Exp. 5 - Circuitos RLC

Prof. Pedro Augusto Franco Pinheiro Moreira

May 24, 2013

Conceitos

Estudar o circuito RLC em série submetido a tensão alternada.

Fenômeno

Resposta em tempo

Estudaremos nesta prática o fenômeno de ressonância em um circuito RLC em série. A figura 1 mostra um circuito RLC em série conectado a um gerador que fornece uma tensão senoidal de amplitude V_0 e frequência angular Ω.

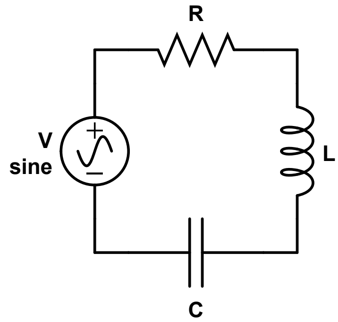

Figure 1: **Circuito RLC.**

Como a tensão no gerador, $V_g = V_0 sen(\omega t + \phi)$, é uma função senoidal , pode-se supor, para resolver o circuito acima, que a corrente no circuito tem a forma $I = I_0 sen(\omega t)$. O ângulo ϕ corresponde à defasagem temporal entre a corrente no circuito e a tensão aplicada. As tensões no resistor , capacitor e indutor são dadas por:

$$V_R = RI = RI_O sen(\omega t) \tag{1}$$

$$V_C = \frac{q}{C} = \frac{I_0}{\omega C}\cos(\omega t) \tag{2}$$

$$V_L = L\frac{di}{dt} = \omega L I_0 \cos(\omega t) \tag{3}$$

Aplicando se a primeira Lei de Kirchoff: $V_g = V_R + V_L + V_C$. Pode se determinar o valor da corrente de pico I_0 correspondente à amplitude (ou valor máximo) da corrente, em função de V_0 (amplitude de geração da tensão no gerador):

$$I_0 = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \tag{4}$$

Frequência de ressonância Analisando o comportamento de I_0 em função da frequência, concluí-se que:

- Quando $\omega \longrightarrow 0$, $I_0 = 0$ e $V_R = 0$.
- Quando $\omega \longrightarrow \infty$, $I_0 = 0$ e $V_R = 0$.

O que irá mudar é a fase de defasagem ϕ em $\frac{\pi}{2}$, porém nesse curso não estaremos tão preocupados com a fase. De qualquer forma, lembre-se que a fase da d.d.p. em cada componente irá mudar.

Existe uma frequência angula ω_0 chamada de frequência de ressonância, na qual a tensão do capacitor é igual a tensão no indutor, apesar da defasagem da fase. Esta frequência é:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{5}$$

Fator de Qualidade (Q_0) A ressonância ocorreria mesmo na ausência da resistência. A ressonância é um fenômeno que ocorre sempre que a frequência de oscilação externa ao circuito se igualar à frequência natural de oscilação do mesmo. Entretanto, no caso real, sempre há uma resistência no circuito que causa dissipação de energia. A resistência do circuito é um fator importante que determina a largura do pico de ressonância.

Esta largura é definida como sendo a diferença entre as frequências para as quais a potência dissipada é igual à metade da potência máxima. Elas são conhecidas como frequências de corte ou de meia-potência f_1 e f_2.

Na curva da tensão no resistor em função da frequência, as frequências de corte f_1 e f_2 são aquelas para as quais a tensão é igual a 0,707 da tensão máxima. Quanto menor a diferença entre f_1 e f_2, mais pronunciada é a resposta do circuito à ressonância. Chamamos de Q_0 o fator de qualidade de um oscilador como a grandeza que caracteriza a energia total E do sistema pela energia ΔE perdida em um ciclo, definindo da forma: $Q_0 = \frac{2\pi E}{\Delta E}$

Pode-se mostrar então que, no caso do circuito RLC em série:

$$Q_0 = \frac{\omega_0 L}{\Delta R} = \frac{f_0}{f_2 - f_1} \tag{6}$$

Resposta em frequência

Na prática, não se consegue um circuito LC puro, pois o fio que constitui o indutor possui uma resistência R (mesmo que pequena) e o circuito será sempre um circuito RLC. Como o resistor é um elemento dissipativo, a energia eletromagnética total deixará de ser constante, diminuindo com o tempo, à medida que é transformada em energia térmica no resistor. Isto causará um amortecimento das oscilações que observaríamos sem a presença de R.

Estudaremos neste experimento a influência de cada um dos componentes nas oscilações do circuito RLC. O circuito que permite carregar o capacitor e posteriormente acoplá-lo ao resistor e ao indutor está representado na figura 2.

