



SORBONNE UNIVERSITÉ  
FACULTÉ DES SCIENCES ET INGÉNIERIE  
UFR INFORMATIQUE

LICENCE INFORMATIQUE – L2

## Rapport de Projet

UE LU2IN013 – Projet DM-IM

*Exploration du comportement des systèmes de rating (Elo, Glicko, Glicko-2)*

**Réalisé par :**

Gabriel Belliti

Zanhua Cen

**Encadrant :**

Nicolas Baskiotis

**Année universitaire :**

2024–2025

*Rapport soumis dans le cadre de l'UE LU2IN013 – Projet DM-IM*

## Table des matières

Introduction	2
1 Présentation des systèmes de rating	2
2 Modélisation probabiliste d'un jeu	4
3 Résultats expérimentaux	8
Conclusion	17
Annexes	19
A Détermination des constantes dans la fonction $k(m)$	19
B Distribution des forces des joueurs	20
Bibliographie	22

# Introduction

Les systèmes de rating jouent un rôle fondamental dans de nombreux contextes compétitifs, allant des échecs aux jeux en ligne. Leur objectif est de proposer une estimation numérique du niveau de chaque joueur, afin de refléter au mieux leur performance passée tout en permettant une comparaison équitable avec les autres participants. Dans ce projet, nous nous intéressons particulièrement à trois systèmes de rating : Elo, Glicko et Glicko-2. Nous cherchons à comprendre leur comportement lorsqu'ils sont appliqués à des jeux simulés dans lesquels les joueurs possèdent des compétences variables et évolutives.

Nous proposons pour cela une double approche. D'une part, nous implémentons chaque système avec précision en respectant leur formalisation théorique. D'autre part, nous développons un modèle probabiliste de confrontation entre joueurs, intégrant une part de hasard contrôlable et sensible au niveau des compétiteurs. Cette simulation nous permet d'analyser comment les différents systèmes de notation réagissent face à des profils de joueurs très divers : réguliers ou imprévisibles, actifs ou intermittents, spécialistes ou généralistes.

Notre démarche repose donc sur la mise en œuvre de tournois simulés, sur l'analyse statistique des performances des systèmes de rating, et sur une évaluation rigoureuse de leur capacité à restituer un classement fidèle en un temps le plus court. Au fil de ce rapport, nous présentons les principes théoriques de chaque méthode de rating, la modélisation probabiliste adoptée pour les rencontres, puis les résultats expérimentaux issus de nos simulations.

## 1 Présentation des systèmes de rating

Pour évaluer le niveau relatif des joueurs dans un cadre compétitif, plusieurs systèmes de notation ont été développés. Nous nous intéressons ici à trois d'entre eux : le système Elo, son extension Glicko, et la version plus avancée Glicko-2. Chacun repose sur des principes mathématiques distincts et propose une manière différente de gérer l'incertitude liée à la performance des joueurs.

Le système Elo, introduit par Arpad Elo pour le jeu d'échecs (voir [1, 4]), est fondé sur une formule simple et intuitive. À l'issue de chaque rencontre, la cote d'un joueur est mise à jour selon la relation :

$$R' = R + K(S - E)$$

où  $R$  est la cote actuelle,  $R'$  la nouvelle cote,  $S$  le score obtenu (1 pour une victoire, 0 pour une défaite, 0.5 pour un match nul), et  $E$  le score attendu (la probabilité de gain en fonction de la différence de cotes). Ce dernier est défini par :

$$E = \frac{1}{1 + 10^{(R_{\text{adv}} - R)/400}}$$

Cette formule exprime la probabilité de victoire d'un joueur selon l'écart entre les deux cotes. Le paramètre  $K$  contrôle la sensibilité du système : une valeur élevée rend le score plus réactif, mais potentiellement moins stable.

Cependant, Elo présente des limites notables. Il ne tient pas compte de l'incertitude sur la compétence estimée, et ne distingue pas les joueurs selon leur fréquence de participation. Un joueur inactif peut ainsi conserver une cote élevée qui ne reflète plus son niveau réel.

Le système Glicko, proposé par Mark Glickman (voir [5]), répond à cette limitation en introduisant une mesure d'incertitude appelée \*rating deviation\* ( $RD$ ). Chaque joueur est caractérisé non seulement par une cote  $r$ , mais aussi par une incertitude  $RD$ . Plus  $RD$  est faible, plus la cote est considérée comme fiable. La probabilité de victoire attendue entre deux joueurs tient désormais compte de cette incertitude via une fonction de pondération :

$$g(RD_{\text{adv}}) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{3Q^2 RD_{\text{adv}}^2}{\pi^2}}}, \quad E = \frac{1}{1 + 10^{-g(RD_{\text{adv}})(R-R_{\text{adv}})/400}}$$

où  $Q = \frac{\ln(10)}{400}$  est une constante. À partir de cette estimation, deux grandeurs intermédiaires sont calculées :

$$d^2 = \left( Q^2 \sum g(RD_{\text{adv}})^2 E(1 - E) \right)^{-1}, \quad \Delta = d^2 Q \sum g(RD_{\text{adv}})(S - E)$$

Ces quantités permettent ensuite d'ajuster la cote et l'incertitude :

$$R' = R + \frac{Q}{1/RD^2 + 1/d^2} \sum g(RD_{\text{adv}})(S - E), \quad RD' = \sqrt{\left( \frac{1}{RD^2} + \frac{1}{d^2} \right)^{-1}}$$

Ainsi, plus un joueur est inactif, plus son  $RD$  augmente, rendant ses prochaines mises à jour plus sensibles. Cela permet au système de s'ajuster dynamiquement au degré de confiance accordé à chaque note.

Glicko-2 (voir [2]) constitue une amélioration supplémentaire. Il repose sur une transformation d'échelle pour faciliter les calculs, et introduit un nouveau paramètre : la *volatilité*  $\sigma$ , qui mesure la variabilité du niveau d'un joueur dans le temps. Un joueur très stable verra sa volatilité diminuer, tandis qu'un joueur aux performances erratiques conservera une valeur plus élevée.

Les calculs se font désormais sur une échelle transformée, avec :

$$\mu = \frac{R - 1500}{173.7178}, \quad \phi = \frac{RD}{173.7178}$$

La fonction  $g$  et la probabilité attendue  $E$  sont alors réécrites comme suit :

$$g(\phi_{\text{adv}}) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{3\phi_{\text{adv}}^2}{\pi^2}}}, \quad E = \frac{1}{1 + e^{-g(\phi_{\text{adv}})(\mu - \mu_{\text{adv}})}}$$

On calcule ensuite la variance attendue  $v$  et la différence entre la performance réelle et attendue :

$$v = \left( \sum g(\phi_{\text{adv}})^2 E(1 - E) \right)^{-1}, \quad \Delta = v \sum g(\phi_{\text{adv}})(S - E)$$

La mise à jour de la volatilité,  $\sigma'$ , est obtenue via une méthode d'optimisation numérique, car il n'existe pas de solution fermée. Enfin, les nouvelles valeurs de l'incertitude  $\phi'$

et du rating  $\mu'$  sont données par :

$$\phi' = \left( \frac{1}{\phi^2 + \sigma'^2} + \frac{1}{v} \right)^{-1/2}, \quad \mu' = \mu + \phi'^2 \sum g(\phi_{\text{adv}})(S - E)$$

La transformation inverse permet ensuite de retrouver le rating dans l'échelle d'origine :

$$R' = 173.7178 \cdot \mu' + 1500, \quad RD' = 173.7178 \cdot \phi'$$

Ainsi, Glicko-2 combine les avantages de ses prédecesseurs avec une modélisation plus fine du comportement des joueurs. Il s'adapte non seulement à leur activité, mais aussi à leur stabilité individuelle, offrant un cadre puissant pour estimer des niveaux dynamiques dans des environnements compétitifs.

## 2 Modélisation probabiliste d'un jeu

Afin d'évaluer la pertinence des systèmes de notation comme Elo, Glicko et Glicko-2, il est essentiel de disposer d'un modèle réaliste pour simuler les confrontations entre joueurs. En effet, la qualité d'un système de rating dépend directement du lien entre les résultats observés et les compétences réelles des participants. Si l'on souhaite comparer différents mécanismes d'actualisation des scores, il faut être capable de générer des résultats de match cohérents avec les profils de compétence supposés. C'est tout l'objet de cette section.

