

# GRF-II

## Document d'étude

Nicholas Langevin

26 février 2019

- ➡ Les produits dérivés
- ➡ Forwards et autres options
- ➡ Stratégies
- ➡ Forwards et Futures

# 1 Introduction aux produits dérivés

**Produits dérivés** Contrat entre 2 parties qui fixe les flux financiers futurs fondé sur ceux de l'actif sous-jacent  $S$ .

## Étapes d'une transaction

1. l'acheteur et le vendeur se trouve (sur un marché quelconque)
2. on définit les obligations de chaque parties (i.e. *actif à livrer, date d'échéance, prix, etc.* **Note : il y a souvent un intermédiaire (clearing house) qui intervient.**
3. La transaction a lieu et les obligations sont remplies par chaque parties
4. Les registres de propriétés sont mis à jour.

**Transaction gré-à-gré** transaction sans intermédiaire ou à l'extérieur de la bourse. Plusieurs raisons peuvent justifier ce type de transaction :

- > Ce sont souvent de grosses transaction. On peut donc économiser sur les frais de transaction.
- > On peut combiner (sur une même transaction) plusieurs micro-transaction et plusieurs types d'actifs.

**Valeur notionnelle** définition exacte à valider

**Origine des marchés de produits dérivés** Après 1971, le président Nixon a voulu défaire le standard de l'or (qui a causé de l'hyperinflation dans plusieurs pays) pour plutôt laisser le libre-marché fixer la valeur des devise de chaque pays.

**Rôle des marchés financiers** Partage du risque et diversification des risques.

## Utilité des produits dérivés

- > Gestion des risques
- > Spéculation
- > Réduction des frais de transaction
- > Arbitrage réglementaire

**Bid-Ask Spread** Correspond à la marge que le teneur de marché (*market maker*) conserve. En l'absence d'arbitrage, on aura  $Ask - Bid > 0$

**Ask** prix le plus haut que quelqu'un est prêt à payer pour le sous-jacent

**Bid** prix le plus bas que quelqu'un est prêt à payer pour le sous-jacent

## Terminologie

**market order** ordre au marché : on achète et vend selon les prix Bid Ask actuels.

**limit order** Ordre limite : on achète le sous-jacent si  $Ask < k$  ou on vend le sous-jacent si  $Bid > k$ .

**Stop Loss** ordre de vente stop : on veut limiter sa perte si un sous-jacent perd énormément de valeur. Donc, on va vendre le sous-jacent si  $Bid \leq k$ .

**Long** On se considère en position longue sur le sous-jacent si notre stratégie nous permet de bénéficier d'une hausse du sous-jacent.

**Short** On se considère en position longue sur le sous-jacent si notre stratégie nous permet de bénéficier d'une baisse du sous-jacent.

## Type de risques

**Risque de défaut** Risque de ne pas être payé. Ce risque peut être réduit avec un dépôt initial en garantie ou une marge de sécurité.

**Risque de rareté** Si il est difficile de trouver un acheteur et un vendeur pour le sous-jacent (pas beaucoup de transactions signifie beaucoup de négociations et de variation dans les prix)

# 2 Introduction aux Forwards et aux options

Pour chaque stratégie qu'on voit dans le cours, on peut calculer

**Premium** Il s'agit des cashflow à  $t = 0$  (si positif, il s'agit d'un coût; si négatif, il s'agit d'une compensation).

**Payoff** Valeur à l'échéance  $t = T$ , i.e. les Cash-flow au temps  $t = T$ .

**Profit** =  $Payoff - AV(Premium)$ <sup>1</sup>

## Quelques définitions

$r_f$  taux d'intérêt sans risque. Parfois exprimé comme une force d'intérêt  $r$  continue.

$S$  Sous-jacent (peut être une action, une devise, ...)

$S_0$  valeur actuelle du sous-jacent  $S$ .

$S_T$  valeur du sous-jacent  $S$  au temps  $t = T$ .

