

# Inteligência Artificial

## Aula 8 - vídeo 3 - CSP - Constraint Satisfaction Problem

João C. P. da Silva

Dept. Ciência da Computação - UFRJ

6 de outubro de 2020

# Algoritmo de Arco-Consistência

**Ideia:** Podar os domínios o máximo possível antes de selecionar valores.

# Algoritmo de Arco-Consistência

**Ideia:** Podar os domínios o máximo possível antes de selecionar valores.

## Exemplo

Considere as variáveis  $A$  e  $B$  com domínios  $D_A = D_B = \{1, 2, 3, 4\}$  e relacionadas através da restrição  $A < B$ .

O que ocorre quando temos o valor  $A = 4$ ?

# Algoritmo de Arco-Consistência

**Ideia:** Podar os domínios o máximo possível antes de selecionar valores.

## Exemplo

Considere as variáveis  $A$  e  $B$  com domínios  $D_A = D_B = \{1, 2, 3, 4\}$  e relacionadas através da restrição  $A < B$ .

O que ocorre quando temos o valor  $A = 4$ ?

Para este valor  $A$  é inconsistente com os valores de  $B$ .

# Algoritmo de Arco-Consistência

- Quando uma restrição possui apenas uma variável no seu escopo, dizemos que o arco é **domínio consistente** se todo valor da variável satisfaz a restrição.

# Algoritmo de Arco-Consistência

- Quando uma restrição possui apenas uma variável no seu escopo, dizemos que o arco é **domínio consistente** se todo valor da variável satisfaz a restrição.

## Exemplo

$$B \neq 3$$

$$\text{scope}(B \neq 3) = \{B\}.$$

Caso  $D_B = \{1, 2, 3, 4\}$ , o arco  $\langle B, B \neq 3 \rangle$  não é domínio consistente.

# Algoritmo de Arco-Consistência

- Quando uma restrição possui apenas uma variável no seu escopo, dizemos que o arco é **domínio consistente** se todo valor da variável satisfaz a restrição.

## Exemplo

$$B \neq 3$$

$$\text{scope}(B \neq 3) = \{B\}.$$

Caso  $D_B = \{1, 2, 3, 4\}$ , o arco  $\langle B, B \neq 3 \rangle$  não é domínio consistente.

Caso  $D'_B = \{1, 2, 4\}$ , o arco  $\langle B, B \neq 3 \rangle$  é domínio consistente.

# Algoritmo de Arco-Consistência

- Restrição  $r$  com escopo  $\{X, Y_1, \dots, Y_k\}$ .
- $\langle X, r \rangle$  é **arco-consistente** se,  $\forall x \in D_X, \exists y_1, \dots, y_k$  onde  $y_i \in D_{Y_i}$ , tal que  $r(X = x, Y_1 = y_1, \dots, Y_k = y_k)$  é satisfeita.



# Algoritmo de Arco-Consistência

- Restrição  $r$  com escopo  $\{X, Y_1, \dots, Y_k\}$ .
- $\langle X, r \rangle$  é **arco-consistente** se,  $\forall x \in D_X, \exists y_1, \dots, y_k$  onde  $y_i \in D_{Y_i}$ , tal que  $r(X = x, Y_1 = y_1, \dots, Y_k = y_k)$  é satisfeita.

Ou em um caso mais simples. quando temos somente 2 variáveis:

# Algoritmo de Arco-Consistência

- Restrição  $r$  com escopo  $\{X, Y_1, \dots, Y_k\}$ .
- $\langle X, r \rangle$  é **arco-consistente** se,  $\forall x \in D_X, \exists y_1, \dots, y_k$  onde  $y_i \in D_{Y_i}$ , tal que  $r(X = x, Y_1 = y_1, \dots, Y_k = y_k)$  é satisfeita.

Ou em um caso mais simples. quando temos somente 2 variáveis:

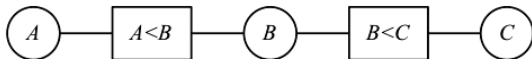
- Restrição  $r$  com escopo  $\{X, Y\}$ .
- $\langle X, r \rangle$  é **arco-consistente** se,  $\forall x \in D_X, \exists y \in D_Y$ , tal que  $r(X = x, Y = y)$  é satisfeita.

A rede é **arco-consistente** se todos os seus arcos são arco-consistentes.

