1 Introduction et perspective historique

Section plus qualitative, à compléter plus tard (sous forme de checklist)

2 Crédibilité de stabilité

Définition de la crédibilité totale

Crédibilité complète

Une crédibilité complète d'ordre (k, p) est attribuée à l'expérience S d'un contrat si les paramètres de la distribution de S sont tels que la relation
$\Pr\left((1-k)\mathrm{E}[S] \leq S \leq (1+k)\mathrm{E}[S]\right) \geq p$
est vérifiée. Par le théorème Central Limite, on peut démontrer que ça revient à respecter l'inégalité suivante :

$$\mathrm{E}[S] \geq \left(\frac{\Phi^{-1}\left(\frac{p+1}{2}\right)}{k}\right)\sqrt{\mathrm{Var}(S)} \tag{1}$$

Nombre de sinistres dans une période

Soit $S = X_1 + ... + X_N$, avec $N \sim Pois(\lambda)$ et X qui a une fonction de répartition F_X. On cherche le nombre moyen de sinistres λ qui donne une plein crédibilité à l'espérience S. On peut démontrer que

$$\lambda \geq \left(\frac{\Phi^{-1}\left(\frac{p+1}{2}\right)}{k}\right)^2 \cdot \left(1 + \frac{\mathrm{Var}(X)}{\mathrm{E}[X]^2}\right) \tag{2}$$

Note si X est une v.a. dégénérée (i.e. $\Pr(X = m) = 1$ pour un m fixé), alors $\mathrm{Var}(X) = 0$ et $\lambda \geq 1082,41$.

Nombre d'années d'expérience n

Soit la v.a. $W = \frac{S_1+...+S_n}{n}$. On a donc $\mathrm{E}[W] = \mathrm{E}[S]$ et $\mathrm{Var}(W) = \frac{\mathrm{Var}(S)}{n}$. On cherche le nombre d'années d'expérience n nécessaire pour attribuer une pleine crédibilité au contrat. On peut démontrer que

$$n \geq \left(\frac{\Phi^{-1}\left(\frac{p+1}{2}\right)}{k}\right)^2 \cdot \frac{\mathrm{Var}(S)}{\mathrm{E}[S]^2} \tag{3}$$

Nombre d'employés / unité d'exposition

Soit $S \sim Bin(n, \theta)$ qui représente le nombre de sinistres pour un groupe de n employés. On cherche le nombre minimal n d'employés nécessaires dans un groupe pour attribuer une pleine crédibilité au contrat. On peut démontrer que

$$n \geq \left(\frac{\Phi^{-1}\left(\frac{p+1}{2}\right)}{k}\right)^2 \cdot \frac{1-\theta}{\theta} \tag{4}$$

Définition crédibilité partielle

Crédibilité partielle

La crédibilité partielle permet de pondérer l'expérience S d'un contrat et la prime collective m par un facteur de crédibilité z, avec $0 < z < 1$, afin d'obtenir une prime linéaire de la forme
$\pi = zS + (1-z)m$

- Plusieurs formules ont été proposés, on retient celle de Whitney :

$$z = \frac{n}{n+K} \tag{5}$$

- Dans l'approche de crédibilité de stabilité, on met de côté le concept de précision pour éviter d'avoir des primes qui fluctuent beaucoup d'une année à l'autre.
- **Complément de crédibilité** : en pratique, le complément de crédibilité $(1-z)$ n'est pas donné entièrement à la prime collective m. Il peut y avoir une proportion reliée à autre chose.

3 Tarification Bayésienne

Modèle d'hétérogénéité

Θ_i niveau de risque du contrat i

$U(\Theta)$ fonction de répartition de Θ (fonction de *structure*)

$u(\theta)$ fonction de densité/masse de probabilité de Θ

Hypothèses

1. Les observations du contrat i sont *conditionnellement indépendantes* [1] et *iid* avec fonction de répartition $F_{X|\Theta}$
2. Les variables $\Theta_1, ..., \Theta_I$ sont *iid* avec fonction de répartition $U(\Theta)$
3. Les I contrats du portefeuille sont indépendants

Définition des 3 types de primes

Prime de risque

Si on connait le niveau de risque du contrat i, alors la meilleure prévision est la **prime de risque** :

$$\mu(\theta_i) = \mathrm{E}[S_{it}|\Theta_i = \theta_i] = \int_0^\infty x f(x|\theta_i)dx \tag{6}$$

La prime de risque $\mu(\theta_i)$ serait l'idéal, sauf qu'on ne connait pas le niveau de risque du contrat.

