Projet de Modélisation Géométrique

Bréhault Gabriel, Rahab Lacroix Thomas

29 novembre 2021

1 Première Partie :

0.
On a :
$H_0(t) = (1-t)^2(1+2t)$,
$H_1(t) = t^2(3-2t)$,
$H_2(t) = t(1-t)^2$,
$H_3(t) = -t^2(1-t)$.

Ce qui implique :
$H_0'(t) = -2(1-t)(1+2t) + 2(1-t)^2$,
$H_1'(t) = 2t(3-2t) - 2t^2$,
$H_2'(t) = (1-t)^2 - 2t(1-t)$,
$H_3'(t) = -2t(1-t) + t^2$.

Soit $k \in [\![0; N-1]\!]$.

$$\begin{aligned} P(u_k) &= P_k H_0(0) + P_{k+1} H_1(0) + (u_{k+1} - u_k) m_k H_2(0) + (u_{k+1} - u_k) m_{k+1} H_3(0) \\ &= P_k \\ P'(u_k) &= P_k H_0'(0) + P_{k+1} H_1'(0) + (u_{k+1} - u_k) m_k H_2'(0) + (u_{k+1} - u_k) m_{k+1} H_3'(0) \\ &= m_k (u_{k+1} - u_k) \end{aligned}$$

Pour P_N on trouve de même : $P(u_N) = P_N$ et $P'(u_N) = m_N(u_N - u_{N-1})$.

Ainsi, la courbe interpole bien les points P_k et les tangentes m_k (à un facteur positif près).

1.
Soient $k \in [\![0; N-1]\!], u \in [u_k, u_{k+1}], t = \frac{u - u_k}{u_{k+1} - u_k}$.

$$P(u) = P_k B_0^3(t) + (P_k + \frac{1}{3} m_k) B_1^3(t) + (P_{k+1} - \frac{1}{3} m_{k+1}) B_2^3(t) + P_{k+1} B_3^3(t)$$

2.

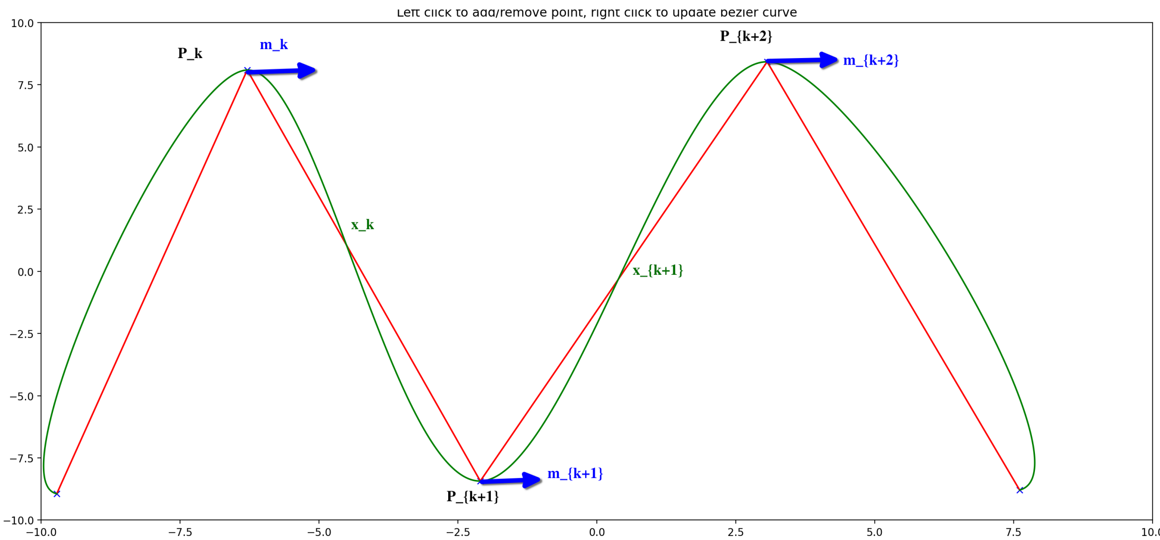

FIGURE 1 –

3.

