UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIAS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA
CIRCUITOS ELÉTRICOS

TRABALHO 2:
Circuitos RL, RC e RLC

Antonio Gabriel Sousa Borralho
Antonio José Portela de Jesus Santos
Arthur Monteiro Costa Silva
Bruno Leal da Silva
Lucas Costa Soares

São Luís, MA - Brasil
10 de julho de 2018

Antonio Gabriel Sousa Borralho
Antonio José Portela de Jesus Santos
Arthur Monteiro Costa Silva
Bruno Leal da Silva
Lucas Costa Soares

TRABALHO 2:
Circuitos RL, RC e RLC

Trabalho referente à resolução das questões da segunda lista de exercícios, para obtenção parcial da segunda nota da disciplina Circuitos Elétricos.

Prof. Luciano Buonocore.

São Luís, MA - Brasil
10 de julho de 2018

Sumário

1 Conceitos Básicos

Circuitos com **resistores, capacitores e indutores** denominados RL, RC ou RLC, que apesar de sua simplicidade, têm inúmeras aplicações em eletrônica, comunicação e sistemas de controle (SADIKU, 2013). Assim como outros, esses componentes são mais fáceis de descrever em termos de variáveis de circuito do que de variáveis eletromagnéticas. No entanto, antes de nos concentrarmos na descrições desses elementos do ponto de vista de circuitos, é recomendável realizarmos uma breve revisão dos conceitos de campo a eles subjacentes.

Um indutor é um componente elétrico que se opõe a qualquer mudança na corrente elétrica. É composto por uma bobina de fio enrolado em torno de um núcleo de suporte cujo material pode ser magnético ou não magnético. O comportamento dos indutores é baseado em fenômenos associado a campos magnéticos. Um campo magnético que varia com o tempo induz uma tensão em qualquer condutor imerso ao campo. O parâmetro **indutância** relaciona a tensão induzida com a corrente. Um capacitor é um componente elétrico que consiste em dois condutores separados por um isolante ou material dielétrico. O capacitor é o único dispositivo, além da bateria, que pode armazenar carga elétrica. O comportamento dos capacitores é baseado em fenômenos associados a campos elétricos. Um campo elétrico que varia com o tempo produz uma corrente de deslocamento no espaço ocupado pelo campo. O parâmetro **capacitância** relaciona a corrente de deslocamento à tensão, onde a corrente de deslocamento é igual à corrente de condução nos terminais do capacitor.

A análise de circuitos RL e RC é dividida em três fases. Na primeira fase, examinamos as correntes e tensões que surgem quando a energia armazenada em um indutor ou capacitor é fornecida repentinamente a uma carga. Isso ocorre quando o indutor ou capacitor é desligado de forma abrupta de sua fonte cc. As correntes e tensões que surgem nessa configuração são denominadas **resposta natural** do circuito. Na segunda fase, examinaremos as correntes e tensões que surgem quando a energia é recebida por um indutor ou capacitor por causa da aplicação repentina de uma fonte de tensão ou corrente cc. Essa resposta é denominada **resposta a um degrau**. A terceira fase consiste em determinar um método geral que pode ser usado para determinar a resposta de circuitos RL e RC a qualquer variação abrupta em uma fonte de tensão ou corrente cc.

A discursão da resposta natural e da resposta a um degrau de circuitos que contém indutores e capacitores (RLC), está limitada a duas estruturas bem simples: O circuito RLC em paralelo e o circuito RLC em série. (NILSSON; RIEDEL, 2015)

2 Questões

Questão 2.1

Calcule a potência dissipada no resistor de 40Ω e a tensão representada por V_C em cada um dos Circuitos 2.1(a) e 2.1(b).

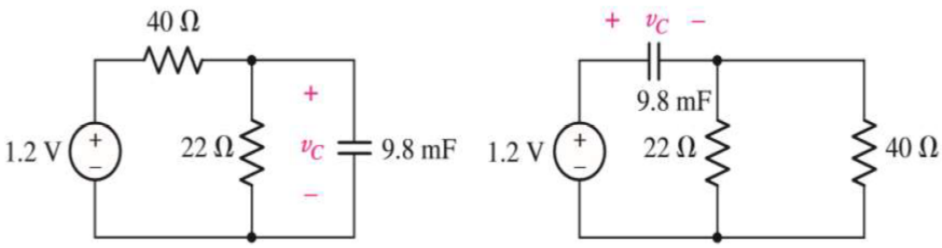


Figura 1 – Circuitos 2.1(a) e 2.1(b)

a) Observamos que o circuito está ligado por bastante tempo ($t \to \infty$). Com isso, a corrente do capacitor é:

$$i_C = C\frac{dv_c}{dt}$$

Como o circuito está ligado por bastante tempo: v_c é constante e $\frac{dv_c}{dt} = 0$, assim:

$$i_C = C\frac{dv_c}{dt} \Longrightarrow i_C = C \cdot 0 \Longrightarrow i_C = 0A$$

Desta forma o capacitor é visto pelo circuito como malha aberta. Calculando v_C e $v_{40\Omega}$ por **divisor de tensão**:

$$v_C = \frac{22\Omega}{40\Omega + 22\Omega} \cdot 1,2V \Longrightarrow \boxed{v_C = 425,806\ mV} \tag{2.1}$$

$$v_{40\Omega} = \frac{40\Omega}{40\Omega + 22\Omega} \cdot 1,2V = 774,194\ mV$$

A potência no resistor de 40Ω é:

$$P_{40\Omega} = \frac{v_{40\Omega}^2}{R_{40\Omega}} = \frac{774,194\ mV}{40}$$

$$\boxed{P_{40\Omega} = 14,984\ mV} \tag{2.2}$$

b) Observamos que o circuito está ligado por bastante tempo ($t \to \infty$). Com isso, a corrente do capacitor é:

$$i_C = C\frac{dV_c}{dt}$$

Como o circuito está ligado por bastante tempo: v_c é constante e $\frac{dV_c}{dt} = 0$, assim:

$$i_C = C\frac{dV_c}{dt} \Longrightarrow i_C = C \cdot 0 \Longrightarrow i_C = 0\ A$$

Desta forma o capacitor é visto pelo circuito como malha aberta. Calculando v_C **pelo método das correntes de malha**, temos:

$$-1,2 + v_C + 22 \cdot I = 0$$

Como $I = 0$,

$$\boxed{v_C = 1,2\ V} \tag{2.3}$$

Calculando a potência no resistor de 40Ω:

$$P_{40\Omega} = R \cdot i^2$$

Pelo circuito, temos que a corrente no resistor de 40Ω é $0\ A$, portanto:

$$\boxed{P_{40\Omega} = 40 \cdot 0^2 = 0\ W} \tag{2.4}$$

□

Questão 2.3

Calcule v_L e i_L para cada um dos circuitos mostrados abaixo, se $i_S = 1mA$ e $v_S = 2.1\ V$.

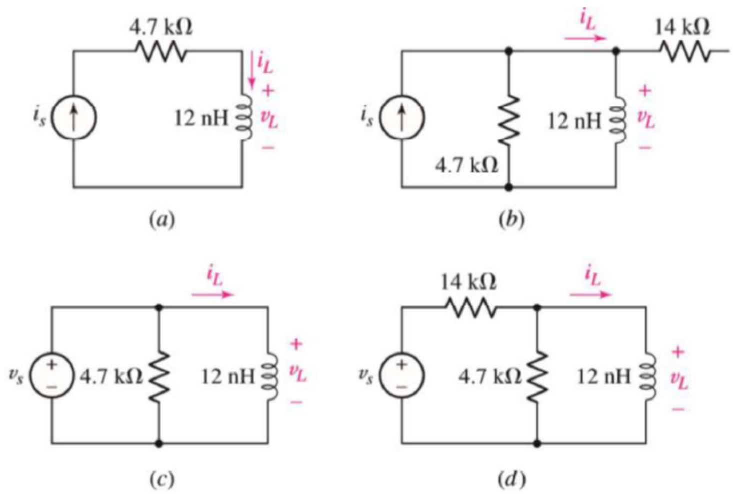


Figura 2 – Circuitos 2.3

a) $i_S = 1mA$ e $v_S = 2,1V$

Como o circuito está ligado por bastante tempo, a corrente: i_L é constante e $\dfrac{di_L}{dt} = 0$, assim:

$$v_L = L\frac{di_L}{dt} \Longrightarrow v_L = L \cdot 0 \Longrightarrow \boxed{v_L = 0V} \tag{2.5}$$

Como não existe tensão nos terminais do indutor, ele pode ser substituído por um curto-circuito. Assim:

$$\boxed{i_L = i_S = 1\ mA} \tag{2.6}$$

b) Como o circuito está ligado por bastante tempo, a corrente: i_L é constante e $\dfrac{di_L}{dt} = 0$, assim:

$$v_L = L\frac{di_L}{dt} \Longrightarrow v_L = L \cdot 0 \Longrightarrow \boxed{v_L = 0V} \tag{2.7}$$

