

# Introdução à Lógica

## Exercícios de Álgebra de Boole

Lucia Helena Machado Rino

Você tem aqui exercícios genéricos sobre Álgebra de Boole

Use o Princípio do Isomorfismo, para  
**adaptar** as propriedades do Cálculo Proposicional a esta álgebra.

1. Prove analiticamente todas as propriedades da Álgebra de Boole, usando o Princípio do Isomorfismo visto em sala de aula.
2. Simplifique as expressões abaixo utilizando as propriedades conhecidas da Álgebra Booleana. Especifique a propriedade usada em cada passo.

2.1.  $(A * B')' + (B * C)$

2.2.  $(A + B + C) * (A * B' * C')' * C'$

3. Mostre que os parênteses são necessários para escrever expressões que resolvam mais de uma das operações de soma (+) e produto (\*).  
Sugestão: Considere  $A * B + C$  e veja como ele pode ser interpretado com diversas formas de parentização. Pode usar indução finita<sup>1</sup>.

4. Prove que:

4.1.  $(A + B) * A' = B * A'$

4.2.  $(A + B) * B = B$

5. Simplificar as seguintes proposições:

5.1.  $(p \rightarrow q) * (p' \rightarrow q)$

5.2.  $p * (p \rightarrow q) * (p \rightarrow q')$

5.3.  $(p + q) * p'$

5.4.  $(p' * q)'$

6. Prove a regra da exportação-importação:

$$p \rightarrow (q \rightarrow r) \Leftrightarrow p * q \rightarrow r$$

7. Mostre a equivalência entre as expressões dadas abaixo:

7.1.  $(p \leftrightarrow (p * p')) \Leftrightarrow p'$

7.2.  $[(p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow r)] \Leftrightarrow (q \rightarrow r)$

8. Diga quais das seguintes são formas sentenciais e, para essas, diga quais são os conectivos principais.

8.1.  $((A + B') \rightarrow A) * A'$

8.2.  $((((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A) + B)$

8.3.  $((A + B) + C) \Leftrightarrow B'$

9. Elimine o máximo de parênteses possível das seguintes expressões:

9.1.  $\{[(A + B') + C] * [A + (B')']\} * A'$

9.2.  $((A \rightarrow (B + C))' \rightarrow (A' \rightarrow B'))$

10. Mostre que “A é logicamente equivalente a B se e só se A implica logicamente B e B implica logicamente A”, isto é,

$$A \leftrightarrow B \text{ se e só se } (A \rightarrow B) * (B \rightarrow A)$$

11. É verdade que

$$x + y' = (x + y + z') (x + y' + z')?$$

Justifique sua resposta.

12. Determine o complemento de cada uma das seguintes expressões e, então, simplifique-as:

12.1.  $x'(y' + z') (x + y + z')$

12.2.  $w' + (x' + y + y'z') (x + y'z)$

12.3.  $A[B + C'(D + E')]$

<sup>1</sup> Atenção: a tabela-verdade é uma das formas de provar por indução finita e consiste na prova *exaustiva*, enumerando os possíveis valores-verdade das fórmulas envolvidas na expressão booleana.

13. Demonstre, sem usar indução perfeita, se cada uma das seguintes equações é válida:

13.1.  $(x + y)(x' + y)(x + y')(x' + y') = 0$

13.2.  $xy + x'y' + xy'z = xz + x'y' + x'yz$

14. Sabendo-se que as variáveis de comutação p e q são verdadeiras e r e s são falsas, interprete logicamente cada uma das seguintes expressões de comutação:

14.1.  $((r' + p) + (s' + q))' = (r' + p)'(s' + q)' = r p' s q' = 0 * p' s q' = 0$

14.2.  $r' \rightarrow p * q = r + pq = 0 + pq = pq = 1$

14.3.  $((p + q) + r) \leftrightarrow s'$

ATENÇÃO: p e q verdadeiras  $\rightarrow p=q=1$

r e s falsas  $\rightarrow r=s=0$

15. Considere a seguinte tabela-verdade, que dá a soma (s) de dois números A e B, de um único dígito, levando em conta um transporte (carry C) de uma adição anterior:

A	B	C	s	c
0	0	1	1	0
0	1	1	0	1
1	0	1	0	1
1	1	1	1	1
0	0	0	0	0
0	1	0	1	0
1	0	0	1	0
1	1	0	0	1

Ache as funções

$$s(A, B, C) = \Sigma(1, 2, 4, 7)$$

$$c(A, B, C) = \pi(0, 1, 2, 4)$$

considerando que o código ABC representa um número binário, ou seja,  $x = (ABC)_2$  é tal que  $0 \leq x \leq 7$ .