Notre objectif est donc de construire un modèle probabiliste permettant de simuler des rencontres entre joueurs dont les niveaux sont fixés à l'avance. Ce modèle doit traduire de façon intuitive une idée simple : un joueur plus compétent a plus de chances de l'emporter, mais l'issue d'un match n'est jamais totalement prévisible. Des facteurs aléatoires — inspiration du moment, erreurs ponctuelles, décisions stratégiques risquées — peuvent toujours inverser le résultat attendu. Cette part de hasard, que nous cherchons à intégrer, doit pouvoir être modulée de manière fine : elle ne s'exprime pas de la même façon dans un jeu d'adresse (les échecs) que dans un jeu de bluff (le poker) ou de chaos (la bataille).

Pour rendre compte de cette complexité, nous développons un cadre mathématique flexible, basé sur des fonctions sigmoïdes, capable de capter à la fois la différence de niveau entre les joueurs et l'influence de l'aléa. Nous introduisons d'abord un modèle de base, dans lequel seule la différence de compétence conditionne la probabilité de victoire. Nous montrons ensuite ses limites, notamment l'absence de prise en compte du niveau absolu des joueurs. Cela nous conduit à proposer un modèle plus élaboré, dans lequel le hasard n'a pas le même impact selon que les joueurs sont novices ou experts. Cette modélisation adaptative, que nous décrivons dans le détail, constitue la pierre angulaire de notre protocole expérimental : elle est utilisée pour générer des résultats de match plausibles et tester la capacité des systèmes de rating à retrouver les hiérarchies implicites.

Autrement dit, cette section pose les fondations statistiques sur lesquelles repose l'ensemble de notre étude comparative. En maîtrisant précisément le comportement des affrontements simulés, nous sommes en mesure d'isoler les effets des algorithmes de notation eux-mêmes, indépendamment des biais liés à la génération aléatoire ou à des hypothèses implicites mal contrôlées.

## Un premier modèle basé sur la sigmoïde

Notre point de départ est une hypothèse intuitive : plus un joueur est fort par rapport à son adversaire, plus il a de chances de gagner. Pour formaliser cela, nous utilisons une fonction sigmoïde, bien connue pour sa capacité à modéliser des transitions progressives. Si l'on note  $f_1$  et  $f_2$  les compétences normalisées des deux joueurs (dans l'intervalle  $[0, 1]$ ), alors la probabilité pour que le joueur le plus fort gagne est donnée par :

$$p_0(f_1, f_2) = \frac{1}{1 + \exp(-\tau_1 \cdot \delta f)}$$

où  $\delta f = |f_1 - f_2|$  mesure l'écart de compétence, et  $\tau_1$  représente un taux de hasard global. Une valeur faible de  $\tau_1$  rend la courbe plus plate, reflétant un jeu plus imprévisible comme le jeu de la bataille, tandis qu'une valeur élevée conduit à des résultats plus déterministes, c'est le cas des échecs. Ces effets de  $\tau_1$  sont représentés sur la figure suivante :

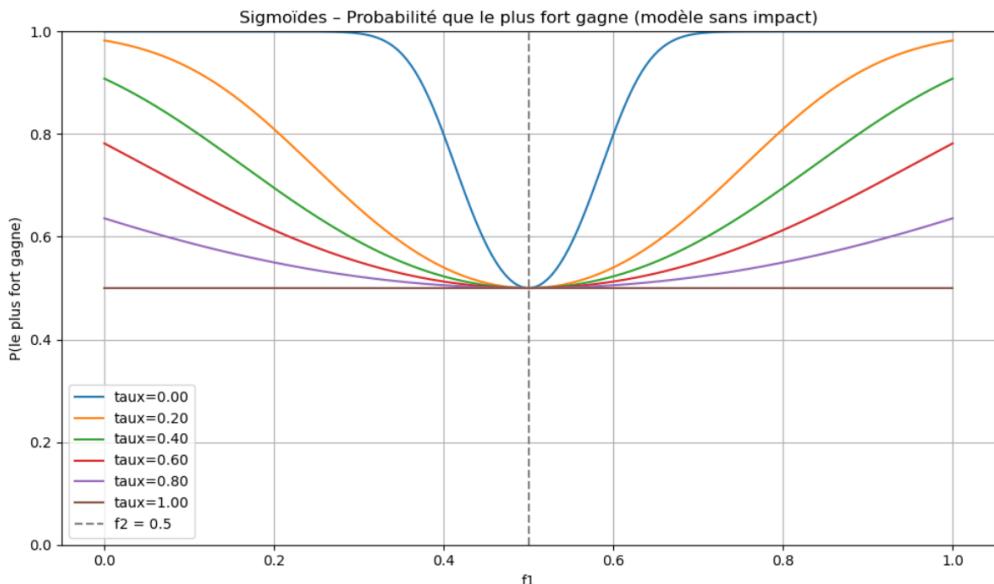


FIGURE 1 – Formes de la fonction sigmoïde de base pour différentes valeurs de  $\tau_1$ . Lorsque  $\tau_1$  augmente, la courbe devient plus abrupte, ce qui signifie une moindre influence du hasard.

Ce modèle présente cependant plusieurs limites. D'une part, il applique le même degré de hasard, quel que soit le niveau absolu des joueurs. Ainsi, deux débutants et deux experts de compétences comparables ont la même probabilité d'issue aléatoire, ce qui ne correspond pas aux observations empiriques. D'autre part, la pente de la sigmoïde reste fixe pour tous les niveaux (voir les isocontours Figure 2), ce qui empêche d'ajuster la sensibilité du modèle en fonction de la maîtrise technique des participants. Ces limites peuvent être intuitées par les isocontours suivants. En effet, ceci sont parallèles, traduisant une modélisation naïve de la réalité : peu importe le niveau des joueurs, ces derniers sont soumis aux même hasard dans une confrontation.

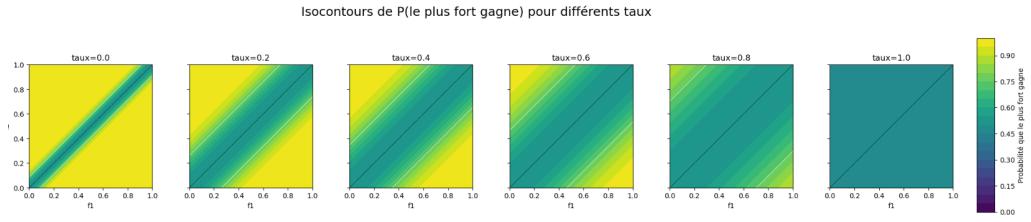


FIGURE 2 – Isocontours de probabilité dans le plan  $(f_1, f_2)$  pour le modèle initial. On observe une transition symétrique et régulière, sans distinction de niveau absolu.

## Un modèle adaptatif selon le niveau des joueurs

Pour surmonter ces limitations, nous avons conçu un modèle amélioré dans lequel la pente de la sigmoïde varie selon le niveau absolu des joueurs. Plus précisément, nous faisons dépendre la courbure de transition du niveau maximal des deux adversaires :

$$P(f_1, f_2) = \frac{1}{1 + \exp(-k(m) \cdot \delta f)}$$

où  $m = \max(f_1, f_2)$  représente le niveau du meilleur des deux joueurs, et  $k(m)$  est une fonction croissante contrôlant la pente de la courbe. Cette dépendance permet de moduler l'effet du hasard en fonction de la compétence : plus les joueurs sont forts, plus les matchs deviennent déterministes.

### Définition de la fonction $k(m)$

La fonction  $k(m)$  est obtenue à partir d'une transformation du taux de hasard initial  $\tau_1$  et d'un paramètre  $\gamma$  traduisant l'impact du niveau sur la réduction du hasard. Pour cela, nous définissons une fonction intermédiaire  $h(m)$  :

$$h(m) = \frac{a}{1 + e^{-10\gamma m}} + b$$

Les constantes  $a$  et  $b$  sont déterminées à partir de deux contraintes naturelles imposées sur la fonction  $h(m)$  : elle doit être constante lorsque  $\gamma = 0$ , et égale à  $\tau_1$  lorsque  $m = 1$ . La résolution explicite de ce système est donnée en annexe A.

