

# Controle de Sistemas Não Lineares Baseado em Técnica de Decomposição de Modo Dinâmico Polinomial de Dados

Gabriel Costa Leite

**Resumo**—A crescente complexidade nos sistemas motrizes e sistemas de energia, impulsionada pelas atuais inovações tecnológicas, exige a capacidade de modelar operações, prever resultados, classificar indicadores, estimar ganhos e controlar sistemas de maneira ágil e eficiente, dada a vasta quantidade de dados gerados e coletados diariamente. Nesse cenário, os estudos, trabalhos e desenvolvimentos orientados por dados desempenham um papel fundamental na solução dos desafios tecnológicos contemporâneos. Portanto, este trabalho tem como objetivo propor avanços em técnicas *data-driven*, com foco na identificação e controle de sistemas dinâmicos não lineares complexos, sejam eles racionais ou não, a partir de uma abordagem totalmente orientada por conjuntos de dados. Consequentemente, sugere-se a exploração do método de Decomposição de Modo Dinâmico Polinomial, com base em polinômios, aplicado ao Controle Não Linear. Essa evolução teórica visa à aplicação prática em sistemas motrizes não lineares, com o propósito de identificar protótipos polinomiais que possam ser usadas na descoberta de variáveis de controle.

**Index Terms**—dados; *data-driven*; sistemas dinâmicos não lineares; Decomposição de Modo Dinâmico Polinomial; Controle Preditivo Não Linear.

## I. INTRODUÇÃO

As técnicas baseadas em *data-driven* surgem da necessidade de modelar, prever, classificar, estimar e controlar sistemas complexos, que normalmente são não lineares, dinâmicos e incertos. O impacto da evolução dos métodos orientados a dados é visto principalmente na viabilização de resolução de problemas científicos e de engenharia precursores do desenvolvimento tecnológico do mundo. Inúmeras técnicas e análises teóricas e experimentais podem ser encontrados no livro [1].

Diversas áreas de estudos estão sendo envolvidas no crescimento constante do uso dos dados como fonte referencial de análise. Em adição, pesquisas na área de neurociência aplicada a interface de dados entre cérebros e computadores [2], estudos para detectar progressão de glaucomas em nervos ópticos usando técnicas de decomposições ortogonais de dados [3], estimações e previsões climáticas [4], [5], metodologias pioneiras em caracterização petrofísica de reservatórios com abordagens em *machine learning* [6], aplicações e manipulações em sistemas robóticos [7], [8] e sistemas aeroespaciais [9]–[11] são exemplos da globalização de técnicas baseadas em dados aplicadas a inúmeros centros de estudos variados.

Inicialmente, desenvolve-se conhecimentos básicos na Decomposição de Modo Dinâmico (DMD), uma técnica *data-driven* amplamente estudada e aplicada principalmente a sistemas de mecânicas de fluidos [12], [13]. Diversos estudos, aprimorações e aplicações foram realizados ao longo do tempo no DMD [14]–[17].

Até então, o DMD baseava-se apenas em dados de sistemas não previamente controlados, consequentemente a técnica evolui dando origem a Decomposição de Modo Dinâmico com Controle, conhecido por DMDc, que corresponde ao DMD com um sinal de acionamento acoplado em sua equação fundamental [18].

Outrossim, surge a necessidade de garantir a viabilidade, estabilidade, otimização e robustez do controle baseado no conjunto de dados. Isso pode ser atingido com o estudo de Persistência de Excitação do modelo [19], [20].

A Representação de Sistemas Polinomiais Não Lineares em Modelos *Data-driven* [21] possibilita o desenvolvimento da Decomposição de Modo Dinâmico Polinomial, que engloba todas essas quatro técnicas *data-driven* com o intuito de desenvolver modelos mais precisos e fieis a sistemas dinâmicos complexos e não lineares.

Com efeito, esse trabalho aplica a DMDp como modelo de predição do Controle Preditivo Não Linear (NMPC) [22], [23], [23]. Dessa forma, é realizado um estudo teórico em controle preditivo baseando nos livros de [24] e [25], explicitando todo o desenvolvimento histórico do NMPC. Ainda, são abordados todos os pontos fundamentais do controlador, caracterizados pelo modelo de predição, pela otimização da função custo com restrições e pela computação do sinal de controle. Exemplifica-se também o funcionamento do algoritmo do controlador preditivo não linear desenvolvido em [26].

## II. DETALHAMENTO TÉCNICO

A Decomposição de Modo Dinâmico Polinomial (DMDp) é uma técnica de regressão baseada em dados que busca modelar sistemas dinâmicos complexos, lineares ou não lineares, racionais ou não racionais, em uma ampla faixa de polinômios aproximados a partir de dados de entrada, saída ou estados da planta. A vantagem da utilização de modelos polinomiais, é a existência ampla de aplicações em técnicas de controle, estabilização, predição, identificação, análise de robustez e ainda são extremamente eficientes em termos computacionais.