Como não existe tensão nos terminais do indutor, ele pode ser substituído por um curto-circuito. Assim:

$$\boxed{i_L = i_S = 1\ mA} \tag{2.8}$$

c) Como o circuito está ligado por bastante tempo, a corrente: i_L é constante e $\dfrac{di_L}{dt} = 0$, assim:

$$v_L = L\frac{di_L}{dt} \Longrightarrow v_L = L \cdot 0 \Longrightarrow \boxed{v_L = 0\ V} \tag{2.9}$$

Como não existe tensão nos terminais do indutor, ele pode ser substituído por um curto-circuito. Desta forma encontramos uma resistência equivalente:

$$R_{eq} = \frac{4,7 \times 10^3 \cdot 0\Omega}{4,7 \times 10^3\Omega + 0\Omega} = 0\Omega$$

$$i_f = i_L = \frac{2,1\ V}{0\Omega} \Longrightarrow \boxed{i_L \to \infty} \tag{2.10}$$

d) Como o circuito está ligado por bastante tempo, a corrente: i_L é constante e $\dfrac{di_L}{dt} = 0$, assim:

$$v_L = L\frac{di_L}{dt} \Longrightarrow v_L = L \cdot 0 \Longrightarrow \boxed{v_L = 0\ V} \tag{2.11}$$

Como não existe tensão nos terminais do indutor, ele pode ser substituído por um curto-circuito. Desta forma o resistor de $4,7k\Omega$ perde seu efeito, assim:

$$R_{eq} = 14k\Omega$$

$$i_f = \frac{2,1V}{14 \times 10^3\Omega} = \boxed{i_L = 150\ \mu A} \tag{2.12}$$

$\square$

Questão 2.5

Reduza o Circuito 2.5 para o menor número de componentes possível.

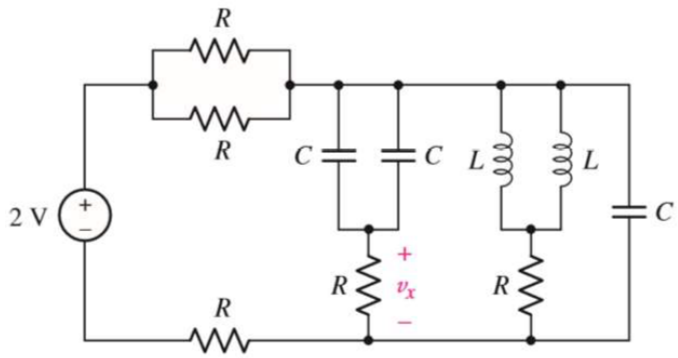


Figura 3 – Circuitos 2.5

Fazendo a associação dos resistores, temos:

$$R_{eq} = \frac{R}{2} + R = \frac{R + 2R}{2} = \frac{3R}{2} \implies \boxed{R_{eq} = 1,5R} \tag{2.13}$$

$$C_{eq} = C + C \implies \boxed{C_{eq} = 2C} \tag{2.14}$$

$$\boxed{L_{eq} = \frac{L}{2}} \tag{2.15}$$

Obtemos assim o seguinte circuito equivalente:

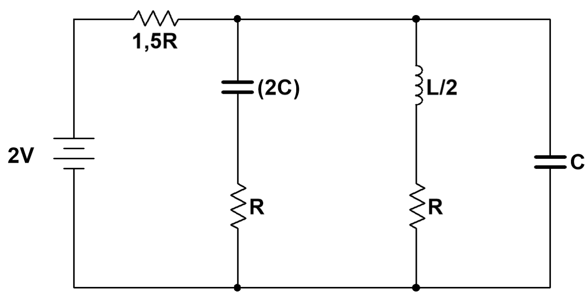


Figura 4 – Circuitos 2.3

$\square$

Questão 2.7

No Circuito 2.7, seja $i_S = 60e^{-200t}mA$ com $i_1(0) = 20mA$.

- (a) Calcule $v(t)$ para todo t.
- (b) Calcule $i_1(t)$ para todo $t \geq 0$.
- (c) Calcule $i_2(t)$ para todo $t \geq 0$.

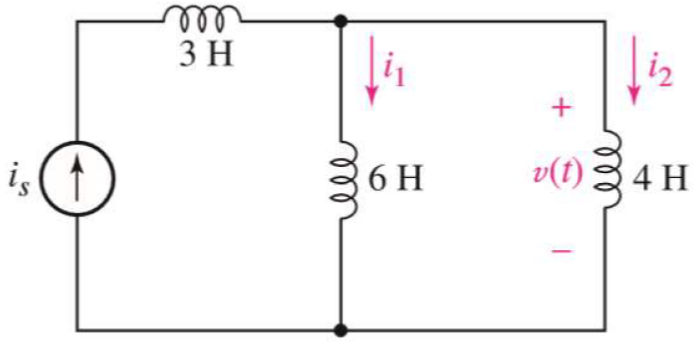


Figura 5 – Circuitos 2.7

Fazendo $t = 0$ para i_S, obtemos $i_S(0) = 60\,mA$, pois $i_1(0) = 20\,mA$. Logo $i_2(0) = 40\,mA$, sendo essas as condições iniciais do circuito.

Calculando a indutância equivalente entre os indutores $6H$ e $4H$, temos:

$$L_{eq} = 4H \parallel 6H = \frac{6H \cdot 4H}{6H + 4H} = 2,4H$$

$a)$ Assim encontramos $v(t)$ para todo t:

$$v(t) = L_{eq} \cdot \frac{di_s(t)}{dt}$$

$$v(t) = 2,4 \cdot (-200) \cdot 60 \times 10^{-3} e^{-200t}$$

$$\boxed{v(t) = -28,8e^{-200t}\ V} \tag{2.16}$$

b) Calculando $i_1(t)$ para $t \geq 0$:

$$i_1(t) = \frac{1}{L_1}\int_0^t v(\tau)d\tau + i_1(0)$$

$$i_1(t) = \frac{1}{6H}\int_0^t -28,8e^{-200\tau}d\tau + 20 \times 10^{-3}$$

$$i_1(t) = 20 \times 10^{-3}A + \frac{-28,8}{6H}\int_0^t e^{-200\tau}d\tau$$

Fazendo,

$$\begin{cases} u = -200\tau \\ du = -200\ d\tau \end{cases}$$

$$i_1(t) = 20 \times 10^{-3}A + \frac{-4,8}{-200}\int_0^t e^{u}du$$

$$i_1(t) = 20 \times 10^{-3}A + 24 \times 10^{-3} \cdot \left[e^{-200\tau}\right]_0^t$$

$$i_1(t) = 20 \times 10^{-3}A + 24 \times 10^{-3} \cdot (e^{-200t} - e^{-200\cdot 0})$$

$$i_1(t) = 20 \times 10^{-3}A + 24 \times 10^{-3} \cdot e^{-200t} - 24 \times 10^{-3}$$

$$\boxed{i_1(t) = -4\ mA + 24 \cdot e^{-200t}\ mA} \tag{2.17}$$

c) Calculando $i_2(t)$ para $t \geq 0$:

$$i_2(t) = \frac{1}{L_2}\int_0^t v(t)d\tau + i_2(0)$$

$$i_2(t) = \frac{1}{4H}\int_0^t -28,8e^{-200\tau}d\tau + 40 \times 10^{-3}$$

$$i_2(t) = 40 \times 10^{-3}A + \frac{-28,8}{4H}\int_0^t e^{-200\tau}d\tau$$

Fazendo,

$$\begin{cases} u = -200\tau \\ du = -200d\tau \end{cases}$$

$$i_2(t) = 40 \times 10^{-3}A + \frac{-7,2}{-200}\int_0^t e^{u}du$$

$$i_2(t) = 40 \times 10^{-3}A + 36 \times 10^{-3} \cdot \left[e^{-200\tau}\right]_0^t$$

$$i_2(t) = 40 \times 10^{-3}A + 36 \times 10^{-3} \cdot (e^{-200t} - e^{-200\cdot 0})$$

$$i_2(t) = 40 \times 10^{-3}A + 36 \times 10^{-3} \cdot e^{-200t} - 36 \times 10^{-3}$$

$$\boxed{i_2(t) = -4\ mA + 36e^{-200t}mA} \tag{2.18}$$

$\square$

Questão 2.9

Supondo que a chave do Circuito 2.9 tenha estado fechada por um longo tempo, calcule $i_L(t)$ em (a) o instante imediatamente antes de a chave abrir, (b) o instante imediatamente depois de a chave abrir, $(c) t = 15.8 \mu s$, $(d) t = 31.5 \mu s$, $(e) t = 78.8 \mu s$.