On considère les deux intersections entre la droite parallèle à (P_0P_1) passant par le point $P_1 - m_1$ et le cercle de centre P_0 de rayon $||m_1||$. De ces deux intersections on choisit la plus proche de $P_1 - m_1$ et on nomme le point résultant A. On pose alors $m_0 = A - P_0$. On procède de manière similiaire pour définir m_N. On a fait ce choix pour diriger globalement la courbe vers P_1 mais avec un léger angle pour ensuite réattaquer correctement suivant la tangente m_1.

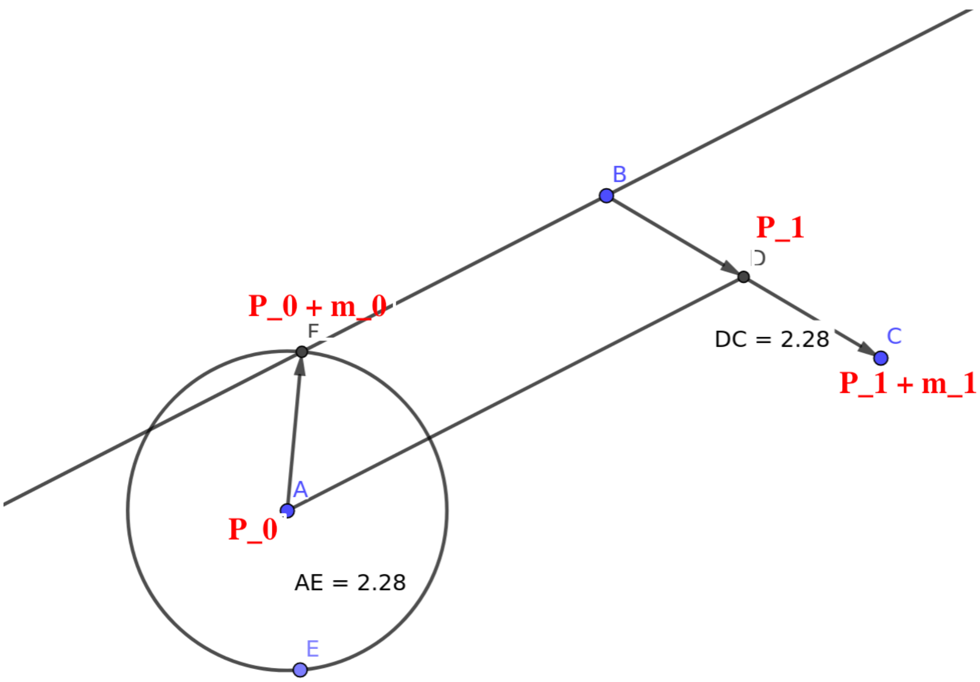

FIGURE 2 –

4.

4.1.

On remarque que plus c est proche de 1, plus le polynôme d'interpolation sera proche des droites reliant les points P_k.

4.2.

Les résultats des Cardinal splines sont très satisfaisants. La courbe est lisse, ses ondulations sont celles attendues, elle préserve la forme des points à interpoler et un polygone convexe donne une spline convexe.

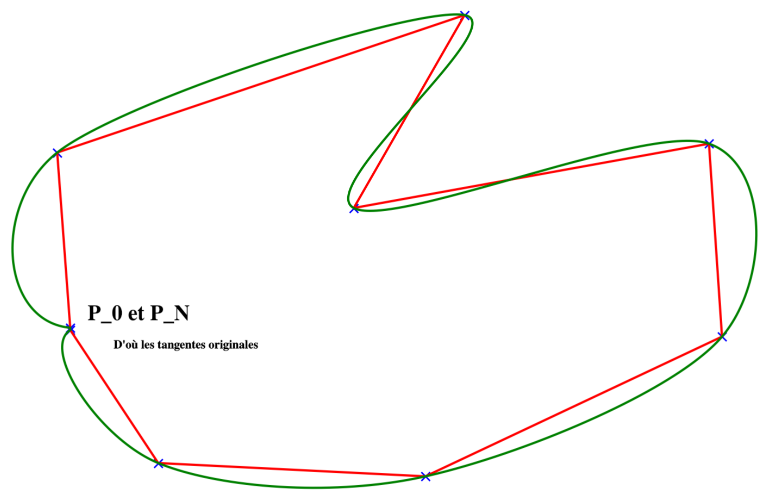

FIGURE 3 –

5.