À partir de ces hypothèses, on obtient les expressions explicites suivantes :

$$b = 1 - \frac{a}{2}, \quad \text{et} \quad a = \frac{\tau_1 - 1}{s - 0.5}, \quad \text{avec } s = \frac{1}{1 + e^{-10\gamma}}$$

Finalement, pour relier cette fonction au paramètre de pente de la sigmoïde, on effectue la transformation suivante :

$$k(m) = -\log h(m)$$

Cela garantit que  $k(m)$  est positif, croissant avec le niveau  $m$ , et que le hasard diminue pour des joueurs de haut niveau.

## Formule finale du modèle adaptatif

Le modèle final que nous utilisons dans nos simulations combine ces éléments dans une formule unique :

$$P(f_1, f_2) = \frac{1}{1 + \exp(-\log(h(\max(f_1, f_2))) \cdot (f_1 - f_2))}$$

Cette expression conserve l'interprétabilité du modèle de base tout en introduisant une dépendance essentielle au niveau des joueurs. Elle permet de représenter des jeux où le hasard affecte davantage les débutants que les experts (comme le poker), ce qui reflète plus fidèlement la réalité de nombreux contextes compétitifs. Les graphes présentés ci-dessous illustrent la diversité des dynamiques que notre modèle permet de représenter. En faisant varier le taux de hasard global  $\tau_1$  ainsi que le paramètre d'impact  $\gamma$ , qui contrôle la manière dont le niveau absolu des joueurs atténue l'effet de l'aléa, nous couvrons un large spectre de comportements allant des jeux fortement aléatoires, où l'issue reste incertaine quel que soit l'écart de compétence, jusqu'à des situations quasi-déterministes, où les joueurs les plus forts l'emportent presque systématiquement. Cette flexibilité constitue l'un des atouts majeurs de notre modélisation.

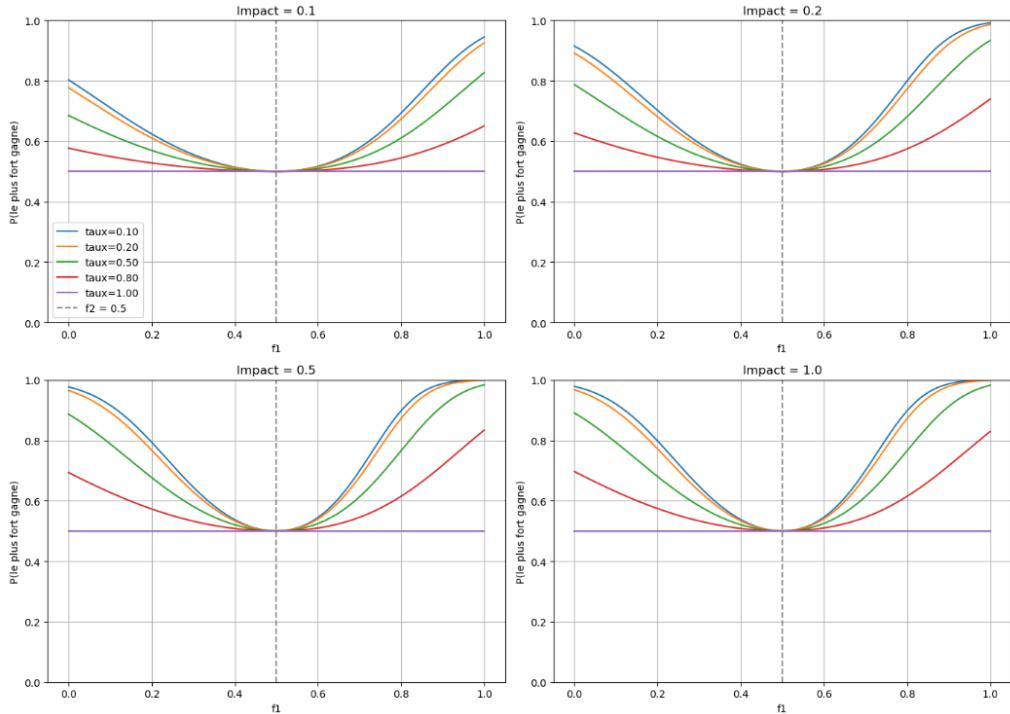


FIGURE 3 – Comportement de la fonction sigmoïde améliorée. Lorsque le niveau des joueurs augmente, la transition devient plus abrupte, indiquant une plus faible influence du hasard.

On obtient cette fois-ci des isocontours qui reflètent plus fidèlement le comportement attendu : à mesure que l'écart de compétence entre deux joueurs s'accentue, la probabilité de victoire devient de plus en plus déterminée, réduisant ainsi l'impact de l'aléa. En d'autres termes, la dimension aléatoire du jeu diminue naturellement lorsque les différences

de niveau sont marquées, ce qui correspond à une dynamique réaliste dans de nombreux contextes compétitifs.

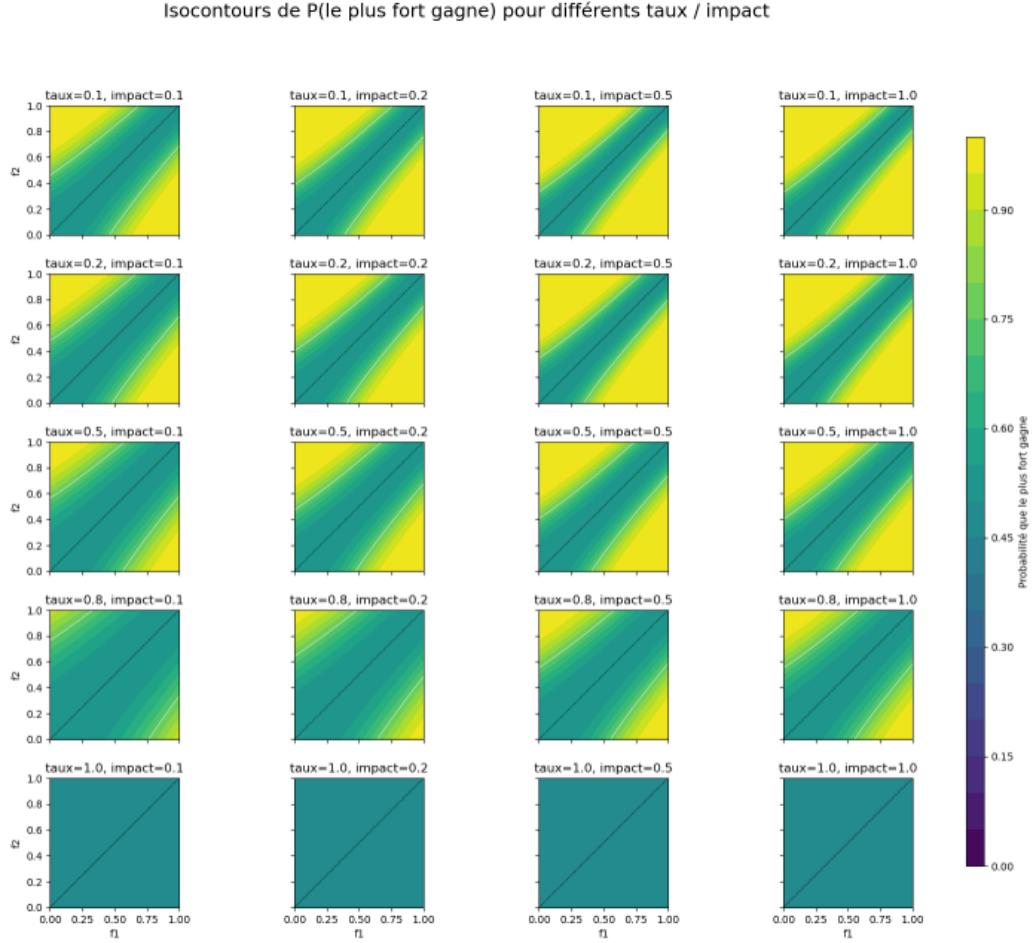


FIGURE 4 – Isocontours du modèle adaptatif. La variation des probabilités devient plus marquée à haut niveau, alors qu’elle reste douce pour les faibles compétences.

