GRF-II
Document d'étude

Nicholas Langevin

24 février 2019

- Les produits dérivés
- Forwards et autres options
- Stratégies
- Forwards et Futures

1 Introduction aux produits dérivés

Produits dérivés Contrat entre 2 parties qui fixe les flux financiers futurs fondé sur ceux de l'actif sous-jacent S.

Étapes d'une transaction

1. l'acheteur et le vendeur se trouve (sur un marché quelquonque)
2. on définit les obligations de chaques parties (*i.e. actif à livrer, date d'échéance, prix, etc.*. **Note : il y a souvent un intermédiaire (*clearing house*) qui intervient.**
3. La transaction a lieu et les obligations sont remplies par chaque parties
4. Les registres de propriétés sont mis à jour.

Transaction gré-à-gré transaction sans intermédiaire ou à l'extérieur de la bourse. Plusieurs raisons peuvent justifier ce type de transaction :

- Ce sont souvent de grosses transaction. On peut donc économiser sur les frais de transaction.
- On peut combiner (sur une même transaction) plusieurs micro-transaction et plusieurs types d'actifs.

Valeur notionelle définition exacte à valider

Origine des marchés de produits dérivés Après 1971, le président Nixon a vouli défaire le standard de l'or (qui a causé de l'hyperinflation dans plusieurs pays) pour plutôt laisser le libre-marché fixer la valeur des devise de chaque pays.

Rôle des marchés financiers Partage du risque et diversification des risques.

Utilité des produits dérivés

- Gestion des risques
- Spéculation
- Réduction des frais de transaction
- Arbitrage réglementaire

Bid-Ask Spread Correspond à la marge que le teneur de marché (*market maker*) conserve. En l'absence d'arbitrage, on aura $Ask - Bid > 0$

Ask prix le plus haut que quelqu'un est prêt à payer pour le sous-jacent

Bid prix le plus bas que quelqu'un est prêt à payer pour le sous-jacent

Terminologie

market order ordre au marché : on achète et vend selon les prix Bid Ask actuels.

limit order Ordre limite : on achète le sous-jacent si $Ask < k$ ou on vend le sous-jacent si $Bid > k$.

Stop Loss ordre de vente stop : on veut limiter sa perte si un sous-jacent perd énormément de valeur. Donc, on va vendre le sous-jacent si $Bid \leq k$.

Long On se considère en position longue sur le sous-jacent si notre stratégie nous permet de bénéficier d'une hausse du sous-jacent.

Short On se considère en position longue sur le sous-jacent si notre stratégie nous permet de bénéficier d'une baisse du sous-jacent.

1. AV veut dire *accumulated value*.

Type de risques

Risque de défaut à préciser

Risque de rareté à préciser

2 Introduction aux Forwards et aux options

Pour chaque stratégie qu'on voit dans le cours, on peut calculer

Premium Il s'agit des cashflow à $t = 0$ (si positif, il s'agît d'un coût; si négatif, il s'agît d'une *compensation*).

Payoff Valeur à l'échéance $t = T$, i.e. les Cash-flow au temps $t = T$.

Profit $= Payoff - \text{AV}(Premium)$ [1]

Quelques définitions

r_f taux sans risque. Parfois exprimé comme une force d'intérêt r continue.

S Sous-jacent (peut être une action, une devise, ...)

S_0 valeur actuelle du sous-jacent S.

S_T valeur du sous-jacent S au temps $t = T$.

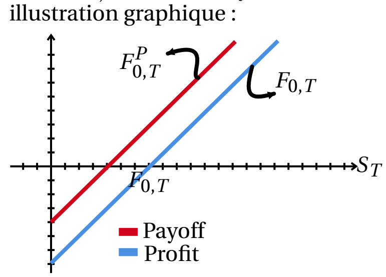
$F_{0,T}$ Prix *forward* du sous-jacent au temps T, qu'on définit comme

$$F_{0,T} = S_0(1 + r_f)^T$$

$F^P_{0,T}$ Prix d'un forward prépayé, i.e. on débourse $F^P_{0,T}$ à $t = 0$ et on reçoit le sous-jacent à $t = T$, alors

$$F^P_{0,T} = F_{0,T}(1 + r_f)^T$$

illustration graphique :



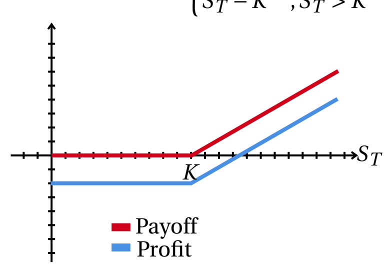
Achat ferme et emprunt On utilise parfois la lettre S pour désigner dans stratégie l'action de faire un achat ferme (i.e. acheter et se faire livrer le sous-jacent à $t = 0$) et B pour désigner un dépôt/emprunt (qu'on exprime comme une obligation zéro-coupon).