O DMDp fundamenta-se na unificação das técnicas *data-driven* de representação de sistemas polinomiais não lineares em modelos *data-driven* [21], de Decomposição de Modo Dinâmico com Controle (DMDc) [18] e de persistência de excitação em modelos *data-driven* [19], [20]. Outrossim, é possível ainda, a partir do DMDp, propor uma estratégia de controle com a representação de malha fechada do sistema com condições de estabilidade.

### A. Definição do Sistema Polinomial

Considerando o sistema polinomial discreto definido como:

$$x_{k+1} = F(x_k) + G(x_k) u_k \quad (1)$$

Onde  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $u \in \mathbb{R}^m$ ,  $F(x) \in \mathcal{P}^{n \times 1}$  e  $G(x) \in \mathcal{P}^{n \times m}$  representam os polinômios desconhecidos presentes no sistema.

Assume-se que os graus superiores de  $F(x)$  e  $G(x)$  são conhecidos e que a origem do sistema está em equilíbrio, ou seja,  $F(0) = 0$ .

Portanto, pode-se representar a equação (1) por:

$$x_{k+1} = A Z(x_k) + B W(x_k) u_k \quad (2)$$

Em que,  $Z(x) \in \mathcal{P}^{N \times 1}$  representa o vetor de  $N$  polinômios de estados do sistema presentes em  $f(x)$ ,  $W(x) \in \mathcal{P}^{q \times m}$  representa a matriz de  $q \times m$  polinômios de estados presentes na entrada, e  $A \in \mathbb{R}^{n \times N}$  e  $B \in \mathbb{R}^{n \times q}$  representam os operadores lineares do DMDp.

Sem perda de generalidade, com a definição que  $Z(0) = 0$  e que o grau superior de  $Z(x)$  é conhecido, pode-se escrever que  $Z(x) = H(x)x$  para  $H(x) \in \mathcal{P}^{N \times n}$ , assim a equação (2) se torna:

$$x_{k+1} = A H(x_k) x_k + B W(x_k) u_k \quad (3)$$

Após isso, define-se as séries temporais de  $x_{k+1}$ ,  $Z(x_k)$  e  $W(x_k)$  respectivamente por:

$$X' := \begin{bmatrix} | & | & & | \\ x_1 & x_2 & \dots & x_T \\ | & | & & | \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$X := \begin{bmatrix} | & | & & | \\ x_0 & x_1 & \dots & x_{T-1} \\ | & | & & | \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$U := \begin{bmatrix} | & | & & | \\ u_0 & u_1 & \dots & u_{T-1} \\ | & | & & | \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$Z_o := \begin{bmatrix} | & | & & | \\ H(x_0) x_0 & H(x_1) x_1 & \dots & H(x_{T-1}) x_{T-1} \\ | & | & & | \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$W_o := \begin{bmatrix} | & | & & | \\ W(x_0) u_o & W(x_1) u_1 & \dots & W(x_{T-1}) u_{T-1} \\ | & | & & | \end{bmatrix} \quad (8)$$

Logo, a equação (3) pode ser reescrita matricialmente:

$$X' = A Z_o + B W_o \quad (9)$$

À luz desses resultados, a partir do modelo polinomial discreto (1) foi possível obter a equação (9) que representa o modelo em série temporal do sistema.

## B. Decomposição de Modo Dinâmico Polinomial

A Decomposição de Modo Dinâmico Polinomial é baseada no desenvolvimento primário da Decomposição de Modo Dinâmico com Controle (DMDc) [18], que por sua vez é inspirado na Decomposição de Modo Dinâmico [12], [13], [16]. Essa técnica propõe descobrir os operadores  $A$  e  $B$  da Equação (9) a partir da utilização da técnica matricial de pseudo-inversa de [27], simbolizada por  $^\dagger$ . Duas propostas são possíveis nessa análise, uma em que o operador  $B$  é conhecido e outro em que esse operador é desconhecido.

1) *Operador B conhecido*: Nesse caso, a equação (9) deve ser reescrita como:

$$X' - B W_o = A Z_o \quad (10)$$

Então, o operador  $A$  é:

$$A = (X' - B W_o) Z_o^\dagger \quad (11)$$

2) *Operador B desconhecido*: Quando  $B$  é desconhecido, segue-se que:

$$X' = [B \quad A] \begin{bmatrix} W_o \\ Z_o \end{bmatrix} \quad (12)$$

Define-se o operador  $S \in \mathbb{R}^{n \times (n+m)}$  como:

$$S = [B \quad A] \quad (13)$$

Logo,

$$S = X' \begin{bmatrix} W_o \\ Z_o \end{bmatrix}^\dagger \quad (14)$$

É importante ressaltar que o DMDc é um caso particular do DMDp, onde para o caso em que se escolha  $Z(x) = [x]$  e  $W(x) = [1]$ , o DMDp é igual ao DMDc.