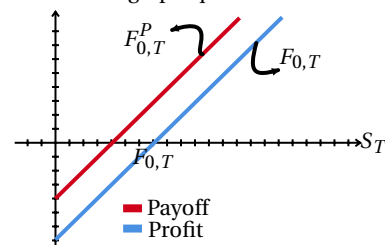
$F_{0,T}$  Prix forward du sous-jacent au temps  $T$ , qu'on définit comme

$$F_{0,T} = S_0(1 + r_f)^T$$

$F_{0,T}^P$  Prix d'un forward prépayé, i.e. on débourse  $F_{0,T}^P$  à  $t = 0$  et on reçoit le sous-jacent à  $t = T$ , alors

$$F_{0,T}^P = F_{0,T}(1 + r_f)^{-T}$$

illustration graphique :



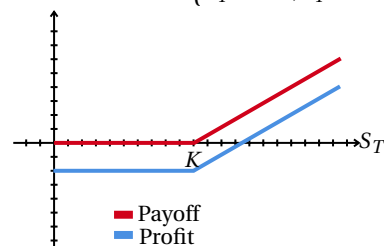
**Achat ferme et emprunt** On utilise parfois la lettre  $S$  pour désigner dans stratégie l'action de faire un achat ferme (i.e. acheter et se faire livrer le sous-jacent à  $t = 0$ ) et  $B$  pour désigner un dépôt/emprunt (qu'on exprime comme une obligation zéro-coupon).

## Call(K, T)

Contrat qui permet au détenteur de se procurer  $S$  au prix  $K$  à l'échéance  $T$ . **position longue dans le sous-jacent**

$$Premium = C(K, T)$$

$$Payoff = \begin{cases} 0 & , S_T \leq K \\ S_T - K & , S_T > K \end{cases}$$



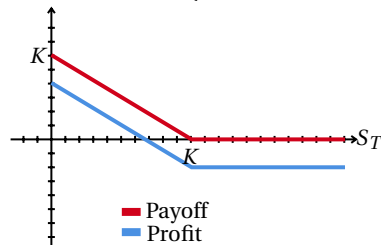
1. AV veut dire *accumulated value*.

## Put(K, T)

Contrat qui permet au détenteur de vendre S au prix K à l'échéance T.  
**position courte dans le sous-jacent**

$$\text{Premium} = P(K, T)$$

$$\text{Payoff} = \begin{cases} K - S_T & , S_T \leq K \\ 0 & , S_T > K \end{cases}$$



## Forward synthétique

On peut créer un Forward synthétique 2 de façon (en combinant d'autres transactions) :

$$\text{Forward} = \text{Stock} - \text{Bond}$$

$$\text{Forward} = \text{Call}(K, T) - \text{Put}(K, T)$$

Ces deux égalités définissent la *Put-Call Parity* vu un peu plus loin.

## 3 Stratégie de couverture

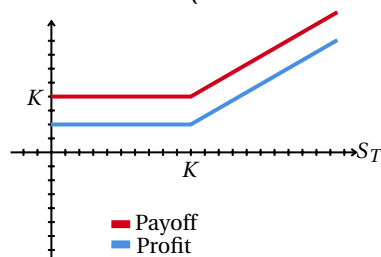
### Floor

On achète S en se protégeant contre une baisse trop importante du sous-jacent (**position longue**)

$$\text{Floor} = \text{Stock} + \text{Put}(K, T)$$

$$\text{Premium} = S_0 + P(K, T) > 0$$

$$\text{Payoff} = \begin{cases} K & , S_T \leq K \\ S_T & , S_T > K \end{cases}$$



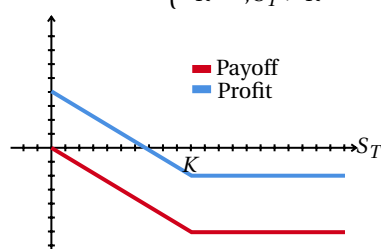
### Cap

On vend à découvert S en se protégeant contre une hausse trop importante du sous-jacent (car il faudra éventuellement le racheter!). **Position courte.**

$$\text{Cap} = \text{Call}(K, T) - \text{Stock}$$

$$\text{Premium} = C(K, T) - S_0 < 0$$

$$\text{Payoff} = \begin{cases} -S_T & , S_T \leq K \\ -K & , S_T > K \end{cases}$$