$Call(K, T)$

Contrat qui *permet* au détenteur de se procurer S au prix K à l'échéance T. **position longue dans le sous-jacent**

$$Premium = C(K, T)$$

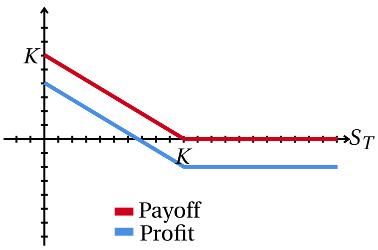
$$Payoff = \begin{cases} 0 & , S_T \leq K \\ S_T - K & , S_T > K \end{cases}$$



$Put(K,T)$

Contrat qui *permet* au détenteur de vendre S au prix K à l'échéance T. **position courte dans le sous-jacent**

$$Premium = P(K,T)$$
$$Payoff = \begin{cases} K - S_T & , S_T \leq K \\ 0 & , S_T > K \end{cases}$$



Forward synthétique

On peut créer un Forward synthétique 2 de façon (en combinant d'autres transactions) :

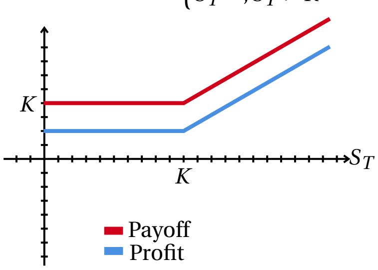
$$Forward = Stock - Bond$$
$$Forward = Call(K,T) - Put(K,T)$$

3 Stratégie de couverture

Floor

On achète S en se protégant contre une baisse trop importante du sous-jacent (**position longue**)

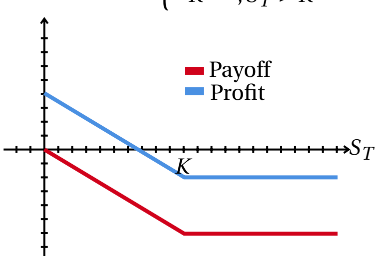
$$Floor = Stock + Put(K,T)$$
$$Premium = S_0 + P(K,T) > 0$$
$$Payoff = \begin{cases} K & , S_T \leq K \\ S_T & , S_T > K \end{cases}$$



Cap

On vend à découvert S en se protégant contre une hausse trop importante du sous-jacent (car il faudra éventuellement le racheter !). **Position courte**.

$$Cap = Call(K,T) - Stock$$
$$Premium = C(K,T) - S_0 < 0$$
$$Payoff \begin{cases} -S_T & , S_T \leq K \\ -K & , S_T > K \end{cases}$$



Bull Spread

Combinaison de 2 Call (ou 2 Put) pour spéculer sur un marché haussier. Avec $K_1 < K_2$, on a

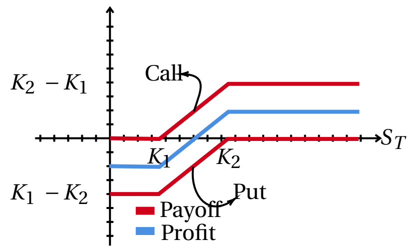
Avec option d'achat

$$Bull(Call) = Call(K_1,T) - Call(K_1,T)$$

$$Premium = C(K_1,T) + Call(K_2,T) > 0$$
$$Payoff = \begin{cases} 0 & , S_T \leq K_1 \\ S_T - K_1 & , k_1 < S_T \leq K_2 \\ K_2 - K_1 & , S_T > K_2 \end{cases}$$

Avec option de vente

$$Bull(Put) = Put(K_1,T) - Put(K_2,T)$$
$$Premium = P(K_1,T) - P(K_2,T) < 0$$
$$Payoff = \begin{cases} K_1 - K_2 & , S_T \leq K_1 \\ K_2 - S_T & , K_1 < S_T \leq K_2 \\ 0 & , S_T > K_2 \end{cases}$$



Bear Spread

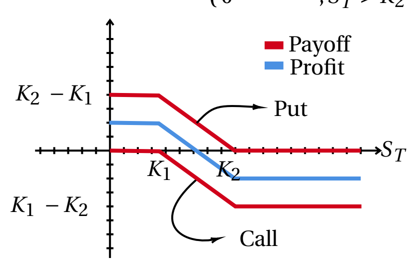
Combinaison de 2 Call ou 2 Put pour spéculer sur un marché baissier.