# Algoritmo de Arco-Consistência

## Exemplo

- **Variáveis:**  $A, B, C$
- **Domínio:**  $D_A = D_B = D_C = \{1, 2, 3, 4\}$
- **Restrições:**  $A < B, B < C$



$\text{scope}(A < B) = \{A, B\}$  e  $\text{scope}(B < C) = \{B, C\}$

### Arcos

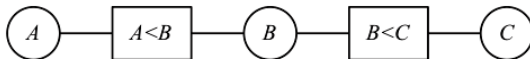
$\langle A, A < B \rangle, \langle B, A < B \rangle,$   
 $\langle B, B < C \rangle, \langle C, B < C \rangle$

# Algoritmo de Arco-Consistência

## Exemplo

Variável	Domínio
A	{1,2,3,4}
B	{1,2,3,4}
C	{1,2,3,4}

Arcos	Examinado
$\langle A, A < B \rangle$	
$\langle B, A < B \rangle$	
$\langle B, B < C \rangle$	
$\langle C, B < C \rangle$	



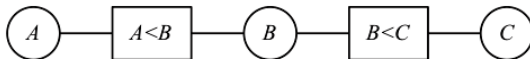
- Selecionar um arco:

# Algoritmo de Arco-Consistência

## Exemplo

Variável	Domínio
A	{1,2,3,4}
B	{1,2,3,4}
C	{1,2,3,4}

Arcos	Examinado
$\langle A, A < B \rangle$	
$\langle B, A < B \rangle$	
$\langle B, B < C \rangle$	
$\langle C, B < C \rangle$	



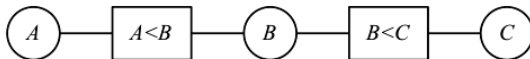
- Selecionar um arco:  $\langle A, A < B \rangle$

# Algoritmo de Arco-Consistência

## Exemplo

Variável	Domínio
A	{1,2,3,4}
B	{1,2,3,4}
C	{1,2,3,4}

Arcos	Examinado
$\langle A, A < B \rangle$	x
$\langle B, A < B \rangle$	
$\langle B, B < C \rangle$	
$\langle C, B < C \rangle$	



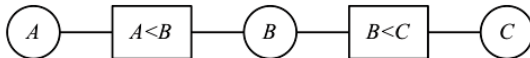
- Selecionar um arco:  $\langle A, A < B \rangle$

# Algoritmo de Arco-Consistência

## Exemplo

Variável	Domínio
A	{1,2,3,4}
B	{1,2,3,4}
C	{1,2,3,4}

Arcos	Examinado
$\langle A, A < B \rangle$	x
$\langle B, A < B \rangle$	
$\langle B, B < C \rangle$	
$\langle C, B < C \rangle$	



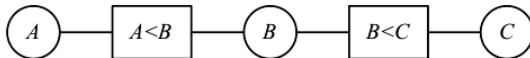
- Selecionar um arco:  $\langle A, A < B \rangle$
- Verificar se  $\langle A, A < B \rangle$  é arco-consistente:

# Algoritmo de Arco-Consistência

## Exemplo

Variável	Domínio
A	{1,2,3,4}
B	{1,2,3,4}
C	{1,2,3,4}

Arcos	Examinado
$\langle A, A < B \rangle$	x
$\langle B, A < B \rangle$	
$\langle B, B < C \rangle$	
$\langle C, B < C \rangle$	



- Selecionar um arco:  $\langle A, A < B \rangle$
- Verificar se  $\langle A, A < B \rangle$  é arco-consistente: Não é para  $A = 4$



# Algoritmo de Arco-Consistência

## Exemplo

Variável	Domínio
A	{1,2,3,4}
B	{1,2,3,4}
C	{1,2,3,4}

Arcos	Examinado
$\langle A, A < B \rangle$	x
$\langle B, A < B \rangle$	
$\langle B, B < C \rangle$	
$\langle C, B < C \rangle$	



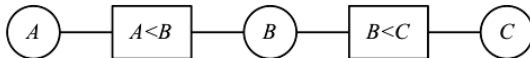
- Selecionar um arco:  $\langle A, A < B \rangle$
- Verificar se  $\langle A, A < B \rangle$  é arco-consistente: Não é para  $A = 4$
- Obter novo domínio da variável:

# Algoritmo de Arco-Consistência

## Exemplo

Variável	Domínio
A	{1,2,3,4}
B	{1,2,3,4}
C	{1,2,3,4}

Arcos	Examinado
$\langle A, A < B \rangle$	x
$\langle B, A < B \rangle$	
$\langle B, B < C \rangle$	
$\langle C, B < C \rangle$	