## Intérêt et portée du modèle

Ce modèle probabiliste joue un rôle central dans nos simulations. Il permet de générer des résultats de match cohérents avec les hypothèses de compétence des joueurs, tout en contrôlant finement l’aléa. En ajustant les paramètres  $\tau_1$  et  $\gamma$ , on peut explorer une large gamme de situations, depuis des jeux très aléatoires où le hasard domine, jusqu’à des jeux hautement techniques où seule la compétence décide de l’issue. Ce réalisme est crucial pour évaluer les performances des systèmes de rating dans des conditions variées et pertinentes.

## 3 Résultats expérimentaux

Après avoir établi un cadre rigoureux de simulation, nous nous attachons à présent à analyser le comportement effectif des systèmes de notation Elo, Glicko et Glicko-2. L’objectif est de déterminer dans quelle mesure et à quelle vitesse chacun de ces systèmes

est capable de restituer correctement la hiérarchie des compétences entre les joueurs, à partir de séries de matchs simulés dans des conditions variées.

Nous nous intéressons à plusieurs dimensions : la capacité à reproduire le classement réel (fidélité), la rapidité de convergence (efficacité), et la stabilité des évaluations (robustesse). Pour cela, nous faisons varier les paramètres du jeu et le format des tournois, et nous appuyons sur des indicateurs statistiques solides.

## Méthodologie expérimentale

Les simulations sont menées avec une population fixe de 100 joueurs, dont les compétences réelles sont tirées selon une loi log-normale puis normalisées sur  $[0, 1]$  (voir annexe B). Ce choix permet de reproduire une distribution réaliste, dans laquelle la majorité des joueurs possède une force intermédiaire, tandis qu'un petit nombre se distingue nettement par son niveau. Ces compétences servent de référence implicite tout au long des expériences.

Pour chaque paire de joueurs, un résultat de match est généré selon le modèle probabiliste présenté précédemment, qui combine une estimation logistique de la différence de niveau et un paramètre de hasard ajusté selon les profils. Deux paramètres pilotent ce comportement : le taux de hasard  $\tau$ , et le coefficient d'impact du niveau  $\gamma$ . Cela nous permet de tester des environnements allant de jeux très aléatoires à des contextes hautement déterministes.

Nous avons testé deux formats de tournoi : le round-robin (chaque joueur affronte tous les autres) et le tournoi suisse (appariements par score). Les simulations sont répétées sur de longues séquences, parfois jusqu'à 500 000 matchs cumulés. Tous les joueurs débutent avec des cotes identiques, garantissant ainsi des conditions initiales équitables. À l'issue de chaque séquence simulée, les cotes produites par les différents systèmes de notation sont comparées à la vérité terrain, c'est-à-dire aux compétences réelles des joueurs connues a priori dans le cadre de la simulation.

## Outils statistiques utilisés

Trois catégories de tests nous permettent d'évaluer les systèmes de notation.

D'abord, nous utilisons le **coefficient de Spearman** (voir [6]), qui mesure la corrélation entre le classement produit par le système et celui issu des forces réelles. Une valeur proche de 1 indique un classement fidèle, tandis qu'une valeur faible signale un échec du système à hiérarchiser correctement les joueurs.

Pour compléter cette mesure, nous faisons appel au **tau de Kendall** (voir [7]), qui évalue la cohérence d'ordre entre deux classements en comptant les inversions de paires. Ce test est plus robuste aux égalités et à la présence de bruit, et permet une lecture complémentaire à celle de Spearman.

Nous recourons ensuite au **test U de Mann–Whitney** (voir [8]), qui permet de vérifier si un système distingue significativement deux sous-populations de joueurs : par exemple, ceux dont la force dépasse un seuil donné. Il s'agit d'un test non paramétrique qui compare les distributions de scores.

Enfin, le **test de Wilcoxon signé-rangé** (voir [9]) est utilisé pour comparer directement deux systèmes appliqués aux mêmes joueurs. Il permet de juger si les différences observées sont systématiques et statistiquement significatives .

## Jeu modérément aléatoire

Nous débutons par un cas intermédiaire : un jeu peu affecté par le hasard ( $\tau_1 = 0,3$ ) mais pour lequel l'effet du niveau est prononcé ( $\gamma = 1$ ). Cette configuration favorise les joueurs les plus compétents, sans supprimer totalement la variabilité des résultats.

Nous faisons ici tourner 1000 tournois round-robin. Pour le système Elo, les résultats indiquent une corrélation de Spearman de 0.6245 avec les forces simulées, ce qui confirme que, même sans modélisation de l'incertitude, le système parvient à capturer une part significative de la hiérarchie réelle. La valeur du tau de Kendall, plus robuste aux perturbations locales, est estimée à 0.4578, ce qui confirme une tendance correcte mais modérément bruitée dans l'ordre du classement. Le test de Mann–Whitney renvoie une p-value extrêmement faible ( $10^{-35}$ ), validant la capacité du système à séparer correctement les joueurs plus ou moins compétents.

Afin d'affiner cette lecture, nous avons ajusté une régression linéaire entre les forces simulées et les cotes Elo obtenues. Celle-ci donne une pente de 1203.67 et une ordonnée à l'origine de 753.2, avec un coefficient de détermination  $R^2 = 0.4793$ . Cela signifie que près de 48% de la variance des cotes peut être expliquée par la force réelle des joueurs. Ce score est convenable mais montre aussi les limites du système : la relation est significative, mais relativement peu précise dans les détails.

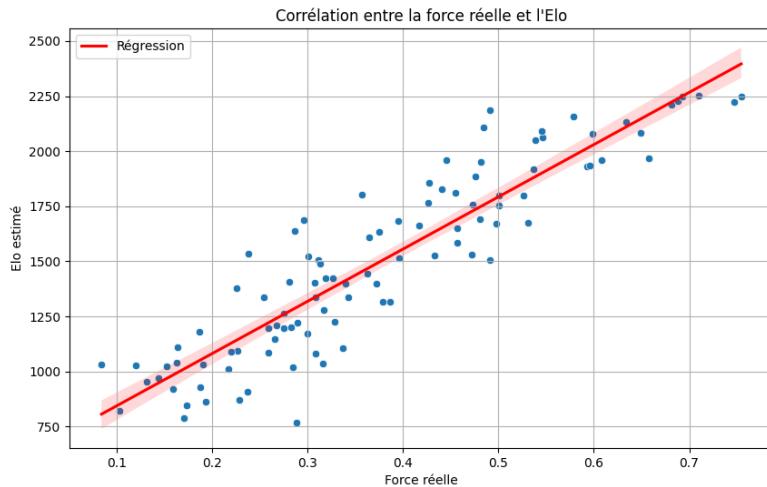


FIGURE 5 – Corrélation entre la force réelle et la cote Elo après 1000 tournois round-robin. Régression : pente = 1203.67, intercept = 753.2,  $R^2 = 0.4793$ .

Le système Glicko affiche une amélioration notable : la corrélation de Spearman atteint 0.8408, le tau de Kendall correspondant est de 0.6864, indiquant une hiérarchie plus clairement respectée, avec une meilleure séparation des niveaux. On a également une meilleure pente de régression et un  $R^2$  plus élevé (0.6999). Cette progression montre

que la prise en compte de l'incertitude (via le paramètre  $RD$ ) affine le classement, en s'adaptant à la fréquence de jeu et à la confiance dans les évaluations.

Glicko-2 surpassé les deux autres systèmes, avec une corrélation de Spearman de 0.8991. Le tau de Kendall, particulièrement élevé (0.7579), montre que le classement issu du Glicko-2 est en très bon accord avec l'ordre réel des forces. Enfin, on a une pente de régression de 2276.92, et un coefficient de détermination  $R^2 = 0.7829$ . Le modèle réussit donc à ordonner les joueurs avec précision, tout en conservant une plage de valeurs plus large, ce qui accentue la différenciation entre profils.