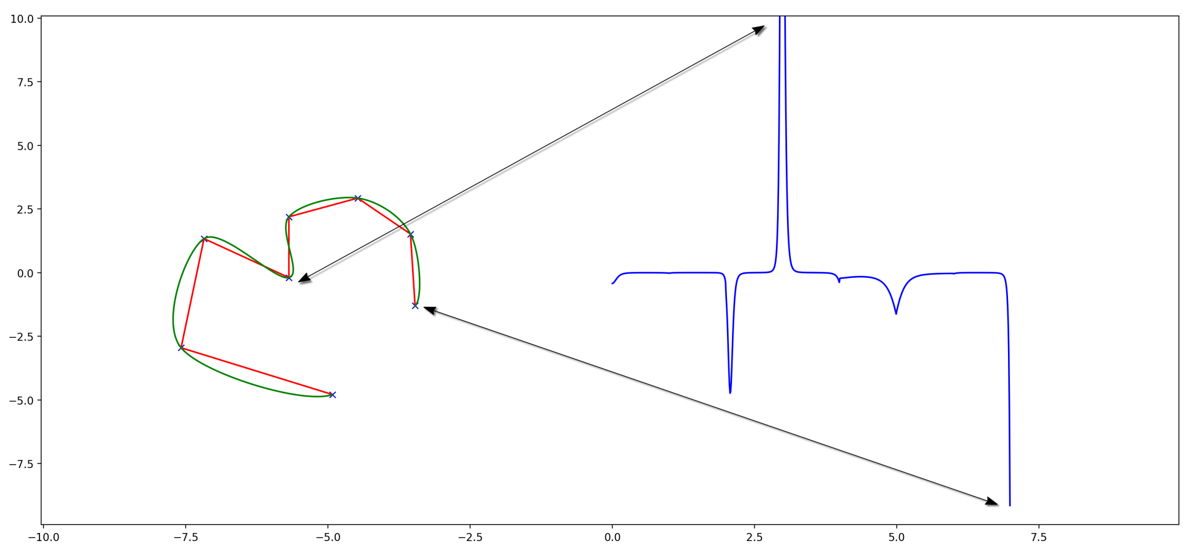

FIGURE 4 –

On observe que la courbure vaut presque zéro loin des points à interpoler. Cependant, lorsque la courbe est très tordue et contrainte proche de certains points à interpoler, la courbure devient très grande. Il est donc clair qu'une faible courbure indique une bonne qualité de courbe.

6.

