

Projeto de Malhas de Aterramento Através do Método dos Elementos Finitos

Rooney Ribeiro Albuquerque Coelho
 Departamento de Engenharia Elétrica
 Universidade Federal do Ceará
 Fortaleza, Ceará (85) 3366-9579
 Email: rooneycoelho@dee.ufc.br

Ricardo Silva Thé Pontes
 Departamento de Engenharia Elétrica
 Universidade Federal do Ceará
 Fortaleza, Ceará (85) 3366-9647
 Email: ricthe@dee.ufc.br

Maria das Gracas Santos Rufino Pontes
 Centro de Ciências Tecnológicas
 Universidade de Fortaleza
 Fortaleza, Ceará (85) 3477-3049
 Email: gsrufino@unfor.br

Resumo—Projetos convencionais de malhas de aterramento são baseados na metodologia descrita na norma IEEE Std 80 a qual apresenta formulações para o cálculo da resistência de aterramento e dos limites de segurança para uma pessoa que está na subestação no momento de um curto circuito. Partindo da resolução numérica do modelo eletromagnético é possível determinar o comportamento de grandezas elétricas no solo como o potencial elétrico e de grandezas derivadas das mesmas como a resistência elétrica, sendo possível projetar um sistema de aterramento que se adeque aos valores estabelecidos na norma para diferentes configurações de aterramento com a vantagem de se conhecer os possíveis locais onde o potencial excede os limites de segurança, possibilitando assim a readequação do projeto.

I. INTRODUÇÃO

O projeto de malhas de aterramento é feito baseado no equacionamento da norma internacional IEEE Std 80 [1] a qual estabelece o procedimento de cálculo da resistência de aterramento do sistema e dos limites de segurança para a máxima diferença de potencial que a maioria das pessoas podem ser submetidas sem que ocasione fibrilação ventricular e como consequência a morte.

O fato da norma utilizar fatores de correção para as suas equações junto a diversas considerações que foram tomadas para o desenvolvimento das mesmas podem gerar erros que não são justificáveis com o recurso computacional que possuímos atualmente. Uma forma de contornar estes problemas é a utilização de métodos numéricos como o método dos Elementos Finitos (FEM) para o dimensionamento de sistemas de aterramento, esses métodos podem nos fornecer informações importantes para o projeto como o local onde o potencial está acima do limite, informação essa que pode nos levar a aplicar uma submalha de equalização para a correção local do problema ao invés da reformulação total do projeto.

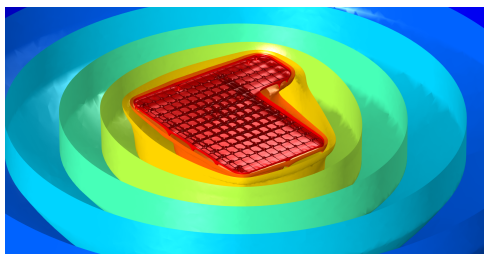


Figura 1. Superfícies equipotenciais gerada por uma malha de aterramento na ocorrência de uma falta.

A figura 1 nos mostra o perfil do potencial elétrico no solo na forma de superfícies equipotenciais gerado por uma malha de aterramento na ocorrência de uma falta, a mesma foi gerada através de uma simulação computacional utilizando o FEM.

II. FORMULAÇÃO ELETROMAGNÉTICA DE PROBLEMAS DE ATERRAMENTO ELÉTRICO

Para o projeto de sistemas de aterramento elétrico considera-se os efeitos da corrente elétrica em um meio condutivo, o solo. Para [2] a corrente elétrica gerada por um curto circuito fase-terra que está a frequência industrial mesmo sendo um fenômeno variante no tempo pode ser modelado como de natureza quase-estática.

O problema de aterramentos elétricos a frequência industrial se resume a encontrar a solução da equação de Laplace para uma região de estudo Ω sujeita as condições homogêneas de *Neumann* Γ_N na interface ar-solo e de *Dirichlet* Γ_D que são aplicadas nas regiões que delimitam a solução.