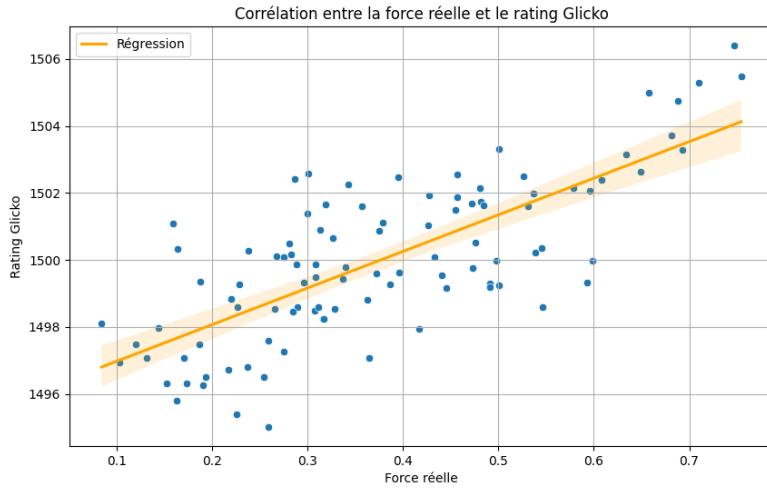


FIGURE 6 – Corrélation entre la force réelle et la cote Glicko après 1000 tournois. Régression : pente = 654.98, intercept = 1234.19,  $R^2 = 0.6999$ .

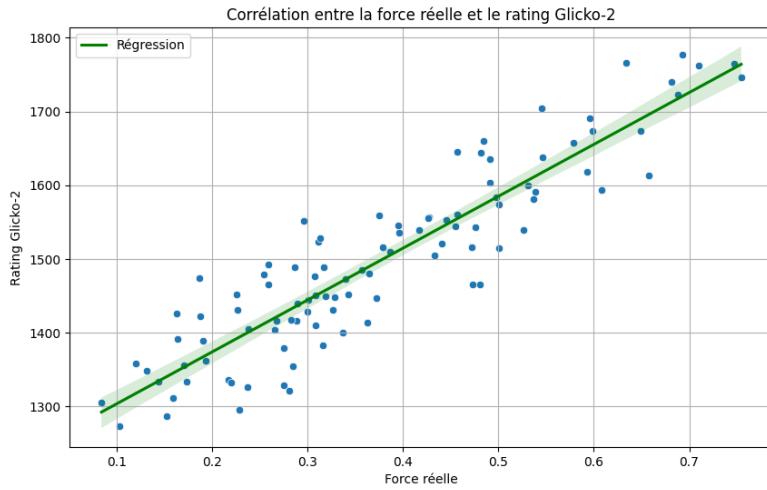


FIGURE 7 – Corrélation entre la force réelle et la cote Glicko-2 après 1000 tournois. Régression : pente = 2276.92, intercept = 563.33,  $R^2 = 0.7829$ .

Enfin, le test de Wilcoxon appliqué aux classements par paires montre qu'il n'existe pas de différence statistiquement significative entre les systèmes à long terme : les p-values

entre Elo et Glicko ( $p = 0.9671$ ), Elo et Glicko-2 ( $p = 0.9507$ ), ainsi qu'entre Glicko et Glicko-2 ( $p = 0.9124$ ), sont toutes largement supérieures au seuil de significativité. Cela indique que, bien que les dynamiques soient différentes, les classements convergent vers une structure commune.

Il est cependant essentiel de noter que cette convergence ne se manifeste qu'après un nombre important de matchs. Lors des premières phases de simulation, les systèmes Glicko et Glicko-2 s'avèrent plus réactifs que l'Elo, en particulier pour détecter les écarts de performance précoce.

Pour mieux appréhender la dynamique d'apprentissage des différents systèmes, nous avons représenté l'évolution dans le temps du coefficient de Spearman ainsi que du tau de Kendall au fil des tournois successifs. Ces courbes permettent d'observer la rapidité avec laquelle chaque système parvient à établir une hiérarchie conforme aux compétences réelles des joueurs.

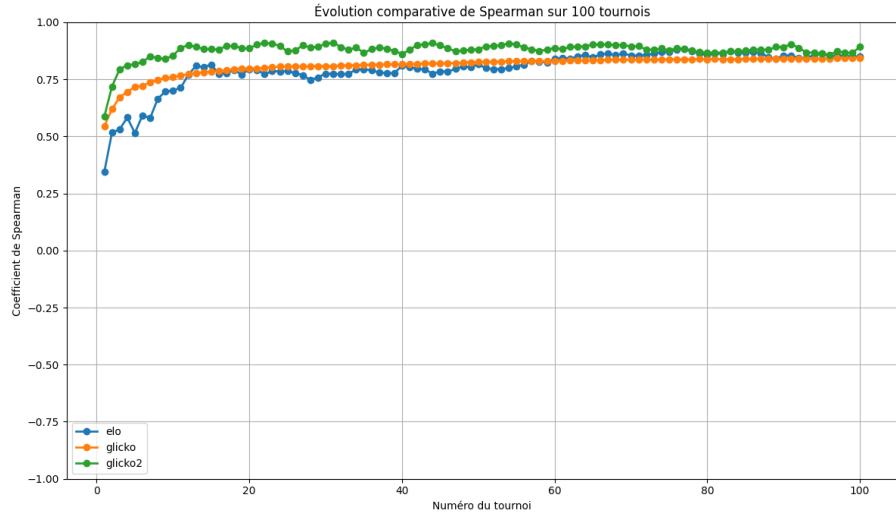


FIGURE 8 – Évolution du coefficient de Spearman au fil des tournois simulés.

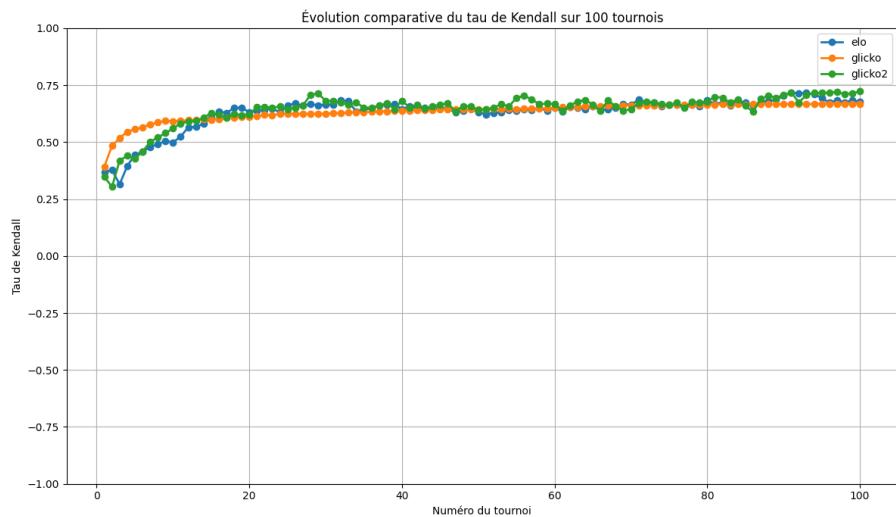


FIGURE 9 – Évolution du tau de Kendall au fil des tournois simulés.

On constate que le système Elo progresse lentement et avec une certaine volatilité avant d’atteindre un palier, ce qui traduit une convergence plus tardive et moins précise. Glicko présente une montée rapide, puis une stabilisation à un niveau élevé, témoignant de son efficacité à structurer les classements même à court terme. Enfin, Glicko-2 surpasse Glicko en début de simulation, mais montre une stabilisation plus progressive et éparses. Cela peut s’expliquer par sa gestion adaptative de la volatilité, qui favorise l’ajustement initial mais peut introduire des oscillations temporaires.

Ces observations confirment que, bien que les systèmes tendent vers une fidélité globale à long terme, leur comportement temporel diffère sensiblement. Cela souligne l’intérêt de critères dynamiques pour juger de la performance des systèmes de notation dans des contextes où l’adaptation rapide est cruciale.