## C. Condição Persistentemente Excitante dos Dados

As técnicas *data-driven* de Decomposição de Modo Dinâmico não garantem que os dados utilizados na obtenção dos operadores representam fielmente o sistema e que podem servir de modelos viáveis na descrição do funcionamento prática da planta. Portanto, busca-se provar a condição de persistência excitante dos dados a fim de assegurar a qualidade dos dados na representação fundamental do sistema em estudo, o qual pode ser utilizado como modelos preditores, rastreadores ou classificadores.

O trabalho de [20] intitulado de *Formulas for Data-Driven Control: Stabilization, Optimality, and Robustness*, revisita o trabalho de [19], provando a existência de parametrizações de sistemas de controle em malha fechada capazes de reduzir o problema de estabilidade para um modelo de desigualdade matricial linear dependente dos dados de entrada e saída persistentemente excitantes e de ordem superior.

A primeira definição proposto por [19] e que será fundamental para o seguimento desse trabalho é que um sinal  $q \in \mathbb{R}^\sigma$  e de tamanho  $T$  é dito persistentemente excitante

de ordem  $L$  se sua representação matricial  $Q$  é de posto completo  $\sigma L$ . Observe que por essa definição, tem-se também que  $T \geq (\sigma + 1)L - 1$ , onde:

$$Q = \begin{bmatrix} q(0) & q(1) & \cdots & q(T-L) \\ q(1) & q(2) & \cdots & q(T-L+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q(L-1) & q(L) & \cdots & q(T-1) \end{bmatrix} \quad (15)$$

À luz dessas definições, sugere-se a perspectiva do trabalho [20] aplicado a dados de entrada e saída de trajetória unitária, representado pela a escolha de  $t := 1$  para a ordem da matriz de Toeplitz e da matriz de observabilidade.

A partir do Lema 1 de [20], temos que para uma sequência de entrada persistentemente excitante de ordem  $n + 1$  e de tamanho  $T \geq (m + 1)n + m$ :

$$\text{rank} \begin{bmatrix} U \\ X \end{bmatrix} = n + m \quad (16)$$

Onde  $U$  e  $X$  são as séries temporais de entrada (??) e de estados (??) respectivamente e  $\text{rank}$  representa o posto da matriz..

A condição (16) responde ao fato de que garante que os dados de entrada e saída correspondem ao funcionamento do sistema.

Pelo teorema de *Rouché–Capelli*<sup>1</sup> e assumindo que a (16) é verdade, tem-se que a o sistema (17) admite infinitas soluções para  $g \in \mathbb{R}^T$ , explicitando o resultado do Teorema 1 proposto por [20]:

$$\begin{bmatrix} u_k \\ x_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U \\ X \end{bmatrix} g \quad (17)$$

Com efeito,  $g$  pode ser expresso como a soma da resposta particular e da resposta adicional de espaço nulo do sistema, de acordo com a Equação (18).

$$g = \begin{bmatrix} U \\ X \end{bmatrix}^\dagger \begin{bmatrix} u_k \\ x_k \end{bmatrix} + \left( I - \begin{bmatrix} U \\ X \end{bmatrix}^\dagger \begin{bmatrix} U \\ X \end{bmatrix} \right) \omega \quad (18)$$

Onde  $\omega \in \mathbb{R}^T$  é um vetor arbitrário no espaço das colunas da matriz  $\begin{bmatrix} U \\ X \end{bmatrix}$  que compõe a resposta adicional do espaço nulo.

A equação (3) pode ser reescrita como:

$$x_{k+1} = [B W(x_k) \quad A H(x_k)] \begin{bmatrix} u_k \\ x_k \end{bmatrix} \quad (19)$$

Substituindo (17) em (19), obtém-se que:

<sup>1</sup>Seja  $Ax = B$  um sistema linear de  $n$  variáveis, existe solução somente se o posto da matriz  $A$  for igual ao posto da matriz aumentada  $[A|B]$ . Ainda assim, se  $n = \text{rank}(A)$  então a solução é única, caso contrário existem infinitas soluções.