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot (-\sigma \nabla V) &= 0 & \text{em } \Omega \\
 V &= V_0 & \text{em } \Gamma_D \\
 \vec{J} \cdot \hat{n} &= 0 & \text{em } \Gamma_N
 \end{aligned} \tag{1}$$

Para um domínio não homogêneo como um solo estratificado em camadas horizontais a solução da equação de Laplace deve também respeitar as condições de interface Γ_{12} entre dois meios de condutividade elétrica σ distintas, que são:

$$V_1 = V_2 \quad \text{em } \Gamma_{12} \tag{2}$$

$$\sigma_1 \cdot \vec{E}_1 \cdot \hat{n}_1 = \sigma_2 \cdot \vec{E}_2 \cdot \hat{n}_2 \quad \text{em } \Gamma_{12} \tag{3}$$

A atribuição de uma excitação ao sistema é feita através das condições de contorno não homogêneas a um domínio $\partial\Omega$, sendo a condição de *Dirichlet* para uma fonte de potencial e *Neumann* quando temos uma fonte de corrente.

III. FORMULAÇÃO DE PROBLEMAS DE ATERRAMENTO ELÉTRICO EM ELEMENTOS FINITOS

O método dos Elementos Finitos é um método numérico para solução de Equações Diferenciais Parciais baseada no cálculo variacional. Segundo [3] o mesmo pode ser resumido em quatro etapas:

- Discretização do domínio em um número finito de sub-regiões.

- Seleção das funções de interpolação.
- Formulação do sistema de equações.
- Resolução do sistema de equações obtido.

A. Discretização do Domínio

Nesta etapa o domínio a ser solucionado será discretizado em uma quantidade finita de subdomínios que podem ser formado por linhas, triângulos, retângulos, tetraedros ou prismas. Para [3] este é o passo mais importante para a análise por elementos finitos, pois irá afetar diretamente na precisão dos resultados na necessidade de armazenamento e no tempo de processamento.

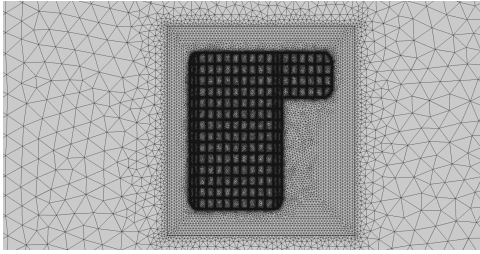


Figura 2. Discretização do domínio em elementos finitos.

A figura 2 mostra a discretização do domínio em estudo para um problema de aterramento elétrico. Note que a região de interesse que é o condutor de aterramento e adjacências possui elementos menores do que regiões distantes, isto porque seu refinamento irá interferir diretamente na precisão dos resultados da simulação.

B. Seleção das funções de interpolação

As funções de interpolação irão aproximar a função potencial elétrico no interior de cada elemento, normalmente são funções polinomiais de primeiro (lineares) ou segundo grau (quadráticas). Funções de grau mais elevado apesar de mais precisas resultam em uma formulação mais complicada.

A equação que descreve o potencial interpolado para qualquer ponto no interior do elemento, sendo n o número de nós de cada elemento, V_j^e o valor do potencial elétrico no nó j do elemento e N_j^e a sua função de interpolação (ou função de base) é:

$$\tilde{V}(x, y, z) = \sum_{j=1}^n N_j^e(x, y, z) V_j^e \quad (4)$$

C. Formulação do sistema de equações

Para a formulação do sistema de equações existem duas possíveis formulações: a de *Rayleigh-Ritz* e a formulação de *Galerkin*.

1) *Formulação de Rayleigh-Ritz*: Segundo [4] esta formulação é um método variacional com solução direta para a minimização de um funcional. Sendo o funcional da Equação de Laplace fisicamente igual a energia do sistema, o mesmo em regime eletrocinético corresponde ao efeito *Joule*.

A solução aproximada do problema é então encontrada pela minimização da energia em relação a cada variável das

funções de base que descrevem os elementos do domínio discretizado, satisfazendo as condições de contorno homogêneas e não homogêneas impostas ao problema. Neste trabalho por simplicidade será mostrado somente o equacionamento para a formulação residual de *Galerkin*.