## Bull Spread

Combinaison de 2 Call (ou 2 Put) pour spéculer sur un marché haussier.  
 Avec  $K_1 < K_2$ , on a

### Avec option d'achat

$$\text{BullSpread}(\text{Call}) = \text{Call}(K_1, T) - \text{Call}(K_2, T)$$

$$\text{Premium} = C(K_1, T) - \text{Call}(K_2, T) > 0$$

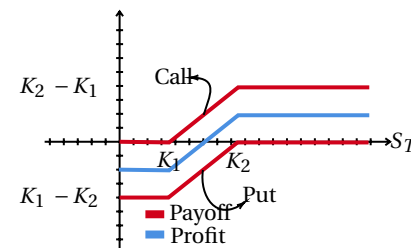
$$\text{Payoff} = \begin{cases} 0 & , S_T \leq K_1 \\ S_T - K_1 & , K_1 < S_T \leq K_2 \\ K_2 - K_1 & , S_T > K_2 \end{cases}$$

### Avec option de vente

$$\text{BullSpread}(\text{Put}) = \text{Put}(K_1, T) - \text{Put}(K_2, T)$$

$$\text{Premium} = P(K_1, T) - P(K_2, T) < 0$$

$$\text{Payoff} = \begin{cases} K_1 - K_2 & , S_T \leq K_1 \\ K_2 - S_T & , K_1 < S_T \leq K_2 \\ 0 & , S_T > K_2 \end{cases}$$



## Bear Spread

Combinaison de 2 Call ou 2 Put pour spéculer sur un marché baissier.

### Avec option d'achat

$$\text{Bear}(\text{Call}) = -\text{Bull}(\text{Call})$$

$$= \text{Call}(K_2, T) - \text{Call}(K_1, T)$$

$$\text{Premium} = C(K_2, T) - C(K_1, T) < 0$$

$$\text{Profit} = \begin{cases} 0 & , S_T \leq K_1 \\ K_1 - S_T & , K_1 < S_T \leq K_2 \\ -(K_2 - K_1) & , S_T > K_2 \end{cases}$$

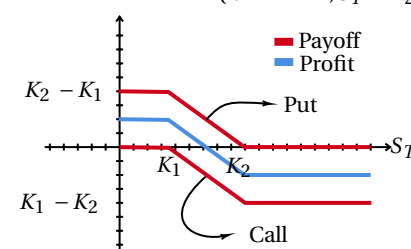
### Avec option de vente

$$\text{Bear}(\text{Put}) = -\text{Bull}(\text{Put})$$

$$= \text{Put}(K_2, T) - \text{Put}(K_1, T)$$

$$\text{Premium} = P(K_2, T) - P(K_1, T) > 0$$

$$\text{Profit} = \begin{cases} K_2 - K_1 & , S_T \leq K_1 \\ K_2 - S_T & , K_1 < S_T \leq K_2 \\ 0 & , S_T > K_2 \end{cases}$$



## Ratio Spread

Cette stratégie est une combinaison un peu sur mesure (on ne peut pas nécessairement dire si elle est longue ou courte). On achète  $n$  options d'achat à un prix d'exercice  $K_1$  et on en vend  $m$  à un prix d'exercice  $K_2$ .<sup>2</sup>

$$\text{RatioSpread} = n\text{Call}(K_1, T) - m\text{Call}(K_2, T)$$

$$\text{Premium} = nC(K_1, T) - mC(K_2, T)$$

$$\text{Payoff} = \dots$$

## Box Spread

Cette stratégie réplique l'achat d'une obligation zéro-coupon, en impliquant 2 options d'achat et 2 options de vente.

