# GRF-II
# Document d'étude

Nicholas Langevin

25 février 2019

- Les produits dérivés
- Forwards et autres options
- Stratégies
- Forwards et Futures

# 1 Introduction aux produits dérivés

**Produits dérivés** Contrat entre 2 parties qui fixe les flux financiers futurs fondé sur ceux de l'actif sous-jacent $S$.

## Étapes d'une transaction

1. l'acheteur et le vendeur se trouve (sur un marché quelquonque)
2. on définit les obligations de chaques parties (*i.e. actif à livrer, date d'échéance, prix, etc.*. **Note : il y a souvent un intermédiaire (*clearing house*) qui intervient.**
3. La transaction a lieu et les obligations sont remplies par chaque parties
4. Les registres de propriétés sont mis à jour.

**Transaction gré-à-gré** transaction sans intermédiaire ou à l'extérieur de la bourse. Plusieurs raisons peuvent justifier ce type de transaction :

- Ce sont souvent de grosses transaction. On peut donc économiser sur les frais de transaction.
- On peut combiner (sur une même transaction) plusieurs micro-transaction et plusieurs types d'actifs.

**Valeur notionelle** définition exacte à valider

**Origine des marchés de produits dérivés** Après 1971, le président Nixon a vouli défaire le standard de l'or (qui a causé de l'hyperinflation dans plusieurs pays) pour plutôt laisser le libre-marché fixer la valeur des devise de chaque pays.

**Rôle des marchés financiers** Partage du risque et diversification des risques.

## Utilité des produits dérivés

- Gestion des risques
- Spéculation
- Réduction des frais de transaction
- Arbitrage réglementaire

**Bid-Ask Spread** Correspond à la marge que le teneur de marché (*market maker*) conserve. En l'absence d'arbitrage, on aura $Ask - Bid > 0$

**Ask** prix le plus haut que quelqu'un est prêt à payer pour le sous-jacent

**Bid** prix le plus bas que quelqu'un est prêt à payer pour le sous-jacent

## Terminologie

**market order** ordre au marché : on achète et vend selon les prix Bid Ask actuels.

**limit order** Ordre limite : on achète le sous-jacent si $Ask < k$ ou on vend le sous-jacent si $Bid > k$.

**Stop Loss** ordre de vente stop : on veut limiter sa perte si un sous-jacent perd énormément de valeur. Donc, on va vendre le sous-jacent si $Bid \leq k$.

**Long** On se considère en position longue sur le sous-jacent si notre stratégie nous permet de bénéficier d'une hausse du sous-jacent.

**Short** On se considère en position longue sur le sous-jacent si notre stratégie nous permet de bénéficier d'une baisse du sous-jacent.

1. AV veut dire *accumulated value*.

### Type de risques

**Risque de défaut** à préciser

**Risque de rareté** à préciser

# 2 Introduction aux Forwards et aux options

Pour chaque stratégie qu'on voit dans le cours, on peut calculer

**Premium** Il s'agit des cashflow à $t = 0$ (si positif, il s'agît d'un coût; si négatif, il s'agît d'une *compensation*).

**Payoff** Valeur à l'échéance $t = T$, i.e. les Cash-flow au temps $t = T$.

**Profit** $= Payoff - \text{AV}(Premium)$ [1]

### Quelques définitions

$r_f$ taux sans risque. Parfois exprimé comme une force d'intérêt $r$ continue.

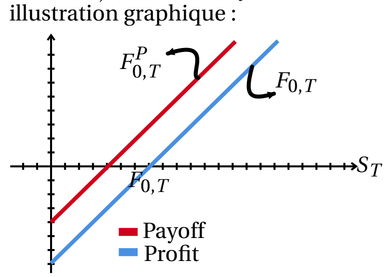
$S$ Sous-jacent (peut être une action, une devise, ...)

$S_0$ valeur actuelle du sous-jacent $S$.

$S_T$ valeur du sous-jacent $S$ au temps $t = T$.