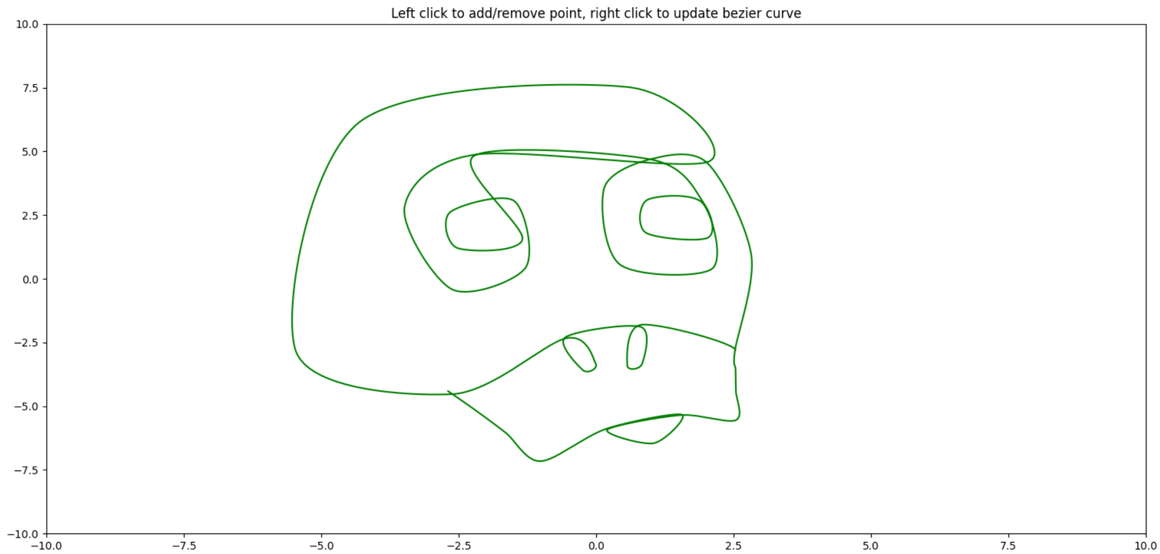

FIGURE 5 – Coin coin le canard

2 Seconde Partie :

7.

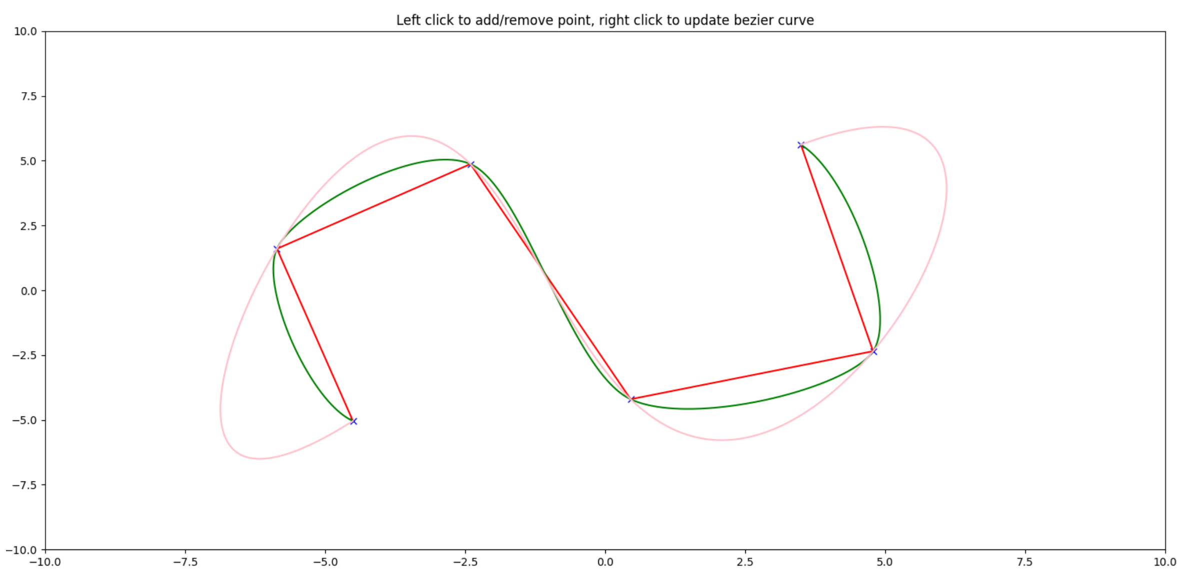

FIGURE 6 –

Avec peu de points, la spline Hermite (ici en vert) et la courbe d'interpolation produite avec l'algorithme d'Aitken Neville (ici en rose) se comportent de façon similaires. On peut noter que la spline Hermite est tout de même plus proche des droites du polynôme.