$$\text{BoxSpread} = \text{Bull}(\text{Call}) + \text{Bear}(\text{Put})$$

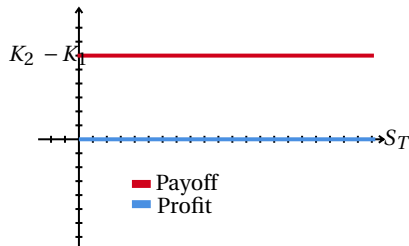
$$= \text{Call}(K_1, T) - \text{Call}(K_2, T)$$

$$+ \text{Put}(K_2, T) - \text{Put}(K_1, T)$$

$$\text{Premium} = C(K_1, T) - C(K_2, T)$$

$$+ P(K_2, T) - P(K_1, T) > 0$$

$$\text{Payoff} = K_2 - K_1, \forall S_T$$



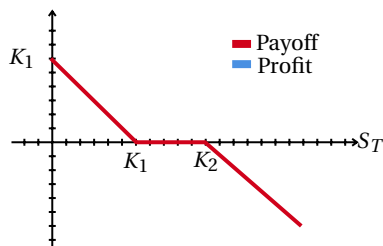
## Collar

La prime initiale du Collar peut être soit positive ou négative (dépendant du strike price).

$$\text{Collar} = \text{Put}(K_1, T) - \text{Call}(K_2, T)$$

$$\text{Premium} = P(K_1, T) - C(K_2, T)$$

$$\text{Payoff} = \begin{cases} K_1 - S_T & , S_T \leq K_1 \\ 0 & , K_1 < S_T \leq K_2 \\ K_2 - S_T & , S_T > K_2 \end{cases}$$



## Stock Covered by Collar

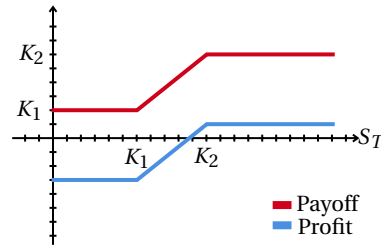
- On effectue la même stratégie qu'un Collar, en ayant initialement le sous-jacent  $S$ . **Position longue dans le sous-jacent.**
- Cette stratégie reproduit les flux monétaires d'un Bull Spread, alors

$$\text{BullSpread} = \text{Collar} + \text{Stock}$$

$$= \text{Put}(K_1, T) - \text{Call}(K_2, T) + \text{Stock}$$

$$\text{Premium} = P(K_1, T) - C(K_2, T) + S_0 > 0$$

$$\text{Payoff} = \begin{cases} K_1 & , S_T \leq K_1 \\ S_T & , K_1 < S_T \leq K_2 \\ K_2 & , S_T > K_2 \end{cases}$$



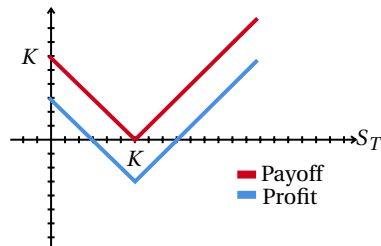
## Straddle

Stratégie pour spéculer sur la volatilité du sous-jacent  $S$  autour du point  $K$ .

$$\text{Straddle} = \text{Put}(K, T) + \text{Call}(K, T)$$

$$\text{Premium} = P(K, T) + C(K, T) > 0$$

$$\text{Payoff} = \begin{cases} K - S_T & , S_T \leq K \\ S_T - K & , S_T > K \end{cases}$$



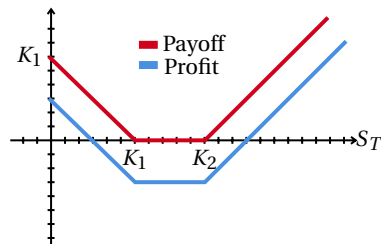
## Strangle

Même genre de stratégie que le strangle, on spéculer sur la volatilité du sous-jacent à l'extérieur de l'intervalle  $[K_1, K_2]$  :

$$\text{Strangle} = \text{Put}(K_1, T) + \text{Call}(K_2, T)$$

$$\text{Premium} = P(K_1, T) + C(K_2, T) > 0$$

$$\text{Payoff} = \begin{cases} K_1 - S_T & , S_T \leq K_1 \\ 0 & , K_1 < S_T \leq K_2 \\ S_T - K_2 & , S_T > K_2 \end{cases}$$