Avec option d'achat

$$\begin{aligned} Bear(Call) &= -Bull(Call) \\ &= Call(K_2,T) - Call(K_1,T) \end{aligned}$$
$$Premium = C(K_2,T) - C(K_1,T) < 0$$
$$Profit = \begin{cases} 0 & , S_T \leq K_1 \\ K_1 - S_T & , K_1 < S_T \leq K_2 \\ -(K_2 - K_1) & , S_T > K_2 \end{cases}$$

Avec option de vente

$$\begin{aligned} Bear(Put) &= -Bull(Put) \\ &= Put(K_2,T) - Put(K_1,T) \end{aligned}$$
$$Premium = P(K_2,T) - P(K_1,T) > 0$$
$$Profit = \begin{cases} K_2 - K_1 & , S_T \leq K_1 \\ K_2 - S_T & , K_1 < S_T \leq K_2 \\ 0 & , S_T > K_2 \end{cases}$$



Ratio Spread

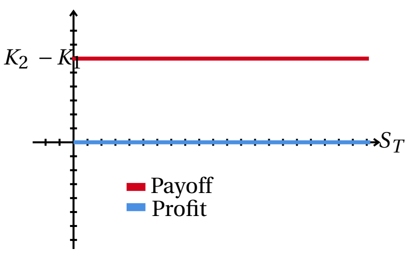
Cette stratégie est une combinaison un peu sur mesure (on ne peut pas nécessairement dire si elle est longue ou courte). On achète n options d'achat à un prix d'exercice K_1 et on en vend m à un prix d'exercice K_2.[2]

$$\begin{aligned} RatioSpread &= nCall(K_1,T) - mCall(K_2,T) \\ Premium &= nC(K_1,T) - mC(K_2,T) \\ Payoff &= \ldots \end{aligned}$$

Box Spread

Cette stratégie réplique l'achat d'une obligation zéro-coupon, en impliquant 2 option d'achat et 2 options de vente.

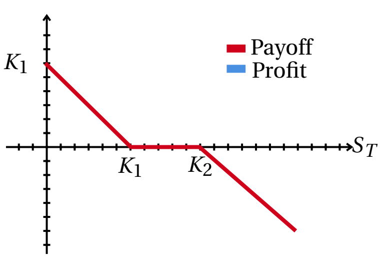
$$\begin{aligned} BoxSpread &= Bull(Call) + Bear(Put) \\ &= Call(K_1,T) - Call(K_2,T) \\ &\quad + Put(K_2,T) - Put(K_1,T) \\ Premium &= C(K_1,T) - C(K_2,T) \\ &\quad + P(K_2,T) - P(K_1,T) > 0 \\ Payoff &= K_2 - K_1 \text{ , } \forall S_T \end{aligned}$$



Collar

La prime initiale du Collar peut être soit positive ou négative (dépendant du strike price).

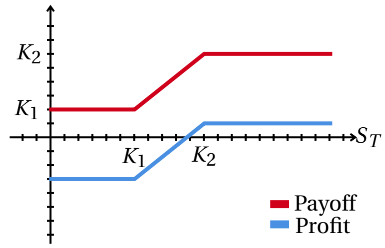
$$\begin{aligned} Collar &= Put(K_1,T) - Call(K_2,T) \\ Premium &= P(K_1,T) - C(K_2,T) \\ Payoff &= \begin{cases} K_1 - S_T & , S_T \leq K_1 \\ 0 & , K_1 < S_T \leq K_2 \\ K_2 - S_T & , S_T > K_2 \end{cases} \end{aligned}$$



Stock Covered by Collar

- On effectue la même stratégie qu'un Collar, en ayant initialement le sous-jacent S. **Position longue dans le sous-jacent**.
- Cette stratégie reproduit les flux monétaires d'un Bull Spread, alors

