

GRF-II

Document d'étude

Nicholas Langevin

24 février 2019

- ⇒ Les produits dérivés
- ⇒ Forwards et autres options

1 Introduction aux produits dérivés

Produits dérivés Contrat entre 2 parties qui fixe les flux financiers futurs fondé sur ceux de l'actif sous-jacent S .

Étapes d'une transaction

1. l'acheteur et le vendeur se trouve (sur un marché quelconque)
2. on définit les obligations de chaque parties (i.e. *actif à livrer, date d'échéance, prix, etc.*). **Note : il y a souvent un intermédiaire (clearing house) qui intervient.**
3. La transaction a lieu et les obligations sont remplies par chaque parties
4. Les registres de propriétés sont mis à jour.

Transaction gré-à-gré transaction sans intermédiaire ou à l'extérieur de la bourse. Plusieurs raisons peuvent justifier ce type de transaction :

- › Ce sont souvent de grosses transaction. On peut donc économiser sur les frais de transaction.
- › On peut combiner (sur une même transaction) plusieurs micro-transaction et plusieurs types d'actifs.

Valeur notionnelle définition exacte à valider

Origine des marchés de produits dérivés

Après 1971, le président Nixon a voulu défaire le standard de l'or (qui a causé de l'hyperinflation dans plusieurs pays) pour plutôt laisser le libre-marché fixer la valeur des devise de chaque pays.

Rôle des marchés financiers Partage du risque et diversification des risques.

Utilité des produits dérivés

- › Gestion des risques
- › Spéculation
- › Réduction des frais de transaction
- › Arbitrage réglementaire

Bid-Ask Spread Correspond à la marge que le teneur de marché (*market maker*) conserve. En l'absence d'arbitrage, on aura $Ask - Bid > 0$

Ask prix le plus haut que quelqu'un est prêt à payer pour le sous-jacent

Bid prix le plus bas que quelqu'un est prêt à payer pour le sous-jacent

1. AV veut dire *accumulated value*.

Terminologie

market order ordre au marché : on achète et vend selon les prix Bid Ask actuels.

limit order Ordre limite : on achète le sous-jacent si $Ask < k$ ou on vend le sous-jacent si $Bid > k$.

Stop Loss ordre de vente stop : on veut limiter sa perte si un sous-jacent perd énormément de valeur. Donc, on va vendre le sous-jacent si $Bid \leq k$.

Long On se considère en position longue sur le sous-jacent si notre stratégie nous permet de bénéficier d'une **hausse** du sous-jacent.

Short On se considère en position longue sur le sous-jacent si notre stratégie nous permet de bénéficier d'une **baisse** du sous-jacent.

Type de risques

Risque de défaut à préciser

Risque de rareté à préciser

2 Introduction aux Forwards et aux options

Pour chaque stratégie qu'on voit dans le cours, on peut calculer

Premium Il s'agit des cashflow à $t = 0$ (si positif, il s'agit d'un coût; si négatif, il s'agit d'une compensation).

Payoff Valeur à l'échéance $t = T$, i.e. les Cash-flow au temps $t = T$.

Profit $= \text{Payoff} - AV(\text{Premium})^1$

r_f taux sans risque. Parfois exprimé comme une force d'intérêt r continue.

S Sous-jacent (peut être une action, une devise, ...)

S_0 valeur actuelle du sous-jacent S .

S_T valeur du sous-jacent S au temps $t = T$.

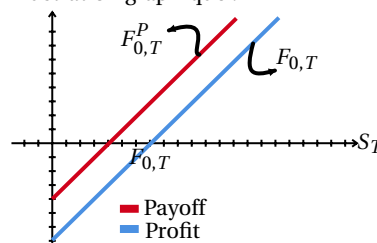
$F_{0,T}$ Prix *forward* du sous-jacent au temps T , qu'on définit comme

$$F_{0,T} = S_0(1 + r_f)^T$$

$F_{0,T}^P$ Prix d'un forward prépayé, i.e. on débourse $F_{0,T}^P$ à $t = 0$ et on reçoit le sous-jacent à $t = T$, alors

$$F_{0,T}^P = F_{0,T}(1 + r_f)^T$$

illustration graphique :



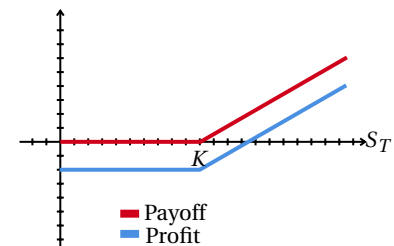
Achat ferme et emprunt On utilise parfois la lettre S pour désigner dans stratégie l'action de faire un achat ferme (i.e. acheter et se faire livrer le sous-jacent à $t = 0$) et B pour désigner un dépôt/emprunt (qu'on exprime comme une obligation zéro-coupon).