## Butterfly Spread (BFS)

On combine un Straddle( $K_2$ ) et un Strangle( $K_1, K_3$ ) pour spéculer sur la non-volatilité du sous-jacent autour de  $K_2$ , mais en limitant nos pertes à

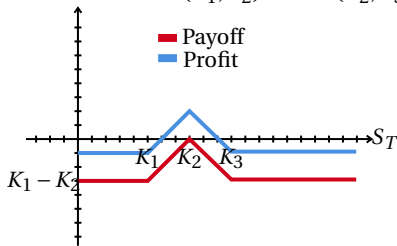
2. On peut faire cette stratégie avec des options de vente aussi.

$K_1 - K_2$  :

$$\begin{aligned} \text{Butterfly} &= \text{Strangle} - \text{Straddle}(K_2) \\ &= \text{Put}(K_1, T) - \text{Put}(K_2, T) \\ &\quad - \text{Call}(K_2, T) + \text{Call}(K_3, T) \\ \text{Premium} &= P(K_1, T) - P(K_2, T) \\ &\quad - C(K_2, T) + C(K_3, T) < 0 \end{aligned}$$

$$\text{Payoff} = \begin{cases} K_1 - K_2, & S_T \leq K_1 \\ S_T - K_2, & K_1 < S_T \leq K_2 \\ K_2 - S_T, & K_2 < S_T \leq K_3 \\ K_2 - K_3, & S_T > K_3 \end{cases}$$

**Note** De façon générale (plusieurs combinaisons sont possibles), on a  
 $\text{BFS} = \text{Bull}(K_1, K_2) + \text{Bear}(K_2, K_3)$



### Asymmetric Butterfly Spread

- Comme le Ratio Spread, il est possible de faire une stratégie sur mesure en achetant  $n$  Bull Spread et en achetant  $m$  Bear Spread en respectant les 3 prix d'exercices  $K_1 < K_2 < K_3$ .
- Si on désire avoir un BFS qui a un profit nul pour  $S_T < K_1$  et  $S_T > K_3$ , alors on trouve  $n$  et  $m$  tel que
 
$$\frac{n}{m} = \frac{K_3 - K_2}{K_2 - K_1}$$

## 5 Forwards et Futures

### Forward avec dividendes

#### Définition de base

$$C(K, T) - P(K, T) = S_0 - K(1 + r_f)^T$$

#### Action qui verse des dividendes

$$\begin{aligned} C(K, T) - P(K, T) &= S - \text{PV}(\text{Div}) - K(1 + r_f)^T \\ &= S_0 e^{-\delta T} - K e^{-r T} \end{aligned}$$

où  $\delta$  est un taux de versement des dividendes continu.

De plus, on a

$$\begin{aligned} F_{0,T} &= F_{0,T}^P (1 + r_f)^T \\ &= (S_0 - \text{PV}(\text{div}))(1 + r_f)^T \\ &= S_0 - \sum_{i=1}^T d_i (1 + r_f)^{T-i} \\ &= S_0 e^{(r-\delta)T} \end{aligned}$$

**Forward synthétique avec dividendes** On suppose le réinvestissement des dividendes.

$$\begin{aligned} \text{Forward}_{\text{avec div.}} &= e^{-\delta T} \text{Stock} - (e^{-\delta T} \cdot S_0) \text{Bond} \\ \text{Premium} &= e^{-\delta T} S_0 - e^{-\delta T} S_0 = 0 \\ \text{Payoff} &= S_T - S_0 e^{(r-\delta)T} \end{aligned}$$

**Cash-and-carry** Stratégie qui consiste à créer un Forward synthétique et vendre un Forward (profit nul).

### Calcul avec prime de risque et nuance

- Certains sous-jacent ont une composante de risque non-négligeable. Or, on ne peut pas dire que  $F_{0,T} = E[S_T]$ . Toutefois,
 
$$F_{0,T} = E[S_T] e^{-(\alpha-r)T}$$

où  $\alpha$  est la prime de risque qu'on enlève pour obtenir le prix du Forward, tel que

$$\alpha = \underbrace{r}_{\text{Taux sans risque}} + \underbrace{(\alpha - r)}_{\text{Prime de risque}}$$