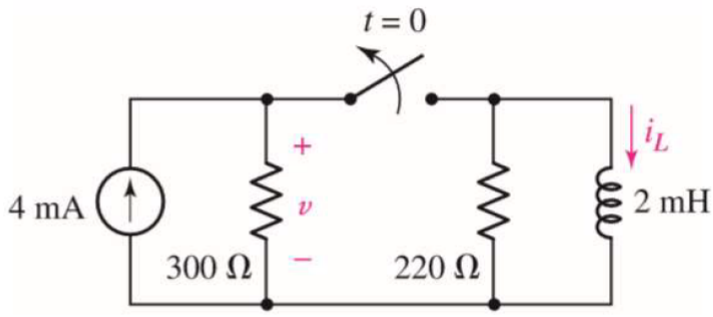


Figura 6 – Circuitos 2.9

$a)$ Encontrando $i_L(t)$ no instante imediatamente antes da chave abrir $I_L(0^-)$:

Como o circuito está ligado por bastante tempo, a corrente: i_L é constante e $\frac{di_L}{dt} = 0$, assim:

$$v_L = L\frac{di_L}{dt} \Longrightarrow v_L = L \cdot 0 \Longrightarrow v_L = 0V$$

Como não existe tensão nos terminais do indutor, ele pode ser substituído por um curto-circuito. Desta forma encontramos uma resistência equivalente:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{300} + \frac{1}{220} + \frac{1}{0} \Longrightarrow R_{eq} = 0\Omega$$

Com isso a corrente passa por todo caminho que não possui resistência, assim:

$$\boxed{i_L = i_f = 4\ mA} \tag{2.19}$$

$b)$ Encontrando $i_L(t)$ no instante imediatamente depois de a chave abrir $I_L(0^+)$:

Como o indutor se opõe à variação de corrente em seus terminais, desta forma a corrente neste elemento se mantém a mesma, portanto:

$$\boxed{i_L(0) = I_L(0^-) = I_L(0^+) = 4\ mA} \tag{2.20}$$

c) Encontrando $i_L(t)$ em $t = 15.8\mu s$

Utilizando a **fórmula da resposta natural** da corrente do circuito RL, temos:

$$i_L(t) = i_L(0) \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t}$$

Substituindo R, L e $i_L(0)$, temos:

$$i_L(t) = 4 \times 10^{-3} \cdot e^{-\dfrac{220\Omega}{2 \times 10^{-3}H} \cdot t}$$
$$i_L(t) = 4 \times 10^{-3} \cdot e^{-110000 \cdot t}$$

Para $i_L(15.8\mu s)$, temos:

$$i_L(15.8\mu s) = 4 \times 10^{-3} \cdot e^{-110000 \cdot 15{,}8 \times 10^{-6}} \ A$$

$$\boxed{i_L(15.8\ \mu s) = 703\ \mu A} \tag{2.21}$$

Da mesma forma, obtemos:

d) Em $t = 31,5\ \mu s$

$$\boxed{i_L(31.5\ \mu s) = 125,10\ \mu A} \tag{2.22}$$

d) Em $t = 78,8\ \mu s$

$$\boxed{i_L(78.8\ \mu s) = 688,01\ nA} \tag{2.23}$$

$\square$

Questão 2.11

Com base no circuito 2.11, calcule as correntes i_1 e i_2 em t igual a: $(a)1ms$, $(b)3ms$.

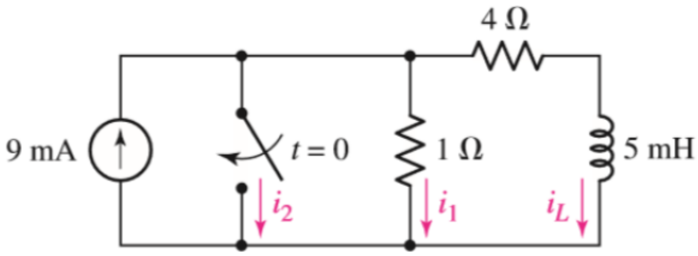


Figura 7 – Circuito 2.11

Calculando $i_L(0^-)$=$i_L(0)$=$i_L(0^+)$:

No regime a corrente no indutor é constante e a tensão entre seus terminais é $0V$, logo ela pode ser considerada como um curto. Então i_L será dada pela corrente em $R_2 = 4\Omega$. Utilizando **divisor de corrente**, temos:

$$i_L(0^-) = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot I_{tot}$$

$$i_L(0^-) = \frac{1}{1+4} \cdot 9mA = 1,8\ mA$$

Com a chave fechada, o circuito resultante é **resposta natural** com o resistor de 4Ω e o indutor de $5mH$. Logo, pode-se obter a expressão da corrente no indutor pela fórmula:

$$i_L(t) = i_f + (i_i - i_f) \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t}$$

$$i_L(t) = 0 + (-1,8 - 0) \cdot e^{-\frac{4}{5 \cdot 10^{-3}} \cdot t}$$

$$i_L(t) = -1,8e^{-800 \cdot t} mA \text{ para } t \geq 0$$

$a)$ Em $t = 1\ ms$, por **LCK**: $i_2 = i_f - i_L$, temos que:

$$i_L(1\ ms) = -1,8e^{-800 \cdot 1 \cdot 10^{-3}}$$

$$i_L(1\ ms) = -808,792 \mu A$$

$$\boxed{i_1(1\ ms) = 0A} \tag{2.24}$$

$$\boxed{i_2(1\ ms) = 9 - 0,808 = 8,192\ mA} \tag{2.25}$$

b) Em $3ms$, temos:

$$i_L(3ms) = -1,8e^{-800 \cdot 3 \cdot 10^{-3}}$$
$$i_L(3ms) = -163\ \mu A$$

$$\boxed{i_1(3ms) = 0\ A} \tag{2.26}$$

$$\boxed{i_2(3\ ms) = 9 - 0,163 = 8,837\ mA} \tag{2.27}$$

□

Questão 2.13

Para o Circuito 2.13, (a) determine $v_L(0^-)$, $v_L(0^+)$, $i_L(0^-)$ e $i_L(0^+)$; (b) Calcule $i_L(150\ ns)$.

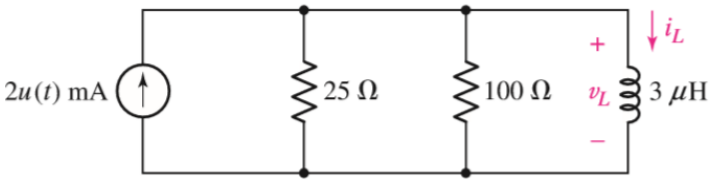


Figura 8 – Circuito 2.13

(a) Determinando $v_L(0^-)$, $v_L(0^+)$, $i_L(0^-)$ e $i_L(0^+)$

Para $t < 0$, a fonte de corrente está **ABERTA**, portanto a corrente no indutor no instante anterior ao chaveamento do circuito é: $i_L(0^-) = 0A$. Como o indutor se opõe à variação de corrente em seus terminais, o valor no instante após o chaveamento é:

$$\boxed{i_L(0^-) = i_L(0^+) = 0\ A} \tag{2.28}$$

A tensão no indutor no instante antes do chaveamento é: $v_L(0^-) = 0\ V$.

Já no instante após o chaveamento, como o indutor se opõe a variação de corrente em seus terminais, a corrente da fonte de corrente se divide nos resistores, por **divisor de corrente**, temos:

$$\boxed{i_1(0^+) = \frac{100}{100 + 25} \cdot 2\ mA = 1,6\ mA} \tag{2.29}$$

$$\boxed{v_L(0^+) = R_{25\Omega} \cdot i_1(0^+) = 40\ mV} \tag{2.30}$$

b) Calculando a constante de tempo do circuito, temos:

$$\tau = \frac{L}{R_{eq}} = \frac{3\ \mu H}{100\Omega \parallel 25\Omega} = \frac{3 \times 10^{-6}}{20} = 150ns$$

Como $\tau = 150\ ns$, o indutor já possui 63,2% da sua corrente final, que em breve analise do circuito, sabemos que será igual a corrente da fonte de corrente. Com isso, a corrente em $i_L(150\ ns)$ é igual a:

$$i_L(150\ ns) = I_f \cdot [1 - e^{\left(\frac{-t}{\tau}\right)}]$$

$$i_L(150\ ns) = 2\ mA \cdot (1 - e^{-1})$$

$$i_L(150\ ns) = 2 \times 10^{-3}\ A \cdot 0,632$$

$$\boxed{i_L(150\ ns) = 1,264\ mA} \tag{2.31}$$

□

Questão 2.15

Para o Circuito 2.15, observe que uma fonte está sempre ligada. (a) Obtenha uma expressão para $i(t)$ válida para todo t.

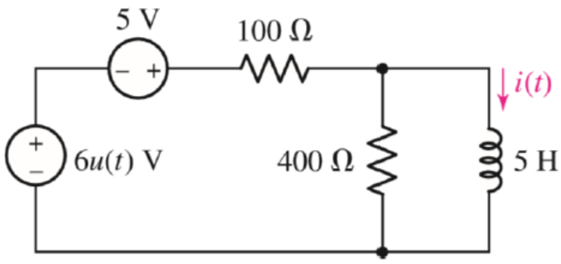


Figura 9 – Circuito 2.15

Para $t < 0$ (Regime 1): Removendo L e calculando o **equivalente de Thévenin**, temos:

$$V_{TH} = \frac{400\Omega}{100\Omega + 400\Omega} \cdot 5\ V = 4\ V$$

$$R_{TH} = 100\Omega \parallel 400\Omega = \frac{100\Omega \cdot 400\Omega}{100\Omega + 400\Omega} = 80\ \Omega$$

Assim,

No regime 1, a corrente no indutor I_0 é:

$$I_0 = \frac{V_{TH}}{R_{TH}} = \frac{4\ V}{80\ \Omega} = 50\ mA$$

Para $t > 0$ (Regime 2): Calculando novamente o **equivalente de Thévenin**, temos:

$$R_{TH} = 80\ \Omega$$

Por **Divisor de tensão**, obtemos:

$$V_{TH} = \frac{400\Omega}{100\Omega + 400\Omega} \cdot 11\ V = 8,8\ V$$

No regime 2, a corrente no indutor I_f é:

$$I_f = \frac{V_{TH}}{R_{TH}} = \frac{8,8\ V}{80\ \Omega} = 110\ mA$$

Calculando a **resposta à um degrau** RL:

$$i(t) = I_f + (I_0 - I_f) \cdot e^{-\tau^{-1} \cdot t}$$
$$\tau^{-1} = \frac{R}{L} = \frac{80}{5} = 16\ s^{-1} \Longrightarrow \tau = 62,5\ ms$$
$$i(t) = 110 \cdot 10^{-3} + (50 \cdot 10^{-3} - 110 \cdot 10^{-3}) \cdot e^{-t/62,5 \cdot 10^{-3}}$$

$$\boxed{i(t) = 110 - 60e^{-16t}\ mA} \quad (2.32)$$

□

Questão 2.17

Obtenha uma expressão para i_1 conforme indicado no Circuito 2.17 que é válida para todos os valores de t.