2) *Formulação de Galerkin*: O método de *Galerkin* faz parte dos métodos dos resíduos ponderados, sendo o mesmo baseado na minimização de uma equação residual que para o problema de aterramento elétrico corresponde a resolução da equação 5, onde r é o resíduo:

$$r = \nabla \cdot (-\sigma \nabla \tilde{V}) \quad (5)$$

sendo o resíduo ponderado R dado pelo produto escalar entre uma função peso e a variável incógnita, ao adotarmos a função de ponderação igual a função de base temos que para cada nó i de um elemento e :

$$R_i^e = \int_{\Omega^e} N_i^e \nabla \cdot (-\sigma \nabla V^e) d\Omega \quad (6)$$

segundo [2] após a aplicação da regra da cadeia, teorema da divergência e teorema de Green, podemos escrever a equação 6 como:

$$R_i^e = \int_{\Omega^e} N_i^e \sigma \nabla V^e d\Omega - \oint_{\Gamma^e} N_i^e \sigma \nabla V^e \cdot \hat{n}^e d\Gamma \quad (7)$$

sendo \hat{n} um vetor normal externo e Γ^e a superfície que delimita Ω^e , a mesma pode ser escrita na forma matricial como:

$$\{R^e\} = [K^e] \{V^e\} - \{g^e\} \quad (8)$$

A matriz $[K]$ é chamada matriz de elementos ou matriz de rigidez onde cada elemento (i, j) da mesma representa o acoplamento entre seus nós.

Tomando uma função de base linear para um elemento tetraédrico podemos escrever sua função de forma para um elemento e como:

$$N_i^e(x, y, z) = \frac{1}{6\nu^e} (a_i^e + b_i^e x + c_i^e y + d_i^e z) \quad (9)$$

sendo o termo ν^e o volume do elemento que para as coordenadas (x, y, z) é dado por:

$$\nu^e = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1^e & x_2^e & x_3^e & x_4^e \\ y_1^e & y_2^e & y_3^e & y_4^e \\ z_1^e & z_2^e & z_3^e & z_4^e \end{vmatrix} \quad (10)$$

e cada termo da função de base encontrado por:

$$\begin{bmatrix} a^e \\ b^e \\ c^e \\ d^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1^e & x_2^e & x_3^e & x_4^e \\ y_1^e & y_2^e & y_3^e & y_4^e \\ z_1^e & z_2^e & z_3^e & z_4^e \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} V_1^e \\ V_2^e \\ V_3^e \\ V_4^e \end{bmatrix} \quad (11)$$

ao expandirmos a equação 11, cada termo da função de base será composto por uma combinação linear entre uma função $f_i(x, y, z)$ e um termo de potencial nodal V_i^e , denotaremos estes termos como a_i^e, b_i^e, c_i^e e d_i^e .

Segundo [3] tomando as componentes da função de base de cada nó i , podemos montar a matriz $[K^e]$ para cada linha i e coluna j como:

$$K_{ij}^e = \frac{\sigma}{36\nu^e} (b_i^e b_j^e + c_i^e c_j^e + d_i^e d_j^e) \quad (12)$$

O vetor coluna g^e possui valor não nulo somente para nós não pertencentes ao domínio da solução onde não são impostas as condições de contorno homogêneas, para o caso da condição de Dirichlet não homogênea o valor de g_i^e é substituído pelo valor da condição imposta e para a de Neumann o seu valor na superfície s do elemento para cada nó diretamente ligado ao mesmo é dado por:

$$g_i^e = \sum_s b_j^s - \sum_s \sum_{j=1}^3 K_{ij}^s \quad (13)$$

O sistema de equações resultante é obtido montando a equação 7 para todos os elementos pertencentes ao problema, sendo montada a matriz de coeficientes global $[K]$ através do mapeamento das matrizes locais de cada elemento. Se o mesmo nó pertencer simultaneamente a mais de um elemento, o seu respectivo valor mapeado na matriz global será a soma da componente de cada elemento das matrizes locais, o mesmo vale para o vetor coluna global $\{\bar{g}^e\}$.

Tomando a integral de resíduo ponderado associada a cada nó como zero, temos :

$$\{R\} = \sum_{e=1}^M ([\bar{K}^e] \{\bar{V}^e\} - \{\bar{g}^e\}) = \{0\} \quad (14)$$

ou ainda,

$$[\bar{K}] \{\bar{V}\} = \{\bar{g}\} \quad (15)$$

D. Resolução do sistema de equações obtido

Para a resolução do sistema linear obtido na equação 15 é possível a utilização de diversos algoritmos. Como mostrado em [5] estes algoritmos são divididos em diretos e iterativos.

