



# Trabalho Prático I

## Investigação Operacional

---

### Trabalho realizado por:

Gabriela Santos Ferreira da Cunha - a97393

João António Redondo Martins - a96215

João Pedro Antunes Gonçalves - a95019

Nuno Guilherme Cruz Varela - a96455

Miguel de Sousa Braga - a97698

março, 2022



## 1.4 Escolha das Variáveis de Decisão

Como queremos determinar quais as arestas (ou arcos) que vão fazer parte do nosso caminho, as variáveis de decisão vão ser de tipo binário, de modo a representar a existência de ligação entre quaisquer dois vértices (mais à frente veremos que não temos de considerar todos os vértices).

## 1.5 Restrições

**Teorema de Euler.** *Um grafo é Euleriano se e só se o grafo for ligado e o grau de todos os vértices for par.*

**Teorema 2.** *O grau de um vértice corresponde ao número de arestas que começam ou terminam no vértice.*

De modo a satisfazer as condições de um caminho euleriano, presentes no Teorema de Euler, as restrições serão feitas em cada vértice, da seguinte forma:

- Os vértices de entrada e saída terão de ter grau ímpar;
- Os vértices intermédios terão de ter grau par, garantindo que sempre que o drone entra nalgum desses vértices não fica bloqueado.

Assim, fica claro que apenas teremos que adicionar novas arestas aos vértices  $I$  e  $F$  (para ficarem com grau ímpar) e aos vértices intermédios que tenham grau ímpar, para ficarem com grau par. Garantimos isto formando pares de vértices entre os vértices que atualmente tenham grau ímpar e, ainda,  $I$  e  $F$ , duplicando/adicionando, em seguida, essa aresta. A existência de combinações entre todos esses vértices é garantida pelo seguinte teorema:

**Teorema 3.** *Num grafo (multigrafo), o número de vértices de grau ímpar é sempre par.*

## 1.6 Linearidade do Modelo

O nosso modelo será um modelo de programação linear, visto que tanto as restrições como a função objetivo podem ser representadas como funções lineares.

A função objetivo será dada pela soma das distâncias das arestas adicionadas. As restrições associadas a cada vértice também serão linearidades, pois indicarão que o nº de arestas adicionadas (soma dos valores das variáveis correspondentes às arestas incidentes) em cada vértice é igual a 1.

## 2 Apresentação do Modelo

Vamos considerar  $V = \{I, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 9, 10, 11, 12, F\}$  o conjunto dos vértices do grafo/mapa e  $A = \{(i, j) \in V^2, i < j\}$  o conjunto das arestas que podem ser adicionadas ao grafo.

### 2.1 Variáveis de Decisão

$x_{ij}$  : existe ou não uma aresta a ligar os vértices  $i$  e  $j$ ,  $(i, j) \in A$

$x_{ij} \in \{0, 1\}$

### 2.2 Parâmetros

$c_{ij}$ : distância euclidiana entre os vértices  $i$  e  $j$ .

As distâncias euclidianas entre os vértices do grafo podem ser obtidas através da seguinte tabela:

		x	0	3	3	2	2	4	6	6	9	10	10	10	10	6	12
		y	8	8	5	2	0	4	8	0	4	8	6	3	0	4	0
x	y		I	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	F
	1		0,00	3,00	4,24	6,32	8,25	5,66	6,00	10,00	9,85	10,00	10,20	11,18	12,81	7,21	14,42
0	8	1		0,00	3,00	6,08	8,06	4,12	3,00	8,54	7,21	7,00	7,28	8,60	10,63	5,00	12,04
3	5	2			0,00	3,16	5,10	1,41	4,24	5,83	6,08	7,62	7,07	7,28	8,60	3,16	10,30
2	2	3				0,00	2,00	2,83	7,21	4,47	7,28	10,00	8,94	8,06	8,25	4,47	10,20
2	0	4					0,00	4,47	8,94	4,00	8,06	11,31	10,00	8,54	8,00	5,66	10,00
4	4	5						0,00	4,47	4,47	5,00	7,21	6,32	6,08	7,21	2,00	8,94
6	8	6							0,00	8,00	5,00	4,00	4,47	6,40	8,94	4,00	10,00
6	0	7								0,00	5,00	8,94	7,21	5,00	4,00	4,00	6,00
9	4	8									0,00	4,12	2,24	1,41	4,12	3,00	5,00
10	8	9										0,00	2,00	5,00	8,00	5,66	8,25
10	6	10											0,00	3,00	6,00	4,47	6,32
10	3	11												0,00	3,00	4,12	3,61
10	0	12													0,00	5,66	2,00
6	4	13														0,00	7,21
12	0	F															0,00

Figura 2: Distâncias euclidianas entre todos os vértices do grafo.