Le test de Wilcoxon montre cependant qu’il n’existe pas de différence significative entre les systèmes à long terme : les p-values entre les paires (Elo vs Glicko, Elo vs Glicko-2, Glicko vs Glicko-2) sont toutes supérieures à 0.91. Cela indique que, globalement, les trois systèmes convergent vers des classements similaires, bien que leurs dynamiques soient différentes.

Il est important de souligner que cette convergence ne se produit qu’après un nombre suffisant de matchs. Dans les premières phases, les systèmes intégrant une notion d’incertitude (Glicko, Glicko-2) tendent à être plus réactifs et discriminants que l’Elo.

Lorsque les joueurs sont appariés selon le format du tournoi suisse, les résultats globaux demeurent cohérents avec ceux observés en round-robin. Les systèmes de notation conservent leur capacité à ordonner efficacement les participants selon leur compétence réelle. Cependant, une différence importante apparaît dès lors que l’on s’intéresse à l’évolution individuelle des cotes. Cette analyse plus fine révèle des écarts notables dans la stabilité et la réactivité des systèmes, que le simple classement global ne permettait pas de mettre en évidence.

## Évolution des cotes au niveau individuel

Nous avons ensuite examiné l’évolution des cotes pour des joueurs pris individuellement, afin de comprendre la dynamique propre à chaque système. Les figures suivantes illustrent cette évolution sur l’ensemble des tournois simulés.

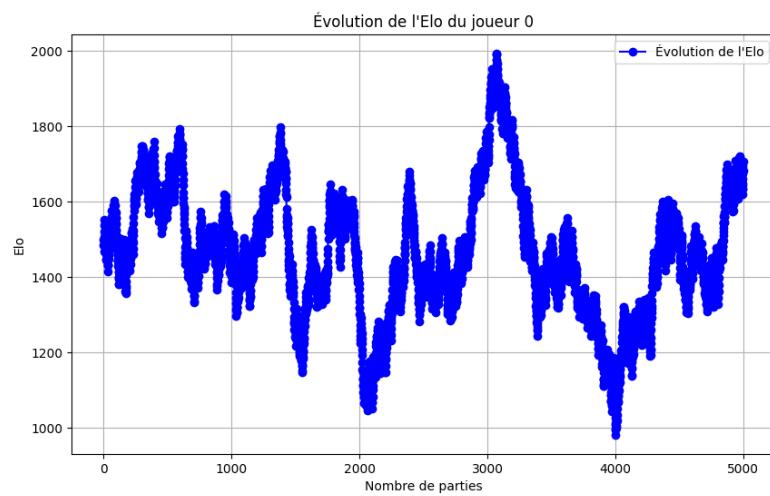


FIGURE 10 – Évolution de la cote Elo d'un joueur au fil des matchs.

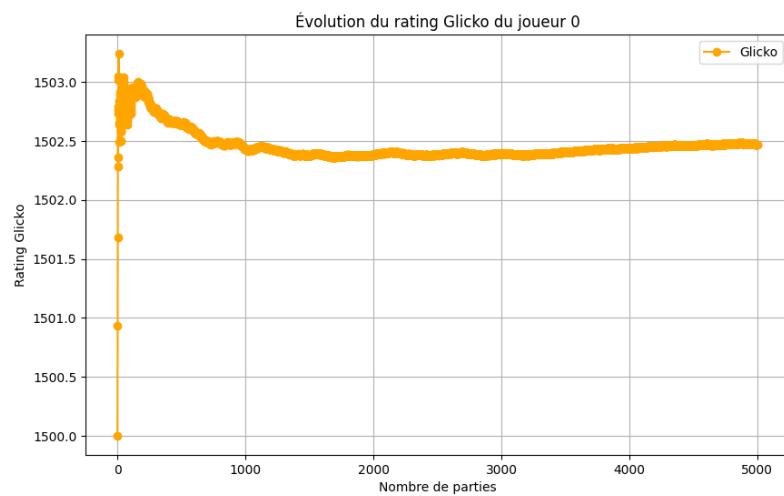


FIGURE 11 – Évolution de la cote Glicko du même joueur.

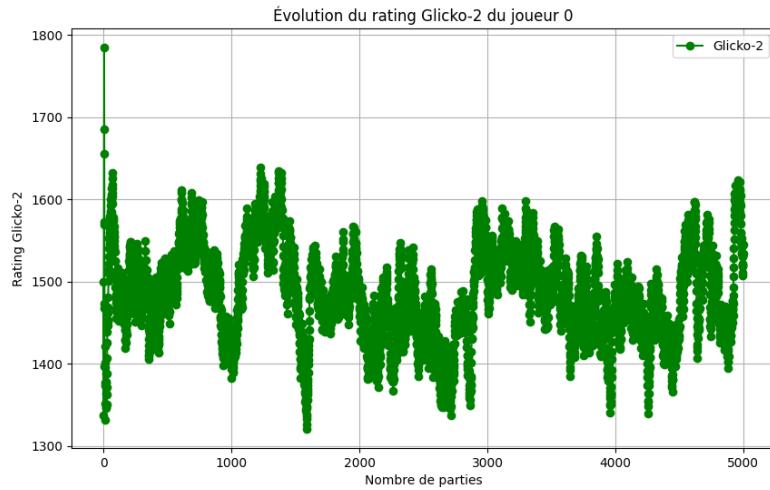


FIGURE 12 – Évolution de la cote Glicko-2 du même joueur.

On remarque que la trajectoire de l’Elo est relativement chaotique, avec des oscillations fréquentes. Le Glicko converge plus rapidement et stabilise ses estimations (mais dans une plage de côte peu étendue). Le Glicko-2, en revanche, présente une dynamique plus complexe : il est sensible aux premières performances, mais sa volatilité intégrée peut induire des ajustements plus importants, notamment dans un contexte où les mises à jour sont faites match par match (round-robin), et non par lots.

## Impact du format de tournoi

Pour mieux saisir cet effet, nous avons comparé les résultats dans un mode batch, en tournoi suisse, dans lequel les cotes sont mises à jour par blocs de matchs. Cette approche est plus cohérente avec l’esprit de Glicko-2, qui suppose une période d’inactivité entre les séquences de compétition.

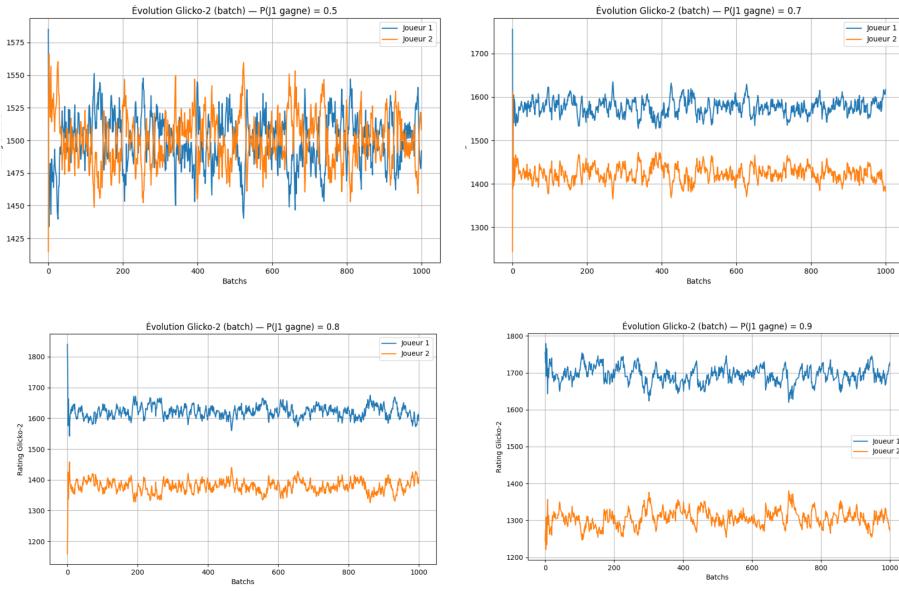


FIGURE 13 – Évolution des cotes Glicko-2 dans un format batch (tournoi suisse).

Dans ce format, Glicko-2 retrouve toute sa pertinence. La volatilité initiale est absorbée plus efficacement, et les ajustements sont plus mesurés. Le classement obtenu est à la fois cohérent, stable et capable de distinguer les joueurs de manière plus fine, y compris dans les extrêmes.

