



MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS COMO FERRAMENTA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE ELETROSTÁTICA E MAGNETOSTÁTICA

Danilo Nobre Oliveira – danilonobre@danilonobre.eng.br

Ginúbio Braga Ferreira – ginubio@gmail.com

Universidade Federal do Ceará - Curso de Engenharia Elétrica

Campus de Sobral

R. Anahid Andrade, S/N - Centro

CEP: 62100-000 – Sobral - CE

Ricardo Silva Thé Pontes – ricthe@dee.ufc.br

Universidade Federal do Ceará - Centro de Tecnologia - Departamento de Engenharia Elétrica

Caixa Postal: 6001 - Campus do Pici - Bloco 705

CEP: 60.455-760 – Fortaleza - CE

Resumo: *O ensino e a aprendizagem da teoria do eletromagnetismo requer o estudo e a abordagem sistemática de problemas envolvendo a análise de campos escalares e vetoriais, que, em muitos casos, são descritos por equações diferenciais parciais de segunda ordem, cuja solução analítica geralmente é difícil de ser obtida. Nestes casos, a distribuição espacial dos campos eletromagnéticos pode ser obtida de forma rápida e precisa, através de métodos computacionais para a resolução destas equações. No presente artigo, é proposta a utilização do método dos elementos finitos, com auxílio do programa computacional FEMM (que é uma implementação do MEF), para o ensino de eletrostática e magnetostática.*

Palavras-chave: *Método dos Elementos Finitos, Eletrostática, Magnetostática, Capacitor, Máquina Elétrica*

1 INTRODUÇÃO

Em geral, o estudo de eletromagnetismo envolve a análise de importantes grandezas elétricas, como o campo elétrico, o potencial elétrico, o campo magnético e o potencial magnético vetorial. Estas grandezas são largamente utilizadas na descrição do comportamento eletromagnético de diversos fenômenos e dispositivos, como um capacitor, um dipolo elétrico, relés, transformadores elétricos, motores e geradores



elétricos, descargas atmosféricas, etc. Neste contexto, a modelagem matemática dos fenômenos eletromagnéticos é geralmente feita a partir de equações diferenciais parciais (EDPs) de 2a. ordem (BUCK & HAYT JR, 2008).

Em alguns casos particulares, nos quais o problema apresenta uma geometria com simetria adequada (como um capacitor de placas paralelas), a EDP podem ter sua complexidade reduzida, permitindo sua resolução analítica através de integração e/ou diferenciação direta. Contudo, na maioria dos casos práticos, verifica-se que a geometria não apresenta uma simetria adequada (geralmente com variação de grandezas em duas ou três dimensões), fazendo com que a resolução destas EDPs torne-se um problema não-trivial e, em alguns destes casos, faz-se necessária inclusive a aplicação de métodos numéricos para a obtenção de uma solução precisa do problema estudado (SADIKU, 2004).

Dentre os principais métodos numéricos existentes para resolução de problemas de campos eletromagnéticos, o método dos elementos finitos (MEF) tem adquirido grande importância desde a sua criação na década de 1960, devido a duas principais vantagens concomitantes, sobre os demais métodos numéricos: flexibilidade do método na modelagem de problemas complexos e elevada precisão nos resultados (REDDY, 1993). Tais características do MEF o qualificam como uma ferramenta bastante relevante no ensino da teoria eletromagnética (geralmente feito nos cursos de engenharia elétrica e áreas afins).

Com o auxílio deste método, é possível se fazer uma modelagem precisa e fiel de diversas situações práticas, no contexto do eletromagnetismo, tais como a distribuição do campo elétrico e das linhas equipotenciais entre as placas de um capacitor ou do fluxo magnético através do núcleo de um motor elétrico. Considerando ainda que a análise de um problema de eletromagnetismo pelo MEF parte da geometria do mesmo, o MEF pode ser utilizado como uma ferramenta de análise conjunta das características geométricas e dos fenômenos eletromagnéticos relacionados ao problema apresentado, favorecendo uma melhor compreensão do mesmo.