$F_{0,T}$ Prix *forward* du sous-jacent au temps $T$, qu'on définit comme
$$F_{0,T} = S_0(1 + r_f)^T$$

$F^P_{0,T}$ Prix d'un forward prépayé, i.e. on débourse $F^P_{0,T}$ à $t = 0$ et on reçoit le sous-jacent à $t = T$, alors
$$F^P_{0,T} = F_{0,T}(1 + r_f)^T$$
illustration graphique :

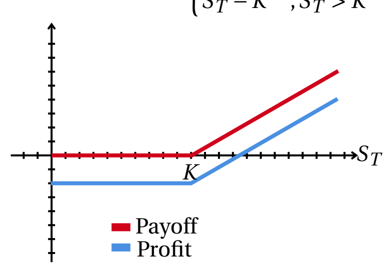



**Achat ferme et emprunt** On utilise parfois la lettre $S$ pour désigner dans stratégie l'action de faire un achat ferme (i.e. acheter et se faire livrer le sous-jacent à $t = 0$) et $B$ pour désigner un dépôt/emprunt (qu'on exprime comme une obligation zéro-coupon).

### $Call(K, T)$

Contrat qui *permet* au détenteur de se procurer $S$ au prix $K$ à l'échéance $T$. **position longue dans le sous-jacent**

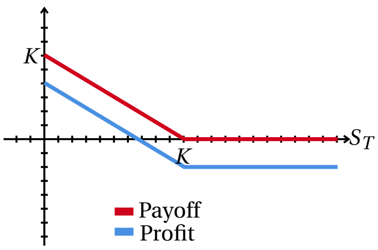
$$Premium = C(K, T)$$
$$Payoff = \begin{cases} 0 & , S_T \leq K \\ S_T - K & , S_T > K \end{cases}$$



### $Put(K,T)$

Contrat qui *permet* au détenteur de vendre $S$ au prix $K$ à l'échéance $T$. **position courte dans le sous-jacent**

$$Premium = P(K,T)$$
$$Payoff = \begin{cases} K - S_T & , S_T \leq K \\ 0 & , S_T > K \end{cases}$$




### Forward synthétique

On peut créer un Forward synthétique 2 de façon (en combinant d'autres transactions) :

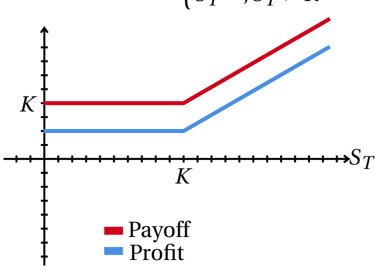
$$Forward = Stock - Bond$$
$$Forward = Call(K,T) - Put(K,T)$$

## 3 Stratégie de couverture

### Floor

On achète $S$ en se protégant contre une baisse trop importante du sous-jacent (**position longue**)

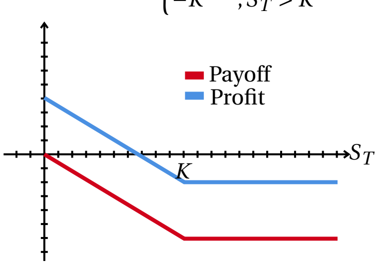
$$Floor = Stock + Put(K,T)$$
$$Premium = S_0 + P(K,T) > 0$$
$$Payoff = \begin{cases} K & , S_T \leq K \\ S_T & , S_T > K \end{cases}$$




### Cap

On vend à découvert $S$ en se protégant contre une hausse trop importante du sous-jacent (car il faudra éventuellement le racheter !). **Position courte**.

$$Cap = Call(K,T) - Stock$$
$$Premium = C(K,T) - S_0 < 0$$
$$Payoff \begin{cases} -S_T & , S_T \leq K \\ -K & , S_T > K \end{cases}$$




### Bull Spread

Combinaison de 2 Call (ou 2 Put) pour spéculer sur un marché haussier. Avec $K_1 < K_2$, on a

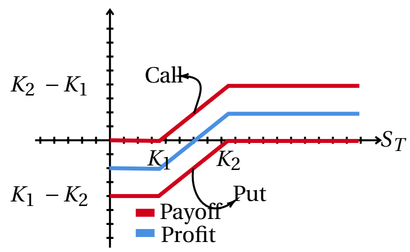
#### Avec option d'achat

$$Bull(Call) = Call(K_1,T) - Call(K_2,T)$$

$$Premium = C(K_1,T) - Call(K_2,T) > 0$$
$$Payoff = \begin{cases} 0 & , S_T \leq K_1 \\ S_T - K_1 & , k_1 < S_T \leq K_2 \\ K_2 - K_1 & , S_T > K_2 \end{cases}$$

#### Avec option de vente

$$Bull(Put) = Put(K_1,T) - Put(K_2,T)$$
$$Premium = P(K_1,T) - P(K_2,T) < 0$$
$$Payoff = \begin{cases} K_1 - K_2 & , S_T \leq K_1 \\ K_2 - S_T & , K_1 < S_T \leq K_2 \\ 0 & , S_T > K_2 \end{cases}$$




### Bear Spread

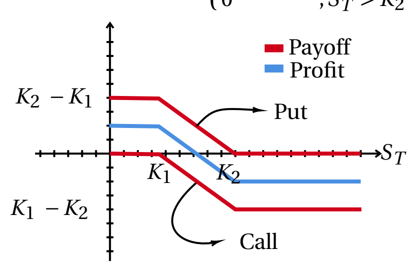
Combinaison de 2 Call ou 2 Put pour spéculer sur un marché baissier.