### 2.3 Função Objetivo

A função objetivo deste modelo consiste em minimizar a distância euclidiana das arestas que vamos adicionar ao grafo e pode ser definida pela seguinte expressão:

$$\min z = \sum_{(i,j) \in A} c_{i,j} \times x_{i,j}$$

## 2.4 Restrições

De modo a cumprir com o que foi apresentado em 1.5), definimos que a soma dos valores das variáveis que representam os arcos incidentes em cada vértice é igual a 1. Poderíamos ter outros valores ímpares do lado direito das igualdades que representam as restrições, no entanto é imediato que mais arestas a incidir nesse vértice seriam redundantes, contribuindo para aumentar o custo total do caminho euleriano. Assim, temos as seguintes restrições:

- $x_{I,1} + x_{I,2} + x_{I,3} + x_{I,4} + x_{I,6} + x_{I,7} + x_{I,9} + x_{I,10} + x_{I,11} + x_{I,12} + x_{I,F} = 1;$
- $x_{I,1} + x_{1,2} + x_{1,3} + x_{1,4} + x_{1,6} + x_{1,7} + x_{1,9} + x_{1,10} + x_{1,11} + x_{1,12} + x_{1,F} = 1;$
- $x_{I,2} + x_{1,2} + x_{2,3} + x_{2,4} + x_{2,6} + x_{2,7} + x_{2,9} + x_{2,10} + x_{2,11} + x_{2,12} + x_{2,F} = 1;$
- $x_{I,3} + x_{1,3} + x_{2,3} + x_{3,4} + x_{3,6} + x_{3,7} + x_{3,9} + x_{3,10} + x_{3,11} + x_{3,12} + x_{3,F} = 1$
- $x_{I,4} + x_{1,4} + x_{2,4} + x_{3,4} + x_{4,6} + x_{4,7} + x_{4,9} + x_{4,10} + x_{4,11} + x_{4,12} + x_{4,F} = 1$
- $x_{I,6} + x_{1,6} + x_{2,6} + x_{3,6} + x_{4,6} + x_{6,7} + x_{6,9} + x_{6,10} + x_{6,11} + x_{6,12} + x_{6,F} = 1$
- $x_{I,7} + x_{1,7} + x_{2,7} + x_{3,7} + x_{4,7} + x_{6,7} + x_{7,9} + x_{7,10} + x_{7,11} + x_{7,12} + x_{7,F} = 1$
- $x_{I,9} + x_{1,9} + x_{2,9} + x_{3,9} + x_{4,9} + x_{6,9} + x_{7,9} + x_{9,10} + x_{9,11} + x_{9,12} + x_{9,F} = 1$
- $x_{I,10} + x_{1,10} + x_{2,10} + x_{3,10} + x_{4,10} + x_{6,10} + x_{7,10} + x_{9,10} + x_{10,11} + x_{10,12} + x_{10,F} = 1;$
- $x_{I,11} + x_{1,11} + x_{2,11} + x_{3,11} + x_{4,11} + x_{6,11} + x_{7,11} + x_{9,11} + x_{10,11} + x_{11,12} + x_{11,F} = 1;$
- $x_{I,12} + x_{1,12} + x_{2,12} + x_{3,12} + x_{4,12} + x_{6,12} + x_{7,12} + x_{9,12} + x_{10,12} + x_{11,12} + x_{12,F} = 1$
- $x_{I,F} + x_{1,F} + x_{2,F} + x_{3,F} + x_{4,F} + x_{6,F} + x_{7,F} + x_{9,F} + x_{10,F} + x_{11,F} + x_{12,F} = 1;$
- $x_{i,j} \geq 0$

## 2.5 Coerência do Modelo

- As restrições apresentadas traduzem o facto de que, em cada vértice, o número de arestas incidentes no mesmo é par. Como tal, definem um conjunto de soluções ótimas para o problema.
- A função objetivo fornece a medida de eficiência desejada do sistema, pois esta dá-nos a distância total adicionada a partir das arestas encontradas na resolução do modelo, valor que pretendemos minimizar.