Neste artigo são apresentadas as principais características do MEF, enfocando suas etapas de modelagem, execução e análise dos resultados obtidos para problemas de eletrostática e magnetostática. Em seguida, são apresentados dois exemplos de aplicações do MEF, em 2D, utilizando o programa computacional FEMM (que é uma implementação do MEF, baseada em métodos variacionais), como forma de ilustrar a utilização do MEF como ferramenta de ensino de eletromagnetismo, especialmente nos cursos de engenharia elétrica.

2 APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS PARA O ESTUDO DE CAMPOS ELETROMAGNÉTICOS

A maioria dos problemas de eletromagnetismo, envolve o cálculo das distribuições de campos elétricos/magnéticos ou de potencial elétrico/magnético, em uma região do espaço. Em sua grande maioria, estes problemas são matematicamente descritos por pares de EDPs, onde as equações de “Poisson” e “Laplace” são aplicadas na resolução de problemas de eletrostática, enquanto outras duas EDPs são aplicadas na resolução de



problemas de magnetostática, sendo expressadas pelas Equações (1) e (2), no caso da eletrostática e as Equações (3) e (4), no caso da magnetostática (representadas nas suas formas geral e em coordenadas cartesianas) (BUCK & HAYT JR, 2008).

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho_V}{\epsilon} \Rightarrow \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho_V}{\epsilon} \quad (1)$$

$$\nabla^2 V = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad (2)$$

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu \cdot \vec{J} \Rightarrow \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial z^2} = -\mu \cdot \vec{J} \quad (3)$$

$$\nabla^2 \vec{A} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial z^2} = 0 \quad (4)$$

As Equações (1) e (3) representam casos gerais de problemas que envolvam uma distribuição volumétrica de cargas elétricas (ρ_V) e distribuição superficial de corrente elétrica (\vec{J}), respectivamente, enquanto as Equações (2) e (4) (que são casos particulares das duas equações anteriores) são aplicadas nos demais casos de cálculo de campos eletrostáticos ou magnetostáticos, respectivamente (BUCK & HAYT JR, 2008). A relação entre as distribuições de potenciais elétricos e campos elétricos, pode ser obtida com base na expressão que relaciona ambas as grandezas, mostrada na Equação (5), representada na sua forma geral e em coordenadas cartesianas (BUCK & HAYT JR, 2008). Na Equação (6) é mostrada uma equação similar, para análise de problemas de magnetostática, nos quais se relacionam a densidade de fluxo magnético com o potencial magnético vetorial (BUCK & HAYT JR, 2008).

$$\vec{E} = -\nabla V = -\left(\frac{\partial V}{\partial x} \vec{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \vec{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{a}_z\right) \quad (5)$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) \vec{a}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) \vec{a}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) \vec{a}_z \quad (6)$$

Em muitos destes problemas, a resolução analítica das Equações (1) e (2), ou (3) e (4), é uma tarefa não-trivial, ou que demanda um grande esforço matemático. Por este motivo, em geral, tais equações são resolvidas através de métodos numéricos de aproximação, dentre os quais destaca-se o MEF, especialmente no estudo de campos eletromagnéticos (BASTOS & SADOWSKI, 2003).

O princípio de utilização do MEF, na resolução de problemas de campos, é a divisão de um único problema descrito por uma pequena quantidade de EDPs (geralmente difíceis de serem resolvidas analiticamente), em diversos problemas menores (ou “elementos finitos”), onde cada um destes elementos finitos é descrito por um sistema de equações



algébricas, cuja resolução é bem mais simples do que a resolução das EDPs originais do problema.

A utilização do MEF geralmente requer 3 etapas básicas, as quais são citadas e detalhadas na Tabela 1.

Tabela 1 - Etapas e subetapas de utilização do MEF.

