Trabalho 1 - Estatística

Tetraedro gerado aleatoriamente em uma esfera

Artur De Vlieger Lima [13671574], Gabriel da Costa Merlin [12544420], Vicenzo D'Arezzo Zilio [13671790]

Outubro, 2023

Link para o código

1 Introdução

Durante a 53° Competição de Matemática William Lowell Putnam foi enunciado o seguinte problema: tendo quatro pontos escolhidos aleatoriamente na superfície de uma esfera, qual é a probabilidade de que o centro da esfera esteja dentro do tetraedro cujos vértices estão nos quatro pontos? (Entendemos que cada ponto é escolhido independentemente em relação a uma distribuição uniforme na esfera).

Por ser uma competição muito famosa pela dificuldade, diversas pessoas esforçaram-se para conseguir resolver tal questão. Quase todas escolheram abordar o problema de forma analítica para produzir seus gabaritos.

No entanto, para a disciplina de Estatística (SME0123), utilizaremos de simulações para produzir uma resposta à questão enunciada acima. Essa abordagem se mostra teoricamente correta, pois, devido à Lei dos Grandes Números, para uma quantidade grande de realizações, a média aritmética dos resultados tende a se aproximar do valor esperado. Ou seja, sendo N a quantidade de tetraedros aleatórios criados e Q quantos deles têm o centro da esfera dentro de si, temos que a probabilidade Q/N será mais próxima da real quanto maior for N.

Além disso, construiremos nossos tetraedros aleatórios utilizando 2 modelos distintos. O primeiro utilizando coordenadas esféricas e o outro uma distribuição uniforme em um cubo circunscrito à esfera. Com isso, poderemos observar qual dos modelos melhor representa o problema.

2 Desenvolvimento

2.1 Gerando os Pontos

2.1.1 Modelo 1: Coordenadas Esféricas

A abordagem deste modelo, como indicado, baseia-se em coordenadas esféricas. O objetivo é gerar aleatoriamente um valor para θ e um valor para ϕ, dentro dos intervalos $[0, 2\pi]$ e $[0, \pi]$, respectivamente, que descrevem a variação dos ângulos mencionados no sistema citado.

Para fazer com que os pontos estejam na superfície da esfera, basta gerá-los com a coordenada ρ igual ao raio da esfera desejada.

Para a obtenção de valores aleatórios, utilizamos o seguinte método, presente na biblioteca *numpy*, implementada na linguagem *Python*:

```
import numpy as np

theta_list = np.pi * 2 * np.random.rand(n_points)
phi_list = np.pi * np.random.rand(n_points)
```

Listing 1: Geração de Valores Aleatórios

2.1.2 Modelo 2: Pontos gerados em um cubo

A abordagem deste modelo, como indicado, baseia-se em gerar pontos a partir de um cubo. O objetivo é gerar aleatoriamente coordenadas x,y e z dentro do intervalo $[0, 1]$(interior do cubo aresta 1), e, caso esses pontos caiam foram da esfera(módulo maior do que 1), são descartados, se não, projeta-se os pontos na superfície da espera.

Para fazer com que os pontos estejam na superfície da esfera, divide-se cada coordenada pelo módulo do vetor de coordenadas, projetando-se assim o ponto na superfície da esfera.

2.1.3 Comparação dos Modelos

Para comparar os modelos de geração, baseando-se novamente na Lei dos Grandes Números, podemos plotar ambos os resultados para grandes quantidades de pontos e observar sua distribuição sobre a esfera.

Portanto, observemos o comportamento para a obtenção de 150 pontos sobre uma esfera de raio 100. Para obter as figuras, usamos a biblioteca `matplotlib.pyplot`.

2.1.3.1 Modelo 1: imagem do resultado:

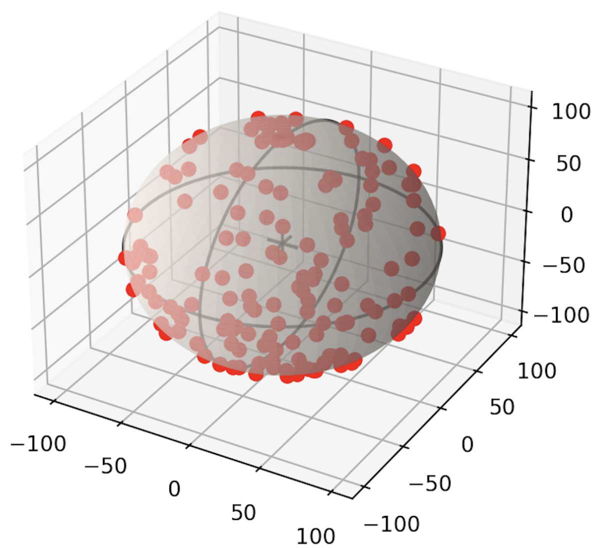

Figure 1: Pontos gerados aleatoriamente conforme o modelo 1.