1. Concept de contagion apparente

Prime collective

Il s'agit d'une moyenne pondérée de toutes les primes de risque possible pour un contrat donné :

$$m = \mathrm{E}\left[\mu(\Theta_i)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \mu(\theta)u(\theta)d\theta \tag{7}$$

Cette prime est globalement adéquate, mais pas équitable (ou optimale).

Prime Bayésienne

La meilleure approximation de la prime de risque $\mu(\theta_i)$ est une fonction $g*(x_1, ..., x_n)$ qui minimise l'erreur quadratique. On peut prouver que cette fonction est la prime Bayésienne telle que

$$\begin{aligned} B_{i,n+1} &= \mathrm{E}\left[\mu(\Theta_i)|S_{i1} = x_{i1}, ..., S_{in} = x_{in}\right] \\ &= \int_{-\inf}^{\infty} \mu(\theta)u(\theta|x_{i1}, ..., x_{in})d\theta \end{aligned} \tag{8}$$

- Comme m, la prime Bayésienne est aussi une prime pondérée des primes de risque.
- La différence ici est qu'on utilise la *distribution a postériori* de Θ_i, i.e. la distribution révisée après avoir observé l'espérience $S_{i1}, ..., S_{in}$:

$$\begin{aligned} u(\theta_i|x_{i1}, ..., x_{in}) &= \frac{f(x_{i1}, ..., x_{in}|\theta_i)u(\theta_i)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x_{i1}, ..., x_{in}|\theta_i)u(\theta_i)d\theta_i} \\ &= \frac{\prod_{t=1}^{n} f(x_{it}|\theta_i)u(\theta_i)}{\int_{-\infty}^{\infty} \prod_{t=1}^{n} f(x_{it}|\theta_i)u(\theta_i)d\theta_i} \\ &\propto u(\theta_i)\prod_{t=1}^{n} f(x_{it}|\theta_i) \end{aligned}$$

Calcul de la prime Bayésienne avec la distribution prédictive

En plus de calculer $B_{i,n+1}$ avec les primes de risques, on peut aussi la calculer avec la distribution prédictive $S_{i,n+1}|S_1, ..., S_n$, avec la fonction de densité

$$f(x_{n+1}|x_1, ..., x_n) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x|\theta)u(\theta|x_1, ..., x_n)d\theta$$

Crédibilité bayésienne linéaire

Certaines combinaison de distributions permettent d'obtenir une prime Bayésienne qui peut être exprimée sous la forme

$$\pi = z\bar{S} + (1-z)m$$

avec $z \in [0, 1]$, qu'on appelle la prime de crédibilité.

Avantages

- linéaire, donc facile à justifier/expliquer
- lorsque $n \to \infty$, $z \to 1$, ce qui est aussi facile à justifier

Il existe 5 combinaisons de distribution qui résultent en une prime Bayésienne linéaire :

- $S|\Theta \sim Pois(\Theta)$ et $\Theta \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$
- $S|\Theta \sim Exp(\Theta)$ et $\Theta \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$
- $S|\Theta \sim N(\Theta, \sigma_2^2)$ et $\Theta \sim N(\mu, \sigma_1^2)$
- $S|\Theta \sim Bern(\Theta)$ et $\Theta \sim Beta(a, b)$
- $S|\Theta \sim Go(\Theta)$ et $\Theta \sim Beta(a, b)$

Modèle de Jewell

- Si $u(\theta|x_1, ..., x_n)$ appartiennent à la même famille que $u(\theta)$, on dit de $u(\theta)$ et $f(x|\theta)$ qu'elles sont des *conjugées naturelles*
- Les loi Poisson, exponentielle, normale, Bernouilli et géométrique appartiennent à la famille exponentielle univariée, i.e. leur fonction de masse/densité peut être écrite sous la forme
$$f(x|\theta) = \frac{p(x)e^{-\theta x}}{q(\theta)}$$
- Lorsqu'une fonction de vraisemblance $f(x|\theta)$ de la famille exponentielle univariée est combinée avec sa conjugée naturelle, alors la prime Bayésienne est toujours une prime de crédibilité exacte.