Etapa	Subetapa
Pré-processamento	<ul style="list-style-type: none"> • formulação geométrica do problema • formulação analítica do problema • definição do domínio e do tipo de simetria do problema (para análise do problema em 2D) • condições de contorno • geração da malha de elementos finitos
Processamento	resolução do problema
Pós-processamento	análise da distribuição do campo

Na etapa de pré-processamento, todas as características geométricas e propriedades elétricas do problema devem ser definidas. Além disso, dois importantes aspectos que também são definidos nesta etapa são o tipo de simetria do problema e as condições de contorno do domínio do problema. A simetria de um problema pode ser do tipo planar (quando o eixo de simetria do problema é uma reta perpendicular ao plano que contém a geometria do problema) ou axisimétrica (utilizada em problemas de 3D, que são representados em 2D e que envolvem uma simetria rotacional, em relação a um eixo reto contido na área do plano que contém o problema).

As simetrias planar e axisimétrica são ilustradas nas Figuras 1 e 2, respectivamente.

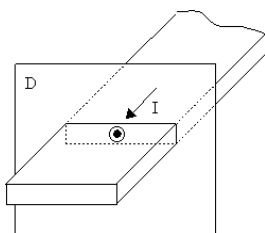


Figura 1 - Representação de um problema com simetria planar.

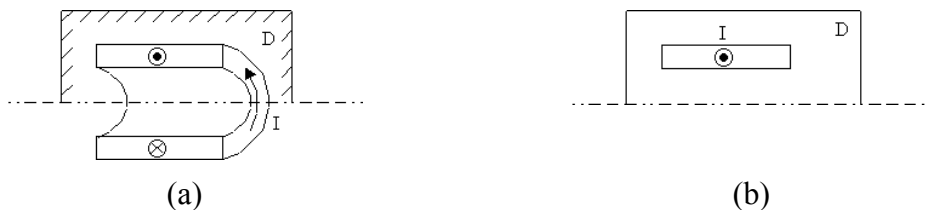


Figura 2 - (a) Problema real com representação em 3D e (b) representação do mesmo problema, em um plano, utilizando simetria axisimétrica.



As condições de contorno (também conhecidas como “condições de fronteira”) determinam os valores iniciais dos campos (potencial elétrico/magnético ou do próprio campo elétrico/magnético) ao longo da fronteira que delimita o domínio do problema. As duas principais condições de fronteira utilizadas são as condições de contorno de Dirichlet, e de Neumann. A primeira condição é utilizada quando se deseja definir um mesmo valor de potencial elétrico/magnético ao longo de parte da fronteira do domínio do problema, ao passo que a segunda condição é utilizada nas partes da fronteira do domínio do problema nos quais o potencial elétrico/magnético não apresenta variação na direção ortogonal a estas mesmas partes da fronteira (BASTOS & SADOWSKI, 2003). As condições de contorno de Dirichlet e Neumann para problemas de eletrostática são ilustradas, respectivamente, nas Figuras 3a e 4a, enquanto estas mesmas condições são ilustradas nas Figuras 3b e 4b.

É importante ressaltar que, no programa FEMM, as condições de contorno do domínio do problema são definidas, por padrão, como sendo condições de contorno de Neumann. Assim, a condição de contorno do domínio do problema só deve ser definida, nas partes da fronteira do domínio nas quais se deseja impor a condição de contorno Dirichlet (MEEKER, 2010).



Figura 3 - Ilustração de um caso de aplicação da condição de contorno de Dirichlet, para (a) um problema de eletrostática e (b) um problema de magnetostática.

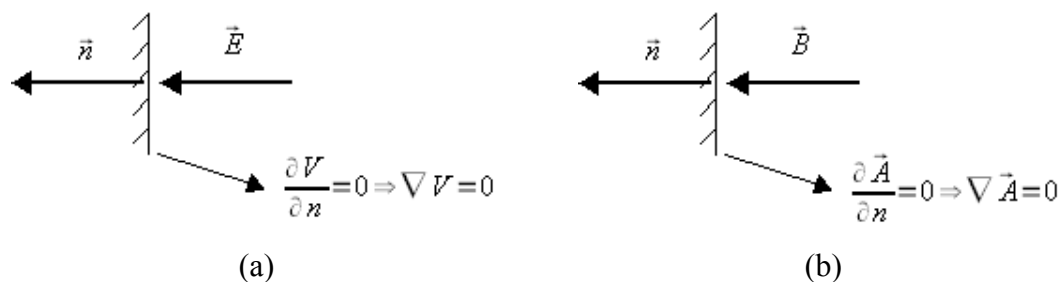


Figura 4 - Ilustração de um caso de aplicação da condição de contorno de Neumann, para (a) um problema de eletrostática e (b) um problema de magnetostática.

