

# 1 Rappels généraux

## Mathématiques financières

$$v = \frac{1}{1+i} = 1 - d = e^{-\delta t}$$

conversion :

$$\left(1 - \frac{d^{(m)}}{m}\right)^m = 1 - d$$

$$\left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^m = 1 + i$$

$$a_{\overline{n}|} = \frac{1 - v^n}{i}, \ddot{a}_{\overline{n}|} = \frac{1 - v^n}{d}, \bar{a}_{\overline{n}|} = \frac{1 - v^n}{\delta}$$

$$a_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{1 - v^n}{i^{(m)}}, \ddot{a}_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{1 - v^n}{d^{(m)}}$$

## Modèles de survie

- >  $T_x$  : durée de vie de  $(x)$
- >  $K_x = \lfloor T_x \rfloor$
- >  ${}_t p_x = \Pr(T_x > t) = e^{-\int_0^t \mu_{x+s} ds}$
- >  ${}_t q_x = 1 - {}_t p_x = \Pr(T_x \leq t)$
- >  ${}_{t+u} p_x = {}_t p_x \cdot {}_u p_{x+t}$
- >  ${}_{t|u} q_x = {}_t p_x \cdot {}_u q_{x+t}$

## Loi de mortalité

**Force constante**  $\mu_x = \mu, {}_t p_x = e^{-\mu t}$

### Uniforme (DeMoivre)

- >  $\mu_u = \frac{1}{\omega - x}$ , avec  $0 \leq x \leq \omega$
- >  ${}_t p_x = \frac{\omega - x - t}{\omega - x}$

## DUD

- >  $q_{x+h} = h \cdot q_x$
- >  $\bar{A}_x = \frac{i}{\delta} A_x$

## Contrat d'assurance

**Assurance entière** Cas discret :

$$A_x = \sum_{k=0}^{\infty} b_k v^{k+1} {}_k|q_x$$

Cas continu :

$$\bar{A}_x = \int_0^{\infty} v^t {}_t p_x \mu_{x+t} dt$$

**Assurance dotation pure (pure endowment)**

$$A_{x:\overline{n}|} = A_{x:\overline{n}|}^1 + A_{x:\overline{n}|}^{\bar{1}}$$

où  $A_{x:\overline{n}|}^1 = {}_n E_x = v^n {}_n p_x$

**Assurance temporaire n année**

$$A_{x:\overline{n}|}^1 = A_x - {}_n|A_x$$

où  ${}_n|A_x = {}_n E_x A_{x+n}$  (i.e. une assurance différée)

**Assurance différée**

$${}_m|A_x = {}_m E_x A_{x+m}$$

$${}_m|A_x^2 = v^m {}_m E_x A_{x+m}$$

**Assurance payable m fois l'an**

$$A_x^{(m)} = \sum_{k=0}^{\infty} v^{\frac{(k+1)}{m}} {}_{\frac{k}{m}|} \frac{1}{m} q_x$$

## Contrat de rente

**Rente entière** Cas discret :

$$\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^k {}_k p_x$$

Cas continu :

$$\bar{a}_x = \int_0^{\infty} v^t {}_t p_x dt$$

Raccourci :

$$\ddot{a}_x = \frac{1 - A_x}{d} \leftrightarrow A_x = 1 - d\ddot{a}_x$$

**Rente temporaire**

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{1 - A_{x:\overline{n}|}}{d} \leftrightarrow A_{x:\overline{n}|} = 1 - d\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$$

Raccourci :

$$a_{x:\overline{n}|} = a_x - {}_n E_x a_{x+n}$$

$$a_x = 1 + p_x v a_{x+1}$$

## Principe d'équivalence

$\pi$ , lorsque calculée sous le principe d'équivalence, est la solution de

$$E[Z] = E[Y]$$

où  $Z$  est la valeur présente des prestations futures et  $Y$  la valeur présente des primes futures à recevoir.