#### Avec option d'achat

$$\begin{aligned} Bear(Call) &= -Bull(Call) \\ &= Call(K_2,T) - Call(K_1,T) \end{aligned}$$
$$Premium = C(K_2,T) - C(K_1,T) < 0$$
$$Profit = \begin{cases} 0 & , S_T \leq K_1 \\ K_1 - S_T & , K_1 < S_T \leq K_2 \\ -(K_2 - K_1) & , S_T > K_2 \end{cases}$$

#### Avec option de vente

$$\begin{aligned} Bear(Put) &= -Bull(Put) \\ &= Put(K_2,T) - Put(K_1,T) \end{aligned}$$
$$Premium = P(K_2,T) - P(K_1,T) > 0$$
$$Profit = \begin{cases} K_2 - K_1 & , S_T \leq K_1 \\ K_2 - S_T & , K_1 < S_T \leq K_2 \\ 0 & , S_T > K_2 \end{cases}$$



## Ratio Spread

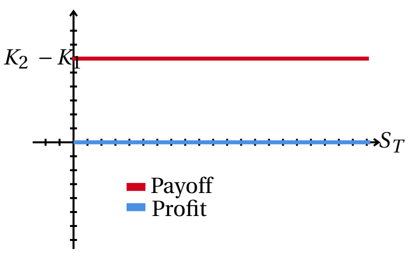
Cette stratégie est une combinaison un peu sur mesure (on ne peut pas nécessairement dire si elle est longue ou courte). On achète $n$ options d'achat à un prix d'exercice $K_1$ et on en vend $m$ à un prix d'exercice $K_2$.[2]

$$
\begin{aligned}
RatioSpread &= nCall(K_1,T) - mCall(K_2,T)\\
Premium &= nC(K_1,T) - mC(K_2,T)\\
Payoff &= \ldots
\end{aligned}
$$

## Box Spread

Cette stratégie réplique l'achat d'une obligation zéro-coupon, en impliquant 2 option d'achat et 2 options de vente.

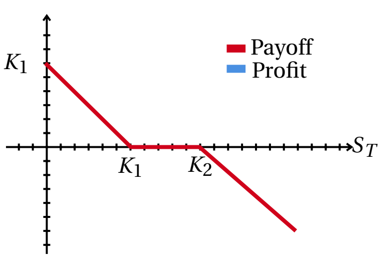
$$
\begin{aligned}
BoxSpread &= Bull(Call) + Bear(Put)\\
&= Call(K_1,T) - Call(K_2,T)\\
&\quad + Put(K_2,T) - Put(K_1,T)\\
Premium &= C(K_1,T) - C(K_2,T)\\
&\quad + P(K_2,T) - P(K_1,T) > 0\\
Payoff &= K_2 - K_1 \text{ , } \forall S_T
\end{aligned}
$$




## Collar

La prime initiale du Collar peut être soit positive ou négative (dépendant du strike price).

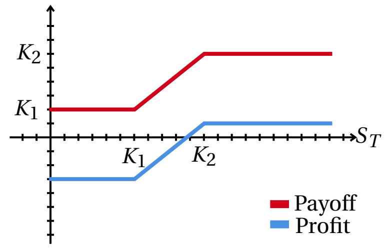
$$
\begin{aligned}
Collar &= Put(K_1,T) - Call(K_2,T)\\
Premium &= P(K_1,T) - C(K_2,T)\\
Payoff &= \begin{cases} K_1 - S_T & ,S_T \leq K_1\\ 0 & ,K_1 < S_T \leq K_2\\ K_2 - S_T & ,S_T > K_2 \end{cases}
\end{aligned}
$$




## Stock Covered by Collar

- On effectue la même stratégie qu'un Collar, en ayant initialement le sous-jacent $S$. **Position longue dans le sous-jacent**.
- Cette stratégie reproduit les flux monétaires d'un Bull Spread, alors