Em geral, as condições de contorno de problemas de eletrostática, analisados em 2D, só são definidas para a fronteira do domínio do problema, e, a partir destes valores, o vetor campo elétrico em cada um dos subdomínios do problema pode ser definido através das



equações de contorno para problemas de eletrostática, expressadas pelas Equações (7) e (8) (BUCK & HAYT JR, 2008).

$$E_{tan1} = E_{tan2} \quad (7)$$

$$D_{N1} - D_{N2} = \rho_S \Rightarrow \epsilon_1 \cdot E_{N1} - \epsilon_2 \cdot E_{N2} = \rho_S \quad (8)$$

No caso de problemas de magnetostática, as condições de contorno utilizadas são mostradas nas Equações (9) e (10) (BUCK & HAYT JR, 2008).

$$H_{tan1} = H_{tan2} \quad (9)$$

$$B_{N1} = B_{N2} \quad (10)$$

A geração da malha de elementos finitos no MEF geralmente é feita apenas com elementos triangulares, pois como este é um elemento de 1ª. ordem, o potencial elétrico/magnético varia linearmente dentro do triângulo. Isto permite modelar as grandezas elétricas dentro do elemento triangular através de um sistema de 3 equações (BASTOS & SADOWSKI, 2003). Um exemplo de malha contendo somente elementos triangulares, bem como um elemento triangular isolado, é mostrada na Figura 5.

Quando deseja-se uma maior precisão no cálculo das grandezas, em uma determinada região do domínio do problema, deve-se aumentar o número de elementos finitos que compõem a região desejada. Contudo, um aumento do número de elementos acarreta um aumento no esforço computacional para resolução do problema. Dessa forma, a quantidade de elementos da malha, bem como a concentração de elementos em regiões específicas do domínio do problema, deve ser feita com bom senso e com base na experiência do usuário (MEEKER, 2010).

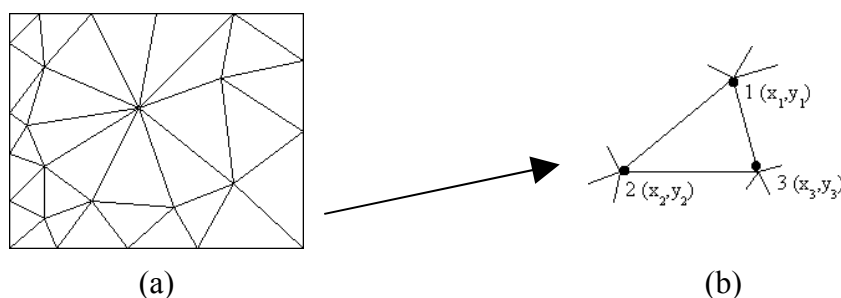


Figura 5 - (a) Exemplo de malha composta somente de elementos triangulares e (b) um elemento triangular isolado.

A etapa de processamento baseia-se na aplicação de um método para resolução das equações que descrevem o problema, geralmente feito através de métodos residuais, nos quais as equações numéricas são discretizadas e implementadas diretamente no programa computacional, resultando numa maior facilidade e simplicidade na aplicação e compreensão do programa computacional utilizado para implementar o MEF. Um dos



métodos residuais mais utilizados atualmente para se implementar o MEF é o método de Galerkin, principalmente nos problemas de eletromagnetismo (BASTOS & SADOWSKI, 2003).

Na etapa de pós-processamento, é obtida toda a distribuição dos campos calculados, ao longo do domínio do problema, com base nos dados fornecidos na etapa de pré-processamento. Em geral, as implementações do MEF oferecem, nesta etapa, ferramentas que permitem tanto uma análise dos resultados, tanto no formato numérico como gráfico, através do uso de legendas coloridas (para análise de campos escalares) ou vetores (para análise de campos vetoriais).