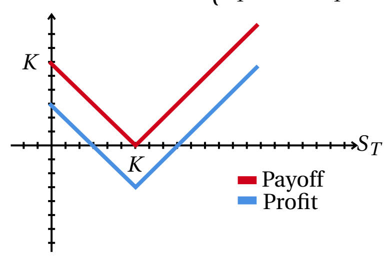
$$\begin{aligned} BullSpread &= Collar + Stock \\ &= Put(K_1,T) - Call(K_2,T) + Stock \\ Premium &= P(K_1,T) - C(K_2,T) + S_0 > 0 \\ Payoff &= \begin{cases} K_1 & , S_T \leq K_1 \\ S_T & , K_1 < S_T \leq K_2 \\ K_2 & , S_T > K_2 \end{cases} \end{aligned}$$



Straddle

Stratégie pour spéculer sur la volatilité du sous-jacent S autour du point K.

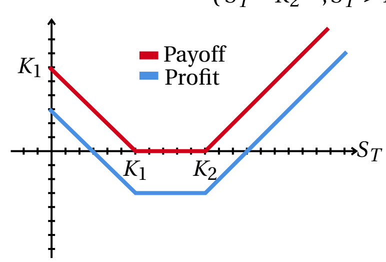
$$\begin{aligned} Straddle &= Put(K,T) + Call(K,T) \\ Premium &= P(K,T) + C(K,T) > 0 \\ Payoff &= \begin{cases} K - S_T & , S_T \leq K \\ S_T - K & , S_T > K \end{cases} \end{aligned}$$



Strangle

Même genre de stratégie que le strangle, on spécule sur la volatilité du sous-jacent à l'extérieur de l'intervalle $[K_1, K_2]$:

$$\begin{aligned} Strangle &= Put(K_1,T) + Call(K_2,T) \\ Premium &= P(K_1,T) + C(K_2,T) > 0 \\ Payoff &= \begin{cases} K_1 - S_T & , S_T \leq K_1 \\ 0 & , K_1 < S_T \leq K_2 \\ S_T - K_2 & , S_T > K_2 \end{cases} \end{aligned}$$



Butterfly Spread (BFS)

On combine un Straddle(K_2) et un Strangle(K_1, K_3) pour spéculer sur la non-volatilité du sous-jacent autour de K_2, mais en limitant nos pertes à

2. On peut faire cette stratégie avec des options de vente aussi.

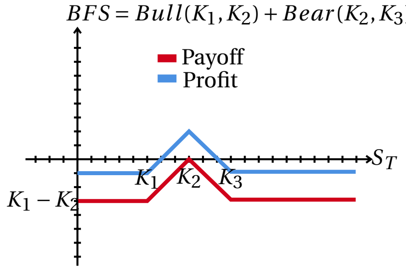
$K_1 - K_2$:

$$\begin{aligned} Butterfly &= Strangle - Straddle(K_2) \\ &= Put(K_1,T) - Put(K_2,T) \\ &\quad - Call(K_2,T) + Call(K_3,T) \\ Premium &= P(K_1,T) - P(K_2,T) \\ &\quad - C(K_2,T) + C(K_3,T) < 0 \end{aligned}$$

$$Payoff = \begin{cases} K_1 - K_2 & , S_T \leq K_1 \\ S_T - K_2 & , K_1 < S_T \leq K_2 \\ K_2 - S_T & , K_2 < S_T \leq K_3 \\ K_2 - K_3 & , S_T > K_3 \end{cases}$$

Note De façon générale (plusieurs combinaisons sont possibles), on a

$$BFS = Bull(K_1,K_2) + Bear(K_2,K_3)$$



Asymetric Butterfly Spread

- Comme le Ratio Spread, il est possible de faire une stratégie sur mesure en achetant n Bull Spread et en achetant m Bear Spread en respectant les 3 prix d'exercices $K_1 < K_2 < K3$.
- Si on désire avoir un BFS qui a un profit nul pour $S_T < K_1$ et $S_T > K_3$, alors on trouve n et m tel que
$$\frac{n}{m} = \frac{K_3 - K_2}{K_2 - K_1}$$

5 Forwards et Futures

Forward avec dividendes

Définition de base

$$C(K,T) - P(K,T) = S_0 - K(1+r_f)^T$$

Action qui verse des dividendes

$$\begin{aligned} C(K,T) - P(K,T) &= S - \text{PV}(Div) - K(1+r_f)^T \\ &= S_0 e^{-\delta T} - K e^{-rT} \end{aligned}$$

où δ est un taux de versement des dividendes continu.

