Questão 1. (a) Determine a equação da reta tangente ao gráfico da função $f(x) = x^2$ no ponto $(2, f(2))$.

(b) Usando a definição, mostre que a função

$$g(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{se} \quad x > 1 \\ -x+4 & \text{se} \quad x \leq 1 \end{cases}$$

não é derivável em $p = 1$.

(a) $f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x \Rightarrow f'(2) = 4$.

Equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(2, f(2))$:
$y - f(2) = f'(2)(x-2) \Rightarrow y - 4 = 4(x-2) \Rightarrow y = 4x - 4$.

(b) Basta verificarmos se o limite $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{g(x) - g(1)}{x - 1}$ existe ou não.

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{2x + 1 - 3}{x - 1} \lim_{x \to 1^+} \frac{2x - 2}{x - 1} = 2$$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{-x + 4 - 3}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{-x + 1}{x - 1} = -1$$

O limite $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{g(x) - g(1)}{x - 1}$ não existe pois os limites laterais (apesar se existirem) são diferentes. Concluímos que g não é derivável em $p = 1$.

Questão 2. A função $f(x) = x\,|x|$ é derivável no ponto $p = 0$? Justifique sua resposta.

Questão 3. Seja $y = f(x)$ definida implicitamente por

$$(x+y)^3 = 27(x-y).$$

Sabendo que $f(2) = 1$, calcule a derivada de f no ponto 2, ou seja, $f'(2)$.

Questão 2.

Observemos que $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se} \quad x \geq 0 \\ -x^2 & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$.

Agora vamos verificar se o limite $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ existe:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x^2}{x} = 0$$

Os limites laterais existem e são iguais. Assim, concluímos que f é derivável em $p = 0$ e $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$.

Questão 3. Derivando a equação $(x+f(x))^3 = 27(x-f(x))$ (usando a regra da cadeia!) obtemos

$$3(x+f(x))^2(1+f'(x)) = 27(1-f'(x)).$$

Substituindo $x = 2$ na equação acima obtemos

$$3(2+f(2))^2(1+f'(2)) = 27(1-f'(2)).$$

Por hipótese $f(2) = 1$, logo

$$3(2+1)^2(1+f'(2)) = 27(1-f'(2)) \Rightarrow 27(1+f'(2)) = 27(1-f'(2)) \Rightarrow f'(2) = 0.$$

Questão 4. Calcule a derivada das seguintes funções:

(a) $f(x) = x\cos(\sqrt[3]{x})$ (b) $f(x) = \ln\left(\sqrt{x^2+1}\right)$

(a) Primeiro notemos que $[\cos\sqrt[3]{x}]' = -[\sqrt[3]{x}]' \sin\sqrt[3]{x} = -\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \sin\sqrt[3]{x}$. Logo,

$$f'(x) = [x]'\cos\sqrt[3]{x} + x[\cos\sqrt[3]{x}]' = \cos\sqrt[3]{x} - x\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\sin\sqrt[3]{x}$$

(b) Primeiro notemos que $f(x) = \ln(\sqrt{x^2+1}) = \dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)$. Logo,

$$f'(x) = (1/2)\frac{(x^2+1)'}{(x^2+1)} = (1/2)\frac{2x}{x^2+1} = \frac{x}{x^2+1}.$$

Questão 5 Calcule a derivada das seguintes funções:

(a) $f(x) = \dfrac{e^{x^3}}{x^2+1}$ (b) $f(x) = (2x^4+1)^{x^3+1}$

(a) Primeiro notemos que $[e^{x^3}]' = [x^3]'e^{x^3} = 3x^2e^{x^3}$. Agora

$$f'(x) = \frac{[e^{x^3}]'(x^2+1) - e^{x^3}[x^2+1]'}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{3x^2e^{x^3}(x^2+1) - e^{x^2}2x}{(x^2+1)^2} = \frac{e^{x^3}(3x^4+3x^2-2x)}{(x^2+1)^2}.$$

(b) Primeiro observemos que $[\ln(2x^4+1)]' = \dfrac{(2x^4+1)'}{2x^4+1} = \dfrac{8x^3}{2x^4+1}$. Agora,

$$f'(x) = (2x^4+1)^{x^3+1}[(x^3+1)\ln(2x^4+1)]'$$

$$= (2x^4+1)^{x^3+1}[(x^3+1)'\ln(2x^4+1) + (x^3+1)(\ln(2x^4+1))']$$

$$= (2x^4+1)^{x^3+1}\left[3x^2\ln(2x^4+1) + (x^3+1)\frac{8x^3}{2x^4+1}\right].$$