3 ANÁLISE DE PROBLEMAS DE ELETROMAGNETISMO EM 2D ATRAVÉS DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Para ilustrar a resolução de problemas de eletromagnetismo pelo MEF (através do uso do programa FEMM), são apresentados, a seguir, dois problemas: o primeiro relacionado à eletrostática e outro envolvendo a análise magnetostática.

3.1 Problema de eletrostática: Capacitor de Placas Paralelas

O problema do capacitor de placas paralelas é descrito com base na Figura 6, na qual é mostrada a geometria deste tipo de capacitor, com placas de 100cm² de área, e um dielétrico de 1cm de comprimento (cujo material é a mica, com permissividade relativa de 6). Na Figura 7 é mostrado o final da etapa de pré-processamento, onde já estão definidos a geometria do problema, as características dos materiais, as condições de contorno e a malha de elementos finitos (neste caso, contendo 819 elementos finitos). A simetria é do tipo planar, e a profundidade do problema é desprezível (da ordem de 10⁻⁸).



Figura 6 - Geometria do problema durante a etapa de pré-processamento no programa FEMM.

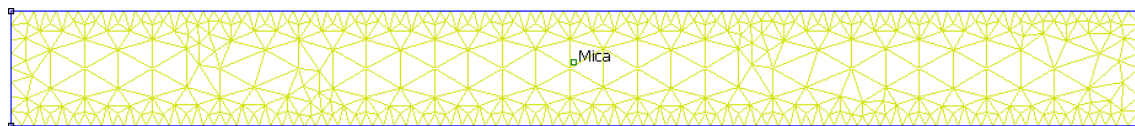


Figura 7 - Formato do problema ao final da etapa de pré-processamento no programa FEMM.

As condições de contorno definidas são a condição de Dirichlet nas placas superior e inferior do capacitor, com potencial elétrico fixo de 50V e 0V, respectivamente, além da



condição de Neumann nos perímetros laterais do capacitor, com variação nula de potencial elétrico, na direção normal a estas duas fronteiras laterais. Após o processamento do problema, obteve-se o resultado da distribuição do campo elétrico e do potencial elétrico, conforme mostrado na Figura 8.

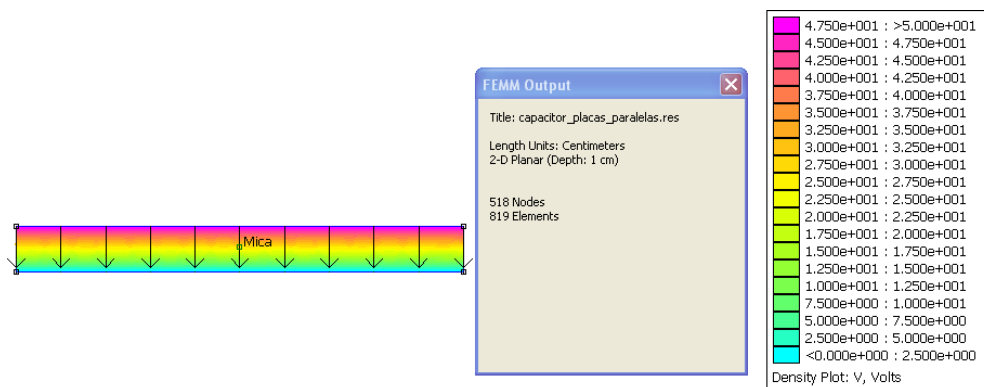


Figura 8 - Distribuição do campo elétrico e do potencial elétrico no dielétrico do capacitor de placas paralelas.

Conforme esperado, as linhas de campo elétrico divergem (ou “saem”) da placa superior, com excesso de cargas positivas e convergem (ou “entram”) na placa inferior, com acúmulo de cargas negativas. Além disso, a legenda colorida permite uma análise da variação do potencial elétrico no domínio do problema.