### Forward de devise

#### Put-Call parity avec les devises

**DD** Devise locale

**DÉ** Devise étrangère

$x_0$  Taux de change  $\frac{DD}{DÉ}$  actuel ( $t = 0$ )

$r_D$  Taux sans risque local

$r_{\text{É}}$  Taux sans risque étranger

Le prix Forward prépayé pour une unité de DÉ à  $t = 0$  (payé en DD) est

$$F_{0,T}^P = x_0 (1 + r_{\text{É}})^{-T}$$

Et le prix Forward (à  $t = T$ ) pour une unité de DÉ est

$$\begin{aligned} F_{0,T} &= F_{0,T}^P (1 + r_D)^T \\ &= x_0 \left( \frac{1 + r_D}{1 + r_{\text{É}}} \right)^T \\ &= x_0 e^{(r_D - r_{\text{É}})T} \end{aligned}$$

#### Forward synthétique de devise

- Emprunt de  $x_0(1 + r_{\text{É}})^{-T}$  DD au taux  $r_D$
- Convertir les DD en DÉ
- Dépôt de  $(1 + r_{\text{É}})^{-T}$  DÉ (au taux  $r_{\text{É}}$ ) de 0 à  $T$ .

Le payoff sera  $x_t - x_0 \left( \frac{1 + r_D}{1 + r_{\text{É}}} \right)^T$ .

### Future

Essentiellement la même chose qu'un Forward, à quelques différences près :

- Surveillé et contrôlé par des instances officielles (aucun *Over-the-counter*)
- S'applique sur certains types d'actifs définis seulement;
- liquide et efficient
- nécessite un dépôt initial des 2 parties (le risque de défaut est minimisé)
- Transaction continues (règlement avec l'intermédiaire de façon quotidienne)
- Variation extrêmes dans les prix de Future sont limités (possibilité du *circuit Breaker*)

## Fonctionnement

1. L'intermédiaire demande un dépôt initial (*initial margin*), **souvent un % de la valeur notionnelle**.
2. Ce dépôt est accumulé à un taux de rendement  $i$  fixé par l'intermédiaire.
3. À chaque période de règlement, on calcule la marge en fonction du prix du Future :  

$$\text{Marge}_T = \text{Marge}_t \cdot (1+i)^{T-t} + \text{Variation totale}_{[t,T]}$$
4. Si  $\text{Marge}_t < \text{Maintenance margin}$ <sup>3</sup>, on doit **ajouter des fonds à la marge pour revenir à la marge initiale**, avec  $t < T$

## 9 Put-Call Parity

$$\text{Call} - \text{Put} = \text{Stock} - \text{Bond}$$

### Put-Call Parity avec devises

$\text{Call}(x_0, K, T)$  : Option d'achat qui permet d'acheter 1 unité de DÉ pour K unité de DD à l'échéance  $t = T$ .

$\text{Put}(x_0, K, T)$  : Option de vente qui permet d'acheter 1 unité de DÉ pour K unité de DD à l'échéance  $t = T$ .

Alors, on peut réécrire l'équation Put-Call Parity :

$$\text{Call}(x_0, K, T) - \text{Put}(x_0, K, T) = x_0(1+r_E)^{-T} - K(1+r_D)^{-T}$$

### Parité généralisée et option d'échange

$\text{Call}(S_t, Q_t, T-t)$  : Option d'achat qui permet d'acheter le sous-jacent S au prix du sous-jacent Q au temps  $t = T$ .

$\text{Put}(S_t, Q_t, T-t)$  : Option de vente qui permet de vendre le sous-jacent S au prix du sous-jacent Q au temps  $t = T$ .