Os métodos diretos utilizam fatoração LU de maneira otimizada para trabalhar com matrizes esparsas através de técnicas de preordenamento que buscam permutar as colunas da matriz de coeficientes de tal maneira a minimizar o número de elementos não nulos nas matrizes diagonal superior L e inferior U. Como o problema simulado é do tipo tridimensional este método possui um custo computacional superior aos métodos iterativos [6] não sendo o adotado na simulação realizada.

Os métodos iterativos utilizam algoritmos baseados no método do gradiente conjugado com a possibilidade da utilização de preconditionadores como o método da sobre-relaxação sucessiva (SOR) e o método de Jacobi como meio de aceleração da convergência da solução.

IV. ANÁLISE DOS RESULTADOS: PÓS-PROCESSAMENTO

Os resultados de pós processamento são os obtidos após encontrar a matriz de potencial nodal. Sendo a excitação do sistema por corrente atribuímos uma densidade de corrente a um domínio que pode ser unidimensional, bidimensional ou tridimensional, esta condição será imposta ao problema através de uma condição de Neumann não homogênea.

Para o cálculo do campo elétrico a partir da matriz de potencial sendo $\vec{E} = -\nabla V$ dado pela equação:

$$\vec{E}^e = -\frac{1}{6\nu^e} \sum_{j=1}^4 (b_j^e \vec{x} + c_j^e \vec{y} + d_j^e \vec{z}) V_j^e \quad (16)$$

Para o cálculo da corrente elétrica em um domínio sendo $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ devemos resolver a equação:

$$\oint_{\Gamma} \vec{J} \cdot \hat{n} d\Gamma = I \quad (17)$$

O cálculo da resistência de aterramento é dado ao se injetar uma corrente conhecida calcular a razão entre a máxima elevação de potencial gerada no sistema em relação ao terra remoto, que na literatura é conhecido também como GPR (Ground Potential Rise) e o valor da corrente de excitação.

V. PROJETO DE MALHAS DE ATERRAMENTO SEGUNDO A NORMA IEEE STD 80

A. Modelo do solo

Para a determinação de um modelo para o solo é necessário a partir das medições locais de resistividade pelo método de Wenner obter uma curva de resistividade experimental. A partir do equacionamento desenvolvido por [7] pode-se encontrar aplicando algum método de otimização como o do gradiente descendente, Quasi-Newton ou com utilização de meta-heurísticas como Algoritmos Genéticos, os parâmetros de resistividade e espessura das camadas para um modelo de camadas horizontais, onde o erro entre os pontos medidos e uma curva teórica é minimizado.

Um exemplo de estratificação do solo é mostrado na figura 3 onde para as leituras realizadas em campo foram encontradas as curvas teóricas de um modelo de duas e de três camadas.

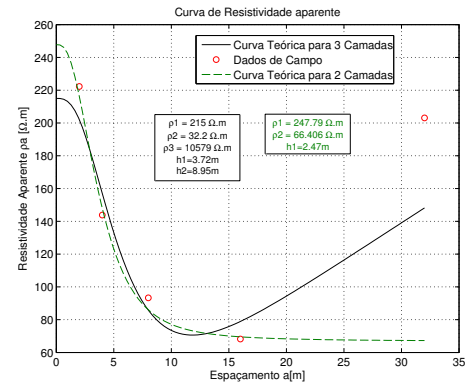


Figura 3. Modelo do solo a partir de dados de campo.

B. Resistividade aparente com a adição de um revestimento superficial

Como o equacionamento apresentado em [1] foi desenvolvido para solos uniformes, para se trabalhar com meios heterogêneos se faz necessário encontrar um valor de resistividade equivalente a de solo uniforme. Para isso podemos utilizar o modelo de [9] onde a partir de um modelo de duas camadas é possível encontrar um modelo equivalente de solo uniforme para um dado sistema de aterramento. Para a aplicação deste modelo em solo de mais de duas camadas se faz necessário utilizar a técnica de redução de camadas encontrada em [7] conforme equação abaixo:

$$\rho_{eq} = \frac{h_1 + h_2}{\frac{h_1}{\rho_1} + \frac{h_2}{\rho_2}} \quad h_{eq} = h_1 + h_2 \quad (18)$$

Tabela I. RESISTIVIDADE DO MATERIAL SUPERFICIAL

Resistividade elétrica de revestimentos superficiais típicos [$\Omega.m$]		
Material	Seco	Úmido
Asfalto	2×10^6 a 30×10^6	10^4 a 6×10^4
Brita	7×10^6	3×10^3
Concreto	10^6 a 10^9	1.2×10^3
Borracha	10^{13}	-