### 3 Ficheiro de Input

O modelo anteriormente definido foi introduzido no programa *LPSolve*.

```

1  /* Pumpão Objetivo */
2  min : 3.00 x1_1 + 4.24 x1_2 + 6.32 x1_3 + 8.25 x1_4 + 6.00 x1_5 + 10.00 x1_7 + 10.00 x1_9 + 10.20 x1_10 + 11.10 x1_11 + 12.01 x1_12 + 14.42 x1_F +
3      3.00 x1_2 + 6.08 x1_3 + 8.06 x1_4 + 3.00 x1_6 + 8.54 x1_7 + 7.00 x1_9 + 7.28 x1_10 + 8.60 x1_12 + 10.63 x1_12 + 12.04 x1_F +
4      3.16 x2_3 + 5.10 x2_4 + 4.24 x2_6 + 5.83 x2_7 + 7.62 x2_9 + 7.07 x2_10 + 7.28 x2_11 + 8.60 x2_12 + 10.39 x2_F +
5      2.00 x3_4 + 7.21 x3_6 + 4.47 x3_7 + 10.00 x3_9 + 8.94 x3_10 + 8.06 x3_11 + 8.25 x3_12 + 10.20 x3_F +
6      8.94 x4_6 + 4.00 x4_7 + 11.31 x4_9 + 10.00 x4_10 + 8.54 x4_11 + 8.00 x4_12 + 10.00 x4_F +
7      8.00 x6_7 + 4.00 x6_9 + 4.47 x6_10 + 6.40 x6_11 + 8.94 x6_12 + 10.00 x6_F +
8      8.94 x7_9 + 7.21 x7_10 + 5.00 x7_11 + 4.00 x7_12 + 6.00 x7_F +
9      2.00 x9_10 + 5.00 x9_11 + 8.00 x9_12 + 8.25 x9_F +
10     3.00 x10_11 + 6.00 x10_12 + 6.32 x10_F +
11     3.00 x11_12 + 3.61 x11_F +
12     2.00 x12_F;
13
14 /* Restrições */
15 V1 : x1_1 + x1_2 + x1_3 + x1_4 + x1_6 + x1_7 + x1_9 + x1_10 + x1_11 + x1_12 + x1_F = 1;
16 V1 : x1_1 + x1_2 + x1_3 + x1_4 + x1_6 + x1_7 + x1_9 + x1_10 + x1_11 + x1_12 + x1_F = 1;
17 V2 : x1_1 + x1_2 + x1_3 + x1_4 + x1_6 + x1_7 + x1_9 + x1_10 + x1_11 + x1_12 + x1_F = 1;
18 V3 : x1_1 + x1_3 + x1_4 + x1_6 + x1_7 + x1_9 + x1_10 + x1_11 + x1_12 + x1_F = 1;
19 V4 : x1_1 + x1_4 + x1_6 + x1_7 + x1_9 + x1_10 + x1_11 + x1_12 + x1_F = 1;
20 V6 : x1_1 + x1_6 + x1_7 + x1_9 + x1_10 + x1_11 + x1_12 + x1_F = 1;
21 V7 : x1_7 + x1_9 + x1_10 + x1_11 + x1_12 + x1_F = 1;
22 V9 : x1_9 + x1_10 + x1_11 + x1_12 + x1_F = 1;
23 V10 : x1_10 + x1_11 + x1_12 + x1_F = 1;
24 V11 : x1_11 + x1_12 + x1_F = 1;
25 V12 : x1_12 + x1_F = 1;
26 V13 : x1_F + x1_12 + x1_F = 1;
27
28 bin x1_1, x1_2, x1_3, x1_4, x1_6, x1_7, x1_9, x1_10, x1_11, x1_12, x1_F,
29     x1_2, x1_3, x1_4, x1_6, x1_7, x1_9, x1_10, x1_11, x1_12, x1_F,
30     x2_3, x2_4, x2_6, x2_7, x2_9, x2_10, x2_11, x2_12, x2_F,
31     x3_4, x3_6, x3_7, x3_9, x3_10, x3_11, x3_12, x3_F,
32     x4_6, x4_7, x4_9, x4_10, x4_11, x4_12, x4_F,
33     x6_7, x6_9, x6_10, x6_11, x6_12, x6_F,
34     x7_9, x7_10, x7_11, x7_12, x7_F,
35     x9_10, x9_11, x9_12, x9_F,
36     x10_11, x10_12, x10_F,
37     x11_12, x11_F,
38     x12_F;

```

Figura 3: Input do *LPSolve*.