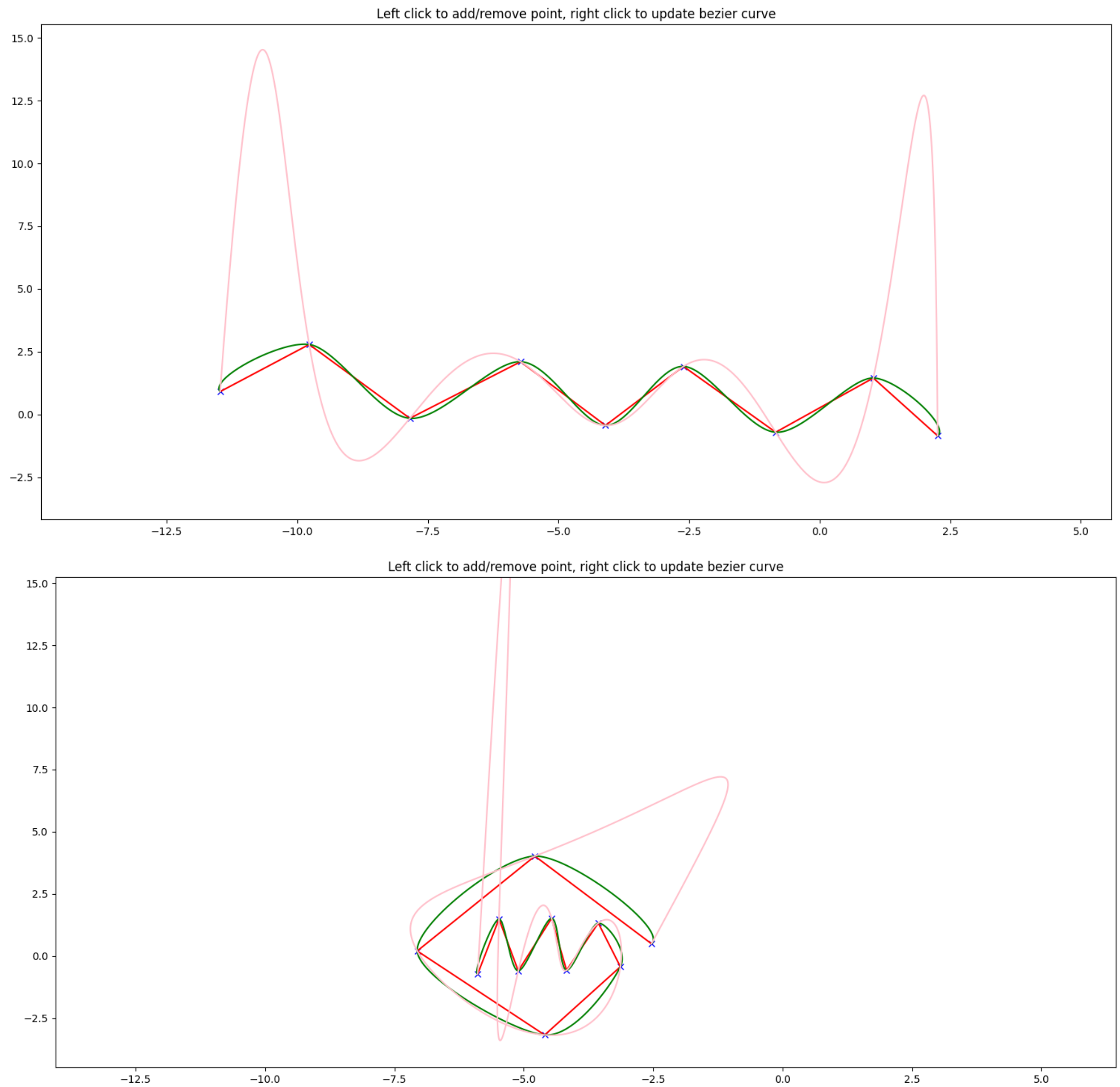

Figure 7 –

Cependant, lorsque le nombre de points augmente, le comportement de la courbe d'interpolation de Lagrange est plus sensible, sa trajectoire oscille bien plus, au niveau des points aux extrémités. Ceci est dû à l'augmentation du degré du polynôme d'interpolation.

8.
Voir code

9.
Parmi nos deux méthodes implémentées, les splines Hermites cubiques sont bien mieux que les polynômes de Lagrange. Le déplacement d'un point où sa supression va modifier localement la courbe pour Hermite et globalement pour Lagrange. De plus, avec un grand nombre de points, Hermite serait comme avec peu de points, alors que pour Lagrange, le degré du polynôme vaut le nombre de points d'interpolation, ainsi ses oscillations pourraient être colossales.