Casella e Berger pg 99 (1)
Bickel e Docksum pg 49
Mood pg 312

Famílias Exponenciais

Definição (caso uniparamétrico)

Uma família de fdps ou fps é chamada exponencial uniparamétrica (θ é unidimensional), se pode ser expressa como

$$f(x|\theta) = h(x)\, c(\theta) \exp\{ w(\theta)\, t(x) \},$$

$-\infty < x < \infty$, $\forall\, \theta \in \Theta$.

$x \in \mathcal{X}$, onde $\mathcal{X}$ não depende de θ.

Observações: * Aqui $h(x) \geq 0$ e $t(x)$ são funções com valores reais, de observação x (elas não dependem de θ).

* Aqui $c(\theta) \geq 0$ e $w(\theta)$ são funções com valores reais do parâmetro que possivelmente tem seu valor definido pelo parâmetro θ (elas não podem depender de x).

* As funções h, c, w e t não são únicas.

Exemplo 1: Distribuição Exponencial

Se $f(x|\theta) = \theta e^{-\theta x} I_{(0,\infty)}(x)$,

então $f(x|\theta)$ pertence à família exponencial uniparamétrica,

tal que

$$h(x) = I_{(0,\infty)}(x), \quad c(\theta) = \theta,$$

$$w(\theta) = -\theta \quad e \quad t(x) = x.$$

Exemplo 2: Distribuição Poisson

Se $f(x|\lambda) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} I_{(0,1,\ldots)}(x)$,

então $f(x|\lambda)$ pertence à família exponencial uniparamétrica, tal que

$$f(x|\lambda) = e^{-\lambda} \frac{I_{(0,1,\ldots)}(x)}{x!} \exp(x \log \lambda),$$

onde $h(x) = \dfrac{I_{(0,1,\ldots)}(x)}{x!}$, $c(\lambda) = e^{-\lambda}$,

$w(\lambda) = \log \lambda$ e $t(x) = x$ (3)

As famílias de distribuições obtidas por amostragem de famílias exponenciais uniparamétricas são também famílias exponenciais uniparamétricas. Especialmente, suponha $X_1, \dots, X_n$ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com distribuição comum que pertence à família exponencial uniparamétrica, ou seja,

$$f(x_i|\theta) = h(x_i)\, c(\theta) \exp\{w(\theta)\, t(x_i)\}.$$

Então,

$$f(\underset{\sim}{x}|\theta) = f(x_1, \dots, x_n|\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\theta)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} h(x_i)\, c(\theta) \exp\{w(\theta)\, t(x_i)\} =$$

$$\prod_{i=1}^{n} h(x_i)\, c^n(\theta) \exp\{w(\theta) \sum_{i=1}^{n} t(x_i)\}$$

(n) amostra

$$= \underset{m}{h}(\underset{\sim}{x})\, \overset{n}{\underset{m}{c}}(\theta) \exp\{\overset{n}{\underset{m}{w}}(\theta)\, \overset{n}{\underset{m}{t}}(\underset{\sim}{x})\}$$

$$= h^*(\underset{\sim}{x})\, c^*(\theta) \exp\{w^*(\theta)\, t^*(\underset{\sim}{x})\}$$

$\in$ à família exponencial uniparamétrica.

Dado um tamanho amostral n, temos que

$$h^n(\underset{\sim}{x}) = \prod_{i=1}^{n} h(x_i), \quad c^n(\theta) = [c(\theta)]^n,$$

$$w^n(\theta) = w(\theta) \quad e \quad t^n(\underset{\sim}{x}) = \sum_{i=1}^{n} t(x_i)$$

definem uma família exponencial uniparamétrica associada à amostra.

Exemplo 3: Determine a família exponencial uniparamétrica associada à amostra proveniente de $X \sim Poisson(\lambda)$.

$$h^n(\underset{\sim}{x}) = \prod_{i=1}^{n} \frac{I_{(0,1,\ldots)}(x_i)}{x_i!}, \quad c^n(\lambda) = e^{-n\lambda},$$

$$w^n(\lambda) = \log \lambda \quad e \quad t^n(\underset{\sim}{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Definição (caso multiparamétrico)

Cuidado quando θ é vetor!

Uma família de fdps ou fps é chamada exponencial multiparamétrica ($\underset{\sim}{\theta}$ é multidimensional), se puder ser expressa como

$$f(x|\underset{\sim}{\theta}) =$$

$$f(x|\theta_1,\dots,\theta_k) = h(x)\, c(\theta_1,\dots,\theta_k) \exp\left\{ \sum_{i=1}^{k} w_i(\theta_1,\dots,\theta_k)\, t_i(x) \right\}, \quad \underbrace{-\infty < x < \infty}_{x \in \mathcal{X}},$$

onde $\mathcal{X}$ não depende de $\underset{\sim}{\theta}$.