### 4 Output Produzido

Em seguida, apresentam-se as arestas que foram adicionadas ao nosso modelo, representadas com o valor 1. As restantes apresentam todas o valor 0 - não foram incluídas no caminho.

Variables	MILP Feasible	result ▼
	18,24	18,24
x1_1	1	1
x2_6	1	1
x3_4	1	1
x7_11	1	1
x9_10	1	1
x12_F	1	1
x1_2	0	0
x1_3	0	0
x1_4	0	0
x1_6	0	0

Figura 4: Output do *LPSolve*.

## 5 Interpretação da Solução Ótima

As arestas adicionadas foram:  $(I, 1)$ ,  $(2, 6)$ ,  $(3, 4)$ ,  $(7, 11)$ ,  $(9, 10)$ ,  $(12, F)$ , resultando numa distância adicionada minimizada de 18.24. Somando à distância das linhas que o drone tinha de percorrer (68.55), obtemos uma distância total de 86.79.

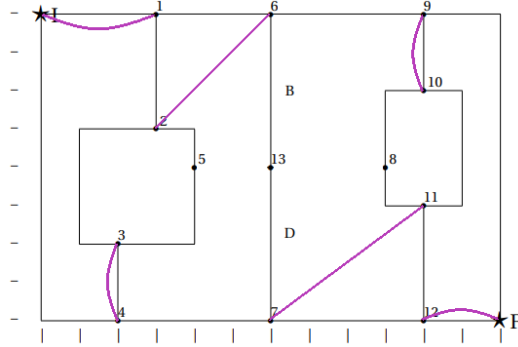


Figura 5: Grafo com as arestas adicionadas.

Tendo em conta todas as arestas que o drone teria de percorrer de acordo com a nossa solução, elaboramos o seguinte percurso como exemplo de um caminho que o drone poderia percorrer de modo a partir de  $I$  e a chegar a  $F$ , percorrendo todas as arestas indicadas. Este percurso seria dado pela sequência de cores amarelo, verde, azul escuro, vermelho e ciano.

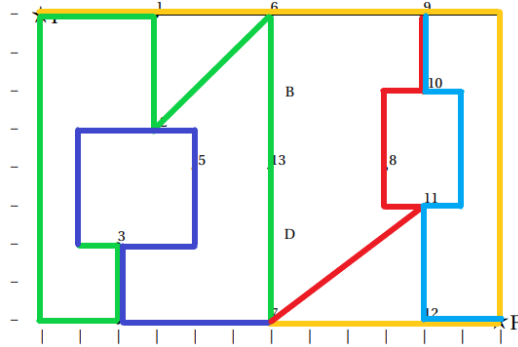


Figura 6: Exemplo de um percurso para o drone.

## 6 Validação do Modelo

### 6.1 Validação da Soma dos Comprimentos das Arestas

De acordo com a Figura 2, os valores dos comprimentos das arestas adicionadas são os seguintes:

- $c_{I,1} = 3$
- $c_{2,6} = 4.24$
- $c_{3,4} = 2$
- $c_{7,11} = 5$
- $c_{9,10} = 2$
- $c_{12,F} = 2$

Somando estes valores, obtemos o resultado 18.24, em conformidade com o valor de output obtido no *LPSolve* (Figura 4).

### 6.2 Grau dos Vértices do Grafo

Com base na Figura 5, verificamos que os vértices possuem os seguintes graus:

Vértice	Grau
$I$	3
1	4
2	4
3	4
4	4
5	2
6	4
7	4
8	2
9	4
10	4
11	4
12	4
13	2
$F$	3

Analisando estes valores, verificamos que o grau do ponto de partida é ímpar, assim como o grau do ponto de saída. O grau dos restantes vértices é par, corroborando com o Teorema de Euler para um caminho Euleriano.

Concluimos assim que esta é uma solução coerente e admissível para o nosso modelo, uma vez que obedece a cada uma das restrições aplicadas em cada vértice e minimiza a distância das arestas adicionadas.