3.2 Problema de magnetostática: Máquina Rotativa de Relutância Chaveada

A máquina de relutância chaveada é um tipo de máquina elétrica que funciona com base no princípio da variação da relutância magnética de seu entreferro (FITZGERALD *et al.*, 2003).

A seguir são apresentados os dados do problema, bem como o resultado obtido com o programa FEMM, na análise deste caso (OLIVEIRA & PONTES, 2008 / OLIVEIRA, 2008).

Dados do problema

A simetria escolhida para o problema é do tipo planar.

O domínio do problema corresponde a uma máquina rotativa de relutância chaveada, cuja geometria é mostrada na Figura 10a.

Na fronteira do domínio do problema foi imposta a condição de Dirichlet, com potencial vetor magnético nulo em toda a fronteira.

Estes dados resultaram na geometria do problema mostrada na Figura 9a.

Geração da malha e dos elementos finitos

A geração da malha foi feita utilizando as definições padrões do programa FEMM, resultando numa malha com 43.915 elementos finitos, conforme mostrada na Figura 9b.



Análise dos resultados obtidos

Após a resolução do problema elaborado no programa FEMM, foi obtida o resultado mostrado na Figura 10, na qual pode-se ver a distribuição de potencial elétrico, bem como as linhas de campos elétrico, ao longo do domínio do problema.

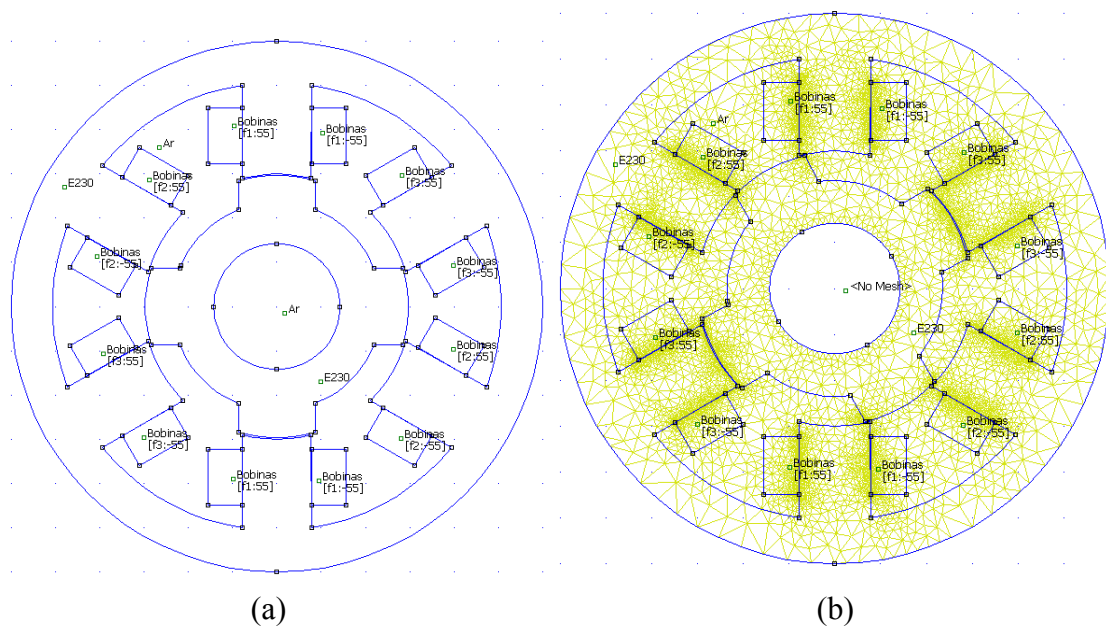


Figura 9 - (a) Geometria da máquina rotativa de relutância chaveada e (b) malha gerada pelo programa FEMM.