Call(K, T)

Contrat qui *permet* au détenteur de se procurer S au prix K à l'échéance T . **position longue dans le sous-jacent**

$$\text{Premium} = C(K, T)$$

$$\text{Payoff} = \begin{cases} 0 & , S_T \leq K \\ S_T - K & , S_T > K \end{cases}$$

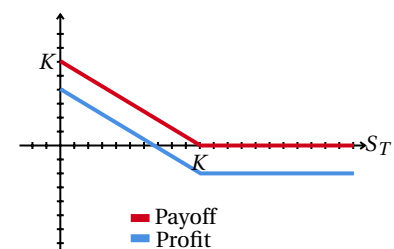


Put(K, T)

Contrat qui *permet* au détenteur de vendre S au prix K à l'échéance T . **position courte dans le sous-jacent**

$$\text{Premium} = P(K, T)$$

$$\text{Payoff} = \begin{cases} K - S_T & , S_T \leq K \\ 0 & , S_T > K \end{cases}$$



Forward synthétique

On peut créer un Forward synthétique 2 de façon (en combinant d'autres transactions) :

$$\text{Forward} = \text{Stock} - \text{Bond}$$

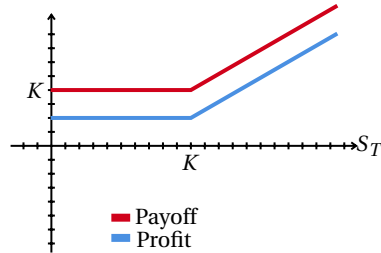
$$\text{Forward} = \text{Call}(K, T) - \text{Put}(K, T)$$

3 Stratégie de couverture

Floor

On achète S en se protégeant contre une baisse trop importante du sous-jacent (**position longue**)

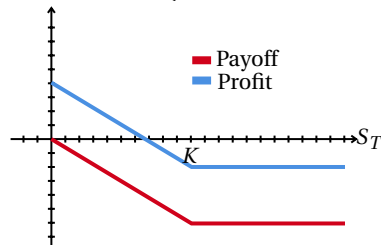
$$\begin{aligned} \text{Floor} &= \text{Stock} + \text{Put}(K, T) \\ \text{Premium} &= S_0 + P(K, T) > 0 \\ \text{Payoff} &= \begin{cases} K & , S_T \leq K \\ S_T & , S_T > K \end{cases} \end{aligned}$$



Cap

On vend à découvert S en se protégeant contre une hausse trop importante du sous-jacent (car il faudra éventuellement le racheter!). **Position courte.**

$$\begin{aligned} \text{Cap} &= \text{Call}(K, T) - \text{Stock} \\ \text{Premium} &= C(K, T) - S_0 < 0 \\ \text{Payoff} &= \begin{cases} -S_T & , S_T \leq K \\ -K & , S_T > K \end{cases} \end{aligned}$$



Bull Spread

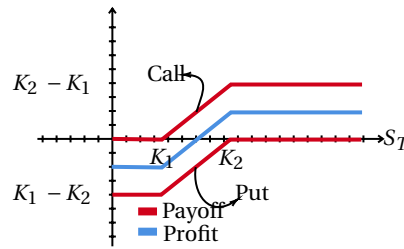
Combinaison de 2 Call (ou 2 Put) pour spéculer sur un marché haussier. Avec $K_1 < K_2$, on a

Avec option d'achat

$$\begin{aligned} \text{Bull}(\text{Call}) &= \text{Call}(K_1, T) - \text{Call}(K_2, T) \\ \text{Premium} &= C(K_1, T) - C(K_2, T) > 0 \\ \text{Payoff} &= \begin{cases} 0 & , S_T \leq K_1 \\ S_T - K_1 & , K_1 < S_T \leq K_2 \\ K_2 - K_1 & , S_T > K_2 \end{cases} \end{aligned}$$

Avec option de vente

$$\begin{aligned} \text{Bull}(\text{Put}) &= \text{Put}(K_1, T) - \text{Put}(K_2, T) \\ \text{Premium} &= P(K_1, T) - P(K_2, T) < 0 \\ \text{Payoff} &= \begin{cases} K_1 - K_2 & , S_T \leq K_1 \\ K_2 - S_T & , K_1 < S_T \leq K_2 \\ 0 & , S_T > K_2 \end{cases} \end{aligned}$$



Bear Spread

Combinaison de 2 Call ou 2 Put pour spéculer sur un marché baissier.

