Título del Reporte

Nombre del Curso

Profesor: Nombre del Profesor

Universidad o Institución

Nombre del Estudiante

30 de octubre de 2025

Índice general

0.1. Distancia de Bhattacharyya 2
0.1.1. Implementación en código 2
0.2. Punto 3 3
0.2.1. Método de mejora de umbralización 3

Referencias **5**

0.1. Distancia de Bhattacharyya

0.1.1. Implementación en código

```python
def calcular_bhattacharyya_distance(p: torch.Tensor, q: torch.Tensor, eps: float = 1e-12) -> torch.Tensor:
    """
    Calcula la distancia de Bhattacharyya entre dos funciones de densidad de probabilidad.

    Parametros
    ----------
    p : torch.Tensor
        Tensor 1D que representa la primera funcion de densidad de probabilidad (PDF).
    q : torch.Tensor
        Tensor 1D que representa la segunda PDF.
    eps : float
        Valor diminuto para evitar log(0) o divisiones por cero.

    Retorna
    -------
    torch.Tensor
        Escalar con la distancia de Bhattacharyya.
    """
    p = p / (p.sum() + eps)
    q = q / (q.sum() + eps)

    bc = torch.sum(torch.sqrt(p * q))
    bc = torch.clamp(bc, min=eps, max=1.0)
    distance = -torch.log(bc)
    return distance.item()
```

Listing 1: Ejemplo de código Python

0.2. Punto 3

0.2.1. Método de mejora de umbralización

El método de umbralización de **Kittler e Illingworth (1986)**, conocido como *Minimum Error Thresholding*, parte de la idea de que los niveles de gris de una imagen pueden modelarse como una mezcla de dos distribuciones gaussianas: una que representa el fondo y otra que representa el objeto. El algoritmo busca el umbral T que minimiza la probabilidad de clasificar erróneamente un píxel, lo cual se logra calculando, para cada valor posible de T, los parámetros (media, varianza y probabilidad a priori) de ambas clases a partir del histograma de la imagen.

Sin embargo, este procedimiento tiene una limitación. Cuando se evalúa un umbral T, las estimaciones de los parámetros de cada clase se realizan sobre las partes del histograma separadas por dicho umbral: los valores menores o iguales a T para el fondo, y los mayores a T para el objeto. Estas porciones no representan las distribuciones gaussianas completas, sino **distribuciones truncadas**, ya que las colas de las campanas quedan fuera del rango utilizado. Al estimar directamente la media y la varianza sobre estas regiones truncadas, se introduce un **sesgo**: las medias tienden a desplazarse hacia el umbral y las varianzas resultan subestimadas. Este sesgo afecta negativamente el criterio de error de Kittler y puede llevar a seleccionar un umbral subóptimo, especialmente cuando las distribuciones de fondo y objeto se superponen significativamente.

Para corregir este problema, **Cho, et al (1989)** propusieron una mejora al método original. Su propuesta consiste en **compensar el sesgo introducido por el truncamiento**. En lugar de asumir que los datos a cada lado del umbral provienen de una distribución normal completa, los autores asumen que provienen de una normal truncada y, a partir de ella, calcula el valor esperado y la varianza teóricos, y con ello estimar los parámetros de la distribución original no truncada.

Formalmente, si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ es una variable normal truncada en su cola izquierda en T, la media y varianza del truncamiento se expresan como:

$$\mu = \mu_t + \sigma \frac{\phi(z)}{\Phi(z)}, \qquad \sigma^2 = \frac{\sigma_t^2}{1 - \frac{\phi(z)}{\Phi(z)} \left(z + \frac{\phi(z)}{\Phi(z)} \right)}$$

donde $z = \frac{T-\mu}{\sigma}$, $\phi(z)$ es la función de densidad de la normal estándar y $\Phi(z)$ su función de distribución acumulada. De manera análoga, para el caso de truncamiento inferior (cuando $X > T$), se obtienen:

$$\mu = \mu_t + \sigma \frac{\phi(z)}{1 - \Phi(z)}, \qquad \sigma^2 = \sigma_t^2 \left[1 + \frac{z\,\phi(z)}{1 - \Phi(z)} - \left(\frac{\phi(z)}{1 - \Phi(z)} \right)^2 \right]$$

En resumen, el método propuesto por Cho et al (1989) propone una reconstrucción de las colas faltantes por el truncamiento a la hora de umbralizar. Con esta reconstrucción, el criterio de error de Kittler se evalúa con parámetros más fieles a la realidad, obteniendo así un umbral más preciso.

Referencias

Bibliografía

[1] Cho, Z. H., Haralick, R. M., & Yi, S. Y. (1989). *Improvement of Kittler and Illingworth's minimum error thresholding.* Pattern Recognition Letters, 9(1), 1–6.