- Selecionar um arco:  $\langle A, A < B \rangle$
- Verificar se  $\langle A, A < B \rangle$  é arco-consistente: Não é para  $A = 4$
- Obter novo domínio da variável:  $A = \{1, 2, 3\}$

# Algoritmo de Arco-Consistência

## Exemplo

Variável	Domínio
A	{1,2,3}
B	{1,2,3,4}
C	{1,2,3,4}

Arcos	Examinado
$\langle A, A < B \rangle$	x
$\langle B, A < B \rangle$	
$\langle B, B < C \rangle$	
$\langle C, B < C \rangle$	



- Selecionar um arco:  $\langle A, A < B \rangle$
- Verificar se  $\langle A, A < B \rangle$  é arco-consistente: Não é para  $A = 4$
- Obter novo domínio da variável:  $A = \{1, 2, 3\}$
- Reavaliar restrições que podem ter sido afetadas pela mudança no domínio da variável:

# Algoritmo de Arco-Consistência

## Exemplo

Variável	Domínio
A	{1,2,3}
B	{1,2,3,4}
C	{1,2,3,4}

Arcos	Examinado
$\langle A, A < B \rangle$	x
$\langle B, A < B \rangle$	
$\langle B, B < C \rangle$	
$\langle C, B < C \rangle$	



- Selecionar um arco:  $\langle A, A < B \rangle$
- Verificar se  $\langle A, A < B \rangle$  é arco-consistente: Não é para  $A = 4$
- Obter novo domínio da variável:  $A = \{1, 2, 3\}$
- Reavaliar restrições que podem ter sido afetadas pela mudança no domínio da variável: Procure por restrições que envolvam  $A$ , mas que sejam diferentes de  $A < B$  e que tenham no primeiro argumento do arco uma variável diferente de  $A$ .

# Algoritmo de Arco-Consistência

## Exemplo

Variável	Domínio
A	{1,2,3}
B	{1,2,3,4}
C	{1,2,3,4}

Arcos	Examinado
$\langle A, A < B \rangle$	x
$\langle B, A < B \rangle$	
$\langle B, B < C \rangle$	
$\langle C, B < C \rangle$	



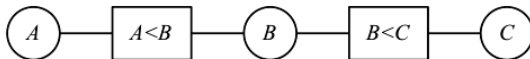
- Selecionar um arco:  $\langle A, A < B \rangle$
- Verificar se  $\langle A, A < B \rangle$  é arco-consistente: Não é para  $A = 4$
- Obter novo domínio da variável:  $A = \{1, 2, 3\}$
- Reavaliar restrições que podem ter sido afetadas pela mudança no domínio da variável: Não existe.

# Algoritmo de Arco-Consistência

## Exemplo

Variável	Domínio
A	{1,2,3}
B	{1,2,3,4}
C	{1,2,3,4}

Arcos	Examinado
$\langle A, A < B \rangle$	x
$\langle B, A < B \rangle$	
$\langle B, B < C \rangle$	
$\langle C, B < C \rangle$	



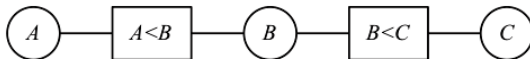
- Selecionar um arco:  $\langle B, A < B \rangle$

# Algoritmo de Arco-Consistência

## Exemplo

Variável	Domínio
A	{1,2,3}
B	{1,2,3,4}
C	{1,2,3,4}

Arcos	Examinado
$\langle A, A < B \rangle$	x
$\langle B, A < B \rangle$	x
$\langle B, B < C \rangle$	
$\langle C, B < C \rangle$	



- Selecionar um arco:  $\langle B, A < B \rangle$

# Algoritmo de Arco-Consistência

## Exemplo

Variável	Domínio
A	{1,2,3}
B	{1,2,3,4}
C	{1,2,3,4}

Arcos	Examinado
$\langle A, A < B \rangle$	x
$\langle B, A < B \rangle$	x
$\langle B, B < C \rangle$	
$\langle C, B < C \rangle$	



- Selecionar um arco:  $\langle B, A < B \rangle$
- Verificar se  $\langle B, A < B \rangle$  é arco-consistente:



# Algoritmo de Arco-Consistência

## Exemplo

Variável	Domínio
A	{1,2,3}
B	{1,2,3,4}
C	{1,2,3,4}

Arcos	Examinado
$\langle A, A < B \rangle$	x
$\langle B, A < B \rangle$	x
$\langle B, B < C \rangle$	
$\langle C, B < C \rangle$	