De plus, on a

$$\begin{aligned} F_{0,T} &= F^P_{0,T}(1+r_f)^T \\ &= (S_0 - \text{PV}(div))(1+r_f)^T \\ &= S_0 - \sum_{i=1}^{T} d_i (1+r_f)^{T-i} \\ &= S_0 e^{(r-\delta)T} \end{aligned}$$

Forward synthétique avec dividendes On suppose le réinvestissement des dividendes.

$$\begin{aligned} \text{Forward}_{\text{avec div.}} &= e^{-\delta T} Stock - (e^{-\delta T} \cdot S_0) Bond \\ Premium &= -e^{-\delta T} S_0 + e^{-\delta T} S_0 = 0 \\ Payoff &= S_T - S_0 e^{(r-\delta)T} \end{aligned}$$

3. Cette marge est souvent exprimée en % de la marge initiale.

Cash-and-carry Stratégie qui consiste à créer un Forward synthétique et vendre un Forward (profit nul).

Calcul avec prime de risque et nuance

- Certains sous-jacent ont une composante de risque non-négligeable. Or, on ne peut pas dire que $F_{0,T} = \mathrm{E}[S_T]$. Toutefois,
$$F_{0,T} = \mathrm{E}[S_T] e^{-(\alpha - r)T}$$

où α est la prime de risque qu'on enlève pour obtenir le prix du Forward, tel que

$$\alpha = \underbrace{r}_{\text{Taux sans risque}} + \underbrace{(\alpha - r)}_{\text{Prime de risque}}$$

Forward de devise

Put-Call parity avec les devises

DD Devise locale

DÉ Device étrangère

x_0 Taux de change $\frac{DD}{DÉ}$ actuel ($t = 0$)

r_D Taux sans risque <u>local</u>

$r_É$ Taux sans risque étranger

Le prix Forward prépayé pour une unité de DÉ à $t = 0$ (payé en DD) est

$$F^P_{0,T} = x_0(1 + r_É)^{-T}$$

Et le prix Forward (à $t = T$) pour une unité de DÉ est

$$\begin{aligned} F_{0,T} &= F^P_{0,T}(1+r_D)^T \\ &= x_0 \left(\frac{1+r_D}{1+r_É}\right)^T \\ &= x_0 e^{(r_D - r_É)T} \end{aligned}$$

Forward synthétique de devise

- Emprunt de $x_0(1+r_É)^{-T}$ DD au taux r_D
- Convertir les DD en DÉ
- Dépôt de $(1+r_É)^{-T}$ de 0 à T.

Le payoff sera $x_t - x_0 \left(\frac{1+r_D}{1+r_É}\right)^T$.

Future

Essentiellement la même chose qu'un Forward, à quelques différences près :

- Surveillé et contrôlé par des instances officielles (aucun *Over-the-counter*)
- S'applique sur certains types d'actifs définis seulement;
- liquise et efficient
- nécessite un dépôt initial des 2 parties (le risque de défaut est minimisé)
- Transaction continues (règlement avec l'intermédiaire de façon quotidienne)
- Variation extrêmes dans les prix de Future sont limités (possibilité du *circuit Breaker*)

Fonctionnement

1. L'intermédaire demande un dépôt initial (*initial margin*), **souvent un % de la valeur notionnelle**.
2. Ce dépôt est accumulé à un taux de rendement i fixé par l'intermédiaire.
3. À chaque période de règlement, on calcule la marge en fonction du prix du Future :
   $\text{Marge}_t = \text{Marge}_{t-1} + \text{Variation totale}_{[t-1,t]}$
4. Si $\text{Marge}_t <$ Maintenance margin[3], on doit **ajouter des fonds à la marge pour revenir à la marge initiale.**

9 Put-Call Parity

$$Call - Put = Stock - Bond$$

Put-Call Parity avec devises

$Call(x_0, K, T)$ **:** Option d'achat qui permet d'acheter 1 unité de DÉ pour K unité de DD à l'échéance $t = T$.

$Put(x_0, K, T)$ **:** Option de vente qui permet d'acheter 1 unité de DÉ pour K unité de DD à l'échéance $t = T$.