$$x_{k+1} = [B W(x_k) \quad A H(x_k)] \begin{bmatrix} U \\ X \end{bmatrix} \cdots \cdots \left[ \begin{bmatrix} U \\ X \end{bmatrix}^\dagger \begin{bmatrix} u_k \\ x_k \end{bmatrix} + \left( I - \begin{bmatrix} U \\ X \end{bmatrix}^\dagger \begin{bmatrix} U \\ X \end{bmatrix} \right) \omega \right] \quad (20)$$

Com isso, é possível notar o resultado análogo ao da equação (12), para  $Z_o = H_o X$ :

$$X' = [B \quad A] \begin{bmatrix} W_o \\ Z_o \end{bmatrix} \quad (21)$$

Pode-se resumir a formulação (20) em:

$$x_{k+1} = X' \left[ \begin{bmatrix} U \\ X \end{bmatrix}^\dagger \begin{bmatrix} u_k \\ x_k \end{bmatrix} + \left( I - \begin{bmatrix} U \\ X \end{bmatrix}^\dagger \begin{bmatrix} U \\ X \end{bmatrix} \right) \omega \right] \quad (22)$$

Sem perda de generalidade, pode-se anular o termo da resposta adicional do espaço nulo:

$$X' \left( I - \begin{bmatrix} U \\ X \end{bmatrix}^\dagger \begin{bmatrix} U \\ X \end{bmatrix} \right) \omega = 0 \quad (23)$$

Resultando assim na seguinte representação linear do sistema:

$$x_{k+1} = X' \begin{bmatrix} U \\ X \end{bmatrix}^\dagger \begin{bmatrix} u_k \\ x_k \end{bmatrix} \quad (24)$$

À luz desses resultados, percebe-se um relação direta por meio da equação (12) entre o trabalho proposto por [19] e a Decomposição de Modo Dinâmico. Isso promove uma factibilidade do sistema identificado, o operador  $S$  dado por (13) representa os coeficientes do polinômio  $[W(x_k) u_k \quad Z(x_k)]^T$ . Com isso, a partir de dados de saída  $\in \mathbb{R}^n$  e de entrada  $\in \mathbb{R}^m$  persistentemente excitante de ordem  $n + 1$ , onde faz-se válido que o  $\text{rank} [\text{input} \quad \text{output}]^T = n + m$ , é possível obter um modelo polinomial para qualquer sistema que cumpra as condições.

*D. Estratégia de controle em malha fechada com condição de estabilidade*

O sistema descrito pela Equação (3) pode ser reescrito com a condição de malha fechada  $u = Kx$ , tendo a seguinte representação equivalente:

$$x_{k+1} = (A H(x_k) + B W(x_k) K) x_k \quad (25)$$

De forma que,

$$X' = (A H_o + B W_o K) X \quad (26)$$

Pelo teorema de *Rouché–Capelli*, existe uma matriz  $G_K \in \mathbb{R}^{Txn}$  em que:

$$\begin{aligned} A H_o + B W_o K &= [B \quad A] \begin{bmatrix} W_o K \\ H_o \end{bmatrix} \\ &= [B \quad A] \begin{bmatrix} U \\ X \end{bmatrix} G_K = X' G_K \end{aligned} \quad (27)$$

Logo, a equação (25) pode ser representada como:

$$x_{k+1} = X' G_K x(k) \quad (28)$$

A demonstração da estabilidade parte então do pressuposto que para qualquer  $K$ , o sistema em malha fechada com  $u = Kx$  é assintoticamente estável se existe uma matriz  $P$  positiva que:

$$X' G_K P G_K^T X'^T - P < 0 \quad (29)$$

### III. OBJETIVOS

Tendo como base o detalhamento técnico apresentado, o principal objetivo do plano de pesquisa é desenvolver e aprimorar a Decomposição de Modo Dinâmico Polinomial, aplicando ao controle de sistemas motrizes e sistemas de energia complexos e não lineares reais, enriquecendo o detalhamento analítico e experimental dessa técnica baseada em dados que busca representar conjuntos de dados de medições de entrada, saída ou estados em protótipos polinomiais aproximados capazes de descrever as dinâmicas desses sistemas.

Outrossim, busca-se obter condições para que os polinômios obtidos sejam equivalentes ao sistema e não somente modelos aprimorados. Esse desenvolvimento é fundamental para obter sistemas de controle estáveis e robustos baseados somente nos dados coletados de qualquer planta não linear e complexa sem necessitar da análise matemática e física da mesma, tratando como um sistema caixa preta. Essa característica de modelos polinomiais equivalentes fortalece a possibilidade de provar estabilidade de sistemas inteligentes, construídos com inteligência artificial ou com aprendizagem de máquina embarcado.

