Teoria da Computabilidade

A Tese de Church–Turing

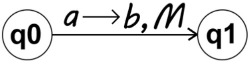
Claudiano L. Silva
Gabriel Lins
Larissa Kelmer
Sidney Junior
Victor Gomes

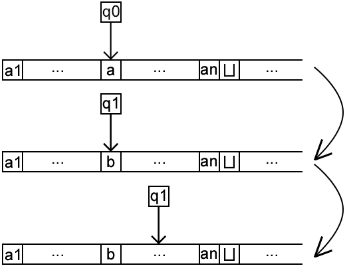
UFRN - Universidade Federal do Rio grande do Norte

14 de outubro de 2022

Máquinas de Turing

- Máquinas de Turing
- Representação





Máquinas de Turing

Definição 3.1 : Uma máquina de Turing é uma 7-upla $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{aceita}, q_{rejeita})$

Definição formal

$$\delta : Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{E, D\}$$

Máquinas de Turing

- Turing Reconhecível
- Turing Decidível

Variantes da Máquina de Turing

Suponha que tivéssemos permitido à máquina de Turing a capacidade de permanecer parada.

$$\delta : Q \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{E, D, P\}$$

Máquinas de Turing multi-fitas

Definição

$$\delta : Q \times \Gamma^k \rightarrow Q \times \Gamma^k \times \{E, D\}^k$$

Definição 3.1 : Toda máquina de Turing multi-fitas tem uma máquina de Turing com uma única fita equivalente.

Máquinas de Turing multi-fitas

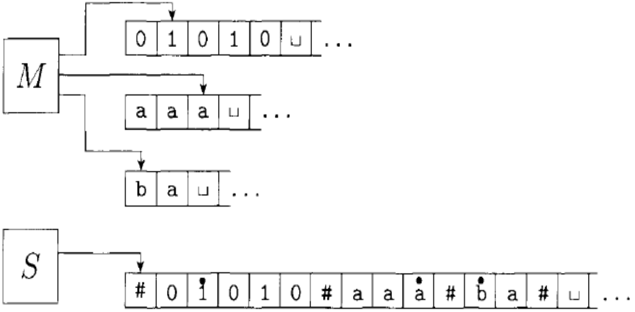


Figura: Três fitas e uma fita

- O alfabeto da fita de K_M será $\Gamma \cup \{\#\} \cup \{\dot{\gamma} | \gamma \in \Gamma\}$

1. Primeiro S põe sua fita no formato que representa todas as k fitas de M. A fita formatada contém
$$\#\dot{w}_1 w_2 \cdots w_n \# \dot{\sqcup} \# \dot{\sqcup} \# \cdots \#$$

2. Para simular um único movimento, S faz uma varredura na sua fita a partir do primeiro #, que marca a extremidade esquerda, até o $(k+1)$-ésimo #, que marca a extremidade direita, de modo a determinar os símbolos sob as cabeças virtuais. Então S faz uma segunda varredura para atualizar as fitas conforme a maneira pela qual a função de transição de M determina.

3. Se em qualquer ponto S move uma das cabeças virtuais para a direita sobre um #, essa ação significa que M moveu a cabeça correspondente sobre a parte em branco ainda não lida da fita. Portanto S escreve um símbolo branco sobre essa célula da fita e desloca o conteúdo da fita, a partir dessa célula até o # mais à direita, uma unidade para a direita. E aí continua a simulação como antes."

Máquinas de Turing não determinísticas

Definição

Uma máquina de Turing não-determinística é como uma máquina de Turing comum. Porém, a sua função de transição se comporta como se segue:

$$\delta : Q \times \Gamma \rightarrow P(Q \times \Gamma \times \{E, D\})$$

Exemplo

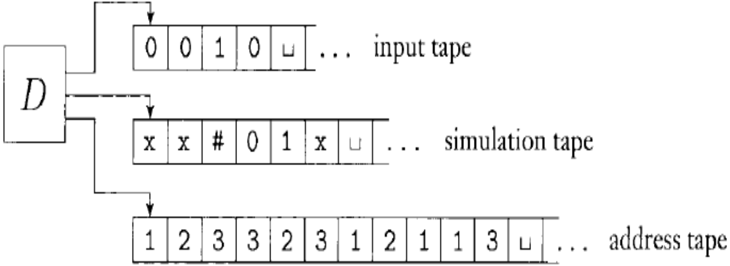
$$\delta(q_i, a) = (q_j, b_1, E), (q_k, b_2, D), (q_l, b_3, E)$$