16. Dadas as seguintes formas normais canônicas, monte as respectivas tabelas-verdade:

16.1.  $T_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_3' + x_1 x_2' x_3 + x_1' x_2' x_3$

16.2.  $T_2(x, y, z) = \pi(0, 1, 4, 5, 6)$

17. Determine a FNC para cada uma das seguintes expressões:

17.1.  $(p * p' + q * q)'$

17.2.  $p \rightarrow p'$

18. Determine a FND de cada uma das seguintes proposições:

18.1.  $(p * p)'$

18.2.  $p \leftrightarrow p'$

18.3.  $(p * p)'$

18.4.  $(p \rightarrow q) + p'$

19. Para cada uma das seguintes formas seqüenciais, ache uma equivalente FND:

19.1.  $(A + B) * (B' + C)$

19.2.  $A' + (B \rightarrow C')$

20. Para cada uma das seguintes formas seqüenciais, ache uma equivalente FNC:

20.1.  $(A * B') + (A * C)$

$$20.2. \quad A + B \leftrightarrow C'$$

21. Repita o exercício anterior achando as formas canônicas soma-de-produtos.

22. Efetue o que está sendo pedido:

- Transforme as expressões de comutação abaixo em formas normais, quando possível.
- Diga se as formas normais estão em sua forma disjuntiva (FND) ou conjuntiva (FNC).

$$22.1. \quad (x + y') * z'$$

$$22.2. \quad [x (y' + z) + z']'$$

23. Reconheça, nas operações abaixo, os símbolos conectivos da Álgebra de Boole, assim como os símbolos de variáveis de comutação. Delimite e denomine cada oração por símbolos do alfabeto romano (p. ex., p, q, etc.) sempre que necessário e construa as expressões de comutação correspondentes, utilizando seus conectivos e símbolos de variáveis. Parentize, se necessário.

23.1.  $x$  é maior que 5 e menor que 7 ou  $x$  não é igual a 6.

23.2. se  $x$  é menor que 5 e maior que 3, então  $x$  é igual a 4.

23.3.  $y$  é igual a 4 e se  $x$  é menor  $y$ , então  $x$  é menor que 5.

23.4. se  $x$  é menor que 2, então  $x = 1$  ou  $x = 0$ .

24. Mostre a validade da proposição  $r$  a partir do conjunto de axiomas  $A$ , dado a seguir<sup>2</sup>:

$$p \rightarrow q$$

$$p + r$$

$$q'$$

Observações:

- Uma expressão  $r$  é válida se o conjunto de axiomas ( $A$ ) permitir que  $A \rightarrow r$  seja uma tautologia
- Neste caso,  $A \Rightarrow r$ , ou seja,  $r$  pode ser deduzido do conjunto  $A$ .
- Uma expressão é tautológica se sua interpretação for sempre igual a 1.

25. Dada a função  $f$  abaixo, simplifique-a e diga se o circuito de comutação baseado na função resultante será mais ou menos complexo que o original.

$$f(x_1, x_2, x_3) = [(x_1 x_3) + (x_2 x_3')]'$$

26. Converta a expressão

$$T = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2' x_3$$

em sua FND completa equivalente. Verifique se ela é canônica. Busque sua FNC sem utilizar o mapa de Karnaugh.

27. PEDE-SE:

27.1. Ache as expressões mínimas soma-de-produtos e produto-de-somas para a função:

$$f(w, x, y, z) = \pi(1, 4, 5, 6, 11, 12, 13, 14, 15)$$

27.2. Sua resposta é única?

28. Ache todas as funções mínimas de 4 variáveis que têm valor 1 quando os mintermos 4, 10, 11, 13 são iguais a 1 e têm valor 0 quando os mintermos 1, 3, 6, 7, 8, 9, 12, 14 são iguais a 1.

29. Dada a seguinte tabela-verdade para as funções de comutação  $f_1$ ,  $f_2$  e  $f_3$ :

<sup>2</sup> Ver Teorema T1, do Cálculo Proposicional.

x	y	z	f <sub>1</sub>	f <sub>2</sub>	f <sub>3</sub>
0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	0	0
1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	0	1

dê as formas soma-de-produtos e produto-de-somas para essas funções de modo que elas sejam mínimas (além de calcular a forma canônica, deve-se simplificá-la aqui).

30. Derive expressões mínimas soma-de-produtos para as seguintes funções:

30.1.  $f_1(w,x,y,z) = \Sigma (0,1,2,3,4,6,8,9,10,11)$

30.2.  $f_2(w,x,y,z) = \Sigma (0,2,4,5,6,8,10,12)$

31. Determine a FND das funções:

31.1.  $f(x,y,z) = z + (x' + y) (x + y')$

31.2.  $f(x,y,z) = x + (x' + y' + x'z)'$

31.3. Diga se ambas as expressões acima estão em sua forma reduzida. Se não estiverem, apresente a redução máxima utilizando o mapa de Karnaugh.

