Caminho mais curto e o algoritmo de Dijkstra

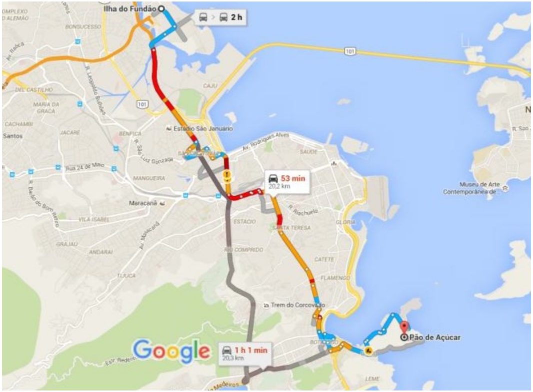
Márcia R. Cerioli

Departamento de Ciência da Computação - IM
e PESC - COPPE
UFRJ

Algoritmos e Grafos

Dezembro de 2015

Problema a ser resolvido a cada consulta do tipo:



Qual o caminho mais curto do DCC ao Pão de Açúcar?

O Problema

Qual o caminho **mais curto** do DCC ao Pão de Açúcar?

Objetivo: Caminho com o menor:

- custo
- distância
- trânsito
- tempo

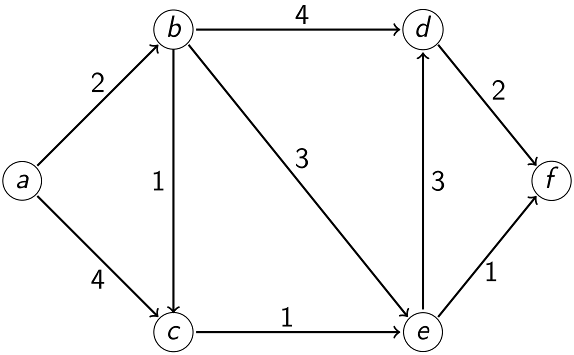
Modelagem em grafos

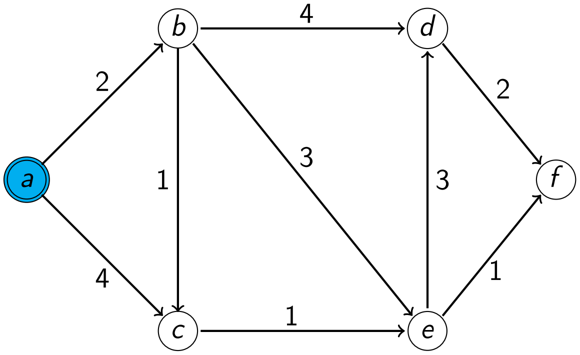
Mundo real	*Modelagem*	*Matemática*
pontos importantes esquinas	vértices	$V(G)$
ruas	arestas	$E(G)$

Modelagem em grafos

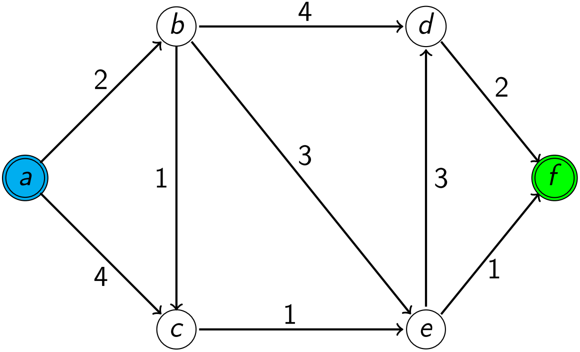
Mundo real	*Modelagem*	*Matemática*
pontos importantes esquinas	vértices	$V(G)$
ruas	arestas	$E(G)$
custo	custo da aresta	$c : E(G) \to \mathbb{Q}^{+}$

Modelagem em grafos





Vértice a é a origem do caminho



e queremos encontrar o menor caminho de a até f.