Prova: *M* simula a árvore de computação N procurando uma configuraçã

Definição alto nível

1. Inicialmente a fita 1 contém a cadeia w, e as fitas 2 e 3 estão vazias.
2. Copie a fita 1 para a fita 2.
3. Use a fita 2 para simular N com entrada w sobre um ramo de sua computação não-determinística. Antes de cada passo de N consulte o próximo símbolo sobre a fita 3 para determinar qual escolha fazer entre aquelas permitidas pela função de transição de N. Se nenhum símbolo mais permanece sobre a fita 3 ou se esse escolha não-determinística for inválida, aborte esse ramo indo para o estágio 4. Também vá para o estágio 4 se uma configuração de rejeição for encontrada. Se uma configuração de aceitação for encontrada, *aceite* a entrada.
4. Substitua a cadeia sobre a fita 3 pela cadeia lexicograficamente seguinte. Simule o próximo ramo da computação de N indo para o estágio 2.

Máquinas de Turing não determinísticas



Enumeradores

- Frouxamente definido como um uma máquinda de Turing com uma impressora em anexo.
- A linguagem enumerada por E é a coleção de todas as cadeias que ela eventualmente imprime.

Teorema 3.13

Uma linguagem é Turing-reconhecível se e somente se algum enumerador a enumera.

Prova Enumerador

Prova. Primeiro mostramos que se temos um enumerador E que enumera uma linguagem A, uma MT M reconhece A. A MT M funciona da seguinte forma.

M = "Sobre a entrada w:

1. Rode E. Toda vez que E dá como saída uma cadeia, compare-a com w.
2. Se w vem a aparecer na saída de E, *aceite*."

Claramente M aceita aquelas cadeias que aparecem na lista de E.

Agora fazemos a outra direção. Se a MT M reconhece uma linguagem A, podemos construir o seguinte enumerador E para A. Digamos que $s_1, s_2, \ldots$ é uma lista de todas as possíveis cadeias em Σ^*.

E = "Ignore a entrada.

1. Repita o seguinte para $i = 1, 2, 3, \ldots$
2. Rode M por i passos sobre cada entrada $s_1, s_2, \ldots, s_i$.
3. Se quaisquer computações aceitam, imprima o s_j correspondente."

Os problemas de Hilbert

- Em 1900, o matemático David Hilbert preferiu uma palestra no Congresso Internacional de Matemáticos em Paris[1]
- Projetar um algoritimo que testa se um polinômio tem uma raiz inteira
- Algorítimo não era bem definido
- A definicão veio nos artigos de 1936 de Alonzo Church e Alan Turing. Church usou um sistema notacional chamado o λ -cálculo para definir algorítimos

O problema

D $= \{p|$é um polinômio com uma raiz inteira$\}$

- O décimo problema de Hilbert pergunta em essência se o conjunto D é decidível.
- Considera um problema mais simples

$$D_1 = \{p | p \text{ é um polinômio sobre x com uma raiz inteira}\}$$

M = "A entrada é um polinômio p sobre a variável x"

1. Calcule o valor de p com um x substituindo sucessivamente pelos valores 0,1,-1,2,-2,3,-3,... Se em algum ponto o polinômio resulta no valor 0 *aceite*

Necessário definir limitantes

Exercício

Exercício

Dado a linguagem L $\{$w—w contém duas vezes mais 0's que 1's$\}$ sobre o alfabeto 0,1 Seja M a maquina de turing que decide sobre a linguagem L. A implementação da descrição a nível de M se dá da seguinte forma: M = Para uma entrada w:

Solução

1. Busque na fita pelo primeiro número 1 não marcado e marque-o. Caso não haja nenhum número 1 não marcado, vá para o passo 5. Se não, coloque a cabeça da máquina no início da fita

Solução

1. Busque na fita pelo primeiro número 1 não marcado e marque-o. Caso não haja nenhum número 1 não marcado, vá para o passo 5. Se não, coloque a cabeça da máquina no início da fita
2. Busque por um zero não marcado e marque-o. Caso não haja 0s não marcados, rejeite.

