(\mu, \sigma^2) = (\mu, \mu^2),\ \mu \in \mathbb{R}^*\}$

ou seja, o espaço paramétrico consiste nos pontos em uma parábola.

Logo não entra (não pode ser considerado $\sigma^2 > 0$)

$\Rightarrow$ Note que a família de distribuições $N(\mu, \mu^2)$ é uma família exponencial curva e o espaço paramétrico não contém um retângulo de $\mathbb{R}^2$, então não posso afirmar que

$$T(\underset{\sim}{X}) = \left(\sum_{i=1}^{n} X_i,\ \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \right)$$ é completa !!

Para provar que é ou não completa, teríamos que usar a definição.

Porém, note que $E[g(T)] = E\left[\bar{X}^2 \frac{n}{n+1} - S^2 \right]$

$$= \frac{n}{n+1} E[\bar{X}^2] - E[S^2] = \frac{n}{n+1}\left(\frac{\theta^2}{n} + \theta^2 \right) - \theta^2$$

$$= \frac{\cancel{n}\theta^2}{\cancel{n}(n+1)} + \frac{n\theta^2}{n+1} - \theta^2 = \theta^2\left(\frac{1}{n+1} + \frac{n}{n+1} - 1 \right) =$$

$\boxed{\text{atrás}}$

$$\theta^2 \left[\frac{\cancel{1} + \cancel{n} - (\cancel{n} + \cancel{1})}{n+1} \right] = 0 \quad e$$

$g(T)$ não é identicamente nula, pois

$\bar{X} \sim N\left(\theta, \frac{\theta^2}{n}\right)$ e $\frac{(n-1)\, S^2}{\theta^2} \sim \chi^2_{n-1}$.

13 d

Digitalizado com CamScanner

* $N(\mu, \tau^2)$ é uma subfamília de $N(\mu, \sigma^2)$.

13 c

* Ao restringir a família (trabalhar com subfamília) podemos perder completitude, o que não ocorre com suficiência. Ao trabalhar com subfamília ainda mantemos suficiência.

Resultado útil

13 (d)

$$\sum_{i=1}^{n} (X_i-\mu)^2 = \sum_{i=1}^{n} (X_i-\bar{X})^2 + n(\bar{X}-\mu)^2.$$ Então, considere

$X_1, \dots, X_n$ a.a. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ e assim, temos que

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (X_i-\mu)^2 = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (X_i-\bar{X})^2 + \frac{1}{\sigma^2}\, n\, (\bar{X}-\mu)^2.$$ Note que

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2_n$$ e $$\frac{(\bar{X}-\mu)^2}{(\sigma/\sqrt{n})^2} \sim \chi^2_1.$$ Portanto,

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (X_i-\bar{X})^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}.$$

Termo redundante: estatística suficiente **mínima** e **completa**. Note pelo teorema abaixo que uma propriedade fundamental de uma **estatística completa** é o fato de que **ela é mínima**.

Teorema: Se uma estatística suficiente mínima existe, então qualquer estatística suficiente completa é mínima.

PROVA: Seja $T(\underset{\sim}{X})$ uma estatística suficiente e completa para θ. Além disso, vamos supor que existe uma outra estatística suficiente , tal que $T_1 = \rho(T)$. Portanto, $T_1(\underset{\sim}{X})$ é uma estatística suficiente mínima.

Lembrete

uma estatística suficiente $T_1(\underset{\sim}{X})$ é chamada estatística suficiente mínima se, para qualquer outra estatística suficiente $T(\underset{\sim}{X})$, $T_1(\underset{\sim}{X})$ é uma função de $T(\underset{\sim}{X})$.

Seja $g(T) = T - E(T|T_1)$ uma estatística, tal que

$e(t_1)$

$$E[g(T)] = E[T - E(T|T_1)] = E(T) - E[E(T|T_1)]$$

$= E(T) - E(T) = 0$. $T(\underset{\sim}{X})$ é completa (TS)

se $E[g(T)] = 0 \quad \forall \theta \in \Theta$, o que implica

$P(g(T) = 0) = 1 \quad \forall \theta \in \Theta$. Assim,

$P(g(T) = 0) = P(T - E(T|T_1) = 0) =$

$P(T = E(T|T_1)) = 1$, ou seja,

$P(T = \psi(T_1)) = 1$. Portanto,

T é uma estatística suficiente mínima.

Provamos o seguinte !!

T é uma função de T_1 e T_1 é uma função de T $\Rightarrow$ T_1 e T são estatísticas equivalentes.

Se T é suficiente completa não pode existir outra estatística suficiente que não seja função biunívoca de T.

$E(T|T_1)$ é uma estatística, pois T é uma estatística (função da amostra) e T_1 é suficiente. Portanto, pela definição de estatística suficiente, temos que a distribuição condicional de $X_1, \ldots, X_n$ dado $T = t$ não depende de θ.