Propriedades dos caminhos

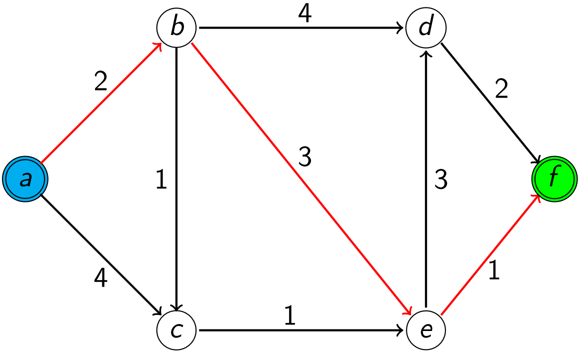
v_0-v_k-**caminho:**
Sequência de vértices $P = v_0 v_1 \ldots v_k$, tal que $v_{i-1} v_i \in E(G)$

Custo de P:

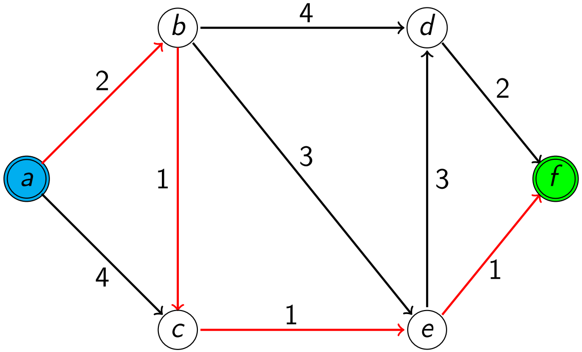
$$Custo(P) = \sum_{i=1}^{k} c(v_{i-1} v_i)$$

Distância entre u e v:

$$dist(u, v) = \min\{Custo(P) : P \text{ é } u\text{-}v\text{-caminho}\}$$



$$Custo({\color{red}P}) = 2 + 3 + 1 = 6$$

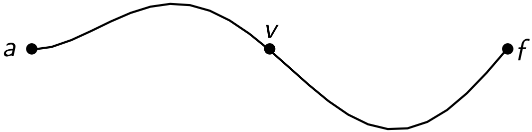


$$Custo(Q) = 2 + 1 + 1 + 1 = 5$$

$$\text{dist(a,f)} = 5$$

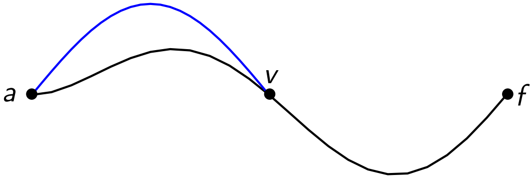
Q é caminho mínimo de a até f

Propriedade dos caminhos mínimos



Se P é um a-f-caminho mínimo e $v \in P$,
então P', a parte de P que vai de a até v, é um a-v-caminho mínimo.

Caminhos mínimos tem a Prop. da Subestrutura Ótima



Se P é um a-f-caminho mínimo e $v \in P$,
então a parte de P que vai de a até v é um a-v-caminho mínimo.

Pois caso contrário, existiria Q um a-v-caminho mínimo, e Q concatenado com P'', a parte de P que vai de v até f, seria um a-f-caminho menor que P (que é mínimo)... um absurdo!

E.W. Dijkstra

Edsger Wybe Dijkstra, em 1956

Holanda

(1930 – 2002)

A motivação de Dijkstra – 1956

Trabalhando como programador
no Centro de Matemática da Holanda – atual CWI
Tarefa de divulgação ao público leigo sobre a capacidade do novo computador - ARMAC

A ideia de Dijkstra – 1956

Menor caminho de Amsterdã a uma cidade escolhida pelo público.

A ideia de Dijkstra – 1956

Menor caminho de Amsterdã a uma cidade escolhida pelo público.

Mas... era necessário ter um programa para determinar tal caminho...

A ideia de Dijkstra – 1956

Menor caminho de Amsterdã a uma cidade escolhida pelo público.

Mas... era necessário ter um programa para determinar tal caminho...

e os algoritmos até então existentes não funcionavam no ARMAC...

A ideia de Dijkstra – 1956

Menor caminho de Amsterdã a uma cidade escolhida pelo público.

Mas... era necessário ter um programa para determinar tal caminho...

e os algoritmos até então existentes não funcionavam no ARMAC...