$\forall\ \underset{\sim}{\theta} = (\theta_1,\dots,\theta_k) \in \Theta$.

Observações: * Aqui $h(x) \geq 0$ e $t_1(x), \dots, t_k(x)$ são funções com valores reais, da observação x (elas não dependem de $\underset{\sim}{\theta}$).

* Aqui $c(\theta_1,\dots,\theta_k) \geq 0$ e $w_1(\theta_1,\dots,\theta_k), \dots, w_k(\theta_1,\dots,\theta_k)$ são funções com valores reais do parâmetro que possivelmente tem seu valor definido pelo vetor $\underset{\sim}{\theta}$ (elas não podem depender de x).

~~$c(\underset{\sim}{\theta}) \leq 0$ e $h(\underset{\sim}{x}) \leq 0$~~ ou $\boxed{c(\underset{\sim}{\theta}) \geq 0 \text{ e } h(x) \geq 0}$.

* As funções h, c, w e t não são únicas.

* Na definição, note que o n.º de termos na soma

do expoente é k, justamente a dimensão do parâmetro. 12

Exemplo 1: Seja $f(x|\mu,\sigma^2)$ a família $N(\mu,\sigma^2)$ de fdps, onde $\theta=(\mu,\sigma)$, $-\infty<\mu<\infty$, $\sigma>0$.

Então,

$$f(x|\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} I_{(-\infty,\infty)}(x)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(x^2-2x\mu+\mu^2\right)\right\} I_{(-\infty,\infty)}(x)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} I_{(-\infty,\infty)}(x) \; \frac{1}{\sigma} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\mu^2\right\}$$

$$\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}x^2 + \frac{\mu x}{\sigma^2}\right\}, \text{ tal que}$$

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} I_{(-\infty,\infty)}(x), \quad c(\mu,\sigma) = \frac{1}{\sigma}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\mu^2\right\},$$

$$w_1(\mu,\sigma) = -\frac{1}{2\sigma^2}, \quad w_2(\mu,\sigma) = \frac{\mu}{\sigma^2}, \quad t_1(x) = x^2 \text{ e}$$

$$t_2(x) = x.$$

* poderia fazer $w_1(\theta) = \frac{1}{\sigma^2}$ e $t_1(x) = -\frac{x^2}{2}$ → exemplo de q as funções não são únicas.

Assim,

$$f(x|\mu,\sigma) = h(x)\, c(\mu,\sigma) \exp\left\{ w_1(\mu,\sigma)\, t_1(x) + w_2(\mu,\sigma)\, t_2(x) \right\}$$

é família exponencial multiparamétrica com $k=2$. Observe que as funções de parâmetro são definidas somente sobre o domínio do parâmetro.

~~Observação~~ Exemplo 2: Sejam $X_1, \dots, X_n$ a.a. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $-\infty < \mu < \infty$ e $\sigma > 0$. Então,

$$h^n(\underset{\sim}{x}) = \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} I_{(-\infty,\infty)}(x_j), \quad c^n(\mu, \sigma) = \left[\frac{1}{\sigma} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\mu^2\right\}\right]^n$$

$$w_1(\mu, \sigma) = -\frac{1}{2\sigma^2}, \quad w_2(\mu, \sigma) = \frac{\mu}{\sigma^2}, \quad t_1(\underset{\sim}{x}) = \sum_{j=1}^{n} x_j^2$$

e $t_2^n(\underset{\sim}{x}) = \sum_{j=1}^{n} x_j$.

Observação: Em geral, o conjunto de valores para os quais $f(x|\theta_1, \ldots, \theta_k) > 0$ não pode depender de $\underset{\sim}{\theta}$ (vetor) em uma família exponencial (se $k=1$, temos uniparamétrica; caso contrário, multiparamétrica).

Exemplo 3: Seja $f(x|\theta)$ a família de fdps, tal que $f(x|\theta) = \theta^{-1} \exp\left\{1 - \frac{x}{\theta}\right\} I_{(\theta, \infty)}(x)$, $\theta > 0$. Assim, note que

$f(x|\theta) \notin$ família exponencial uniparamétrica, pois a função indicadora não pode ser incorporada em nenhuma das funções h, c, w e t, uma vez que não é uma função somente de x, nem uma função somente de θ.