Com efeito, um dos objetivos desse plano de pesquisa é a prova de estabilidade de sistemas de controle em malha fechada utilizando a teoria de estabilidade de Lyapunov, inovando com a utilização de técnicas de soma de quadrados [28]. Ainda assim, busca-se explorar equações de dissipatividade além de adicionar condições de saturação aos modelos polinomiais.

Ademais, a aplicação do DMDp como modelo de predição de Controle Preditivo Não Linear é um ponto fundamental de estudo, visando a criação de técnicas preditivas e ótimas na solução baseada em dados, desenvolvendo e propondo modelos de otimização eficientes e capazes de solucionar problemas complexos.

O DMDp caracteriza-se como uma técnica escalável, onde é possível obter diversos modelos polinomiais com o mesmo conjunto de dados, em que percebe-se a evolução métrica dos resultados com o aumento do número de monômios do modelo polinomial. Embora essa comprovação seja apenas prática, cria-se a possibilidade de trabalhos futuros capazes de provar tal fato observado e propondo a utilização de modelos polinomiais que sejam cada vez mais semelhantes com o funcionamento dinâmico dos sistemas.

### IV. RESULTADOS ESPERADOS

Espera-se atender e concluir os objetivos citados anteriormente de forma a atender o desenvolvimento da Decomposição de Modo Dinâmico Polinomial aplicado ao controle de sistemas motrizes e sistemas de energia como visto em [29].

A aplicação do DMDp a um sistema elétrico-hidráulico fundamentado em controle de nível de líquido em um tanque superior com vazão variável de saída de líquido e vazão de entrada acionada por uma bomba centrífuga, com dinâmica não linear e equacionamento racional complexo representado pelo sistema (30).

$$\frac{dh}{dt} = \frac{k_i \omega - k_o \sqrt{h}}{\pi r^2 + \frac{2 \pi r h (R - r)}{H} + \frac{\pi h^2 (R - r)^2}{H^2}} \quad (30)$$

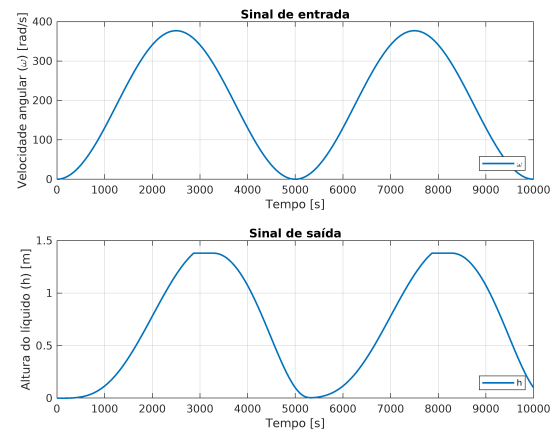
Onde os parâmetros descritos do sistema podem ser obtidos na Tabela I.

Tabela I  
PARÂMETROS DO SISTEMA

Parâmetro	Descrição
$r$	Raio da base menor do tanque
$R$	Raio da base maior do tanque
$H$	Altura limite do tanque
$h$	Altura da coluna de líquido
$V$	Volume de líquido
$f$	Frequência de acionamento do inversor
$\omega$	Velocidade angular de acionamento da bomba
$H_{tsi}$	Altura entre o tanque inferior e superior
$H_m$	Altura manométrica de operação da bomba
$Pot$	Potência nominal da bomba
$q_{i,nominal}$	Vazão nominal da bomba
$k_i$	Constante de eficiência
$k_o$	Constante de proporcionalidade

O ensaio em malha aberta de um sinal de entrada persistentemente excitante que englobe as dinâmicas do sistema exemplificado na Figura 1.

Figura 1. Gráfico do ensaio do sistema para entrada senoidal



Fonte: [29].

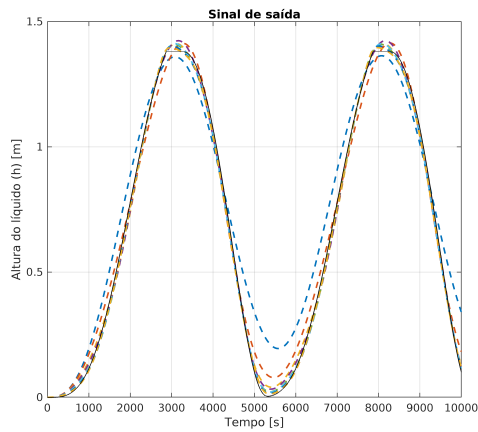
Os dados obtidos de entrada e saída da planta são utilizados na técnica do DMDp, onde é possível traçar configurações

polinomiais diversas. O exemplo encontrado em [29] verifica a utilização de 10 polinômios representados por:

- 1)  $Z_1(x) = [x]^T$
- 2)  $Z_2(x) = [x \ x^2]^T$
- 3)  $Z_3(x) = [x \ x^2 \ x^3]^T$
- 4)  $Z_4(x) = [x \ x^2 \ x^3 \ x^4]^T$
- 5)  $Z_5(x) = [x \ x^2 \ x^3 \ x^4 \ x^5]^T$
- 6)  $Z_6(x) = [x \ x^2 \ x^3 \ x^4 \ x^5 \ x^6]^T$
- 7)  $Z_7(x) = [x \ x^2 \ x^3 \ x^4 \ x^5 \ x^6 \ x^7]^T$
- 8)  $Z_8(x) = [x \ x^2 \ x^3 \ x^4 \ x^5 \ x^6 \ x^7 \ x^8]^T$
- 9)  $Z_9(x) = [x \ x^2 \ x^3 \ x^4 \ x^5 \ x^6 \ x^7 \ x^8 \ x^9]^T$
- 10)  $Z_{10}(x) = [x \ x^2 \ x^3 \ x^4 \ x^5 \ \dots]^T$

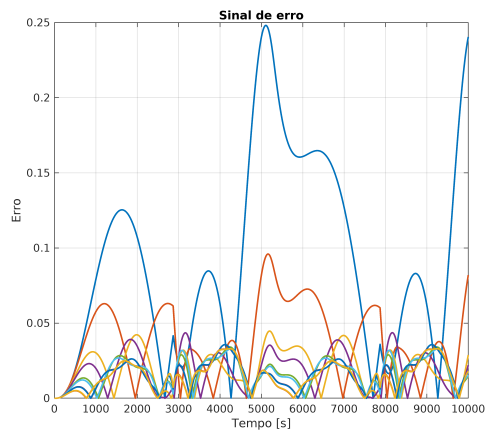
Os resultados dos modelos obtidos são mostrados nas Figuras 2 e 3

Figura 2. Gráfico da comparação entre os modelos polinomiais 1 ao 10 e o real  $h$



Fonte: [29]

Figura 3. Gráfico do erro entre os modelos polinomiais 1 ao 10 e o real  $h$



Fonte: [29]

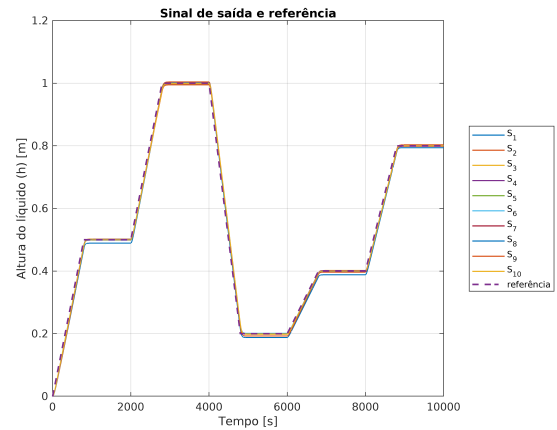
Com resultados métricos obtidos na Tabela II.

Tabela II  
TABELA DE RESULTADOS DOS CRITÉRIOS DE COMPARAÇÃO DOS  
MODELOS 1 AO 10

Polinômio	MAE	MSE	RMSE	R2	ICC	AR2
$Z_1$	0.091822	0.012738	0.11286	0.95047	0.98305	0.95046
$Z_2$	0.038258	0.0020259	0.04501	0.99212	0.99724	0.99212
$Z_3$	0.020068	0.00055382	0.023533	0.99785	0.99924	0.99785
$Z_4$	0.018178	0.00048518	0.022027	0.99811	0.99934	0.99811
$Z_5$	0.016938	0.00037101	0.019262	0.99856	0.99949	0.99856
$Z_6$	0.016927	0.00037186	0.019284	0.99855	0.99949	0.99855
$Z_7$	0.015791	0.00033329	0.018246	0.99871	0.99954	0.99871
$Z_8$	0.015806	0.00033373	0.018268	0.9987	0.99954	0.9987
$Z_9$	0.014691	0.00030212	0.017382	0.99883	0.99959	0.99883
$Z_{10}$	0.014666	0.00030064	0.017339	0.99883	0.99959	0.99883

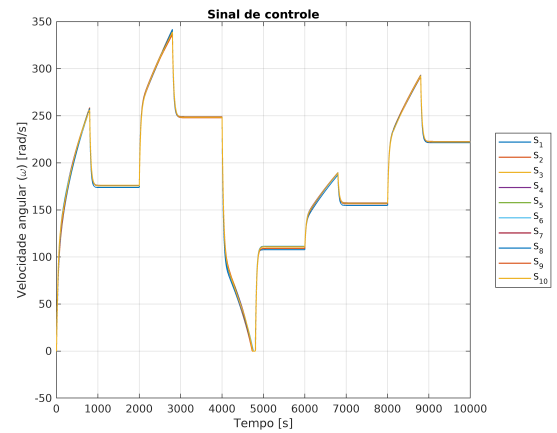
Em soma, quando aplicado os modelos polinomiais obtidos como predição do Controle Preditivo Não Linear, foram obtidos os resultados representados nas Figuras 4, 5 e 6, e métricas de desempenho na Tabela III