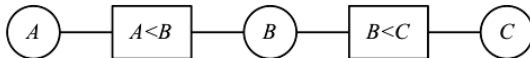
- Selecionar um arco:  $\langle B, A < B \rangle$
- Verificar se  $\langle B, A < B \rangle$  é arco-consistente: Não é para  $B = 1$

# Algoritmo de Arco-Consistência

## Exemplo

Variável	Domínio
A	{1,2,3}
B	{1,2,3,4}
C	{1,2,3,4}

Arcos	Examinado
$\langle A, A < B \rangle$	x
$\langle B, A < B \rangle$	x
$\langle B, B < C \rangle$	
$\langle C, B < C \rangle$	



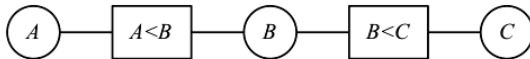
- Selecionar um arco:  $\langle B, A < B \rangle$
- Verificar se  $\langle B, A < B \rangle$  é arco-consistente: Não é para  $B = 1$
- Obter novo domínio da variável:

# Algoritmo de Arco-Consistência

## Exemplo

Variável	Domínio
A	{1,2,3}
B	{1,2,3,4}
C	{1,2,3,4}

Arcos	Examinado
$\langle A, A < B \rangle$	x
$\langle B, A < B \rangle$	x
$\langle B, B < C \rangle$	
$\langle C, B < C \rangle$	



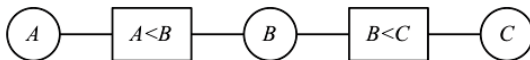
- Selecionar um arco:  $\langle B, A < B \rangle$
- Verificar se  $\langle B, A < B \rangle$  é arco-consistente: Não é para  $B = 1$
- Obter novo domínio da variável:  $B = \{2, 3, 4\}$

# Algoritmo de Arco-Consistência

## Exemplo

Variável	Domínio
A	{1,2,3}
B	{2,3,4}
C	{1,2,3,4}

Arcos	Examinado
$\langle A, A < B \rangle$	x
$\langle B, A < B \rangle$	x
$\langle B, B < C \rangle$	
$\langle C, B < C \rangle$	



- Selecionar um arco:  $\langle B, A < B \rangle$
- Verificar se  $\langle B, A < B \rangle$  é arco-consistente: Não é para  $B = 1$
- Obter novo domínio da variável:  $B = \{2, 3, 4\}$
- Reavaliar restrições que podem ter sido afetadas pela mudança no domínio da variável: Procure por restrições que envolvam  $B$ , mas que sejam diferentes de  $A < B$  e que tenham no primeiro argumento do arco uma variável diferente de  $B$ .

# Algoritmo de Arco-Consistência

## Exemplo

Variável	Domínio
A	{1,2,3}
B	{2,3,4}
C	{1,2,3,4}

Arcos	Examinado
$\langle A, A < B \rangle$	x
$\langle B, A < B \rangle$	x
$\langle B, B < C \rangle$	
$\langle C, B < C \rangle$	



- Selecionar um arco:  $\langle B, A < B \rangle$
- Verificar se  $\langle B, A < B \rangle$  é arco-consistente: Não é para  $B = 1$
- Obter novo domínio da variável:  $B = \{2, 3, 4\}$
- Reavaliar restrições que podem ter sido afetadas pela mudança no domínio da variável: reavaliar  $\langle C, B < C \rangle$

# Algoritmo de Arco-Consistência

## Exemplo

Variável	Domínio
A	{1,2,3}
B	{2,3,4}
C	{1,2,3,4}

Arcos	Examinados
$\langle A, A < B \rangle$	x
$\langle B, A < B \rangle$	x
$\langle B, B < C \rangle$	x
$\langle C, B < C \rangle$	x



- Após a execução do algoritmo de arco-consistência, obtemos:

$$A = \{1, 2\}, B = \{2, 3\} \text{ e } C = \{3, 4\}$$

# Algoritmo de Arco-Consistência

- Se, ao final da execução do algoritmo de arco-consistência:
  - os domínios de todas as variáveis são não-vazios e
  - existe alguma variável  $X$  com domínio com mais de um elementoentão divida o domínio em dois e reexecute o algoritmo de arco-consistência para cada um dos novos domínios.
- Quando o domínio de alguma variável fica vazio, o problema não possui solução