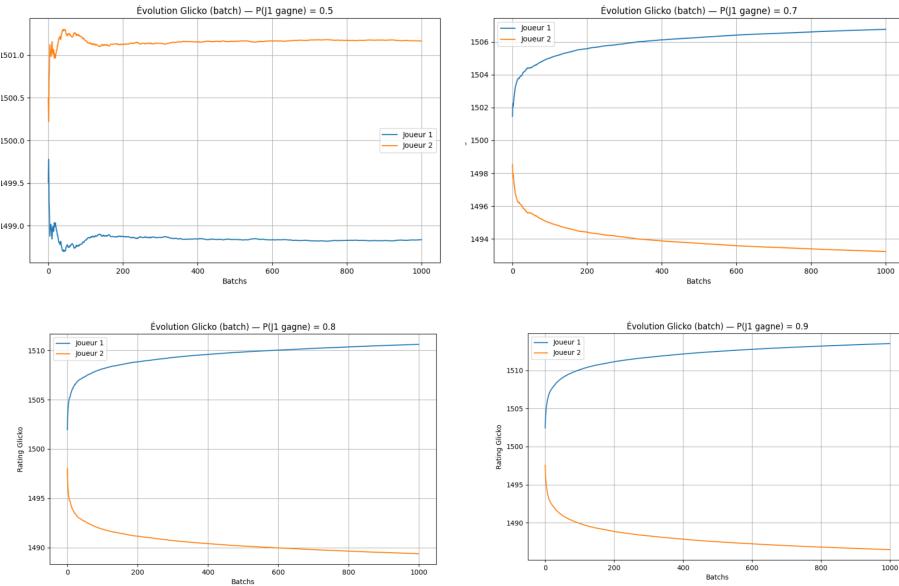


FIGURE 14 – Comportement du système Glicko en mode batch.

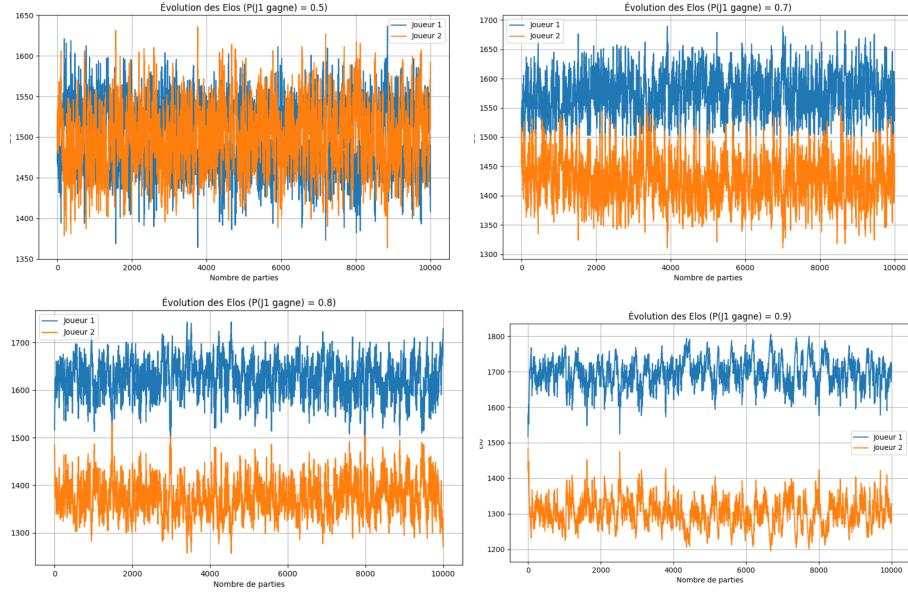


FIGURE 15 – Évolution des cotes Elo dans un tournoi suisse.

L’Elo, de son côté, n’est pas affecté par le format : les mises à jour se font de manière identique, quelle que soit la structure du tournoi. Le Glicko montre une légère amélioration de stabilité, mais ses performances sont globalement cohérentes d’un format à l’autre.

Ces premières expériences montrent que, dans un contexte modérément aléatoire, les trois systèmes parviennent à capturer l’ordre des forces après un grand nombre de matchs. Toutefois, lorsqu’on observe l’évolution des cotes et la sensibilité au format de mise à jour, des différences apparaissent : Glicko est globalement robuste et fiable, tandis que Glicko-2, bien configuré, montre la meilleure précision. L’Elo reste simple, mais manque de finesse, notamment dans les premières phases ou lorsque la population est très hétérogène.

## Conclusion

Ce projet nous a permis d’explorer en profondeur le comportement de trois systèmes de notation largement utilisés dans les environnements compétitifs : Elo, Glicko et Glicko-2. À travers un cadre de simulation contrôlé et modulaire, nous pouvons comparer leurs dynamiques respectives dans un large éventail de contextes (allant de jeux très aléatoires à des environnements quasi-déterministes) en faisant varier à la fois les paramètres du modèle probabiliste, la distribution des compétences et la structure des tournois.

Nos résultats ont mis en évidence des différences notables entre les systèmes. Le système Elo, bien que simple et robuste, montre des limites dans sa capacité à refléter fidèlement la hiérarchie des compétences, surtout dans les premières phases d’apprentissage. Glicko améliore significativement la réactivité du classement grâce à sa gestion explicite de l’incertitude, tandis que Glicko-2, en intégrant la notion de volatilité, offre un cadre encore plus adaptatif, à condition d’être utilisé dans un format cohérent avec sa philosophie (mise à jour par lots). À long terme, tous convergent vers un classement globalement fidèle, mais leur efficacité varie fortement en fonction du contexte.

L'un des apports majeurs de notre projet est la flexibilité du cadre expérimental développé. En ajustant les paramètres du jeu, les formats de tournoi, la forme du modèle de confrontation, ou la nature des distributions de compétence, il est possible de simuler une grande variété de situations. Cette architecture ouvre ainsi la voie à une multitude d'expériences complémentaires. Par exemple, on pourrait explorer l'impact de l'introduction de bruit asymétrique, la présence de joueurs inactifs, ou encore des distributions de compétence multi-modales.

Au-delà du cadre expérimental, plusieurs pistes de prolongement théorique méritent d'être mentionnées. Une question centrale serait de tester ces systèmes dans un environnement dynamique, où la force des joueurs évolue au cours du temps. Dans ce cas, les systèmes actuels (qui reposent sur l'hypothèse implicite d'une compétence stable) seraient mis à l'épreuve, et pourraient nécessiter des extensions ou ajustements.

Un autre axe d'étude concerne l'application de ces systèmes dans des environnements réels, comme les jeux en ligne compétitifs. Contrairement à nos simulations, le matchmaking y est rarement aléatoire : il est fortement biaisé par l'historique, les préférences de jeu, ou des contraintes logistiques. De plus, les populations sont hétérogènes, les niveaux peuvent fluctuer rapidement, et les systèmes de triche ou d'abandon peuvent fausser les données. Dans un tel contexte, il serait particulièrement intéressant d'évaluer la robustesse de Glicko-2 ou d'autres modèles plus récents, et de réfléchir à de nouvelles mesures pour quantifier la stabilité et l'équité des classements.

En somme, ce projet constitue une première étape vers une compréhension fine des mécanismes de notation dans des systèmes compétitifs. Il ouvre de nombreuses perspectives, tant sur le plan expérimental que théorique, et montre combien la modélisation des performances est un sujet riche, à l'interface entre mathématiques, informatique, et analyse comportementale.

## Annexes

### A Détermination des constantes dans la fonction $k(m)$

Dans la modélisation probabiliste que nous avons proposée, la probabilité de victoire entre deux joueurs est contrôlée par une fonction sigmoïde, dont la pente varie en fonction du niveau du joueur le plus fort. Cette dépendance est introduite à travers une fonction  $k(m)$ , qui joue un rôle essentiel dans l'adaptation du hasard au niveau de compétence.