É muito comum em projetos de aterramentos elétricos a atribuição de uma camada superficial ao solo com um material de alta resistividade, este material adiciona uma camada extra para a estratificação do solo. Segundo [1] a formula simplificada para encontrar o fator de correção C_s de um solo uniforme de resistividade ρ e com uma camada superficial de resistividade ρ_s e espessura h_s , é dado por:

$$C_s = 1 - \frac{0.09(1 - \frac{\rho}{\rho_s})}{2h_s + 0.09} \quad (19)$$

Para casos onde existem mais de uma camada superficial como uma subestação abrigada ou uma sala de comando que possui uma camada de concreto revestida com borracha proveniente de um tapete isolante, podemos encontrar uma camada de revestimento equivalente utilizando a equação 18.

De acordo com os valores encontrados nas referências [1], [10] e [11] podemos obter valores aproximados da resistividade de alguns materiais utilizados para revestimento superficial, sendo os valores secos adotados em áreas cobertas e os úmidos para áreas expostas ao tempo como mostra a tabela I.

C. Critérios de aceitação para projetos

Um projeto de sistemas de aterramento tem que satisfazer um limite de resistência elétrica, que para uma subestação de 69kV é de 5Ω , e tem que satisfazer os níveis de segurança aceitáveis propostos por [1].

A máxima diferença de potencial entre os dois pés de uma pessoa separados a uma distância de 1m, sendo o peso da mesma de 70kg, é chamado de potencial de passo E_{step70} e para uma duração de curto circuito de t_s o mesmo é dado por:

$$E_{step70} = (1000 + 6C_s\rho_s) \frac{0.157}{\sqrt{t_s}} \quad (20)$$

A máxima diferença de potencial entre os pés de uma pessoa e uma carcaça metálica aterrada a uma distância de 1m, sendo o peso da mesma de 70kg, é chamado de potencial de toque $E_{touch70}$ e a mesma é dada por:

$$E_{touch70} = (1000 + 1.5C_s\rho_s) \frac{0.157}{\sqrt{t_s}} \quad (21)$$

VI. ESTUDO DE CASO: SISTEMA DE ATERRAMENTO DE UM SUBESTAÇÃO DE 69KV

Como estudo de caso foi escolhido um projeto real de malha de aterramento de uma subestação localizada no estado do Ceará no complexo industrial do Pecém.

Para a modelagem e simulação do estudo de caso que será apresentado neste trabalho foi utilizado o software baseado

Tabela II. RESULTADO DA ESTRATIFICAÇÃO DO SOLO

Modelo	$\rho_1 [\Omega.m]$	$\rho_2 [\Omega.m]$	$\rho_3 [\Omega.m]$	$h_1 [m]$	$h_2 [m]$
Duas camadas	247.79	66.41	-	2.47	-
Três camadas	215	32.2	10579	3.72	8.95

em elementos finitos *COMSOL Multiphysics* V4.3b em um servidor na arquitetura cluster localizado no Centro Nacional de Processamento de Alto Desempenho (CENAPAD) da Universidade Federal do Ceará. Apesar da complexidade deste problema específico não exigir tamanho recurso computacional, o mesmo foi utilizado como teste para trabalhos futuros de maior complexidade.

Para os valores das medições de resistividade realizadas, utilizando o software desenvolvido em [12] podemos obter uma estratificação de três camadas ou um modelo simplificado de duas camadas. O resultado da estratificação obtida é mostrado na tabela II, onde para as leituras de resistividade do solo pelo método de Wenner foram traçadas a curva de resistividade teórica que mais se aproximam destes pontos para modelos de duas e três camadas como mostrado na figura 3.

O projeto do sistema de aterramento a ser estudado é composto de uma malha de aterramento em L, onde na ramificação da malha será instalada a casa de comando da subestação. A subestação possui uma camada superficial de brita de 15cm, sendo que a área reservada para a casa de comando possui uma camada de concreto de 15cm com um tapete de borracha isolante de 6.4mm de espessura.

