Estástica básica e linearização de gráficos.

Prof. Pedro Augusto Franco Pinheiro Moreira

April 26, 2013

Erros

Erros sistemáticos e aleatórios Em ciência e tecnologia, é fundamental a realização de medidas de grandezas físicas. Estas grandezas podem ser, por exemplo, comprimentos, intervalos de tempo, voltagem entre dois pontos, carga elétrica transportada, intensidade luminosa, e muitas outras. Para se caracterizar o sistema de freios de um automóvel, por exemplo, realiza-se uma medida da distância percorrida após o acionamento dos freios quando o carro se movia a uma certa velocidade. Ao se realizar uma medida, há sempre fontes de erro que a afetam. As fontes de erro fazem com que toda medida realizada, por mais cuidadosa que seja, esteja afetada por um erro experimental. Os erros experimentais podem ser classificados em dois grandes grupos: erros sistemáticos e erros aleatórios.

Os erros sistemáticos são causados por fontes identificáveis, e, em princípio, podem ser eliminados ou compensados. Erros sistemáticos fazem com que as medidas feitas estejam consistentemente acima ou abaixo do valor real, prejudicando a exatidão ("accuracy") da medida (ver Figura 1). Erros sistemáticos podem ser causados devido:

- ao instrumento que foi utilizado: por exemplo, erros causados em medidas de intervalos de tempo feitas com um relógio que atrasa;
- ao método de observação utilizado: por exemplo, medir o instante de ocorrência de um relâmpago pelo ruído do trovão associado;
- a efeitos ambientais: por exemplo, a medida de freqüência da luz emitida por um laser, que pode depender ligeiramente da temperatura ambiente;
- a simplificações do modelo teórico utilizado: por exemplo, não incluir o efeito da resistência do ar numa medida da aceleração da gravidade baseada na medida do tempo de queda de uma bolinha de ping-pong de uma altura fixa.

Uma das principais tarefas do idealizador ou realizador de medidas é identificar e eliminar o maior número possível de fontes de erro sistemático.

Os erros aleatórios são flutuações, para cima ou para baixo, que fazem com que aproximadamente a metade das medidas realizadas de uma mesma grandeza numa mesma situação experimental esteja desviada para mais, e a outra metade esteja desviada para menos. Os erros aleatórios afetam a precisão ("precision") da medida (ver Figura 1). Nem sempre se pode identificar as fontes de erros aleatórios. Algumas fontes típicas de erros aleatórios são:

- método de observação: erros devidos ao julgamento feito pelo observador ao fazer uma leitura abaixo da menor divisão de uma escala, como por exemplo, medir o comprimento de uma folha de papel com uma régua cuja menor divisão é 1 mm com precisão na medida de 0,5 mm;
- flutuações ambientais: mudanças não previsíveis na temperatura, voltagem da linha, correntes de ar, vibrações (por exemplo causadas por passagem de pessoas perto do aparato experimental ou veículos nas vizinhanças).

Erros aleatórios podem ser tratados quantitativamente através de métodos estatísticos,de maneira que seus efeitos na grandeza física medida podem ser, em geral, determinados.

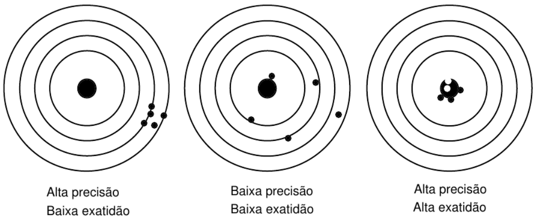

Figure 1: **Precisão e exatidão das medidas.**

Tratamento estatístico de medidas com erros

Estimativa do valor correto da grandeza medida Como os erros aleatórios tendem a desviar aleatoriamente as medidas feitas, se forem realizadas muitas medições aproximadamente a metade das medidas feitas estará acima e metade estará abaixo do valor correto. Por isso, uma boa estimativa para o valor correto da grandeza será a média aritmética dos valores medidos:

$$\overline{x} = \sum_{x_i=1}^{N} x_i \tag{1}$$

onde x_i é o resultado da i-ésima medida e N é o número total de medidas feitas.