Figura 4. Gráfico do sinal de saída controlada e referência do sistema com todos os modelos de predição



Fonte: [29]

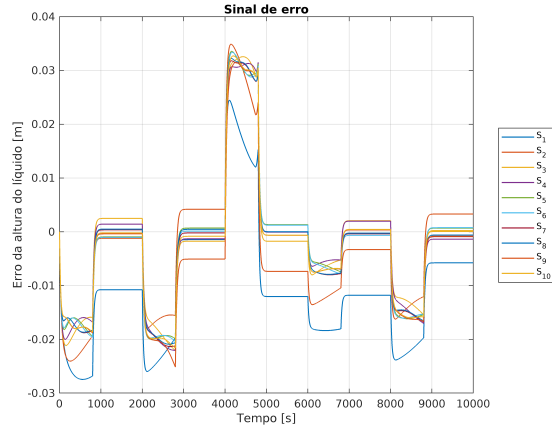
Figura 5. Gráfico do sinal de controle do sistema com todos os modelo de predição



Fonte: [29]

Portanto, espera-se obter resultados semelhantes e melhores a partir dos objetivos do plano de pesquisa.

Figura 6. Gráfico do sinal de erro do sistema com todos os modelo de predição



Fonte: [29]

Tabela III  
TABELA DE RESULTADOS DOS CRITÉRIOS DE COMPARAÇÃO DOS  
MODELOS 1 AO 10

Modelo	Tempo	MAE	MSE	RMSE	R2	ICC	AR2
Z <sub>1</sub>	0.0094721	0.01354	0.00023911	0.015463	0.99688	0.99935	0.99687
Z <sub>2</sub>	0.0080696	0.0097291	0.00016614	0.01289	0.99784	0.99956	0.99784
Z <sub>3</sub>	0.0080973	0.0079301	0.00014799	0.012165	0.99802	0.9996	0.99802
Z <sub>4</sub>	0.0082882	0.0077733	0.00014848	0.012185	0.998	0.9996	0.998
Z <sub>5</sub>	0.0081504	0.0076554	0.00015033	0.012261	0.99799	0.9996	0.99799
Z <sub>6</sub>	0.0084466	0.0076774	0.0001503	0.01226	0.99799	0.9996	0.99799
Z <sub>7</sub>	0.0080052	0.0075271	0.00015062	0.012273	0.99798	0.9996	0.99798
Z <sub>8</sub>	0.0078352	0.0074865	0.0001502	0.012255	0.99799	0.9996	0.99799
Z <sub>9</sub>	0.0084065	0.0081611	0.00015479	0.012441	0.99791	0.99958	0.99791
Z <sub>10</sub>	0.0083176	0.0075396	0.00015099	0.012288	0.99798	0.9996	0.99798