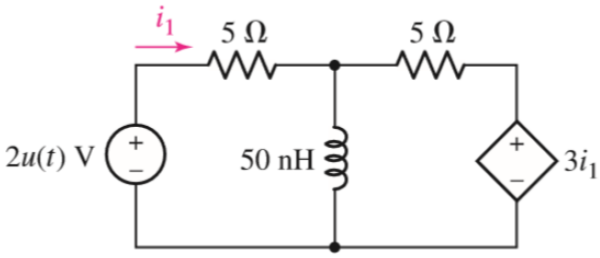
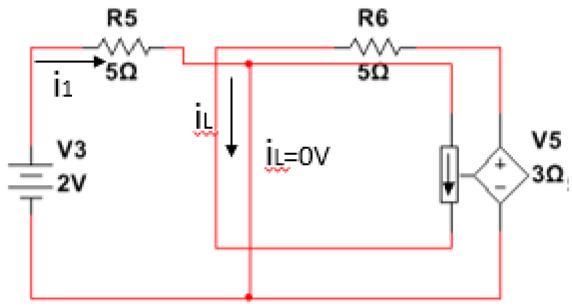


Figura 10 – Circuito 2.17

($Para\ t > 0$). Como o indutor está descarregado, $\begin{cases} i_1 = 0A \\ i_L = 0A \end{cases}$

Para $t >> 0$ (Regime 2), temos:

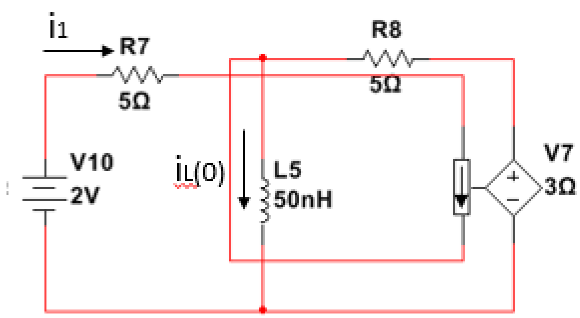


Aplicando **LTK na Malha 1**, temos:

$$-2 + 5i_1 = 0$$

$$i_1(\infty) = \frac{2}{5} = 400\ mA$$

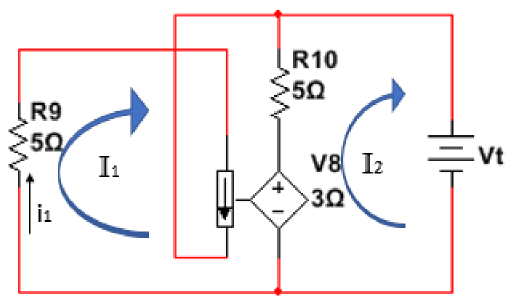
Para $t \geq 0^+$, temos:



Aplicando **LTK na Malha Externa**

$$-2 + 5i_1(0^+) + 5i_1(0^+) + 3i_1(0^+) = 0$$
$$i_1(0^+) = \frac{2}{13} = 153,846\ mA$$

Calculando R_{TH}, sabendo que: $\begin{cases} I_1 = i_1 \\ I_2 = -i_t \end{cases}$



Fazendo a **Análise na Malha 1**, temos:

$$5I_1 + 5(I_1 - I_2) + 3I_1 = 0$$

$$13I_1 - 5I_2 = 0$$

Fazendo a **Análise na Malha 2**, temos:

$$-3I_1 + 5(I_2 - I_1) + V_t = 0$$

$$-8I_1 - 5I_2 = -V_t$$

Obtemos o seguinte sistema de equações: $\begin{cases} 13I_1 - 5I_2 = 0 \\ -8I_1 - 5I_2 = -V_t \end{cases}$, assim:

$$-13V_t = -25i_t$$
$$R_{TH} = \frac{V_t}{i_t} = \frac{25}{13} = 1,9230\ \Omega$$
$$\tau = \frac{L}{R_{TH}} = \frac{50 \times 10^{-9}}{1,9230} = 26\ ns$$

$$\boxed{i_1(t) = 400 - 246,154e^{\frac{-t}{\tau}}\ mA} \tag{2.33}$$

□

Questão 2.19

A chave do Circuito 2.19 esteve fechada por um tempo extremamente longo antes de ser aberta em $t = 0$. Calcule a corrente indicada por i_x em $t = 70\ ms$.

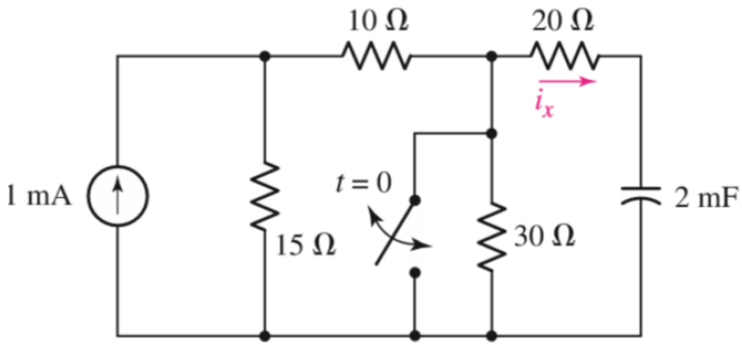
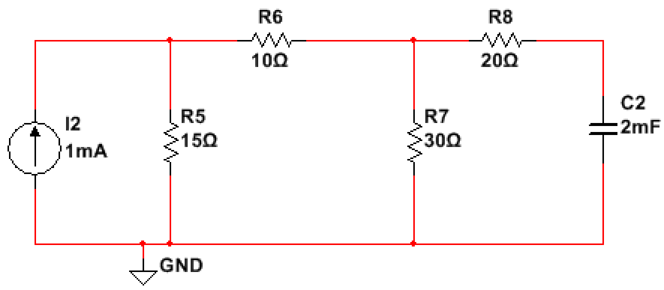
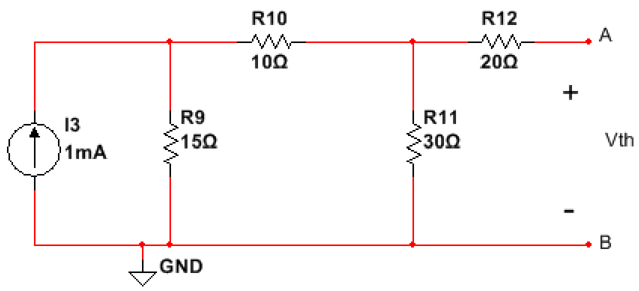


Figura 11 – Circuito 2.19

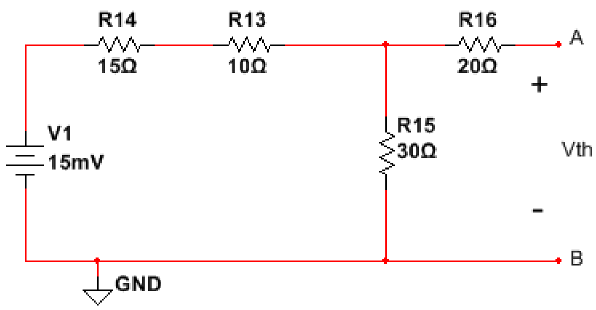
Com $t < 0$, o capacitor e o resistor de 20 Ω estão em curto-circuito, portanto o capacitor está descarregado. Em $t = 0$, calculando as variáveis para encontrar a expressão da corrente, tem-se que:



Removendo o capacitor para podermos calcular o **equivalente de Thévenin**, é possível encontrar V_{TH}, fazendo **transformações de fontes**, assim:



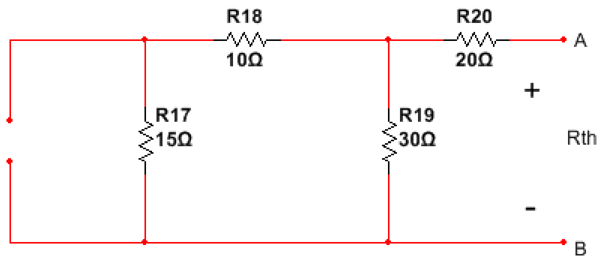
Transformando para fonte de tensão $V_1 = 15\Omega \cdot 1 \times 10^{-3}\ A = 15\ mV$, assim:



Sendo possível calcular o **equivalente de Thévenin** por **divisor de tensão**:

$$V_{TH} = \frac{30}{15 + 10 + 30} \cdot 15\ mV \implies V_{TH} = 8,182\ mV$$

A resistência de Thévenin pode ser encontrada **removendo-se a fonte de tensão**, desta forma a fonte de tensão perde seu efeito, assim:

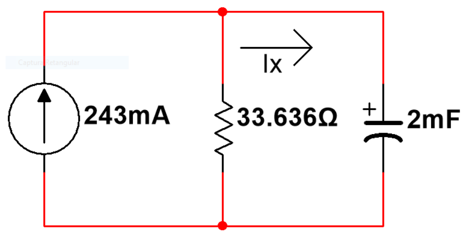


$$R_{TH} = \frac{(15\Omega + 10\Omega) \cdot 30\Omega}{(15\Omega + 10\Omega) + 30\Omega} + 20\Omega \implies R_{TH} = 33,636\ \Omega$$

Transformando o circuito equivalente de Thévenin para o circuito equivalente de Norton e colocando o capacitor de volta ao circuito, temos:

$$I_{NT} = V_{TH} \cdot R_{TH} \implies I_{NT} = 1,182\ mV \cdot 33,636\ \Omega \implies I_{NT} = 243\ mA$$

$$R_{NT} = R_{TH} = 33,636\ \Omega$$



Calculando a constante de tempo τ, temos:

$$\tau = R \cdot C \implies \tau = 33,636\ \Omega \cdot 2 \cdot 10^{-3}\ F \implies \tau = 67,273\ ms$$

A expressão de i_x é dada por $i_x(t) = I_n \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$ *para* $t > 0$, assim:

$$i_x(70\ ms) = 243 \cdot e^{-\frac{70 \times 10^{-3}}{67,273 \times 10^{-3}}}$$

$$\boxed{i_x(70\ ms) = 86\ \mu A} \tag{2.34}$$

$\square$

Questão 2.22

Para um determinado circuito RLC paralelo sem fonte, $R = 1\ k\Omega$, $C = 3\ \mu F$, e L é tal que a resposta do circuito é sobre-amortecida. (a) Determine o valor de L. (b) Escreva a equação para a tensão v sobre o resistor, sabendo-se que $v(0^-) = 9\ V$ e $\left.\frac{dv}{dt}\right|_{t=0^+} = 2\ V/s$.

a) Como a resposta do circuito é superamortecida, temos que:

$$\frac{1}{RC} > \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\frac{1}{1 \cdot 10^3 \cdot 3 \cdot 10^{-6}} > \frac{1}{\sqrt{L \cdot 3 \cdot (10^{-6})}}$$

$$L > 12\ H$$

Como a resposta do circuito é superamortecida, a solução da tensão é dada por:

$$v = A_1 e^{s_1 \cdot t} + A_2 e^{s_2 \cdot t}$$

Calculando s_1 e s_2:

$$s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

$$s_1 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

Assumindo $L = 13H$, temos:

$$s_1, s_2 = \frac{-1}{2 \times 10^3 \times 3 \times 10^{-6}} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{6 \cdot 10^{-3}}\right)^2 - \left(\frac{1}{13 \cdot 3 \cdot 10^{-6}}\right)^2}$$

$$s_1 = -120,442\ rad/s$$

$$s_2 = -212,894\ rad/s$$

Como o capacitor se opõe a variação de tensão $v(0^-)$=$v(0^+)$=9 V

$$\frac{dv(0^+)}{dt} = 2\ V/s$$

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = v(0^+) \\ -120,442 \cdot A_1 - 212,892 \cdot A_2 = 2 \end{cases}$$

$$A_1 = 20,7467\ e\ A_2 = -11,7467$$

Assim, a equação para a tensão v sobre o resistor é:

$$\boxed{v(t) = 20,747 \times e^{-120,442 \cdot t} - 11,747 \times e^{-212,892 \cdot t}\ V} \tag{2.35}$$

□

Questão 2.24

A corrente que circula por um resistor de 5 Ω em um circuito RLC paralelo sem fonte é determinada por $i_R(t) = 2e^{-t} - 3e^{-8t}\ A$, $t > 0$. Determine a corrente máxima e o momento em que ela ocorre.

A corrente máxima ocorre quando:

$$\frac{di_R(t)}{dt} = 0$$

Assim, encontramos a derivada de $i_R(t)$ e igualamos a zero:

$$-2 \cdot e^{-t} + 24 \cdot e^{-8t} = 0$$

$$2 \cdot e^{-t} = 24 \cdot e^{-8t}$$

$$e^{-t} = 12 \cdot e^{-8t}$$

$$ln(e^{-t}) = ln(12) + ln(e^{-8t})$$

$$-t = -8t + ln(12)$$

$$7t = 2,484907$$

$$t = 0,354987\ s$$

$$\boxed{t = 354,987\ ms} \tag{2.36}$$

Calculando $i_R(t)$ em $t = 354,987\ ms$, temos:

$$i_R(354,987\ ms) = 2e^{-354,987 \times 10^{-3}} - 3e^{-8 \cdot 354,987 \times 10^{-3}}\ A$$

$$i_R(354,987\ ms) = 1,402 - 0,175$$

$$\boxed{i_{max} = i_R(354,987\ ms) = 1,227\ A} \tag{2.37}$$

$\square$

Questão 2.26

Obtenha expressões para a corrente $i(t)$ e a tensão $v(t)$ indicadas no Circuito 2.26 que são válidas para todo $t > 0$.

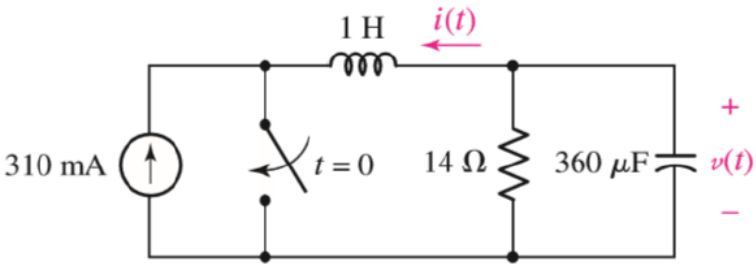


Figura 12 – Circuito 2.26

Calculando α e ω_0:

$$\alpha = \frac{1}{2RC} = \frac{1}{2 \cdot 14 \cdot 360 \times 10^{-6}} = 99,2063 \; rad/s$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{1 \cdot 360 \times 10^{-6}}} = 52,7046 \; rad/s$$

Como $\alpha > \omega_0$, o circuito possui resposta **superamortecida**, onde:

$$v(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

Calculando s_1 e s_2, em que: $\begin{cases} s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \\ s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \end{cases}$

$$s_1 = -99,2063 + \sqrt{(99,2063)^2 - (52,7046)^2} \Longrightarrow s_1 = -15,158 \; rad/s$$

$$s_2 = -99,2063 - \sqrt{(99,2063)^2 - (52,7046)^2} \Longrightarrow s_2 = -183,255 \; rad/s$$

Para calcular A_1 e A_2, é necessário encontrar $v(0^+)$ e $\dfrac{dv(0^+)}{dt} = \dfrac{di_C(0^+)}{C}$:

$$v_C(0^-) = v_C(0^+) = 14 \cdot 310 \times 10^{-3} = 4,34 \; V$$

Com isso, temos que:

$$v(0^+) = A_1 + A_2 \tag{2.38}$$

A corrente no indutor $i_L(0^-)$ é:

$$i_L(0^-) = i_L(0^+) = -310 \; mA$$

Como o capacitor mantém sua tensão em paralelo, $i_R(0^+) = \dfrac{4,34 \; V}{14\Omega} = 310 \; mA$

Aplicando **LCK**, tems que:

$$-i_C(0^+) + i_R(0^+) + i_L(0^+) = 0$$

$$i_C(0^+) = 310\ mA - 310\ mA \Longrightarrow i_C(0^+) = 0A$$

$$\frac{di_C(0^+)}{C} = A_1 s_1 + A_2 s_2 = 0$$

$$-A_1 \cdot 15,158 - A_2 \cdot 183,255 = 0 \tag{2.39}$$

As equações (2.38) e (2.39) formam o sistema a ser resolvido:

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 4,34\ V \\ -A_1 \cdot 15,158 - A_2 \cdot 183,255 = 0 \end{cases}$$

Resolvendo, temos:

$$A_1 = 4,731\ V\ e\ A_2 = -0,3914\ V$$

Assim obtemos $v(t)$ para todo $t \geq 0$:

$$\boxed{v(t) = 4,731e^{-15,158t} - 0,3914e^{183,255}\ V} \tag{2.40}$$

Calculamos $i_R(t)$ e $i_C(t)$ para encontrarmos $i_L(t)$ que é a corrente que passa no indutor (para $t \geq 0$):

$$i_R(t) = \frac{v(t)}{14\Omega} = 337,954e^{-15,158t} - 27,954e^{-183,255}\ mA$$

$$i_C(t) = C\frac{dv}{dt} = 360 \times 10^{-3} \cdot \left(-71,718e^{-15,158t} + 71,718e^{-183,255}\right)\ mA$$
$$i_C(t) = -25,818e^{-15,158t} + 25,818e^{-183,255}\ mA$$

Sabendo que $i_L(t) = i_R(t) - i_C(t)$, assim:

$$\boxed{i_L(t) = i(t) = -312,136e^{-15,158t} + 2,136e^{-183,255}\ mA} \tag{2.41}$$

□

Questão 2.28

Para o Circuito 2.28, considere $i_s(t) = 10u(-t)\ A$. (a) Selecione R_1 para que $v(0^+) = 6\ V$. (b) Calcule $v(2\ ms)$. (c) Determine o tempo de acomodação da tensão no capacitor. (d) O tempo de acomodação da corrente no indutor é o mesmo da sua resposta para o item (c)?