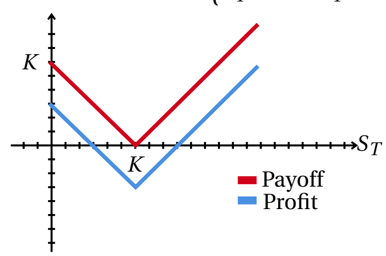
$$
\begin{aligned}
BullSpread &= Collar + Stock\\
&= Put(K_1,T) - Call(K_2,T) + Stock\\
Premium &= P(K_1,T) - C(K_2,T) + S_0 > 0\\
Payoff &= \begin{cases} K_1 & ,S_T \leq K_1\\ S_T & ,K_1 < S_T \leq K_2\\ K_2 & ,S_T > K_2 \end{cases}
\end{aligned}
$$




## Straddle

Stratégie pour spéculer sur la volatilité du sous-jacent $S$ autour du point $K$.

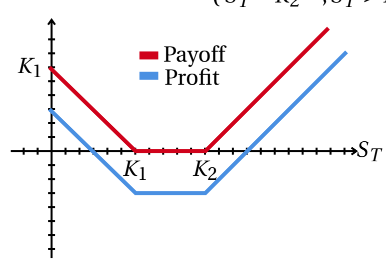
$$
\begin{aligned}
Straddle &= Put(K,T) + Call(K,T)\\
Premium &= P(K,T) + C(K,T) > 0\\
Payoff &= \begin{cases} K - S_T & ,S_T \leq K\\ S_T - K & ,S_T > K \end{cases}
\end{aligned}
$$




## Strangle

Même genre de stratégie que le strangle, on spécule sur la volatilité du sous-jacent à l'extérieur de l'intervalle $[K_1, K_2]$ :

$$
\begin{aligned}
Strangle &= Put(K_1,T) + Call(K_2,T)\\
Premium &= P(K_1,T) + C(K_2,T) > 0\\
Payoff &= \begin{cases} K_1 - S_T & ,S_T \leq K_1\\ 0 & ,K_1 < S_T \leq K_2\\ S_T - K_2 & ,S_T > K_2 \end{cases}
\end{aligned}
$$




## Butterfly Spread (BFS)

On combine un Straddle($K_2$) et un Strangle($K_1, K_3$) pour spéculer sur la non-volatilité du sous-jacent autour de $K_2$, mais en limitant nos pertes à

2. On peut faire cette stratégie avec des options de vente aussi.

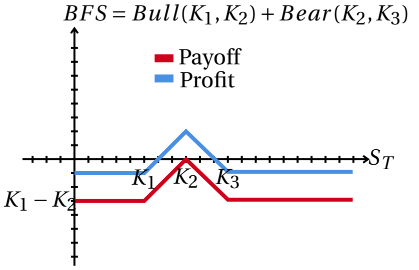
$K_1 - K_2$ :

$$\begin{aligned} Butterfly &= Strangle - Straddle(K_2) \\ &= Put(K_1,T) - Put(K_2,T) \\ &\quad - Call(K_2,T) + Call(K_3,T) \\ Premium &= P(K_1,T) - P(K_2,T) \\ &\quad - C(K_2,T) + C(K_3,T) < 0 \end{aligned}$$

$$Payoff = \begin{cases} K_1 - K_2 & , S_T \leq K_1 \\ S_T - K_2 & , K_1 < S_T \leq K_2 \\ K_2 - S_T & , K_2 < S_T \leq K_3 \\ K_2 - K_3 & , S_T > K_3 \end{cases}$$

**Note** De façon générale (plusieurs combinaisons sont possibles), on a

$$BFS = Bull(K_1,K_2) + Bear(K_2,K_3)$$




### Asymetric Butterfly Spread

- Comme le Ratio Spread, il est possible de faire une stratégie sur mesure en achetant $n$ Bull Spread et en achetant $m$ Bear Spread en respectant les 3 prix d'exercices $K_1 < K_2 < K_3$.
- Si on désire avoir un BFS qui a un profit nul pour $S_T < K_1$ et $S_T > K_3$, alors on trouve $n$ et $m$ tel que
$$\frac{n}{m} = \frac{K_3 - K_2}{K_2 - K_1}$$

# 5 Forwards et Futures

## Forward avec dividendes

### Définition de base

$$C(K,T) - P(K,T) = S_0 - K(1+r_f)^T$$

### Action qui verse des dividendes

$$\begin{aligned} C(K,T) - P(K,T) &= S - \text{PV}(Div) - K(1+r_f)^T \\ &= S_0 e^{-\delta T} - K e^{-rT} \end{aligned}$$

où $\delta$ est un taux de versement des dividendes continu.