Pour construire cette fonction, nous avons défini une transformation intermédiaire, notée  $h(m)$ , qui encode un taux de hasard ajusté. Cette fonction dépend de deux constantes,  $a$  et  $b$ , et prend la forme suivante :

$$h(m) = \frac{a}{1 + e^{-10\gamma m}} + b$$

Le rôle de cette fonction est de faire décroître le hasard perçu lorsque le niveau maximal  $m$  parmi les deux joueurs augmente, tout en respectant certaines contraintes naturelles. Ces contraintes sont au nombre de deux :

- Lorsque  $\gamma = 0$ , on ne souhaite aucune adaptation au niveau : la fonction  $h$  doit rester constante, c'est-à-dire  $h(m) = 1$  pour tout  $m$ .
  - Si  $\gamma > 0$ , alors on veut  $h(1) = \tau_1$  pour exprimer que le taux de hasard est à son niveau spécifié lorsque le niveau du joueur le plus fort est maximal. On peut voir,  $\tau_1$  comme une composante aléatoire propre au jeu et ce même au plus haut niveau
- À partir de la première condition, on observe que si  $\gamma = 0$ , alors  $e^{-10\gamma m} = 1$ , et donc :

$$h(m) = \frac{a}{2} + b = 1 \quad \Rightarrow \quad b = 1 - \frac{a}{2}$$

Cette première équation relie directement  $b$  à  $a$ . Pour obtenir une expression explicite de  $a$ , nous utilisons la seconde condition. Posons pour cela :

$$s = \frac{1}{1 + e^{-10\gamma}} \quad (\text{valeur de la sigmoïde en } m = 1)$$

et injectons cette valeur dans l'expression de  $h(1)$  :

$$h(1) = a \cdot s + b = \tau_1$$

En remplaçant  $b$  par son expression précédente, on obtient :

$$a \cdot s + \left(1 - \frac{a}{2}\right) = \tau_1$$

Cette relation se simplifie en une équation linéaire en  $a$  :

$$a(s - 0.5) = \tau_1 - 1 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{\tau_1 - 1}{s - 0.5}$$

Puis en reportant dans l'expression de  $b$  :

$$b = 1 - \frac{a}{2}$$

Ainsi, les deux constantes sont entièrement déterminées à partir des paramètres  $\tau_1$  et  $\gamma$ . Ce raisonnement garantit que la fonction  $h(m)$  respecte à la fois la constance du hasard lorsque  $\gamma = 0$ , et son ajustement à haut niveau lorsque  $\gamma > 0$ . Enfin, le passage à la pente  $k(m)$  se fait via la transformation :

$$k(m) = -\log h(m)$$

Cette construction permet une interprétation continue et contrôlable de la manière dont le hasard se réduit à mesure que le niveau des joueurs augmente.

## B Distribution des forces des joueurs

Dans l'ensemble de nos simulations, les compétences des joueurs ne sont pas fixées arbitrairement, mais tirées aléatoirement selon une distribution statistique choisie avec soin. Il est important de rappeler que le comportement des systèmes de rating dépend fortement de la structure sous-jacente de la population simulée. C'est pourquoi nous avons opté pour une loi log-normale comme base de génération des forces.

La loi log-normale se définit par le fait que le logarithme de la variable suit une loi normale. Autrement dit, une variable aléatoire  $X$  suit une loi log-normale si  $\ln(X)$  suit une loi normale centrée réduite ou non. Cette propriété confère à la loi log-normale une asymétrie marquée : les valeurs sont toutes positives, concentrées autour d'un mode inférieur à la moyenne, et s'étalent progressivement vers des valeurs élevées. Cela reflète un phénomène fréquent dans les systèmes compétitifs : beaucoup de joueurs ont un niveau modeste, tandis que seuls quelques-uns atteignent des performances très élevées.

Dans notre cas, après avoir tiré des valeurs brutes issues de cette loi, nous les normalisons dans l'intervalle  $[0, 1]$ . Ce redimensionnement ne modifie pas l'asymétrie de la distribution, mais garantit une cohérence d'échelle avec les autres éléments du modèle, notamment le calcul des probabilités de victoire.

Ce choix de distribution présente plusieurs avantages. Il introduit une diversité naturelle dans les profils des joueurs, en évitant une répartition artificielle comme celle produite par une loi uniforme. Il garantit aussi la présence de joueurs très forts, même si peu nombreux, ce qui est essentiel pour observer l'efficacité des systèmes de rating à détecter et classer les extrêmes.

La figure 16 illustre un exemple de densité log-normale utilisée dans ce cadre. On y observe clairement la concentration autour de petites valeurs, ainsi que la présence d'une queue vers les niveaux élevés.

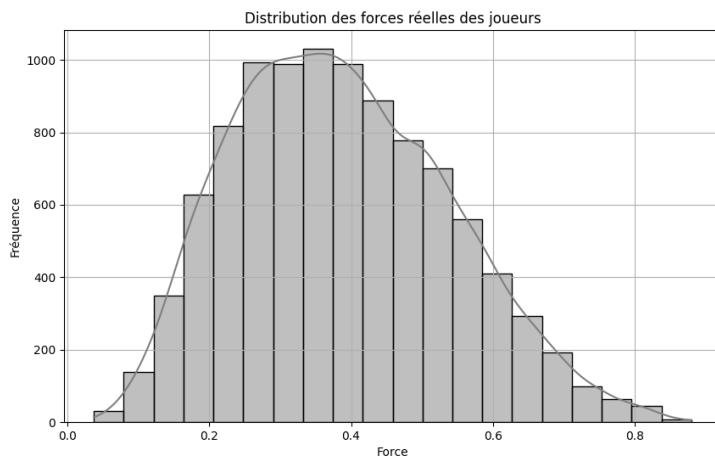


FIGURE 16 – Exemple de densité de loi log-normale (avant normalisation). La majorité des joueurs possède une compétence faible à moyenne, mais certains tirages atteignent des valeurs élevées.

Ainsi, la loi log-normale offre un cadre réaliste et flexible pour simuler une population compétitive hétérogène, et constitue une base fiable pour tester le comportement des systèmes de notation.

# Bibliographie

## Références

- [1] Arpad E. Elo. *The Rating of Chess Players, Past and Present*. Arco Publishing, 1978.
- [2] Mark E. Glickman. *The Glicko-2 Rating System*. Document technique en ligne, 2013.  
<http://www.glicko.net/glicko/glicko2.pdf>
- [3] Maurice G. Kendall. *Rank Correlation Methods*. Charles Griffin & Company, 1948.
- [4] Wikipédia. *Classement Elo*, consulté en juin 2025. [https://fr.wikipedia.org/wiki/Classement\\_Elo](https://fr.wikipedia.org/wiki/Classement_Elo)
- [5] Wikipédia. *Classement Glicko*, consulté en juin 2025. [https://fr.wikipedia.org/wiki/Classement\\_Glicko](https://fr.wikipedia.org/wiki/Classement_Glicko)
- [6] Wikipédia. *Corrélation de Spearman*, consulté en juin 2025. [https://fr.wikipedia.org/wiki/CorrÃ©lation\\_de\\_Spearman](https://fr.wikipedia.org/wiki/CorrÃ©lation_de_Spearman)
- [7] Wikipédia. *Tau de Kendall*, consulté en juin 2025. [https://fr.wikipedia.org/wiki/Tau\\_de\\_Kendall](https://fr.wikipedia.org/wiki/Tau_de_Kendall)
- [8] Wikipédia. *Test de Wilcoxon-Mann-Whitney*, consulté en juin 2025. [https://fr.wikipedia.org/wiki/Test\\_de\\_Wilcoxon-Mann-Whitney](https://fr.wikipedia.org/wiki/Test_de_Wilcoxon-Mann-Whitney)
- [9] Wikipedia. *Wilcoxon signed-rank test*, consulté en juin 2025. [https://en.wikipedia.org/wiki/Wilcoxon\\_signed-rank\\_test](https://en.wikipedia.org/wiki/Wilcoxon_signed-rank_test)
- [10] SciPy. *Documentation scipy.stats*. Consulté en juin 2025. <https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/stats.html>
- [11] Matplotlib et Seaborn. *Documentation officielle*. Consulté en juin 2025. <https://matplotlib.org, https://seaborn.pydata.org>