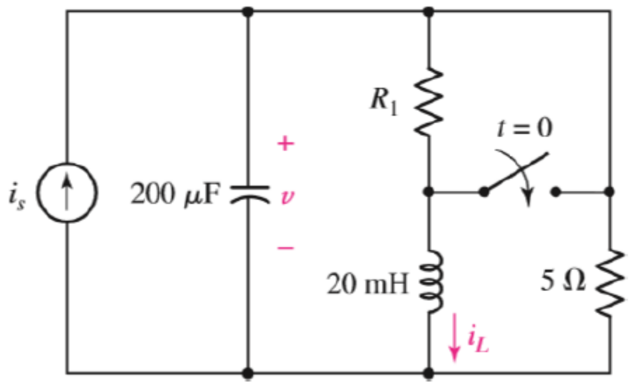


Figura 13 – Circuito 2.28

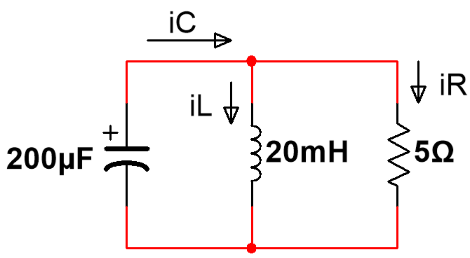
$a)$ Sabemos que $v(0^+) = 6\ V = v(0^-)$, assim:

$$i_R(0^-) = i_s(0^-) - i_{5\Omega}(0^-)$$

$$i_R(0^-) = 10 - \frac{6\ V}{5\ \Omega} = 8,8\ A$$

$$R_1 = \frac{v(0^-)}{i_{R_1}(0^-)} = \frac{6\ V}{8,8\ A} \Longrightarrow \boxed{R_1 = 681,\overline{81}\ m\Omega} \tag{2.42}$$

$b)$ Retirando a fonte de corrente e observando que quando a chave está fechada um curto-circuito elimina o resistor R_1, assim:



Calculando α e ω_0, temos:

$$\alpha = \frac{1}{2RC} = \frac{1}{2 \cdot 5 \cdot 200 \times 10^{-6}} = 500\ rad/s$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{20 \times 10^{-3} \cdot 360 \times 10^{-6}}} = 500\ rad/s$$

Como $\alpha = \omega_0$, a resposta do circuito é **criticamente amortecida** e a equação da tensão, neste caso, é dada por:

$$v(t) = (D_1 t + D_2)e^{-\alpha t}\ V \ \ para \ \ t \geq 0$$

$$v(0^+) = v_0 = D_2 = 6\ V$$
$$\frac{d(0^+)}{dt} = \frac{i_C(0^+)}{C} = D_1 - \alpha D_2$$
$$\frac{-[i_L(0^+) + i_R(0^+)]}{200 \times 10^{-6}} = D_1 - 500 \cdot 6 \Longrightarrow D_1 = 47000$$
$$v(t) = (-47000t + 6)e^{-500t}$$

Calculando $v(t)$ para $t = 2\ ms$, temos:

$$v(2\ ms) = (-47000 \cdot 2 \times 10^{-3} + 6)e^{-500 \cdot 2 \times 10^{-3}}\ V$$

$$v(2\ ms) = -32,373\ V \tag{2.43}$$

c) Calculando o tempo de acomodação da tensão no capacitor:

$$t_S = \frac{4}{\tau \cdot \omega_0} \quad (\textit{critério dos } 2\%)$$

$$\tau = \frac{RC}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

$$t_S = \frac{4}{\frac{5 \cdot 200 \times 10^{-6}}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{20 \times 10^{-3} \cdot 200 \times 10^{-6}}} \cdot 500}$$

$$\boxed{t_S = 32ms} \tag{2.44}$$

d) O tempo de acomodação da corrente no indutor é o mesmo da sua resposta para o item (c) pois o mesmo depende somente de $R, L\ e\ C$

□

Questão 2.30

Para o Circuito 2.30, determine (a) a primeira vez $t > 0$ quando $v(t) = 0$; (b) o tempo de acomodação.

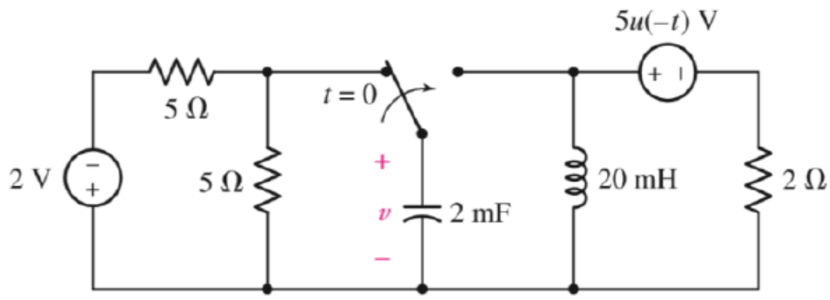


Figura 14 – Circuito 2.30

Para $t < 0$, temos:

Aplicando divisor de tensão, no lado esquerdo do circuito

$$v_C(0^-) = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot V_{total}$$

$$v_C(0^-) = \frac{5\Omega}{5\Omega + 5\Omega} \cdot -2\ V$$

$$v_C(0^-) = -1\ V$$

Aplicando lei de ohm, no lado direito do circuito

$$i_L(0^-) = \frac{V}{R}$$

$$i_L(0^-) = \frac{5}{2} = 2,5\ A$$

Em $t \geq 0$, com a chave fechando outros dois contatos, obtêm-se um circuito RLC, com resposta natural. Natural porque a fonte de tensão do lado direito é $0\ V$. Como não há elemento forçante, o circuito agora é um RLC paralelo.

Calculando α(frequência de neper) e ω_o(frequência angular de ressonância), temos:

$$\alpha = \frac{1}{2RC} \Longrightarrow \alpha = \frac{1}{2 \cdot 2\Omega \cdot 2 \cdot 10^{-3} F} \Longrightarrow \alpha = 125\ rad/s$$

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Longrightarrow \omega_o = \frac{1}{\sqrt{20 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^{-3}}} \Longrightarrow \omega_o = 158,114\ rad/s$$

Como $\omega_o > \alpha$, logo a resposta é *subamortecida*. Com isso, a tensão será dada pela seguinte fórmula:

$$v(t) = B_1 e^{-\alpha t} \cos \omega_d t \ + \ B_2 e^{-\alpha t} \operatorname{sen} \omega_d t \ V$$

$$\omega_d = \sqrt{\omega_o^2 - \alpha^2}$$

$$\omega_d = \sqrt{158,114^2 - 125^2}$$

$$\omega_d = 96,8248 \ rad/s$$

$$B_1 = v(0^-) = v(0) = v(0^+) = -1 \ V$$

$$i_R(0^+) = \frac{v(0^+)}{R}$$

$$i_R(0^+) = \frac{-1 \ V}{2\Omega} = -0,5 \ A$$

Aplicando **LCK**, temos:

$$i_C(0^+) = -i_R(0^+) - i_L(0^+)$$

$$i_C(0^+) = -(-0,5) - 2,5 \ A$$

$$i_C(0^+) = -2 \ A$$

Calculando B_2:

$$\frac{i_C(0^+)}{C} = -\alpha B_1 + \omega_d B_2$$

$$\frac{-2}{2 \cdot 10^{-3}} = -125 \cdot (-1) - 96,8248 B_2$$

$$B_2 = -11,6189 \ V$$

Logo:

$$v(t) = -e^{-125t} \cos 96,8248t - 11,6189 e^{-125t} \operatorname{sen} 96,8248t \ V$$

a) Calculando t pelo **método numérico da secante**, com um erro de 3 casas decimais ($\varepsilon = 10^{-2}$), temos:

n	t_0	t_1	$g(t_0)$	$g(t_1)$	t_2	$g(t_2)$
1	0	$0,035$	-1	$4,80 \times 10^{-2}$	$3,34 \times 10^{-2}$	$3,17 \times 10^{-2} \rightarrow cont$
n	t_1	t_2	$g(t_1)$	$g(t_2)$	t_3	$g(t_3)$
2	$0,035$	$0,033397$	$0,048004$	$3,17 \times 10^{-2}$	$3,03 \times 10^{-2}$	$-3,03 \times 10^{-2} \rightarrow cont$
n	t_2	t_3	$g(t_2)$	$g(t_3)$	t_4	$g(t_4)$
3	$0,033397$	$0,030267$	$0,031743$	$-3,31 \times 10^{-2}$	$0,031865$	$6,42 \times 10^{-3} \rightarrow para$

Tabela 1 – Tabela de iterações do Método da Secante para a Questão 2.30

Como $g(t_4) < \varepsilon$, para $t > 0$, o primeiro t em que $v(t) = 0$ é t_4, logo:

$$\boxed{t = 31,865\ ms} \tag{2.45}$$

b) O tempo de acomodação será dado por:

$$t_s = \frac{4}{\tau \cdot \omega_0}$$

$$\tau = \frac{RC}{2}\sqrt{\frac{1}{LC}}$$

$$t_s = \frac{4}{0,3162 \cdot 158,114}$$

$$\boxed{t = 80\ ms} \tag{2.46}$$

□

Questão 2.32

Os componentes do Circuito 2.32 possuem os seguintes valores: $R = 2\ \Omega$, $C = 1\ mF$, e $L = 2\ mH$. Se $v_c(0^-) = 1\ V$ e inicialmente não circula corrente através do indutor, calcule $i(t)$ nos instantes $t = 1\ ms$, $2\ ms$, e $3\ ms$.