De plus, on a

$$\begin{aligned} F_{0,T} &= F^P_{0,T}(1+r_f)^T \\ &= (S_0 - \text{PV}(div))(1+r_f)^T \\ &= S_0 - \sum_{i=1}^{T} d_i (1+r_f)^{T-i} \\ &= S_0 e^{(r-\delta)T} \end{aligned}$$

**Forward synthétique avec dividendes** On suppose le réinvestissement des dividendes.

$$\begin{aligned} \text{Forward}_{\text{avec div.}} &= e^{-\delta T} Stock - (e^{-\delta T} \cdot S_0) Bond \\ Premium &= e^{-\delta T} S_0 - e^{-\delta T} S_0 = 0 \\ Payoff &= S_T - S_0 e^{(r-\delta)T} \end{aligned}$$

3. Cette marge est souvent exprimée en % de la marge initiale.

**Cash-and-carry** Stratégie qui consiste à créer un Forward synthétique et vendre un Forward (profit nul).

## Calcul avec prime de risque et nuance

- Certains sous-jacent ont une composante de risque non-négligeable. Or, on ne peut pas dire que $F_{0,T} = \text{E}[S_T]$. Toutefois,
$$F_{0,T} = \text{E}[S_T] e^{-(\alpha - r)T}$$

où $\alpha$ est la prime de risque qu'on enlève pour obtenir le prix du Forward, tel que

$$\alpha = \underbrace{r}_{\text{Taux sans risque}} + \underbrace{(\alpha - r)}_{\text{Prime de risque}}$$

## Forward de devise

### Put-Call parity avec les devises

**DD** Devise locale

**DÉ** Device étrangère

$x_0$ Taux de change $\frac{DD}{DÉ}$ actuel ($t = 0$)

$r_D$ Taux sans risque <u>local</u>

$r_É$ Taux sans risque étranger

Le prix Forward prépayé pour une unité de DÉ à $t = 0$ (payé en DD) est

$$F^P_{0,T} = x_0 (1 + r_É)^{-T}$$

Et le prix Forward (à $t = T$) pour une unité de DÉ est

$$\begin{aligned} F_{0,T} &= F^P_{0,T}(1+r_D)^T \\ &= x_0 \left(\frac{1+r_D}{1+r_É}\right)^T \\ &= x_0 e^{(r_D - r_É)T} \end{aligned}$$

### Forward synthétique de devise

- Emprunt de $x_0(1+r_É)^{-T}$ DD au taux $r_D$
- Convertir les DD en DÉ
- Dépôt de $(1+r_É)^{-T}$ de 0 à $T$.

Le payoff sera $x_t - x_0 \left(\frac{1+r_D}{1+r_É}\right)^T$.

## Future

Essentiellement la même chose qu'un Forward, à quelques différences près :

- Surveillé et contrôlé par des instances officielles (aucun *Over-the-counter*)
- S'applique sur certains types d'actifs définis seulement ;
- liquise et efficient
- nécessite un dépôt initial des 2 parties (le risque de défaut est minimisé)
- Transaction continues (règlement avec l'intermédiaire de façon quotidienne)
- Variation extrêmes dans les prix de Future sont limités (possibilité du *circuit Breaker*)

**Fonctionnement**

1. L'intermédaire demande un dépôt initial (*initial margin*), **souvent un % de la valeur notionnelle**.
2. Ce dépôt est accumulé à un taux de rendement $i$ fixé par l'intermédiaire.
3. À chaque période de règlement, on calcule la marge en fonction du prix du Future :
   $\text{Marge}_t = \text{Marge}_{t-1} + \text{Variation totale}_{[t-1,t]}$
4. Si $\text{Marge}_t <$ Maintenance margin[3], on doit **ajouter des fonds à la marge pour revenir à la marge initiale.**

# 9 Put-Call Parity

$$Call - Put = Stock - Bond$$

## Put-Call Parity avec devises

$Call(x_0, K, T)$ **:** Option d'achat qui permet d'acheter 1 unité de DÉ pour K unité de DD à l'échéance $t = T$.

$Put(x_0, K, T)$ **:** Option de vente qui permet d'acheter 1 unité de DÉ pour K unité de DD à l'échéance $t = T$.

