1 Rappels généraux

Mathématiques financières

$$v = \frac{1}{1+i} = 1 - d = e^{-\delta t}$$
$$a_{\overline{n}|} = \frac{1-v^n}{i}, \ddot{a}_{\overline{n}|} = \frac{1-v^n}{d}, \bar{a}_{\overline{n}|} = \frac{1-v^n}{\delta}$$

Modèles de survie

- T_x : durée de vie de (x)
- $K_x = \lfloor T_x \rfloor$
- ${}_tp_x = \Pr(T_x > t) = e^{-\int_0^t \mu_{x+s} ds}$
- ${}_tq_x = 1 - {}_tp_x = \Pr(T_x \leq t)$
- ${}_{t+u}p_x = {}_tp_x \cdot {}_up_{x+t}$
- ${}_{t|u}q_x = {}_tp_x \cdot {}_uq_{x+t}$

Loi de mortalité

Force constante $\mu_x = \mu, {}_tp_x = e^{-\mu t}$

Uniforme (DeMoivre)

- $\mu_u = \frac{1}{\omega - x}$, avec $0 \leq x \leq \omega$
- ${}_tp_x = \frac{\omega - x - t}{\omega - x}$

DUD

- $q_{x+h} = hq_x$
- $\bar{A}_x = \frac{i}{\delta} A_x$

Contrat d'assurance

Assurance entière Cas discret :
$$A_x = \sum_{k=0}^{\infty} b_k v^{k+1} {}_{k|}q_x$$
Cas continu :
$$\bar{A}_x = \int_0^{\infty} v^t {}_tp_x \mu_{x+t} dt$$

Assurance dotation pure (*pure endowment*)
$$A_{x:\overline{n}|} = A^1_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}$$
où $A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} = {}_nE_x = v^n {}_np_x$

Assurance temporaire n année
$$A^1_{x:\overline{n}|} = A_x - {}_{n|}A_x$$
où ${}_{n|}A_x = {}_nE_x A_{x+n}$ (i.e. une assurance différée)

Assurance payable m fois l'an
$$A_x^{(m)} = \sum_{k=0}^{\infty} v^{\frac{(k+1)}{m}} {}_{\frac{k}{m}|\frac{1}{m}}q_x$$

Contrat de rente

Rente entière Cas discret :
$$\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^k {}_kp_x$$
Cas continu :
$$\bar{a}_x = \int_0^{\infty} v^t {}_tp_x dt$$
$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{1 - A_{x:\overline{n}|}}{d} \leftrightarrow A_{x:\overline{n}|} = 1 - d\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$$

Principe d'équivalence

π, lorsque calculée sous le principe d'équivalence, est la solution de
$$\mathrm{E}[Z] = \mathrm{E}[Y]$$
où Z est la valeur présente des prestations futures et Y la valeur présente des primes futures à recevoir.

Formule de Woolhouse

$$\ddot{a}_x^{(m)} \approx \ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m} - \frac{m^2-1}{12m^2}(\delta + \mu_x)$$
$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)} \approx \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \frac{m-1}{2m}(1 - v^n {}_np_x) - \frac{m^2-1}{12m^2}\Big(\delta + \mu_x - v^n {}_np_x(\delta + \mu_{x+n})\Big)$$
$$\bar{a}_{x:\overline{n}|} = \lim_{m\to\infty} \ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)} \approx \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \frac{1}{2}(1 - v^n {}_np_x) - \frac{1}{12}\Big(\delta + \mu_x - v^n {}_np_x(\delta + \mu_{x+n})\Big)$$

2 Calcul de réserve

Perte prospective

$$\begin{aligned}{}_tL &= \{{}_tL|T_x > t\} \\ &= VP_{@t}(\text{Prest.}) - VP_{@t}(\text{Primes}) \\ &= Z - Y\end{aligned}$$

Réserve au temps t Selon la méthode prospective,

$${}_tV = \mathrm{E}\left[{}_tL\right] = \mathrm{E}\left[Z\right] - \mathrm{E}\left[Y\right]$$

Selon la méthode rétrospective,

$${}_tV = \frac{\text{VPA}_{@t}(\pi \text{ reçues avant } h) - \text{VPA}_{@t}(\text{Prest. à payer avant } h)}{g}$$

Relation récursive pour les réserves (discrètes) Formule générale [1] :

$${}_{h+1}V = \frac{({}_hV + G_h - e_h)(1+i) - (b_{h+1} - E_{h+1})q_{x+h}}{p_{x+h}}$$

où G_h est la prime à recevoir à $t = h$, e_h les frais relié à la collecte de la prime et E_h les frais reliés aux paiement de la prestation.

Formules alternatives pour Contrat d'assurance-vie entière (si π^{PE})

$$\begin{aligned}{}_hV &= MA_{x+h} - \pi\ddot{a}_{x+h} \\ &= M\left(1 - \frac{\ddot{a}_{x+h}}{\ddot{a}_x}\right) \\ &= M\left(\frac{A_{x+h} - A_x}{1 - A_x}\right)\end{aligned}$$

Remarque : ces formules fonctionnent aussi dans le cas d'un contrat d'assurance-vie entière continu.l

Approximation classique pour les réserves à durées fractionnaires

$${}_{h+s}V = ({}_hV + G_h - e_h)(1-s) + ({}_{h+1}V)(s)$$

Profit de l'assureur

Profit de l'assureur en changeant les 3 composantes

$$\begin{aligned}{}_{k+1}V^A - {}_{k+1}V^E = {} & N_k({}_kV + G - e'_k)(1+i') - (b_{k+1} + E'_{k+1} - {}_{k+1}V)N_kq_{x+k} \\ & - [N_k({}_kV + G = e_k)(1+i) - (b_{k+1} + E_{k+1} - {}_{k+1}V)N_kq_{x+k}]\end{aligned}$$

1. Si les frais ne sont pas applicables pour le problème, simplement poser $G_h = E_h = 0$.