## REFERÊNCIAS

- [1] S. L. Brunton and J. N. Kutz, *Data-driven science and engineering: Machine learning, dynamical systems, and control*. Cambridge University Press, 2019.
- [2] M. Agrawal, S. Vidyashankar, and K. Huang, "On-chip implementation of ecog signal data decoding in brain-computer interface," in *2016 IEEE 21st International Mixed-Signal Testing Workshop (IMSTW)*, pp. 1–6, IEEE, 2016.
- [3] M. Balasubramanian, S. Zabic, C. Bowd, H. W. Thompson, P. Wolenski, S. S. Iyengar, B. B. Karki, and L. M. Zangwill, "A framework for detecting glaucomatous progression in the optic nerve head of an eye using proper orthogonal decomposition," *IEEE Transactions on Information Technology in biomedicine*, vol. 13, no. 5, pp. 781–793, 2009.
- [4] O. Kisi, H. Sanikhani, M. Zounemat-Kermani, and F. Niazi, "Long-term monthly evapotranspiration modeling by several data-driven methods without climatic data," *Computers and Electronics in Agriculture*, vol. 115, pp. 66–77, 2015.
- [5] R. S. Teegavarapu and V. Chandramouli, "Improved weighting methods, deterministic and stochastic data-driven models for estimation of missing precipitation records," *Journal of hydrology*, vol. 312, no. 1-4, pp. 191–206, 2005.
- [6] J. V. F. Braga, "Machine learning aplicado à caracterização petrofísica de reservatórios: Um exemplo da bacia do ceará," 2023.
- [7] A. Broad, T. Murphey, and B. Argall, "Learning models for shared control of human-machine systems with unknown dynamics," *arXiv preprint arXiv:1808.08268*, 2018.
- [8] S. Gu, E. Holly, T. Lillicrap, and S. Levine, "Deep reinforcement learning for robotic manipulation with asynchronous off-policy updates," in *2017 IEEE international conference on robotics and automation (ICRA)*, pp. 3389–3396, IEEE, 2017.
- [9] D. Amsallem, J. Cortial, and C. Farhat, "On-demand cfd-based aeroelastic predictions using a database of reduced-order bases and models," in *47th AIAA Aerospace Sciences Meeting Including The New Horizons Forum and Aerospace Exposition*, p. 800, 2009.
- [10] C. Huang, W. E. Anderson, M. E. Harvazinski, and V. Sankaran, "Analysis of self-excited combustion instabilities using decomposition techniques," *AIAA Journal*, vol. 54, no. 9, pp. 2791–2807, 2016.
- [11] N. Fonzi, S. L. Brunton, and U. Fasel, "Data-driven nonlinear aeroelastic models of morphing wings for control," *Proceedings of the Royal Society A*, vol. 476, no. 2239, p. 20200079, 2020.
- [12] P. J. Schmid and J. Sesterhenn, "Dynamic mode decomposition of numerical and experimental data," in *61st Annual Meeting of the APS Division of Fluid Dynamics*, American Physical Society, 2008.
- [13] P. J. Schmid, "Dynamic mode decomposition for numerical and experimental data," *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 656, pp. 5–28, 2010.
- [14] C. Pan, D. Yu, and J. Wang, "Dynamical mode decomposition of gurney flap wake flow," *Theoretical and Applied Mechanics Letters*, vol. 1, no. 1, p. 012002, 2011.
- [15] K. K. Chen, J. H. Tu, and C. W. Rowley, "Variants of dynamic mode decomposition: boundary condition, koopman, and fourier analyses," *Journal of nonlinear science*, vol. 22, pp. 887–915, 2012.
- [16] J. N. Kutz, S. L. Brunton, B. W. Brunton, and J. L. Proctor, *Dynamic mode decomposition: data-driven modeling of complex systems*. SIAM, 2016.
- [17] T. Askham and J. N. Kutz, "Variable projection methods for an optimized dynamic mode decomposition," *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, vol. 17, no. 1, pp. 380–416, 2018.
- [18] J. L. Proctor, S. L. Brunton, and J. N. Kutz, "Dynamic mode decomposition with control," *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, vol. 15, no. 1, pp. 142–161, 2016.
- [19] J. C. Willems, P. Rapisarda, I. Markovsky, and B. L. De Moor, "A note on persistency of excitation," *Systems & Control Letters*, vol. 54, no. 4, pp. 325–329, 2005.
- [20] C. De Persis and P. Tesi, "Formulas for data-driven control: Stabilization, optimality, and robustness," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 65, no. 3, pp. 909–924, 2019.
- [21] M. Guo, C. De Persis, and P. Tesi, "Data-driven stabilization of nonlinear polynomial systems with noisy data," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 67, no. 8, pp. 4210–4217, 2021.
- [22] H. Chen and F. Allgöwer, "Nonlinear model predictive control schemes with guaranteed stability," in *Nonlinear model based process control*, pp. 465–494, Springer, 1998.
- [23] F. Allgöwer, T. A. Badgwell, J. S. Qin, J. B. Rawlings, and S. J. Wright, "Nonlinear predictive control and moving horizon estimation—an introductory overview," *Advances in control: Highlights of ECC'99*, pp. 391–449, 1999.
- [24] E. Camacho and C. Alba, *Model Predictive Control*. Advanced Textbooks in Control and Signal Processing, Springer London, 2013.
- [25] J. Rossiter, *A First Course in Predictive Control*. CRC Press, Taylor & Francis Group, 2022.
- [26] MathWorks, "MATLAB Nonlinear MPC Toolbox," 2023.
- [27] R. Penrose, "A generalized inverse for matrices," *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, vol. 51, no. 3, pp. 406–413, 1955.
- [28] G. V. S. P. P. A. P. M. M. P. A. Papachristodoulou, J. Anderson and D. Jagt, *SOSTOOLS: Sum of squares optimization toolbox for MATLAB*. <http://arxiv.org/abs/1310.4716>, 2021. Available from <https://github.com/oxfordcontrol/SOSTOOLS>.
- [29] G. C. Leite, "Controle preditivo não linear baseado em técnica orientada a dados de decomposição de modo dinâmico polinomial," 2023.