Dispersão das medidas e precisão da estimativa Ao se realizar várias medições da mesma grandeza nas mesmas condições, a incidência de erros aleatórios faz com que os valores medidos estejam distribuídos em torno da média. Quando eles se afastam muito da média, a medida é pouco precisa e o conjunto de valores medidos tem alta dispersão. Quando o conjunto de medidas feitas está mais concentrado em torno da média diz-se que a precisão da medida é alta, e os valores medidos tem uma distribuição de baixa dispersão. Quantitativamente a dispersão do conjunto de medidas realizadas pode ser caracterizada pelo desvio padrão do conjunto de medidas, definido como:

$$\Delta x = S = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{x_i=1}^{N} x_i - \overline{x}} \tag{2}$$

Conjuntos de medidas com desvio padrão baixo são mais precisas do que quando o desvio padrão é alto. Adicionalmente, pode-se demonstrar que o desvio padrão caracteriza o intervalo dentro do qual há 68% de probabilidade de ocorrência de um valor medido. Dito de outra forma, isto significa que se for feito um conjunto muito grande de medições, 68% delas estarão dentro do intervalo $\overline{x} - S$ e $\overline{x} + S$.

Exemplos de como indicar os resultados obtidos em laboratório

Valores para uma grandeza	Indição **correta** dos resultados
$(5530 \pm 20)\, V$	$(553 \pm 2)\, 10\, V$
$(2531 \pm 28)\, \Omega$	$(253 \pm 3)\, 10^2\, \Omega$
$(23,79\, 10^9 \pm 2\, 10^7) Hz$	$(2379 \pm 2)\, 10^7 Hz$

Erro padrão da média À medida que se realiza mais medidas, a compensação dos erros aleatórios entre si vai melhorando e a média do conjunto de medidas, x , vai se tornando uma grandeza mais precisa. O erro padrão da média é definido como:

$$\Delta\overline{x} = S_m = \frac{S}{\sqrt{N}} \tag{3}$$

Observe que o erro padrão da média diminui com a raiz quadrada do número N de medições realizadas. Portanto, realizar mais medidas melhora a determinação do valor médio como estimador da grandeza que se deseja conhecer. Entretanto a vantagem não é tão grande quanto desejaríamos, já que, por exemplo, para reduzir o erro padrão da média por um fator 3 é necessário aumentar o número de medidas por um fator 9.

Erro percentual ou relativo É o erro que afeta a grandeza medida expresso como porcentagem do valor medido da grandeza. Portanto, o erro relativo percentual numa medida x com erro absoluto Δx será dado por:

$$(\Delta\overline{x})_r = \frac{\Delta\overline{x}}{\overline{x}} \times 100\,\%. \tag{4}$$

Incertezas nas medidas e sua propagação Toda a medida existe uma incerteza em relação ao seu valor verdadeiro devido ao instrumento ou método de medida, ao sujeito que a realiza ou mesmo a fatores incontroláveis. Dividimos a avaliação das incertezas em: tipo A (associada à natureza estatística de uma série de medidas) e tipo B (avaliada por métodos não estatísticos).

Nas medidas utilizando-se o multímetro a incerteza do tipo B prevalece. Para a representação correta do valor da medida x é necessário determinar antes o valor da incerteza absoluta $\Delta\overline{x}$ com um único algarismo significativo. Por exemplo: os números 1; 0,1; 0,001 e 1×10^3 possuem somente um algarismo significativo.

De posse desta incerteza, expressaremos o resultado de um medida até a casa 'imprecisa' na forma $x \pm \Delta\overline{x}$, conforme exemplo abaixo.

Por fim, muitas vezes obtemos grandezas indiretamente através dos resultados de outras medidas. Este tipo de medição indireta implica operações matemáticas ou fórmulas nas quais a incerteza padrão combinada $\Delta\overline{x}_c$ desta grandeza indireta dependerá das incertezas das outras medidas. Se a grandeza indireta Z é uma função de N grandezas x_1, x_2, x_3,...., x_N :

Então a incerteza padrão combinada é:

$$(\Delta\overline{Z}_c)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 (\Delta\overline{x_i}_c)^2 \tag{5}$$

Para algumas funções envolvendo operações mais simples, podemos deduzir algumas expressões conforme a tabela abaixo. Por simplicidade, adotemos que Z=f(x,y).