On peut généraliser l'équation Put-Call Parity :

$$C(S_t, Q_t, T-t) - P(S_t, Q_t, T-t) = F_{t,T}^P(S) - F_{t,T}^P(Q)$$

### Options sur devise

$$\begin{aligned} \text{Call}_{DD}(x_0, K, T) &= K \cdot \text{Put}_{DD}\left(\frac{1}{x_0}, \frac{1}{K}, T\right) \\ &= K \cdot x_0 \cdot \text{Put}_{DE}\left(\frac{1}{x_0}, \frac{1}{K}, T\right) \end{aligned}$$

## Comparaison de différentes options

### Option américaine vs européenne

$$C_{\text{amer}}(K, T) \geq C_{\text{euro}}(K, T)$$

$$P_{\text{amer}}(K, T) \geq P_{\text{euro}}(K, T)$$

**Option d'achat américaine** Bien qu'on puisse exercer l'option américaine au moment qu'on veut, il peut être optimal d'exercer avant l'échéance seulement si

$$PV(\text{div}) > K \left(1 - (1+r_f)^{-(T-t)}\right)$$

ou si

$$PV(\text{div}) > P(K, T-t) + K \left(1 - (1+r_f)^{-(T-t)}\right)$$

**Option de vente américaine** Le moment optimal pour exercer le Put serait tout juste **après la date ex-dividende**.

**Date d'expiration** Pour  $T_1 < T_2$ ,

$$C(K, T_1) \leq C(K, T_2)$$

$$P(K, T_1) \leq P(K, T_2)$$

**Prix d'exercice** Les différentes conditions énumérées ci-bas doivent être respectées :

$$C(K, T) \geq S_0 - K$$

$$C(K_1, T) > C(K_2, T)$$

$$C(K_1, T) - C(K_2, T) \leq K_2 - K_1$$

$$\frac{C(K_1, T) - C(K_2, T)}{K_2 - K_1} \geq \frac{C(K_2, T) - C(K_3, T)}{K_3 - K_2}$$

$$P(K, T) \geq K - S_0$$

$$P(K_1, T) < P(K_2, T)$$

$$P(K_2, T) - P(K_1, T) \leq K_2 - K_1$$

$$\frac{P(K_2, T) - P(K_1, T)}{K_2 - K_1} \geq \frac{P(K_3, T) - P(K_2, T)}{K_3 - K_2}$$

Si le prix d'exercice est *Constant en valeur actualisée*<sup>4</sup>, alors, avec  $t < T$

$$C(K_t, t) \leq C(K_T, T)$$

$$P(K_t, t) \leq P(K_T, T)$$

## 10 Introduction au modèle binomial d'évaluation des options

### Probabilité neutre au risque

- $U = uS$  est la valeur supérieure que peut prendre le sous-jacent S
- $D = dS$  est la valeur inférieure que peut prendre le sous-jacent S
- $p$  est la probabilité (Bernouilli) que le sous-jacent prenne la valeur U.
- $C_u, C_d, P_u$  et  $P_d$  sont les payoff d'un call (ou put) selon la valeur du sous-jacent après  $h$  périodes.
- $r$  et  $\delta$  sont respectivement la force d'intérêt sans risque et le taux de dividende continu.

Alors, la probabilité *neutre au risque* est

$$p = \frac{e^{(r-\delta)h} - d}{u - d}$$

### Portefeuille réplcatif d'une option

On peut reproduire une option (Call ou Put) avec la stratégie suivante :

$$C = \Delta S + B$$

où  $B$  et  $\Delta S$  changent de signe selon si c'est un Call ou un Put. On peut obtenir la prime initiale (*Premium*) et les composantes du portefeuille réplcatif avec

$$\Delta = e^{-\delta h} \left( \frac{C_u - C_d}{U - D} \right) = e^{-\delta h} \left( \frac{C_u - C_d}{S(u - d)} \right)$$

$$B = e^{-rh} \left( \frac{U \cdot C_d - D \cdot C_u}{U - D} \right) = e^{-rh} \left( \frac{u C_d - d C_u}{u - d} \right)$$

$$\text{Premium} = \Delta S_0 + B$$

3. Cette marge est souvent exprimée en % de la marge initiale.

4. i.e.  $K_t = K(1+r_f)^T$ .