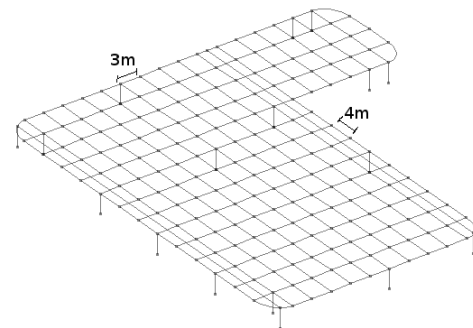


Figura 4. Malha de aterramento simulada.

O sistema projetado possui um total de 1890m de cabos de cobre de $40mm^2$ de seção transversal, formando um reticulado de $3m \times 4m$ e 14 hastes de aterramento de 3m de comprimento distribuídas pela periferia do mesmo. A capacidade de curto circuito monofásico no ponto de entrega é de 3.98kA com um tempo máximo de atuação da proteção de 0.5s.

Resultado da simulação

O domínio que representa o solo é modelado por camadas horizontais estratificadas, onde a uma profundidade de 0.5m de sua superfície é inserida uma malha de aterramento composta por elementos unidimensionais horizontais representando os cabos, e verticais representando os eletrodos de aterramento. A geometria do sistema de aterramento simulado é mostrada conforme a figura 4.

Para a simulação realizada, inicialmente o sistema é excitado pela corrente de curto-circuito, que é uniformemente

Tabela III. RESULTADOS DE SIMULAÇÃO

Parâmetro	2 Camadas	3 Camadas	Limite
Resistência	1.22Ω	1.79Ω	5Ω
E_{step} (Subestação)	299V	243V	3048.2839V
E_{step} (Casa de comando)	650V	638V	$9.54 \times 10^6 V$
E_{touch} (Subestação)	802V	625V	928.59V
E_{touch} (Casa de comando)	952V	913V	$9.54 \times 10^6 V$

distribuída entre os condutores de aterramento, após o cálculo da máxima elevação de potencial gerada por esta corrente, é feita outra etapa da simulação onde é assumido que os condutores possuem potencial fixo e igual a máxima elevação de potencial gerada pela passagem de corrente.

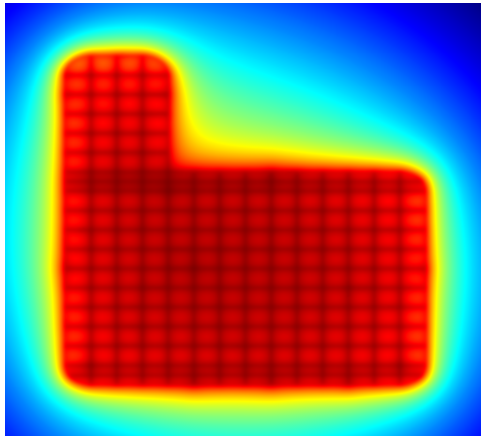


Figura 5. Comportamento do potencial elétrico na superfície do solo.

O comportamento do potencial elétrico na superfície do solo devido a condução de corrente de curto circuito no sistema de aterramento é mostrado na figura 5 onde os tons de azul ao vermelho representam a intensidade do potencial elétrico, note que as regiões internas a malha possuem um tom mais uniforme o que significa que esta região está equipotencializada.

Para visualizar as regiões que apresentam o maior gradiente de potencial, podemos plotar a magnitude do campo elétrico na superfície do solo, como mostra a figura 6. É possível observar que a região da periferia da malha é a que possui o maior gradiente de potencial, e que a adição de condutores menos espaçados nas laterais da malha contribuíram para a uniformização do potencial nas laterais da malha.

A resistência de aterramento da malha é obtido pela razão entre a máxima elevação de potencial no solo em relação ao terra remoto (limites de simulação) e a corrente de curto circuito que foi utilizada como excitação do sistema.

Para a determinação do máximo potencial de toque e do máximo potencial de passo que uma pessoa estará submetida na subestação, foi feita uma análise visual do potencial elétrico na superfície da solo com o potencial elétrico presente nos condutores de aterramento, para isso foi traçado o potencial elétrico na diagonal da malha na superfície do solo e no nível da malha. A máxima diferença de potencial entre dois pontos espaçados de 1m na superfície do solo é o potencial de passo e com o mesmo espaçamento entre um ponto na superfície do solo e outro no nível da malha é o potencial de