# Algoritmo de Arco-Consistência

## Exemplo

Variável	Domínio
A	{1,2,3}
B	{2,3,4}
C	{1,2,3,4}

Arcos	Examinados
$\langle A, A < B \rangle$	x
$\langle B, A < B \rangle$	x
$\langle B, B < C \rangle$	x
$\langle C, B < C \rangle$	x



- Após a execução do algoritmo de arco-consistência, obtemos:

$$A = \{1, 2\}, B = \{2, 3\} \text{ e } C = \{3, 4\}$$



# Algoritmo de Arco-Consistência

## Exemplo

Variável	Domínio
A	{1,2,3}
B	{2,3,4}
C	{1,2,3,4}

Arcos	Examinados
$\langle A, A < B \rangle$	x
$\langle B, A < B \rangle$	x
$\langle B, B < C \rangle$	x
$\langle C, B < C \rangle$	x



- Após a execução do algoritmo de arco-consistência, obtemos:

$$A = \{1, 2\}, B = \{2, 3\} \text{ e } C = \{3, 4\}$$

- Escolha uma das variáveis e reexecute o algoritmo. Por exemplo, se você escolher a variável  $B$ :

$$A = \{1, 2\}, B = \{2\} \text{ e } C = \{3, 4\}$$

$$A = \{1, 2\}, B = \{3\} \text{ e } C = \{3, 4\}$$

# Algoritmo de Arco-Consistência

```
1: procedure GAC(V, dom, C)
2:   Inputs
3:     V: a set of variables
4:     dom: a function such that dom(X) is the domain of variable X
5:     C: set of constraints to be satisfied
6:   Output
7:     arc-consistent domains for each variable
8:   Local
9:     DX is a set of values for each variable X
10:    TDA is a set of arcs
11:    for each variable X do
12:      DX ← dom(X)
13:      TDA ← {⟨X, c⟩ | c ∈ C and X ∈ scope(c)}
14:      while TDA ≠ {} do
15:        select ⟨X, c⟩ ∈ TDA;
16:        TDA ← TDA \ {⟨X, c⟩};
17:        NDX ← {x | x ∈ DX and some {X = x, Y1 = y1, ..., Yk = yk} ∈ c
        where yi ∈ DYi for all i}
18:        if NDX ≠ DX then
19:          TDA ← TDA ∪ {⟨Z, c'⟩ | X ∈ scope(c'), c' is not c, Z ∈ scope(c') \
            {X}}
20:          DX ← NDX
21:    return {DX | X is a variable}
```

# Inteligência Artificial

## Aula 8 - vídeo 3 - CSP - Constraint Satisfaction Problem

João C. P. da Silva

Dept. Ciência da Computação - UFRJ

6 de outubro de 2020

# Algoritmo de Arco-Consistência

- **Variáveis** :  $A, B, C, D, E$

- **Domínios**

$$D_A = \{1, 2, 3, 4\}, D_B = \{1, 2, 3, 4\}, D_C = \{1, 2, 3, 4\}, \\ D_D = \{1, 2, 3, 4\}, D_E = \{1, 2, 3, 4\}.$$

- **Restrições**

$$(B \neq 3), (C \neq 2), (A \neq B), (B \neq C), \\ (C < D), (A = D), (E < A), (E < B), (E < C), \\ (E < D), (B \neq D).$$

Alguma variável não é domínio consistente?

# Algoritmo de Arco-Consistência

- **Variáveis** :  $A, B, C, D, E$

- **Domínios**

$$D_A = \{1, 2, 3, 4\}, D_B = \{1, 2, 3, 4\}, D_C = \{1, 2, 3, 4\}, \\ D_D = \{1, 2, 3, 4\}, D_E = \{1, 2, 3, 4\}.$$

- **Restrições**

$$(B \neq 3), (C \neq 2), (A \neq B), (B \neq C), \\ (C < D), (A = D), (E < A), (E < B), (E < C), \\ (E < D), (B \neq D).$$

Alguma variável não é domínio consistente? **B e C**

# Algoritmo de Arco-Consistência

- **Variáveis** :  $A, B, C, D, E$

- **Domínios**

$$D_A = \{1, 2, 3, 4\}, D_B = \{1, 2, 4\}, D_C = \{1, 3, 4\}, \\ D_D = \{1, 2, 3, 4\}, D_E = \{1, 2, 3, 4\}.$$

- **Restrições**

$$(B \neq 3), (C \neq 2), (A \neq B), (B \neq C), \\ (C < D), (A = D), (E < A), (E < B), (E < C), \\ (E < D), (B \neq D).$$

Todas as variáveis são domínio consistentes