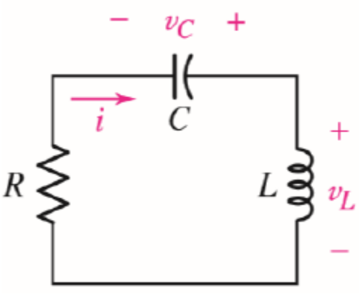


Figura 15 – Circuito 2.32

Calculando α e ω_0 temos:

$$\alpha = \frac{R}{2L} = \frac{2}{2 \cdot 2 \times 10{-}3} = 500\ rad/s$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{2 \times 10{-}3 \cdot 1 \times 10{-}3}} = 707,107\ rad/s$$

Como $\alpha < \omega_0$, a resposta é subamortecida e tem equação:

$$i(t) = B_1 \cdot e^{-\alpha t} \cdot \cos(\omega_d \cdot t) + B_2 \cdot e^{-\alpha t} \cdot \text{sen}\,(\omega_d \cdot t)$$

$$i(0) = B_1 = 0\ A$$

$$\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = \sqrt{707,107^2 - 500^2} = 500\ rad/s$$

$$\frac{di(0)}{dt} = \frac{v(0)}{L} = -\alpha B_1 + \omega_d B_2 = \frac{1}{2 \times 10^{-3}} = -\alpha \cdot 0 + 500 B_2$$

$$B_2 = 1\ A$$

$$i(t) = e^{-500t}\,\text{sen}\,500t\ mA$$

$$\boxed{i(1\ ms) = e^{-500 \times 10^{-3}}\,\text{sen}\,500 \times 10^{-3} = 290,786\ mA} \tag{2.47}$$

$$\boxed{i(2\ ms) = e^{-500 \cdot 2 \times 10^{-3}}\,\text{sen}\,500 \cdot 2 \times 10^{-3} = 309,56\ mA} \tag{2.48}$$

$$\boxed{i(3\ ms) = e^{-500 \cdot 3 \times 10^{-3}}\,\text{sen}\,500 \cdot 3 \times 10^{-3} = 222,571\ mA} \tag{2.49}$$

□

Questão 2.34

Com relação ao Circuito 2.34, calcule $(a)\alpha$; $(b)\omega_0$; $(c)i(0^+)$; $(d)\left.\frac{di}{dt}\right|_{0^+}$; $(e)i(t)$ em $t = 6\ s$

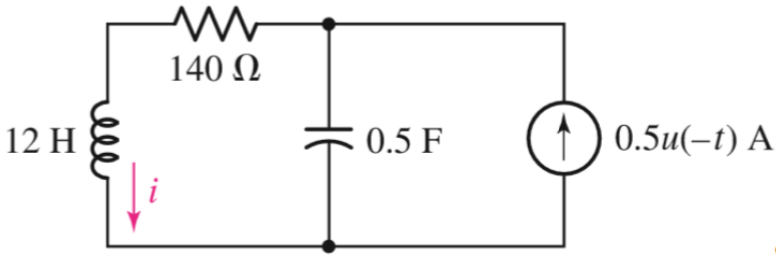


Figura 16 – Circuito 2.34

$a)$ Calculando α

$$\alpha = \frac{R}{2L} = \frac{140}{2 \times 12} = \ 5,833 rad/s$$

$b)$Calculando ω_0

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{12 \cdot 0,5}} = 0,4082\ rad/s$$

Como $\alpha > \omega_0$, a resposta do circuito RLC é superamortecida e tem equação:

$$i(t) = A_1 e^{s_1 \cdot t} + A_2 e^{s_2 \cdot t}$$

Calculando s_1 e s_2:

$$s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -5,833 + \sqrt{5,833^2 - 0,4082^2} = -0,01430\ rad/s$$

$$s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -5,833 - \sqrt{5,833^2 - 0,4082^2} = -11,6517\ rad/s$$

$c)$ Calculando $i(0^+)$, temos:

$$i(0^+) = i(0^-) = i(0) = 500\ mA$$

$$v(0^-) = 70\ V$$

$d)$ Calculando $(d)\left.\frac{di}{dt}\right|_{0^+}$, temos::

$$\frac{di(0^+)}{dt} = \frac{v(0^+)}{L} = \frac{0}{12} = 0\ A/s$$

$$i(0) = A_1 + A_2 = 0.5 \tag{2.50}$$

$$\frac{di(0)}{dt} = s_1 A_1 + s_2 A_2 = -0,01430A_1 - 11,6517 \cdot A_2 = 0 \tag{2.51}$$

As equações (2.50) e (2.51) formam o sistema a ser resolvido:

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 0.5 \\ -0,01430A_1 - 11,6517 \cdot A_2 = 0 \end{cases}$$

$$A_1 = 0,500614\ A/s$$

$$A_2 = -0,000614\ A/s$$

$$i(t) = 0,500614e^{-0,01430 \cdot t} - 0,000614e^{-11,6517 \cdot t}\ A$$

$e)$ Calculando $i(t)$ em $t = 6\ s$, temos:

$$i(6s) = 0,500614e^{-0,01430 \times 6} - 0,000614e^{-11,6517 \times 6}\ A$$

$$\boxed{i(6s) = 459,450\ mA} \tag{2.52}$$

□

Questão 2.36

Considere o Circuito 2.36. Se $v_s(t) = -8 + 2u(t)V$, determine $(a)v_C(0^+)$, $(b)i_L(0^+)$, $(c)v_C(\infty)$.

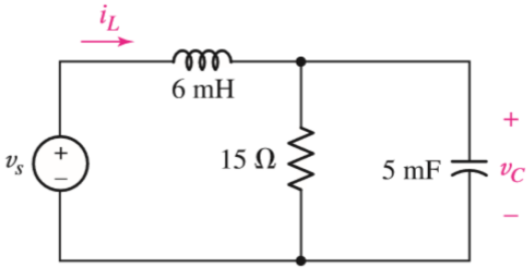


Figura 17 – Circuito 2.36

a)Em $t < 0$, V_s é igual a $-8\ V$. Dessa forma:

$$V_C(0^-) = V_C(0^+)$$

$$\boxed{V_C(0^+) = -8\ V} \tag{2.53}$$

b)A corrente no indutor em 0^+ é a mesma quando $t < 0$, porque o indutor se opõe à variação de corrente em seus terminais, desta forma:

$$i_L(0^-) = i_L(0^+) = \frac{V_s}{R}$$

$$i_L(0^+) = \frac{-8}{15}$$

$$\boxed{i_L(0^+) = -533,333\ mA} \tag{2.54}$$

c)Para $t \to \infty$, a tensão no capacitor já não irá se opor à variações de tensão. Logo:

$$\boxed{V_s(\infty) = V_L(\infty) = -6\ V} \tag{2.55}$$

$\square$

Questão 2.38

Em relação ao Circuito 2.38, (a) obtenha uma expressão para $v(t)$, que é válida para todo $t > 0$; (b) calcule a corrente máxima no indutor e identifique o momento em que ela ocorre; (c) determine o tempo de acomodação.