Solução

1. Busque na fita pelo primeiro número 1 não marcado e marque-o. Caso não haja nenhum número 1 não marcado, vá para o passo 5. Se não, coloque a cabeça da máquina no início da fita
2. Busque por um zero não marcado e marque-o. Caso não haja 0s não marcados, rejeite.
3. Busque na fita novamente por outro 0 não marcado e marque-o. Caso não haja nenhum zero não marcado, rejeite.

Solução

1. Busque na fita pelo primeiro número 1 não marcado e marque-o. Caso não haja nenhum número 1 não marcado, vá para o passo 5. Se não, coloque a cabeça da máquina no início da fita
2. Busque por um zero não marcado e marque-o. Caso não haja 0s não marcados, rejeite.
3. Busque na fita novamente por outro 0 não marcado e marque-o. Caso não haja nenhum zero não marcado, rejeite.
4. Mova a cabeça da máquina de volta para o início da fita e repita o passo 1

Solução

1. Busque na fita pelo primeiro número 1 não marcado e marque-o. Caso não haja nenhum número 1 não marcado, vá para o passo 5. Se não, coloque a cabeça da máquina no início da fita
2. Busque por um zero não marcado e marque-o. Caso não haja 0s não marcados, rejeite.
3. Busque na fita novamente por outro 0 não marcado e marque-o. Caso não haja nenhum zero não marcado, rejeite.
4. Mova a cabeça da máquina de volta para o início da fita e repita o passo 1
5. Coloque a cabeça da fita no início da fita e busque por algum 0 não marcado. Se nenhum for encontrado, aceite, se não, rejeite.

Alternativamente, multi-fitas

1. Sempre que ler um 0, copie para a fita auxiliar 0. Quando ler um 1, copie para a fita auxiliar 1.
2. Enquanto houverem 1's na fita auxiliar 1 apague um número 1 dela e apague 2 0's da fita auxiliar 0. Se não houverem 0 suficientes, rejeite.
3. Aceite se não houverem 0's na fita auxiliar

Exercício 2

3.8 c

Dado a linguagem L2 w—w não contém duas vezes mais 0's que 1's sobre o alfabeto 0,1 Seja M2 a maquina de turing que decide sobre a linguagem L2. A implementação da descrição a nível de M2 se dá da seguinte forma: M2 = Para uma entrada w:

Solução

1. Busque na fita pelo primeiro número 1 não marcado e marque-o. Caso não haja nenhum número 1 não marcado, vá para o passo 5. Se não, coloque a cabeça da máquina no início da fita

Solução

1. Busque na fita pelo primeiro número 1 não marcado e marque-o. Caso não haja nenhum número 1 não marcado, vá para o passo 5. Se não, coloque a cabeça da máquina no início da fita
2. Busque por um zero não marcado e marque-o. Caso não haja 0s não marcados, aceite.

Solução

1. Busque na fita pelo primeiro número 1 não marcado e marque-o. Caso não haja nenhum número 1 não marcado, vá para o passo 5. Se não, coloque a cabeça da máquina no início da fita
2. Busque por um zero não marcado e marque-o. Caso não haja 0s não marcados, aceite.
3. Busque na fita novamente por outro 0 não marcado e marque-o. Caso não haja nenhum zero não marcado, aceite.

Solução

1. Busque na fita pelo primeiro número 1 não marcado e marque-o. Caso não haja nenhum número 1 não marcado, vá para o passo 5. Se não, coloque a cabeça da máquina no início da fita
2. Busque por um zero não marcado e marque-o. Caso não haja 0s não marcados, aceite.
3. Busque na fita novamente por outro 0 não marcado e marque-o. Caso não haja nenhum zero não marcado, aceite.
4. Mova a cabeça da máquina de volta para o início da fita e repita o passo 1

Solução

1. Busque na fita pelo primeiro número 1 não marcado e marque-o. Caso não haja nenhum número 1 não marcado, vá para o passo 5. Se não, coloque a cabeça da máquina no início da fita
2. Busque por um zero não marcado e marque-o. Caso não haja 0s não marcados, aceite.
3. Busque na fita novamente por outro 0 não marcado e marque-o. Caso não haja nenhum zero não marcado, aceite.
4. Mova a cabeça da máquina de volta para o início da fita e repita o passo 1
5. Coloque a cabeça da fita no início da fita e busque por algum 0 não marcado. Se nenhum for encontrado, rejeite, se não, aceite.

Referencias

[1] Michael Sipser. *Introduction to the Theory of Computation*. Cengage Learning, 2013.