Avec option d'achat

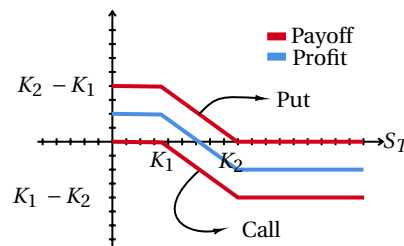
$$\begin{aligned} \text{Bear}(\text{Call}) &= -\text{Bull}(\text{Call}) \\ &= \text{Call}(K_2, T) - \text{Call}(K_1, T) \\ \text{Premium} &= C(K_2, T) - C(K_1, T) < 0 \end{aligned}$$

$$\text{Profit} = \begin{cases} 0 & , S_T \leq K_1 \\ K_1 - S_T & , K_1 < S_T \leq K_2 \\ -(K_2 - K_1) & , S_T > K_2 \end{cases}$$

Avec option de vente

$$\begin{aligned} \text{Bear}(\text{Put}) &= -\text{Bull}(\text{Put}) \\ &= \text{Put}(K_2, T) - \text{Put}(K_1, T) \\ \text{Premium} &= P(K_2, T) - P(K_1, T) > 0 \end{aligned}$$

$$\text{Profit} = \begin{cases} K_2 - K_1 & , S_T \leq K_1 \\ K_2 - S_T & , K_1 < S_T \leq K_2 \\ 0 & , S_T > K_2 \end{cases}$$



Ratio Spread

Cette stratégie est une combinaison un peu sur mesure (on ne peut pas nécessairement dire si elle est longue ou courte). On achète n options d'achat à un prix d'exercice K_1 et on en vend m à un prix d'exercice K_2 .²

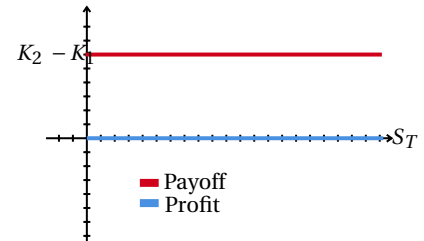
$$\begin{aligned} \text{RatioSpread} &= n\text{Call}(K_1, T) - m\text{Call}(K_2, T) \\ \text{Premium} &= nC(K_1, T) - mC(K_2, T) \\ \text{Payoff} &= \dots \end{aligned}$$

Box Spread

Cette stratégie réplique l'achat d'une obligation zéro-coupon, en impliquant 2 option d'achat et

2 options de vente.

$$\begin{aligned} \text{BoxSpread} &= \text{Bull}(\text{Call}) + \text{Bear}(\text{Put}) \\ &= \text{Call}(K_1, T) - \text{Call}(K_2, T) \\ &\quad + \text{Put}(K_2, T) - \text{Put}(K_1, T) \\ \text{Premium} &= C(K_1, T) - C(K_2, T) \\ &\quad + P(K_2, T) - P(K_1, T) > 0 \\ \text{Payoff} &= K_2 - K_1, \forall S_T \end{aligned}$$

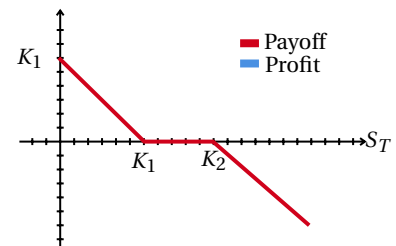


Collar

La prime initiale du Collar peut être soit positive ou négative (dépendant du strike price).

$$\begin{aligned} \text{Collar} &= \text{Put}(K_1, T) - \text{Call}(K_2, T) \\ \text{Premium} &= P(K_1, T) - C(K_2, T) \end{aligned}$$

$$\text{Payoff} = \begin{cases} K_1 - S_T & , S_T \leq K_1 \\ 0 & , K_1 < S_T \leq K_2 \\ K_2 - S_T & , S_T > K_2 \end{cases}$$



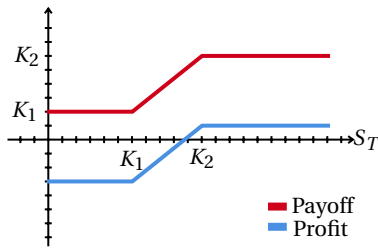
Stock Covered by Collar

- > On effectue la même stratégie qu'un Collar, en ayant initialement le sous-jacent S . **Position longue dans le sous-jacent.**
- > Cette stratégie reproduit les flux monétaires d'un Bull Spread, alors

$$\begin{aligned} \text{BullSpread} &= \text{Collar} + \text{Stock} \\ &= \text{Put}(K_1, T) - \text{Call}(K_2, T) + \text{Stock} \\ \text{Premium} &= P(K_1, T) - C(K_2, T) + S_0 > 0 \end{aligned}$$

$$\text{Payoff} = \begin{cases} K_1 & , S_T \leq K_1 \\ S_T & , K_1 < S_T \leq K_2 \\ K_2 & , S_T > K_2 \end{cases}$$