Alors, on peut réécrire l'équation Put-Call Parity :
$$Call(x_0, K, T) - Put(x_0, K, T) = x_0(1 + r_{\text{É}})^{-T} - K(1 + r_D)^{-T}$$

## Parité généralisée et option d'échange

$Call(S_t, Q_t, T - t)$ **:** Option d'achat qui permet d'acheter le sous-jacent $S$ au prix du sous-jacent $Q$ au temps $t = T$.

$Put(S_t, Q_t, T - t)$ **:** Option de vente qui permet de vendre le sous-jacent $S$ au prix du sous-jacent $Q$ au temps $t = T$.

On peut généraliser l'équation Put-Call Parity :
$$C(S_t, Q_t, T - t) - P(S_t, Q_t, T - t) = F^P_{t,T}(S) - F^P_{t,T}(Q)$$

## Options sur devise

$$\begin{aligned} Call_{DD}(x_0, K, T) &= K \cdot Put_{DD}\left(\frac{1}{x_0}, \frac{1}{K}, T\right) \\ &= K \cdot x_0 \cdot Put_{\text{DÉ}}\left(\frac{1}{x_0}, \frac{1}{K}, T\right) \end{aligned}$$

## Comparaison de différentes options

### Option américaine vs européenne

$$C_{amer}(K, T) \geq C_{euro}(K, T)$$
$$P_{amer}(K, T) \geq P_{euro}(K, T)$$

**Option d'achat américaine** Bien qu'on puisse exercer l'option américaine au moment qu'on veut, il peut être optimal d'exercer avant l'échéance seulement si
$$PV(div) > K\left(1 - (1 + r_f)^{-(T-t)}\right)$$
ou si
$$PV(div) > P(K, T - t) + K\left(1 - (1 + r_f)^{-(T-t)}\right)$$

**Option de vente américaine** Le moment optimal pour exercer le Put serait tout juste **après la date ex-dividende**.

**Date d'expiration** Pour $T_1 < T_2$,
$$C(K, T_1) \leq C(K, T_2)$$
$$P(K, T_1) \leq P(K, T_2)$$

**Prix d'exercice** Les différentes conditions énumérées ci-bas doivent être respectées :

$$C(K, T) \geq S_0 - K \qquad P(K, T) \geq K - S_0$$
$$C(K_1, T) > C(K_2, T) \qquad P(K_1, T) < P(K_2, T)$$
$$C(K_1, T) - C(K_2, T) \leq K_2 - K_1 \qquad P(K_2, T) - P(K_1, T) \leq K_2 - K_1$$
$$\frac{C(K_1,T)-C(K_2,T)}{K_2-K_1} \geq \frac{C(K_2,T)-C(K_3,T)}{K_3-K_2} \qquad \frac{P(K_2,T)-P(K_1,T)}{K_2-K_1} \geq \frac{P(K_3,T)-P(K_2,T)}{K_3-K_2}$$

Si le prix d'exercice est *Constant en valeur actualisée*[4], alors, avec $t < T$
$$C(K_t, t) \leq C(K_T, T)$$
$$P(K_t, t) \leq P(K_T, T)$$

# 10 Introduction au modèle binomial d'évaluation des options

## Probabilité neutre au risque

- $U = uS$ est la valeur supérieure que peut prendre le sous-jacent $S$
- $D = dS$ est la valeur inférieure que peut prendre le sous-jacent $S$
- $p$ est la probabilité (Bernouilli) que le sous-jacent prenne la valeur $U$.
- $C_u$, $C_d$, $P_u$ et $P_d$ sont les payoff d'un call (ou put) selon la valeur du sous-jacent après $h$ périodes.
- $r$ et $\delta$ sont respectivement la force d'intérêt sans risque et le taux de dividende continu.

Alors, la probabilité *neutre au risque* est
$$p = \frac{e^{(r-\delta)h} - d}{u - d}$$

## Portefeuille réplicatif d'une option

On peut reproduire une option (Call ou Put) avec la stratégie suivante :
$$C = \Delta S + B$$
où $B$ et $\Delta S$ changent de signe selon si c'est un Call ou un Put. On peut obtenir la prime initiale (*Premium*) et les composantes du portefeuille réplicatif avec
$$\Delta = \frac{C_u - C_d}{U - D} = \frac{C_u - C_d}{S(u - d)}$$
$$B = e^{-rh}\left(\frac{U \cdot C_d - D \cdot C_u}{U - D}\right) = e^{-rh}\left(\frac{uC_d - dC_u}{u - d}\right)$$
$$\text{Premium} = \Delta S_0 + B$$

4. i.e. $K_t = K(1 + r_f)^T$.