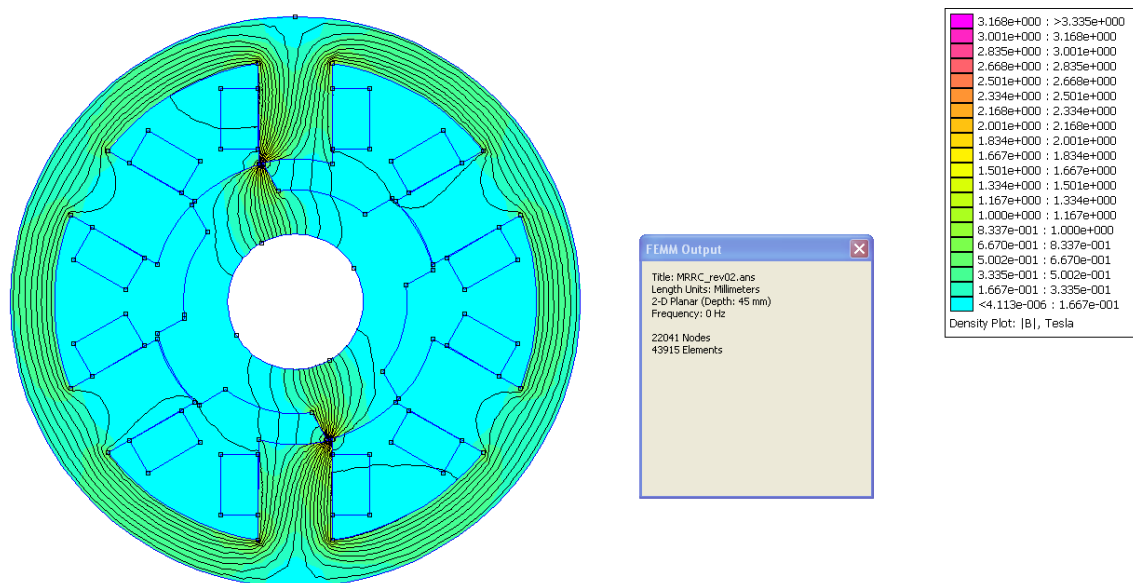


Figura 10 - Distribuição das linhas de fluxo magnético e da densidade de fluxo magnético no núcleo e no entreferro da máquina rotativa de relutância chaveada.



4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Apesar de só permitir a análise de problemas de campos em 2D, o programa FEMM apresenta uma interface gráfica simples e de fácil uso, permitindo a análise do problema com base na visualização de sua geometria, além da configuração de diversos parâmetros para a execução do MEF, de forma prática e direta, juntamente com uma análise numérica e/ou gráfica dos resultados obtidos, com elevada precisão. Outra importante vantagem do FEMM é o fato de ser um programa disponível gratuitamente, o que favorece ainda mais o uso do MEF como uma ferramenta de estudo e aprofundamento de problemas de eletromagnetismo, especialmente nos cursos de graduação em engenharia elétrica.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BASTOS, J. P. A., SADOWSKI, N. **Electromagnetic modeling by finite element methods**. Nova York: Marcel Dekker Inc., 2003.
- BUCK, J. A., HAYT JR, W. H. **Eletromagnetismo**. 7a. edição, Ed. McGraw-Hill Interamericana, 2008.
- MEEKER, D. **Finite Element Method Magnetics: HomePage**. Disponível em: <<http://www.femm.info/wiki/HomePage>> Acesso em: 13 jun. 2010.
- REDDY, J. N. **An introduction to the Finite Element Method**. 2a. edição, Nova York: Ed. McGraw-Hill, 1993.
- SADIKU, M. N. O. **Elementos de eletromagnetismo**. 3a. edição, Ed. Bookman, 2004.
- FITZGERALD A. E., KINGSLEY JR., C., UMANS, S. D., **Electric Machinery**, 6th edition, McGraw-Hill, 2003.
- OLIVEIRA, D. N., PONTES, R. S. T., Comparison of simulation and measurement methods of the static magnetization characteristics of a 1 hp RSRM, **Proceedings of the XVIII International Conference on Electrical Machines (ICEM'08)**, Vilamoura, Portugal, 2008.
- OLIVEIRA, D. N. **Proposta e implementação de sistema para caracterização eletromecânica estática e dinâmica de motores rotativo e linear de relutância chaveada**. Fortaleza, 205 p., 2008. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Ceará.