2. On peut faire cette stratégie avec des options de vente aussi.



en limitant nos pertes à $-(K_2 - K_1)$:

$$\begin{aligned} \text{Butterfly} &= \text{Strangle} - \text{Straddle}(K_2) \\ &= \text{Put}(K_1, T) - \text{Put}(K_2, T) \\ &\quad - \text{Call}(K_2, T) + \text{Call}(K_3, T) \\ \text{Premium} &= P(K_1, T) - P(K_2, T) \\ &\quad - C(K_2, T) + C(K_3, T) < 0 \end{aligned}$$

$$\text{Payoff} = \begin{cases} K_1 - K_2 & , S_T \leq K_1 \\ S_T - K_2 & , K_1 < S_T \leq K_2 \\ K_2 - S_T & , K_2 < S_T \leq K_3 \\ K_2 - K_3 & , S_T > K_3 \end{cases}$$

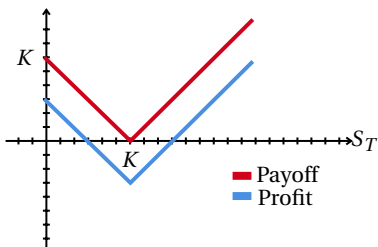
Straddle

Stratégie pour spéculer sur la volatilité du sous-jacent S autour du point K .

$$\text{Straddle} = \text{Put}(K, T) + \text{Call}(K, T)$$

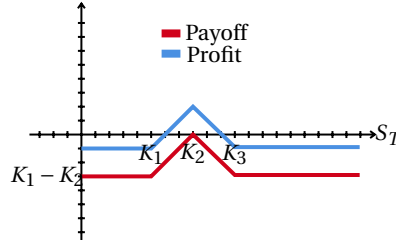
$$\text{Premium} = P(K, T) + C(K, T) > 0$$

$$\text{Payoff} = \begin{cases} K - S_T & , S_T \leq K \\ S_T - K & , S_T > K \end{cases}$$



Note De façon générale (plusieurs combinaisons sont possibles), on a

$$\text{BFS} = \text{Bull}(K_1, K_2) + \text{Bear}(K_2, K_3)$$



Asymmetric Butterfly Spread

- Comme le Ratio Spread, il est possible de faire une stratégie sur mesure en achetant n Bull Spread et en achetant m Bear Spread en respectant les 3 prix d'exercices $K_1 < K_2 < K_3$.
- Si on désire avoir un BFS qui a un profit nul pour $S_T < K_1$ et $S_T > K_3$, alors on trouve n et m tel que

$$\frac{n}{m} = \frac{K_3 - K_2}{K_2 - K_1}$$

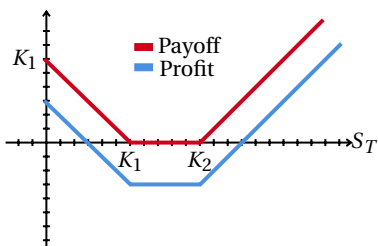
Strangle

Même genre de stratégie que le strangle, on spéculer sur la volatilité du sous-jacent à l'extérieur de l'intervalle $[K_1, K_2]$:

$$\text{Strangle} = \text{Put}(K_1, T) + \text{Call}(K_2, T)$$

$$\text{Premium} = P(K_1, T) + C(K_2, T) > 0$$

$$\text{Payoff} = \begin{cases} K_1 - S_T & , S_T \leq K_1 \\ 0 & , K_1 < S_T \leq K_2 \\ S_T - K_2 & , S_T > K_2 \end{cases}$$



5 Forwards et Futures

9 Put-Call Parity

définition de base :

$$C(K, T) - P(K, T) = F_{0,T} - K(1 + r_f)^T$$

dans le cas où l'action verse des dividendes :

$$\begin{aligned} C(K, T) - P(K, T) &= S_0 - \text{PV}(\text{Div}) - K(1 + r_f)^T \\ &= S_0 e^{-\delta T} - K e^{-r T} \end{aligned}$$

Dans le cas où le sous-jacent en question est une devise étrangère (DÉ) qu'on achète avec notre devise locale (DD) :

Butterfly Spread (BFS)

On combine un Straddle(K_2) et un Strangle(K_1, K_3) pour spéculer sur la non-volatilité du sous-jacent autour de K_2 , mais