2.1.3.2 Modelo 2: imagem do resultado:

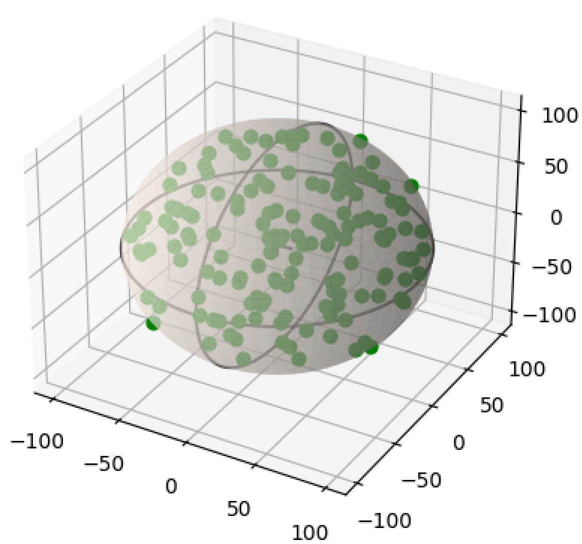

Figure 2: Pontos gerados aleatoriamente conforme o modelo 2.

2.2 Gerando o Tetraedro

Tendo um conjunto de tamanho arbitrário de pontos aleatórios na esfera, somos capazes gerar o tetraedro a partir da geração de seus vértices.

Para que o sólido gerado seja, de fato, tridimensional, precisamos verificar a dependência linear do conjunto de vértices que o compõe. Para isso, basta que calculemos a dimensão deste conjunto, o que pode ser facilmente obtido pelo método *matrix_rank* da biblioteca *Numpy* de Álgebra Linear.

Nesse sentido, um tetraedro pode ser entendido como a região delimitada por 4 planos que se interseccionam. Tais planos que compõem o sólido nada mais são do que as figuras geométricas formada pelas combinações de 4 pontos tomados 3 a 3. Por fim, obter essas 4 combinações implica em obter o tetraedro, tendo em vista que esses planos representam as fronteiras do sólido.

$$C(4,3) = \frac{4!}{3!(4-3)!} = 4$$

Logo, é suficiente tratar esse ente geométrico como um conjunto desses 4 vértices. De modo que, quando precisemos materializar sua geometria, basta que calculemos esses planos com base nas combinações no conjunto.

2.3 Verificando o pertencimento

Para verificar o pertencimento do ponto P ao tetraedro, usaremos o artifício do produto escalar. Para cada face, executaremos o seguinte protocolo:

- Calcularemos o vetor $\vec{v} = P$ - V tal que V seja o vértice pertencente ao plano;
- Definamos $\alpha = \vec{v} \cdot \vec{n}$ tal que $\vec{n}$ seja o vetor normal ao plano;
- Por fim, basta que estudemos o sinal de α.

Sendo θ o ângulo entre os dois vetores:

$$\alpha = ||\vec{v}|| \cdot ||\vec{n}|| \cdot \cos\theta \tag{1}$$

$$\alpha <= 0 \longleftrightarrow \theta \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}] \tag{2}$$

Pela definição do produto escalar, sabemos que o valor de θ é sempre delimitado por 0 e por π, pois escolhe-se sempre o menor ângulo entre os vetores. Já pela definição de vetor normal ao plano, sabe-se que o plano que delimita a face do tetraedro encontra-se a um ângulo de $\frac{\pi}{2}$ do vetor normal. Portanto, se o resultado do produto escalara é negativo, denota-se que o ponto P é superiormente delimitado pelo plano plano referido. Por fim, para verificar o pertencimento do plano ao tetraedro, basta que verifiquemos a limitação do ponto por cada face. Se o ponto é anterior a todas as faces, logo, ele é interior ao tetraedro.

3 Resultados

Para cada um dos modelos fizemos simulações de 10^2, 10^3, 10^4, 10^5, 10^6 e 10^7 experimentos, utilizando este Google Colab (mesmo código apresentado na primeira linha deste relatório) e gerando a tabela abaixo contendo a razão entre o quantidade de tetraedros que contém o centro da esfera e o número total de tetraedros gerados.

Número de repetições	Modelo 1	Modelo 2
10^2	0.11	0.12
10^3	0.123	0.119
10^4	0.1289	0.1219
10^5	0.12332	0.12549
10^6	0.125429	0.125263
10^7	0.1251554	0.1251288

Table 1: Dados coletados

4 Conclusão

Ao decorrer do desenvolvimento do código e da estratégia de modelagem, percebe-se a importância da Álgebra Linear e da Geometria Analítica para o estudo de posições relativas entre sólidos e pontos.

Nesse sentido, para a construção da abordagem em código, a biblioteca *Numpy* de Álgebra Linear é essencial não só para fornecer esses mecanismos matemáticos mas para também prover um método de geração aleatória de valores, como descrito em (2.1).

Logo, com a modelagem descrita em código, podemos utilizar a simulação do fenômeno para observar seu comportamento e notamos que conforme aumentamos o número N de repetições, mais a probabilidade observada se aproxima de 0.125 ($\frac{1}{8}$) para ambos os modelos, convergência esperada levando em conta a Teoria dos Grandes Números.

Além disso, também é importante destacar que embora os experimentos simulem o problema de maneira distinta, a convergência tende ao mesmo valor, o que contribui para concluir que os experimentos provavelmente se aproxima sim da probabilidade real do problema.

Enfim, a simulação via código é importante para solucionar problemas como este - que podem ser modelados algebricamente e podem ser computados - sem necessariamente estudar profundamente a natureza estatística do fenômeno, evitando a construção não trivial da análise referenciada na introdução (1).