Calcular e Manter

$d(v)$ = tamanho do menor caminho até então encontrado de a até v

Conjunto S dos vértices *resolvidos*

O algoritmo

Entrada: Grafo $G = (V, E)$, $c : E \to \mathbb{Q}^+$ e $a \in V$
Saída: $d : V \to \mathbb{Q}^+$, onde d é a distância de a até v, $\forall v \in V$

1. $d(a) \leftarrow 0$; $\pi(a) \leftarrow a$
2. Para cada $v \in V \setminus \{a\}$, $d(v) \leftarrow \infty$
3. $Q \leftarrow V$ — Q é dos ainda a resolver
4. $S \leftarrow \emptyset$ — S é o dos resolvidos

O algoritmo

Entrada: Grafo $G = (V, E)$, $c : E \to \mathbb{Q}^+$ e $a \in V$
Saída: $d : V \to \mathbb{Q}^+$, onde d é a distância de a até v, $\forall v \in V$

1. $d(a) \leftarrow 0$; $\pi(a) \leftarrow a$
2. Para cada $v \in V \setminus \{a\}$, $d(v) \leftarrow \infty$
3. $Q \leftarrow V$ — Q é dos ainda a resolver
4. $S \leftarrow \emptyset$ — S é o dos resolvidos

Q é uma fila de prioridades.

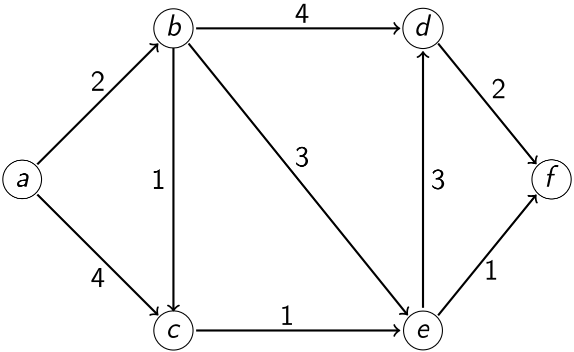
O algoritmo

5. Enquanto $Q \neq \emptyset$
6. $\quad u \leftarrow Extrai_{min}(Q, d)$
7. $\quad$ Para cada $v \in Adj(u) \cap Q$,
8. $\quad\quad$ Se $d(u) + c(uv) < d(v)$,
8. $\quad\quad\quad$ então $d(v) \leftarrow d(u) + c(uv)$
8. $\quad\quad\quad\quad \pi(v) \leftarrow u$
9. $\quad S \leftarrow S \cup \{u\}$

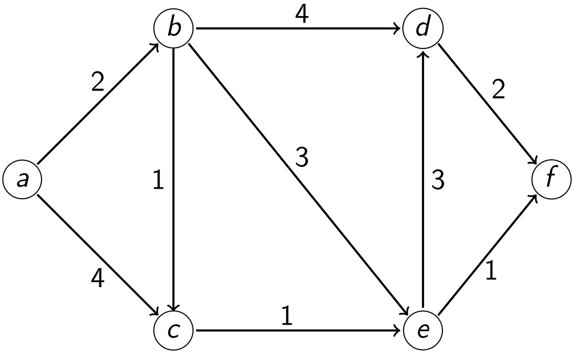
O algoritmo

5. Enquanto $Q \neq \emptyset$
6. $\quad u \leftarrow Extrai_{min}(Q, d)$
7. $\quad$ Para cada $v \in Adj(u) \cap Q$,
8. $\quad\quad$ Se $d(u) + c(uv) < d(v)$,
8. $\quad\quad\quad$ então $d(v) \leftarrow d(u) + c(uv)$
8. $\quad\quad\quad\quad \pi(v) \leftarrow u$
9. $\quad S \leftarrow S \cup \{u\}$

Um exemplo



Um exemplo



Execute o algoritmo de Dijkstra, com o mesmo estilo de tabela que usamos para a execução do algoritmo de Prim.

Prêmio Turing

Edsger W. Dijkstra, em 2002
Prêmio Turing, em 1972

O **algoritmo de Dijkstra** é amplamento usado

- Roteamento de msg em rede de computadores
- Na determinação de caminhos em aplicativos
- e em muitas outras aplicações, de forma indiretas

Estima-se que seja o algoritmo que mais vezes é executado por minuto, no mundo.