Temă pentru acasă - partea B.

14 puncte [2p: B1] + [2p: B2] + [2p: B3] + [2p: B4] + [2p: B5] + [4p: B6]

B1. (2 puncte) Scrieţi o funcţie care să verifice LNM pentru următorul şir de variabile aleatoare independente $X_i : N(\mu, \sigma^2)$, $1 \leqslant i \leqslant n$. (Se ştie că $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ şi $Var[X_i] = \sigma^2$.) Folosiţi $n \in \{50000, 100000\}$ şi $(\mu, \sigma) \in \{(0,1); (0,5); (2,1); (2,5)\}$.

B2. (2 puncte) Scrieţi o funcţie care să verifice TLC folosind următorul şirul de variabile aleatoare independente $X_i : Poisson(\lambda)$, $1 \leqslant i \leqslant n$. (Ştim că $\mathbb{E}[X_i] = Var[X_i] = \lambda$). Folosiţi $n = 50$, $N \in \{50000, 100000\}$ şi $z \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Pentru toate aceste valori ale parametrilor determinaţi erorile relative (vezi cursul 8).

B3. (2 puncte) Volumul conului

$$C(r,h) = \left\{ (x,y,z) \ : \ x^2 + y^2 \leqslant \frac{r^2}{h^2} z^2, 0 \leqslant z \leqslant h \right\} \subseteq [-r,r] \times [-r,r] \times [0,h]$$

este $\dfrac{\pi r^2 h}{3}$. Estimaţi acest volum utilizând metoda Monte Carlo pentru $r = 4$, $h = 6$ şi comparaţi rezultatul cu valoarea exactă. Folosiţi eşantioane de dimensiune 20000 şi 50000 şi calculaţi erorile relative.

B4. (2 puncte) Fie trapezul definit astfel $T = \{(x,y) \ : \ 0 \leqslant y \leqslant 2, y \leqslant 2x, x + y \leqslant 6\}$. Determinaţi o zonă rectangulară $[a,b] \times [c,d]$ care include punctele interioare ale acestui trapez şi apoi estimaţi aria lui T folosind metoda Monte Carlo cu un eşantion de dimensiune 10000.

B5. (2 puncte) Estimaţi valoarile următoarelor integrale şi comparaţi rezultatul cu valorile exacte:

$$(a) \int_0^1 \frac{e^{\sqrt{x}} \sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = e(sin1 - \cos 1) + 1; (b) \int_0^{+\infty} (3x+2) e^{-2x} dx = \frac{7}{4}.$$

B6. (4 puncte) Modelul stochastic pentru numărul de fake-news din reţeaua socială PokPik se poate descrie astfel: zilnic autorităţile competente determină un număr de conturi care generează ştiri false şi obligă reţeaua să le închidă. Numărul de fake-news găsite în ziua i, notat cu X_i, este distribuit $Poisson(\min(X_{i-1}, X_{i-2}))$.

Care este numărul mediu de zile după care numărul de ştiri false găsite scade sub nivelul considerat sigur de 10? (Presupunem că în primele două zile sunt găsite 32 şi 25 ştiri false, respectiv.) Folosiţi $N = 100000$ de simulări (”runs”) pentru estimatorul Monte Carlo.