Algumas expressões para cálculos de incertezas

Função Z=f(x,y)	Incerteza combinada $\Delta\overline{Z_c}$
$a\,x \pm b\,y$	$\sqrt{a^2\,(\Delta\overline{x_c})^2 + b^2\,(\Delta\overline{y_c})^2}$
$a\,x^n y^m$	$\sqrt{\left(n\,\frac{\Delta\overline{x_c}}{x}\right)^2 + \left(m\,\frac{\Delta\overline{y_c}}{y}\right)^2}$
$a\,ln(x)$	$a\,\frac{\Delta\overline{x_c}}{x}$
$a\,exp(x)$	$a\,exp(x)\,\Delta\overline{x_c}$

Incertezas nas medidas com multímetros As incertezas instrumentais associadas aos valores medidos com um multímetro digital dependem da escala utilizada, e vêm especificados no manual de cada instrumento. Por exemplo, nos multímetros digitais da marca Minipa modelos ET-2095/ET-2510, a incerteza na escala de tensão contínua está dado por:

$$\pm(0.5\% + 2d) \tag{6}$$

e isso significa: ± (0.5 % do valor da leitura + duas vezes o dígito menos significativo da escala).

Por exemplo, se tivermos uma medida de 2.336 V (na escala até 6.000 V), a incerteza associada será:

- 0,5 % de 2,336 V = 0,01168 V,
- duas vezes o dígito menos significativo da escala = 2 x 0,001 V = 0,002 V.

Então, temos, 0,01168 V + 0,002 V = 0,01368 V.

Arredondando temos que a medida com sua incerteza é:

$$(2,34 \pm 0,01)V \tag{7}$$

O mesmo procedimento é aplicado em qualquer outra escala. As tabelas dos multímetros utilizados em nosso curso encontram-se afixadas no laboratório.

Linearização de gráficos

Ao observar determinado fenômeno o que se obtém é uma coleção de dados que, aparentemente, não diz coisa alguma. Uma saída é esboçar um gráfico, relacionando a variável dependente com a variável independente. Mas, a não ser que este gráfico seja uma simples reta (o que denota uma relação de simples proporcionalidade), na maior parte das vezes é difícil determinar com precisão que função matemática melhor descreve a relação de dependência entre a variável dependente e a variável independente. Existem métodos bastantes sofisticados para resolver este problema. No entanto, a solução é particularmente simples quando desconfiamos de uma dependência do tipo exponencial entre a variável dependente e a variável independente.

Veja, se a dependência é do tipo exponencial, então poderemos dizer que a lei que governa o fenômeno é do tipo:

$$y = A\, exp\,(B\, x)\,. \tag{8}$$

onde, y é a variável dependente e x é a variável independente, A e B são constantes a serem determinadas. Vimos no experimento 1, que a corrente do diodo seguia uma função como essa.

Para determinar as constantes A e B aplicamos o logaritmo natural ou neperiano (ln de base e = 2,718281829) de ambos lados da equação ,

$$ln\,(y) = ln\,\{A\, exp\,(B\, x)\}\,. \tag{9}$$

Usando agora a propriedade dos logaritmos ($ln(ab) = lna + lnb$), rescrevemos a equação da seguinte forma:

$$ln\, y = ln\, A \;+\; ln\;\{exp\,(B\, x)\} \tag{10}$$

Mas, as funções exponencial e logarítmica são inversas, logo a segunda parcela do lado direito da equação pode ser escrita como $ln\;\{exp\,(B\, x)\} = B\, x$. Obtemos então:

$$ln\, y = ln\, A \;+\; B\, x \tag{11}$$

Chamemos agora:

$$ln\, y = Y \tag{12}$$

e

$$ln\, A = C \tag{13}$$

Com esta mudança de variável a equação pode ser escrita da seguinte maneira:

$$Y = C + B\,x \tag{14}$$

onde, Y = ln(y) , C = ln(A) , sendo B e C constantes. Mas a eq. é justamente a equação da reta, com coeficiente angular B e coeficiente linear C. Deste modo, se a relação funcional entre duas grandezas x e y é do tipo exponencial então ao traçarmos o gráfico ln(y) versus x obteremos uma reta. A partir daí poderemos obter os coeficientes A e B da eq. por:

$$A = exp(C) \qquad e \qquad B = B \tag{15}$$

onde

$$B = \frac{\Delta Y}{\Delta X} = \frac{Y_2 - Y_1}{x_2 - x_1} = \frac{ln(y_2) - ln(y_1)}{x_2 - x_1} \tag{16}$$

Uma forma, mais precisa, de encontrar os valores das constantes A e B sem determinar o logarítmo dos valores da grandeza Y, não incorrendo assim, na propagação de erros, é fazer um ajuste linear do gráfico em *software* apropriado.