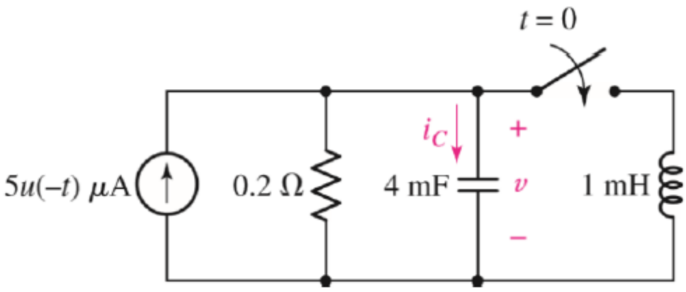


Figura 18 – Circuito 2.38

a) Temos que:

$$v(0^-) = v(0) = 0,2 \cdot 5 \cdot 10^{-6} = 1\ \mu V$$

Para $t > 0$ agora há um circuito RLC paralelo, com resposta natural. Calculando as frequências de neper e angular de ressonância:

$$\alpha = \frac{1}{2RC} \Longrightarrow \alpha = \frac{1}{2 \cdot 0,2 \cdot 4 \cdot 10^{-3}} \Longrightarrow \alpha = 625\ rad/s$$

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Longrightarrow \omega_o = \frac{1}{\sqrt{1 \cdot 10^{-3} \cdot 4 \cdot 10^{-3}}} \Longrightarrow \omega_0 = 500\ rad/s$$

Como $\alpha > \omega_0$, logo a resposta é *superamortecida*. Com isso, a tensão será dada pela seguinte fórmula:

$$v(t) = A_1 e^{s_1 t}\ +\ A_2 e^{s_2 t}$$

$$s_1 = -\alpha\ +\ \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \Longrightarrow s_1 = -625\ +\ \sqrt{625^2 - 500^2} \Longrightarrow s_1 = -250$$

$$s_2 = -\alpha\ -\ \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \Longrightarrow s_2 = -625\ -\ \sqrt{625^2 - 500^2} \Longrightarrow s_2 = -1000$$

Montando o sistema de equações:

$$v(0) = A_1 + A_2 = 0 \tag{2.56}$$

$$i_C(0) = \frac{v(0)}{R} = \frac{-1 \cdot 10^{-6}}{0,2} = -5\mu A$$

$$\frac{dv(0)}{dt} = \frac{i_C(0)}{C} = s_1A_1 \ + \ s_2A_2$$

$$-250A_1 - 1000A_2 = \frac{-5\cdot 10^{-6}}{4\cdot 10^{-3}} \tag{2.57}$$

Com as equações (2.56) e (2.57), podemos encontrando A_1 e A_2 por meio de sistema de equações, assim é possível encontrar a expressão para a tensão:

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 0 \\ -250A_1 - 1000A_2 = \dfrac{-5\cdot 10^{-6}}{4\cdot 10^{-3}} \end{cases}$$

Sabendo que $v(t) = A_1e^{s_1t} \ + \ A_2e^{s_2t}$, temos:

$$\boxed{v(t) = -333,33e^{-250t} \ + \ 1333,33e^{-1000t} \ nV} \tag{2.58}$$

$b)$ Calculando a corrente no indutor, temos:

$$i_L(t) = \frac{1}{L}\int_0^t vd\tau \ i_L(0)$$

$$i_L(t) = \frac{1}{10^{-3}}\int_0^t -333,33e^{-250\tau} \ + \ 1333,33e^{-1000\tau} \ nV \ d\tau$$

$$i_L(t) = \frac{10^{-9}}{10^{-3}}\int_0^t -333,33e^{-250\tau} \ + \ 1333,33e^{-1000\tau}d\tau$$

$$i_L(t) = 10^{-6}(1,333(e^{-250t} - e^0) - 1,333(e^{-1000t} - e^0)) \ A$$

$$i_L(t) = 1,333e^{-250t} - 1,333e^{-1000t} \ \mu A$$

Para calcular a corrente máxima, basta calcular a derivada da função i_L e sua raiz:

$$\frac{di_L(t)}{dt} = -250\cdot 1,333e^{-250t} + 1000\cdot \ 1,333e^{-1000t}$$

Para $di_L(t) = 0$. Logo:

$$333,25e^{-250t} - 1333e^{-1000t} = 0 \Longrightarrow e^{750t} = 4 \Longrightarrow t = \frac{\ln 4}{750}$$

$$\boxed{t = 1,848 \ ms} \tag{2.59}$$

$$\boxed{i_L(1,848ms) = 629,803 \ nA} \tag{2.60}$$

$c)$ O tempo de acomodação será dado por:

$$t_s = \frac{4}{T\omega_o} \Longrightarrow t_s = \frac{4}{500\cdot 0,2} \ s$$

$$\boxed{t = 40 \ ms} \tag{2.61}$$

□

Questão 2.40

O Circuito 2.40 sem fonte é construído utilizando um indutor de 10 mH, um capacitor de 1 mF e um resistor de $1,5\ k\Omega$. (a) Calcule α, ω_D e ω_0. (b) Determine o valor máximo de i e o tempo em que ele ocorre se o indutor inicialmente não armazena energia e $v(0^-) = 9\ V$.

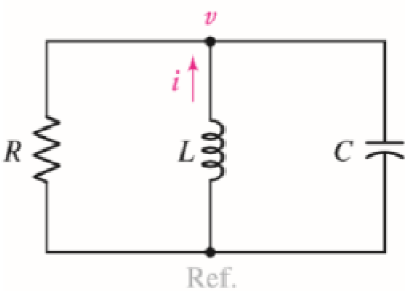


Figura 19 – Circuito 2.40

a) Calculando as frequências de *neper* e angular de ressonância:

$$\alpha = \frac{1}{2RC} \Longrightarrow \alpha = \frac{1}{2 \cdot 1,5 \cdot 10^3 \cdot 10^{-3}} \Longrightarrow \boxed{\alpha = 0,333\ rad/s} \tag{2.62}$$

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Longrightarrow \omega_o = \frac{1}{\sqrt{10 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-3}}} \Longrightarrow \boxed{\omega_0 = 316,23\ rad/s} \tag{2.63}$$

Como $\omega_0 > \alpha$, logo a resposta é *subamortecida*, assim:

$$\omega_d = \sqrt{\omega_o^2 - \alpha^2} \Longrightarrow \omega_d = \sqrt{316,23^2 - 0,333^2} \Longrightarrow \boxed{\omega_d = 316,21\ rad/s} \tag{2.64}$$

b) Com isso, a tensão será dada pela seguinte fórmula:

$$v(t) = B_1 e^{-\alpha t} \cos \omega_d t \ + \ B_2 e^{-\alpha t} \operatorname{sen} \omega_d t$$

$$v(0^-) = B_1 = 9\ V$$

Aplicando **LCK**, temos:

$$i_C(0) = -i_R(0) - i_L(0)$$

$$i_C(0) = -\frac{9}{1500} - 0 = -6 \cdot 10^{-3}\ A$$

$$\frac{-6 \cdot 10^{-3}}{10^{-3}} = -0,333B_1 + 316,23B_2$$

$$B_2 = -0,00949\ V$$

$$v(t) = 9e^{-0,333t}\cos 316,21t \; + \; -0,00949e^{-0,333t}\,\text{sen}\, 316,21t$$

Calculando a expressão da corrente no indutor, temos:

$$i_L(t) = \frac{1}{L}\int_0^t v d\tau \; i_L(0)$$

$$i_L(t) = \frac{1}{10\cdot 10^{-3}}\int_0^t 9e^{-0,333\tau}\cos 316,21\tau - 0,00949e^{-0,333\tau}\,\text{sen}\, 316,21t d\tau$$

Manipulando matematicamente, temos:

$$i_L(t) = 2,846e^{-0,333t}\,\text{sen}\, 316,21t \; + \; 3,833\cdot 10^{-6}e^{-0,333t}\cos 316,21t - 3,833\cdot 10^{-6}\; A$$

Derivando a expressão:

$$\frac{di_L(t)}{dt} = -e^{-0,333t}(0,948\,\text{sen}\, 316,21t \; - \; 899,93\cos 316,21t)$$

Para $\frac{di_L(t)}{dt} = 0$ a corrente será máxima. Logo:

$$-e^{-0,333t}(0,948\,\text{sen}\, 316,21t \; - \; 899,93\cos 316,21t) = 0$$

Calculando t pelo **método numérico da secante**, com um erro de 3 casas decimais ($\varepsilon = 10^{-3}$), temos:

n	t_0	t_1	$g(t_0)$	$g(t_1)$	t_2	$g(t_2)$
1	0	6×10^{-3}	$899,9337$	$-288,92563$	$0,004542$	$119,6646 \to$ *cont.*
n	t_1	t_2	$g(t_1)$	$g(t_2)$	t_3	$g(t_3)$
2	$0,006$	$0,004542$	$-288,926$	$119,664582$	$0,004969$	$-1,32148 \to$ *cont.*
n	t_2	t_3	$g(t_2)$	$g(t_3)$	t_4	$g(t_4)$
3	$0,004542$	$0,004969$	$119,6646$	$-1,32148$	$0,004964$	$0,003708 \to$ *cont.*
n	t_3	t_4	$g(t_3)$	$g(t_4)$	t_5	$g(t_5)$
4	$0,004969$	$0,004964$	$-1,32148$	$0,003708$	$0,004964$	$-7,1\times 10^{-9} \to$ *para*

Tabela 2 – Tabela de iterações do Método da Secante para a Questão 2.40

Portanto, o momento em que ocorre a corrente máxima é:

$$\boxed{t = 4,964\; ms} \tag{2.65}$$

E a corrente máxima é:

$$\boxed{i_{max} = 2,841\; A} \tag{2.66}$$

□

Referências

NILSSON, J.; RIEDEL, S. *Circuitos Elétricos*. 10. ed. Iowa: Pearson, 2015. Citado na página 4.

SADIKU, M. N. O. *Fundamentos de Circuitos Elétricos*. 5. ed. New York: Mc Graw Hill, 2013. Citado na página 4.