32. PEDE-SE:

32.1. Ache as expressões mínimas soma-de-produtos e produto-de-somas para a função:

$$f(w,x,y,z) = \pi (1,4,5,6,11,12,13,14,15)$$

32.2. Sua resposta é única?

32.3. Determine a soma-de-produtos mínima para:

$$f(w,x,y,z) = \Sigma (0,2,4,9,12,15)$$

33. Dadas as formas canônicas T1 e T2 abaixo, pede-se:

33.1. Monte suas respectivas tabelas-verdade

33.2. Desenvolva a expressão de comutação canônica de T2

33.3. Produza as respectivas formas reduzidas de ambas as expressões usando o método que achar conveniente.

$$T1(x,y,z) = xyz + xyz' + xy'z + x'y'z$$

$$T2(x,y,z) = \pi (0,1,4,5,6)$$

## Funções e simplificação

34. Uma função majoritária  $M(x,y,z)$  é igual a 1 quando dois ou três de seus argumentos são 1. PEDE-SE:

34.1. Determine sua expressão lógica e simplifique-a.

34.2. Avalie a função custo antes e depois da simplificação, considerando que o custo é dado pelo número de termos somado ao número de literais da expressão de comutação em foco.

35. Um sistema de ar condicionado de um depósito de material deve ser ligado se uma ou mais das seguintes condições ocorrerem:

- O peso do material armazenado é menor que 100 ton, a umidade relativa do ar é de pelo menos 60% e a temperatura ambiente está acima de 15°C.
- O peso do material armazenado é de 100 ton ou mais, a temperatura ambiente está acima de 15°C.
- O peso do material armazenado é menor que 100 ton e a pressão atmosférica é igual ou superior a 30.

Designando as seguintes proposições:

P: peso de 100 ton ou mais ( $p \geq 100$ )

U: umidade relativa do ar de pelo menos 60% ( $U \geq 60\%$ )

T: temperatura acima de 15°C ( $T > 15$ )

Pr: pressão atmosférica de 30 ou mais ( $P \geq 30$ )

e a função  $f = f(P, U, T, Pr)$  tal que  $f(P, U, T, Pr) = 1$  quando o sistema de ar condicionado está ligado, **PEDE-SE:**

35.1. Especifique a função de comutação  $f$  com base nessas proposições.

35.2. Verifique se é possível minimizá-la usando o mapa de Karnaugh. Caso seja possível, apresente a função simplificada mínima.

36. Considere a seguinte tabela-verdade, de um Somador Serial Binário (SSB), que dá a soma ( $S$ ) de 2 bits  $A$  e  $B$ , levando em conta um transporte ( $T$ ) produzido em um instante de adição anterior. Como resultado, o SSB produz ainda o chamado carry ( $C$ ), que será o transporte para o instante posterior.

A	B	T	S	C
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

**PEDE-SE:**

36.1. Ache as funções

$$S(A, B, T) = \Sigma(1, 2, 4, 7)$$

$$C(A, B, T) = \pi(0, 1, 2, 4)$$

considerando que o código  $ABT$  representa um número binário, ou seja,  $x = (ABT)_2$  é tal que  $0 \leq x \leq 7$ .

36.2. Essas funções são mínimas? Justifique sua resposta.

36.3. Se não forem mínimas, simplifique-as usando as propriedades da lógica booleana.

36.4. Simplifique-as também usando o mapa de Karnaugh.

36.5. Compare suas funções simplificadas em (3.3) e (3.4). Se elas forem distintas, discuta a razão e, se possível, mostre como fazer para que elas sejam iguais, irreduzíveis e mínimas de fato.

37. Uma sala tem 3 portas com 3 comutadores próximos a cada uma delas. Construa um circuito de comutação que permita que a luz seja acesa ou apagada por qualquer um dos comutadores.

38. Sabendo-se que  $AB' + A'B = C$ , mostre que  $AC' + A'C = B$

39. Projete circuitos de portas lógicas com 3 entradas ( $x, y, z$ ) e uma única saída ( $S$ ) que dêem sinais na saída quando:

39.1. Pelo menos 2 entradas tenham sinal;

39.2. Exatamente 2 entradas tenham sinal.

**IMPORTANTE:** simplifique a expressão sempre que possível e considere a expressão mínima de representação de  $S$ .

40. **PEDE-SE:**

40.1. Transformar as expressões de comutação abaixo em formas normais, quando necessário.

40.2. Dizer se as formas normais obtidas estão em sua forma disjuntiva (FND) ou conjuntiva (FNC).

- $(x+y')z'$
- $(y(z+x))'$
- $yz + x'y$
- $[x(y'+z) + z']'$

41. É verdade que

$$x + z' = (x + y + z')(x + y' + z')?$$

Justifique sua resposta.

42. Dadas as expressões booleanas abaixo, pede-se:

42.1. Ache suas formas canônicas

42.2. Simplifique cada uma delas

42.3. Considerando funções booleanas em sua forma canônica (quer FNC, quer FND) ou não, sua simplificação máxima com base no método de Karnaugh (isto é, a função equivalente irreduzível) levará sempre às mesmas expressões analíticas booleanas? Justifique sua resposta. Pode usar, para isso, as expressões originais, as formas canônicas e as reduzidas, comparando as que são correspondentes.

- a)  $x' + y' + xyz'$
- b)  $(x' + xyz') + (x' + xyz')(x + x'y'z)$
- c)  $a + a'b + a'b'c + a'b'c'd + \dots$
- d)  $xy + (xy)'z$
- e)  $x(x' + y)$
- f)  $(w + x + y)(wx' + y)(y' + z)(w + z)$
- g)  $(A + B' + AB)(A + B')A'B$