Conectando a chave na posição que conecta o gerador, espera-se até que o capacitor se carregue totalmente, passando então a chave para a posição,

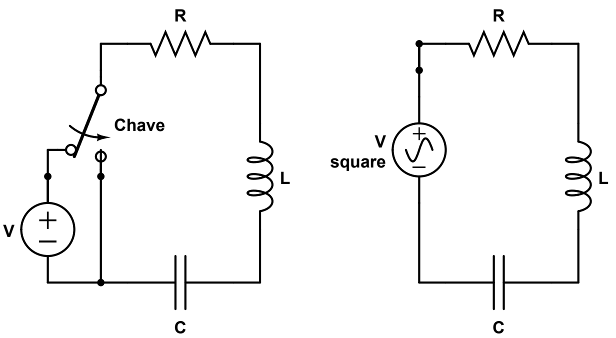

Figure 2: **Circuito RLC, com gerador de onda quadrada no lugar de chaveamento manual.**

que exclui o gerador do circuito. Nesta posição, deixamos o circuito oscilar livremente. Usando a lei de Kirchhoff para as tensões, temos que:

$$V_L + V_C + V_R = 0 \tag{7}$$

$$L\frac{di}{dt} + \frac{q}{C} + Ri = 0. \tag{8}$$

Usando $i = \dfrac{dq}{dt}$ e $\dfrac{dq}{dt} = \dfrac{d^2q}{dt^2}$ então:

$$V_L + V_C + V_R = 0 \tag{9}$$

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C} + R\frac{dq}{dt} = 0. \tag{10}$$

A solução geral da equação (9) é dada por:

$$q = Q\exp\left(-\frac{R}{2L}t\right)\cos(\omega' t + \phi) \tag{11}$$

(Ver Halliday e Resnick - Fundamentos de Física v. 3 - 3 edição pg. 263 para uma dedução completa)

onde $\omega' = \sqrt{\dfrac{1}{LC} - \left(\dfrac{R}{2L}\right)^2}$.

Repare que a equação (11) pode ser descrita como uma função co-senoidal cuja amplitude decresce exponencialmente com o tempo. Note também que a freqüência ω' é menor que a frequência natural de oscilação das oscilações não amortecidas $\omega = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$.

O termo $\tau = \dfrac{2L}{R}$ é chamado de fator de amortecimento do circuito (é a constante de tempo do circuito).

Como a tensão no capacitor é dada por $V_C = \dfrac{q}{C}$, podemos denominá-la como:

$$V_C = \frac{Q}{C}\exp\left(-\frac{R}{2L}t\right) cos(\omega' t + \phi) \tag{12}$$

Dada a definição de corrente elétrica, obtemos que:

$$I = Q \exp\left(-\frac{R}{2L}t\right)\left[-\frac{R}{2L}cos(\omega' t + \phi) - \omega sen(\omega' t + \phi)\right] \tag{13}$$

Logo, a tensão no resistor é dada por:

$$V_R = RQ \exp\left(-\frac{R}{2L}t\right)\left[-\frac{R}{2L}cos(\omega' t + \phi) - \omega sen(\omega' t + \phi)\right] \tag{14}$$

Experimento

Resposta em tempo

Monte o circuito da figura 3, adequado para a sua medida, usando R = 150 Ω e C = 22 nF e L = 100 mH. Ajuste $V_F^{PP} = 1,0V$.

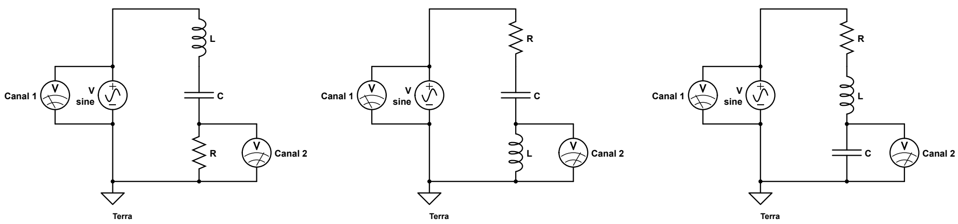

Figure 3: **Circuito RLCs: Medidas em diferentes componentes.**

1. Varie a frequência do gerador até observar que a tensão no resistor atinge um valor máximo . Esta é a frequência de ressonância f_R do circuito. Um modo rápido é: com os dois sinais senoidais na tela, ajuste a frequência, obtendo uma diferença de fase $0\,^{\circ}$ entre os sinais de V_F e V_R.

   Meça e anote os valores de f_0, V_F, V_R^{Max}, V_L e V_C nesta frequência. Note que para isto é preciso ir trocando as posições dos componentes em relação ao terra, de acordo com a figura 3.

2. Construa uma tabela com aproximadamente 15 pontos de tensão no resistor em função da frequência, começando com valores abaixo da frequência de ressonância e terminando com valores de frequência acima desta.

3. Procure e meça as duas frequências de meia-potência f_1 e f_2. Estas são as frequências nas quais a tensão no resistor corresponde ao valor $V_R(f_1, f_2) = \frac{V_R^{Max}}{\sqrt{2}}$. Meça também as diferenças de fase entre V_R e V_F.