## Formule de Woolhouse

$$\ddot{a}_x^{(m)} \approx \ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m} - \frac{m^2-1}{12m^2}(\delta + \mu_x)$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)} \approx \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \frac{m-1}{2m}(1 - v^n p_x) - \frac{m^2-1}{12m^2}(\delta + \mu_x - v^n p_x(\delta + \mu_{x+n}))$$

$$\bar{a}_{x:\overline{n}|} = \lim_{m \rightarrow \infty} \ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)} \approx \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \frac{1}{2}(1 - v^n p_x) - \frac{1}{12}(\delta + \mu_x - v^n p_x(\delta + \mu_{x+n}))$$

## 2 Calcul de réserve

### Perte prospective

$$\begin{aligned} {}_tL &= \{ {}_tL | T_x > t \} \\ &= VP_{@t}(\text{Prest.}) - VP_{@t}(\text{Primes}) \\ &= Z - Y \end{aligned}$$

**Réserve au temps  $t$**  Selon la méthode prospective,

$${}_tV = E[{}_tL] = E[Z] - E[Y]$$

Selon la méthode rétrospective,

$${}_tV = \frac{\text{VPA}_{@t}(\pi \text{ reçues avant } h) - \text{VPA}_{@t}(\text{Prest. à payer avant } h)}{g}$$

**Relation récursive pour les réserves (discrètes)** Formule générale<sup>1</sup> :

$${}_{h+1}V = \frac{({}_hV + G_h - e_h)(1+i) - (b_{h+1} - E_{h+1})q_{x+h}}{p_{x+h}}$$

où  $G_h$  est la prime à recevoir à  $t = h$ ,  $e_h$  les frais relié à la collecte de la prime et  $E_h$  les frais reliés aux paiement de la prestation.

**Formules alternatives pour Contrat d'assurance-vie entière (si  $\pi^{PE}$ )**

$${}_hV = MA_{x+h} - \pi \ddot{a}_{x+h} = M \left( 1 - \frac{\ddot{a}_{x+h}}{\ddot{a}_x} \right) = M \left( \frac{A_{x+h} - A_x}{1 - A_x} \right)$$

Remarque : ces formules fonctionnent aussi dans le cas d'un contrat d'assurance-vie entière continu.

1. Si les frais ne sont pas applicables pour le problème, simplement poser  $G_h = E_h = 0$ .

### Approximation classique pour les réserves à durées fractionnaires

$${}_{h+s}V = ({}_hV + G_h - e_h)(1-s) + ({}_{h+1}V)(s)$$

### Profit de l'assureur

#### Profit de l'assureur en changeant les 3 composantes

$$\begin{aligned} {}_{k+1}V^A - {}_{k+1}V^E &= N_k({}_kV + G - e'_k)(1+i') - (b_{k+1} + E'_{k+1} - {}_{k+1}V)N_k q'_{x+k} \\ &\quad - [N_k({}_kV + G - e_k)(1+i) - (b_{k+1} + E_{k+1} - {}_{k+1}V)N_k q_{x+k}] \end{aligned}$$

#### Profit de l'assureur en changeant une seule composante :

Intérêt ( $i$ )	$N_k({}_kV + G - e_k)(i' - i)$
Frais $e_k$ ou $E_k$	$N_k(e_k - e'_k)(1+i) + (E_{k+1} - E'_{k+1})N_k q_{k+1}$
Mortalité $q_{x+k}$	$(b_{k+1} + E_{k+1} - {}_{k+1}V)(N_k q_{x+k} - N_k q'_{x+k})$

### Quote-Part de l'actif (Asset shares)

Alors que la réserve  ${}_tV$  nous dit le montant que l'assureur doit avoir de côté, la quote-part de l'actif nous indique plutôt le montant réel que l'assureur a de côté pour le contrat donné.

$$AS_{K+1} = \frac{(AS_K + G_K - e'_K)(1+i') - (b_{K+1} + E'_{K+1})q'_{x+k}}{p'_{x+k}}$$

### Équation de Thiele

Cette équation permet d'obtenir le *taux instantané d'accroissement* de  ${}_tV$ .

$$\frac{\partial}{\partial t}({}_tV) = \delta_{tt}V + G_t - e_t - (b_t + E_t) - {}_tV\mu_{[x]+t}$$

on peut approximer  ${}_tV$  avec la Méthode d'Euler :

$${}_tV = \frac{{}_{t+h}V - h(G_t - e_t - (b_t + E_t)\mu_{[x]+t})}{1 + h\delta_t + h\mu_{[x]+t}}$$

### Modification de contrat

#### Valeur de rachat (Cash value at surrender)