Alors, on peut réécrire l'équation Put-Call Parity :
$$Call(x_0, K, T) - Put(x_0, K, T) = x_0(1 + r_{É})^{-T} - K(1 + r_D)^{-T}$$

Parité généralisée et option d'échange

$Call(S_t, Q_t, T - t)$ **:** Option d'achat qui permet d'acheter le sous-jacent S au prix du sous-jacent Q au temps $t = T$.

$Put(S_t, Q_t, T - t)$ **:** Option de vente qui permet de vendre le sous-jacent S au prix du sous-jacent Q au temps $t = T$.

On peut généraliser l'équation Put-Call Parity :
$$C(S_t, Q_t, T - t) - P(S_t, Q_t, T - t) = F^P_{t,T}(S) - F^P_{t,T}(Q)$$

Options sur devise

$$\begin{aligned} Call_{DD}(x_0, K, T) &= K \cdot Put_{DD}\left(\frac{1}{x_0}, \frac{1}{K}, T\right) \\ &= K \cdot x_0 \cdot Put_{DÉ}\left(\frac{1}{x_0}, \frac{1}{K}, T\right) \end{aligned}$$

Comparaison de différentes options

Option américaine vs européenne

$$C_{amer}(K, T) \geq C_{euro}(K, T)$$
$$P_{amer}(K, T) \geq P_{euro}(K, T)$$

Option d'achat américaine Bien qu'on puisse exercer l'option américaine au moment qu'on veut, il <u>peut</u> être optimal d'exercer avant l'échéance si
$$PV(div) > K(1 - (1 + r_f)^{-(T-t)})$$
ou si
$$PV(div) > P(K, T - t) + K(1 - (1 + r_f)^{-(T-t)})$$

Option de vente américaine Le moment optimal pour exercer le Put serait tout juste **après la date ex-dividende**.

Date d'expiration

$$C(K, T_1) \leq C(K, T_2)$$
$$P(K, T_1) \leq P(K, T_2)$$

Prix d'exercice Les différentes conditions énumérées ci-bas doivent être respectées :

$C(K, T) \geq S_0 - K$	$P(K, T) \geq K - S_0$
$C(K_1, T) > C(K_2, T)$	$P(K_1, T) < P(K_2, T)$
$C(K_1, T) - C(K_2, T) \leq K_2 - K_1$	$P(K_2, T) - P(K_1, T) \leq K_2 - K_1$
$\frac{C(K_1,T)-C(K_2,T)}{K_2-K_1} \geq \frac{C(K_2,T)-C(K_3,T)}{K_3-K_2}$	$\frac{P(K_1,T)-P(K_2,T)}{K_2-K_1} \geq \frac{P(K_2,T)-P(K_3,T)}{K_3-K_2}$

Si le prix d'exercice est *Constant en valeur actualisé*[4], alors, avec $t < T$
$$C(K_t, t) \leq C(K_T, T)$$
$$P(K_t, t) \leq P(K_T, T)$$

10 Introduction au modèle binomial d'évaluation des options

Probabilité neutre au risque

- $U = uS$ est la valeur supérieure que peut prendre le sous-jacent S
- $D = dS$ est la valeur inférieure que peut prendre le sous-jacent S
- p est la probabilité (Bernouilli) que le sous-jacent prenne la valeur U.
- C_u, C_d, P_u et P_d sont les payoff d'un call (ou put) selon la valeur du sous-jacent après h périodes.
- r et δ sont respectivement la force d'intérêt sans risque et le taux de dividende continu.

$$p = \frac{e^{(r-\delta)h} - d}{u - d}$$

Portefeuille réplicatif d'une option

On peut reproduire une option (Call ou Put) avec la stratégie suivante :
$$C = \Delta S + B$$
où B et ΔS changent de signe selon si c'est un Call ou un Put. On peut obtenir la prime initiale (*Premium*) et les composantes du portefeuille réplicatif avec
$$\Delta = \frac{C_u - C_d}{U - D} = \frac{C_u - C_d}{S(u - d)}$$
$$B = e^{-rh}\left(\frac{U \cdot C_d - D \cdot C_u}{U - D}\right) = e^{-rh}\left(\frac{uC_d - dC_u}{u - d}\right)$$
$$\text{Premium} = \Delta S + B$$

4. i.e. $K_t = K(1 + r_f)^T$.