4. Nas frequências f_1 e f_2, meça a tensão pico-a-pico em R, em L e em C.

5. Construa o gráfico da tensão no resistor em função da frequência f.

6. Obtenha do gráfico a frequência de ressonância e as frequências de meia-potência.

7. Calcule o valor teórico da frequência de ressonância do circuito e compare com o valor experimental de f_0.
8. Encontre o fator de Qualidade Q_0 experimental e teórico do circuito.
9. Identifique em qual faixa de frequências o circuito é mais capacitivo ou indutivo.

Resposta em frequência

O circuito da Figura 4 pode ser montado usando o gerador de onda quadrada para substituir o chaveamento de tensão. Regule o gerador de funções para onda quadrada com amplitude de $2\,V_{PP}$ (pico a pico). Inicialmente, ajuste a frequência da onda para 0,1 KHz. Use L = 200 mH (ou seja, os dois indutores já inseridos na caixa de montagem associados em série), C = 22 nF e R = 150 Ω e ajuste o osciloscópio para visualizar um período da tensão do gerador no canal 2 e da tensão do capacitor no canal 1. Não deixe de considerar a resistência interna do gerador de funções ($R_G = 50\,\Omega$) e a resistência de cada indutor ($R_L = 65\,\Omega$).

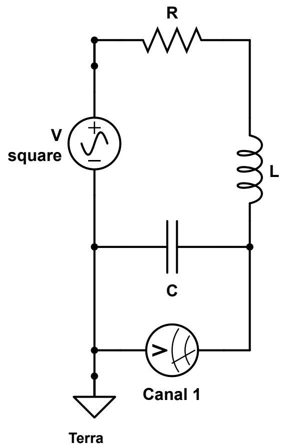

Figure 4: **Circuito RLC, canal 1 do osciloscópio medindo V_C.**

Desligue o canal 2 e observe que o sinal de V_C no canal 1 (osciloscópio em **DC**) é uma senóide que tem uma amplitude que decai com o tempo, tangenciando os picos, tanto os positivos quanto os negativos. Estas curvas exponenciais são simétricas? Pesquise e demonstre.

Use o mesmo procedimento utilizado nas experiências dos circuitos RC e RL pulsados, isto é, anote o primeiro máximo da senóide A_1 e procurar um máximo que corresponda ao valor (mais aproximado possível) da metade do valor da amplitude do primeiro máximo (veja Fig. 5). O tempo entre estes dois pontos será o tempo de meia vida $T_{1/2}$.

$$A_2 = \frac{A_1}{2} \tag{15}$$

Portanto, meça o tempo de meia-vida, $T_{1/2}$ e calcule o tempo de amortecimento τ do circuito, que é dado por:

$$\tau = \frac{T_{1/2}}{ln\, 2} \tag{16}$$

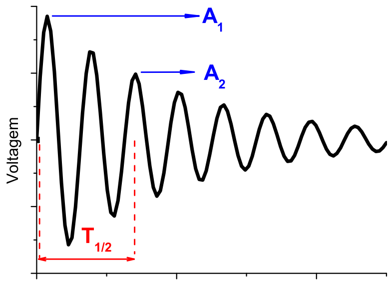

Figure 5: **Ilustração de como se visualizar A_1, A_2 e $T_{1/2}$ no monitor do osciloscópio.**

10. Meça o período, T'. Calcule as frequências f' e ω'. Meça o tempo de meia vida $T_{1/2}$ e calcule a constante de amortecimento τ.

11. Compare os valores de ω' e de τ obtidos experimentalmente com os respectivos valores teóricos. Houve discrepância entre os valores experimentais e os valores teóricos? Se houve discrepância, quais devem ser os motivos causadores destas diferenças?

12. Troque o resistor de 150 Ω por 330 Ω. É possível ainda observar a oscilação do circuito? Meça o período T' e calcule as frequências f' e ω'. Meça o tempo de meia vida $T_{1/2}$ e calcule a constante de amortecimento τ .

13. Comparar os valores de ω' e de τ obtidos experimentalmente nos itens acima, com os respectivos valores teóricos. Houve discrepância entre os valores experimentais e os valores teóricos? Se houve discrepância, quais devem ser os motivos causadores destas diferenças?

14. Troque o resistor de 330 Ω para 1 KΩ. Repita os itens anterirores nesta configuração.

15. Use o resistor R = 150 Ω e o capacitor de C = 4,7 nF e observe o que acontece com a frequência de oscilação e a constante de amortecimento do circuito. Repita os itens anteriores novamente nesta configuração.

16. Usando R = 150 Ω e C = 22 nF, mude a indutância para a metade do número de espiras inicial, usando um dos indutores de 100 mH. O que acontece com a frequência de oscilação e com a constante de amortecimento do circuito? Repita os itens anteriores nesta configuração.

17. Usar o indutor com 200 mH (retornando à configuração inicial) e, aumentando a frequência lentamente, observe as mudanças que ocorrem na forma de onda. Explique o motivo destas mudanças.

O relatório deve ser entregue no formato científico

Não há necessidade de responder nesse tipo de relatório cada pergunta individualmente. Deve-se fazer uma análise completa no relatório, evidenciando que o grupo fez toda a atividade proposta.