

Zinsrechnung

Definitionen:

$$\begin{aligned}K_0 &: \text{Startkapital} \\ K_n &: \text{Kapital nach Zeiteinheiten} \\ i &: \text{Zinssatz} \\ n &: \text{Anzahl Zeiteinheiten} \\ q &= i + 1\end{aligned}$$

Zinsmethoden:

Zinsrechnung: „Aufzinsen“ (Berechnung des Endvermögens)

1. Einfache Verzinsung:

Ohne Berücksichtigung von Zinseszinsen:

$$K_n = K_0 + K_0 \cdot i \cdot n = K_0 \cdot (1 + i \cdot n)$$

2. Verzinsung mit Zinseszinsen:

$$K_n = K_0 \cdot (1 + i)^n$$

i muss über dieselbe Zeiteinheit
wie n angegeben sein.

3. Unterjährige Verzinsung:

Falls i und n unterschiedliche Zeiteinheiten haben:

Bei häufigeren Zinsgutschriften
entstehen mehr Zinseszinsen:

$$K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{n \cdot m}$$

i: Zinssatz pro Jahr
m: Anzahl der Zinsgutschriften
pro Jahr

4. Stetige Verzinsung:

Sonderfall von Nr. 3:

$$m \rightarrow \infty$$

Zinsen werden permanent gutgeschrieben:

$$K_n = K_0 \cdot e^{i \cdot n}$$

5. Barwert:

Heutiger Wert einer zukünftigen Zahlung, Ermittlung durch „Abzinsen“:

$$K_0 = \frac{K_n}{(1 + i)^n}$$

Aufgaben:

Aufgabe 1: Zinsmethoden

Ein Startkapital in Höhe von 10.000 € wird 5 Jahre zu einem Zinssatz von 3 % p. a. verzinst.

a) Wie hoch ist das Endkapital ohne Berücksichtigung von Zinsen?

$$K_n = 10.000 \text{ €}$$

b) Wie hoch ist das Endkapital ohne Berücksichtigung von Zinseszinsen?

$$K_n = 10.000 \text{ €} \cdot (1 + 0,03 \cdot 5) = 11.500 \text{ €}$$

c) Wie hoch ist das Endkapital mit Berücksichtigung von Zinseszinsen bei jährlicher Zinsgutschrift?

$$K_n = 10.000 \text{ €} \cdot (1 + 0,03)^5 \approx 11.592,74 \text{ €}$$

d) Wie hoch ist das Endkapital mit Berücksichtigung von Zinseszinsen bei monatlicher Zinsgutschrift?

$$K_n = 10.000 \text{ €} \cdot \left(1 + \frac{0,03}{12}\right)^{5 \cdot 12} \approx 11.616,17 \text{ €}$$

e) Wie hoch ist das Endkapital mit Berücksichtigung von Zinseszinsen bei stetiger Verzinsung?

$$K_n = 10.000 \text{ €} \cdot e^{0,03 \cdot 5} \approx 11.618,34 \text{ €}$$

f) Die Inflationsrate beträgt 6 % pro Jahr. Berechnen Sie die inflationsbereinigte Kaufkraft des Endkapitals aus Teilaufgabe c.

1. Inflationsbereinigte Kaufkraft:

$$K_n = 11.592,74 \cdot 0,97^5 = 8.587,34 \text{ €}$$

2. Abzinsung des Endkapitals mit der Inflationsrate:

$$K_0 = \frac{11.592,74 \text{ €}}{(1 + 0,06)^5} \approx 8.662,77 \text{ €}$$

Aufgabe 2:

Ein Startkapital in Höhe von 50.000 € wird 7 Jahre zu einem Zinssatz von 5 % p. a. (halbjährliche Zinsgutschrift) verzinst.

a) Wie hoch sind die Zinsen (einschließlich Zinseszinsen)?

$$K_7 = 50.000 \cdot \left(1 + \frac{0,05}{2}\right)^{7 \cdot 2} \approx 70.648,69 \text{ €}$$
$$Z = K_7 - K_0 = 70.648,69 \text{ €} - 50.000 \text{ €} = 20.648,69 \text{ €}$$

b) Wie hoch sind die Zinseszinsen?

$$Zinsen = 50.000 \text{ €} \cdot (1 + 0,05 \cdot 7) = 67.500 \text{ €}$$
$$Zinseszinsen = K_7 - Zinsen = 70.648,69 \text{ €} - 67.500 \text{ €} = 3.148,69 \text{ €}$$

Aufgabe 3:

Bei welchem Zinssatz (Zinssatz pro Jahr) verdreifacht sich das Startkapital KOK_OKO nach 11 Jahren bei jährlicher Zinsgutschrift?

$$\begin{aligned}
Kn &= K_0 \cdot (1 + i)^{11} \\
3K_0 &= K_0 \cdot (1 + i)^{11} \\
3 &= (1 + i)^{11} \\
i &= \sqrt[11]{3} - 1 \\
i &\approx 0,105 \\
i &\approx 10,5\%
\end{aligned}$$

Aufgabe 4:

Wie viele volle Jahre muss man mindestens warten, bis bei einer monatlichen Verzinsung von 0,75 % ein Startkapital von 5.000 € auf mindestens 15.000 € angewachsen ist?

$$\begin{aligned}
15.000\text{€} &= 5.000\text{€} \cdot (1,0075)^n \\
3 &= 1,0075^n \\
\frac{n}{12} &= \log_{1,0075}(3) \\
n &= 12,25
\end{aligned}$$

A: Man muss 13 volle Jahre warten.

Aufgabe 5:

Vergleiche Barwerte:

$$\begin{aligned}
&\text{Sofortige Zahlung:} \\
100.000\text{€} \times 0,98 &= 98.000\text{€}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\text{Zahlung in einem Jahr:} \\
K_0 = \frac{K_n}{(1 + i)^n} &= \frac{103.000\text{€}}{1,06^1} \approx 97.169,81\text{€}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\text{Zahlung in drei Jahren:} \\
K_0 = \frac{K_n}{(1 + i)^n} &= \frac{110.000\text{€}}{1,06^3} \approx 92.358,12\text{€}
\end{aligned}$$

⇒ Es sollte in 3 Jahren gezahlt werden, weil der Wert der Zahlung dann am geringsten ist.