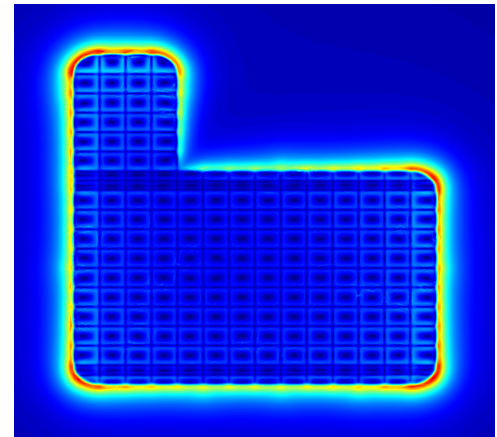


Figura 6. Comportamento do módulo do campo elétrico na superfície do solo.

toque. Os valores de potencial de passo e de toque devem ser menores que os valores limites calculados nas equações 20 e 21 respectivamente.

Como resultado da simulação foram calculados a resistência de aterramento e os limites de segurança para o modelo do solo de três camadas e o simplificado de duas camadas, na região revestida com uma camada de 15cm brita e na região da casa de comando, que é uma região abrigada revestida com uma camada de 15cm de concreto com um tapete isolante de 6.4mm. Apesar dos valores de tensões de toque obtidos como resultado da simulação não apresentarem sentido se no ponto medido não houver alguma carcaça metálica aterrada, neste trabalho foi considerado o pior caso possível, que é na periferia da malha. Os resultados obtidos são mostrados na tabela III.

VII. CONCLUSÃO

Com este trabalho é possível concluir que ferramentas computacionais como o método dos elementos finitos podem ser uma forma alternativa para projetos de sistemas de aterramento elétrico, pois com a solução numérica é possível de calcular os valores de resistência de aterramento, potenciais de passo e de toque.

A análise numérica possui a vantagem de se conhecer a distribuição de potencial elétrico no solo, o que torna este método mais versátil do que os métodos tradicionais, possibilitando estudos especiais de sistemas de aterramento elétrico que aumentam a segurança e possibilitam a redução de custos com material.

Também é possível concluir que a aproximação de um solo característico de três camadas por um modelo do solo simplificado de duas camadas pode gerar erros de projeto consideráveis.

AGRADECIMENTOS

À Companhia Energética do Ceará (COELCE) pelo apoio ao projeto P&D de avaliação de sistemas de aterramento do programa de pós graduação em engenharia elétrica da Universidade Federal do Ceará e ao Centro Nacional de Processamento de Alto Desempenho (CENAPAD-UFC) pelo suporte computacional.

REFERÊNCIAS

- [1] "Ieee guide for safety in ac substation grounding," *IEEE Std 80-2000*, pp. i–192, 2000.
- [2] V. C. SILVA, "Método de elementos finitos aplicado à solução de problemas de aterramento elétrico," Ph.D. dissertation, Universidade de São Paulo, 2006.
- [3] J.-M. Jin, J. Jin, and J.-M. Jin, *The finite element method in electromagnetics*. Wiley New York, 2002.
- [4] M. N. Sadiku, *Numerical techniques in electromagnetics*. CRC press, 2010.
- [5] A. Comsol, "Comsol multiphysics user's guide," *Version: 4.3b*, 2013.
- [6] S. De and J. White, *NUMERICAL METHODS FOR PDE Lecture 4*. Massachusetts Institute of Technology Open Course, 2003.
- [7] E. D. Sunde, *Earth conduction effects in transmission systems*. Dover Publications New York, 1968, vol. 7.
- [8] "Ieee guide for measuring earth resistivity, ground impedance, and earth surface potentials of a grounding system," *IEEE Std 81-2012 (Revision of IEEE Std 81-1983)*, pp. 1–86, 2012.
- [9] J. Endrenyi, "Evaluation or resistivity tests for design of station grounds in nonuniform soil," *Power Apparatus and Systems, IEEE Transactions on*, vol. 82, no. 69, pp. 966–970, 1963.
- [10] A. B. de Normas Técnicas, *Sistemas de aterramento de subestações — Requisitos. Substation earthing systems — Requirements*. ABNT NBR 15751, 2009.
- [11] W. D. Callister Jr and S. M. S. Soares, *Ciência e engenharia de materiais: uma introdução*. Livros Técnicos e Científicos, 2008.
- [12] R. R. A. Coelho and R. S. T. Pontes, "Análise da norma nbr 7117 baseado na estratificação otimizada do solo a partir do algoritmo de sunde e algoritmos genéticos," *XI Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente (SBAI)*, 2013.