

# GRF-II

## Document d'étude

Nicholas Langevin

24 février 2019

- ⇒ Les produits dérivés
- ⇒ Forwards et autres options

# 1 Introduction aux produits dérivés

**Produits dérivés** Contrat entre 2 parties qui fixe les flux financiers futurs fondé sur ceux de l'actif sous-jacent  $S$ .

## Étapes d'une transaction

1. l'acheteur et le vendeur se trouve (sur un marché quelconque)
2. on définit les obligations de chaque parties (i.e. *actif à livrer, date d'échéance, prix, etc.*). **Note : il y a souvent un intermédiaire (clearing house) qui intervient.**
3. La transaction a lieu et les obligations sont remplies par chaque parties
4. Les registres de propriétés sont mis à jour.

**Transaction gré-à-gré** transaction sans intermédiaire ou à l'extérieur de la bourse. Plusieurs raisons peuvent justifier ce type de transaction :

- › Ce sont souvent de grosses transaction. On peut donc économiser sur les frais de transaction.
- › On peut combiner (sur une même transaction) plusieurs micro-transaction et plusieurs types d'actifs.

**Valeur notionnelle** définition exacte à valider

## Origine des marchés de produits dérivés

Après 1971, le président Nixon a voulu défaire le standard de l'or (qui a causé de l'hyperinflation dans plusieurs pays) pour plutôt laisser le libre-marché fixer la valeur des devise de chaque pays.

**Rôle des marchés financiers** Partage du risque et diversification des risques.

## Utilité des produits dérivés

- › Gestion des risques
- › Spéculation
- › Réduction des frais de transaction
- › Arbitrage réglementaire

**Bid-Ask Spread** Correspond à la marge que le teneur de marché (*market maker*) conserve. En l'absence d'arbitrage, on aura  $Ask - Bid > 0$

**Ask** prix le plus haut que quelqu'un est prêt à payer pour le sous-jacent

**Bid** prix le plus bas que quelqu'un est prêt à payer pour le sous-jacent

1. AV veut dire *accumulated value*.

## Terminologie

**market order** ordre au marché : on achète et vend selon les prix Bid Ask actuels.

**limit order** Ordre limite : on achète le sous-jacent si  $Ask < k$  ou on vend le sous-jacent si  $Bid > k$ .

**Stop Loss** ordre de vente stop : on veut limiter sa perte si un sous-jacent perd énormément de valeur. Donc, on va vendre le sous-jacent si  $Bid \leq k$ .

**Long** On se considère en position longue sur le sous-jacent si notre stratégie nous permet de bénéficier d'une **hausse** du sous-jacent.

**Short** On se considère en position longue sur le sous-jacent si notre stratégie nous permet de bénéficier d'une **baisse** du sous-jacent.

## Type de risques

**Risque de défaut** à préciser

**Risque de rareté** à préciser

## 2 Introduction aux Forwards et aux options

Pour chaque stratégie qu'on voit dans le cours, on peut calculer

**Premium** Il s'agit des cashflow à  $t = 0$  (si positif, il s'agit d'un coût; si négatif, il s'agit d'une compensation).

**Payoff** Valeur à l'échéance  $t = T$ , i.e. les Cash-flow au temps  $t = T$ .

**Profit**  $= \text{Payoff} - AV(\text{Premium})^1$

$r_f$  taux sans risque. Parfois exprimé comme une force d'intérêt  $r$  continue.

$S$  Sous-jacent (peut être une action, une devise, ...)

$S_0$  valeur actuelle du sous-jacent  $S$ .

$S_T$  valeur du sous-jacent  $S$  au temps  $t = T$ .

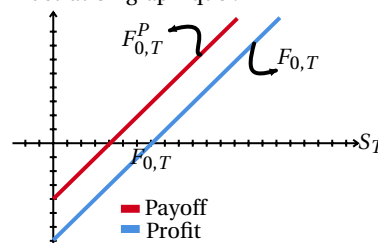
$F_{0,T}$  Prix *forward* du sous-jacent au temps  $T$ , qu'on définit comme

$$F_{0,T} = S_0(1 + r_f)^T$$

$F_{0,T}^P$  Prix d'un forward prépayé, i.e. on débourse  $F_{0,T}^P$  à  $t = 0$  et on reçoit le sous-jacent à  $t = T$ , alors

$$F_{0,T}^P = F_{0,T}(1 + r_f)^T$$

illustration graphique :



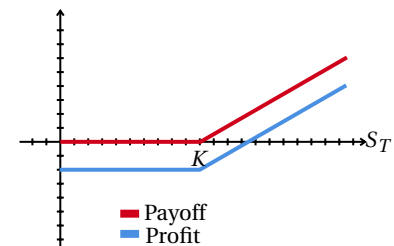
**Achat ferme et emprunt** On utilise parfois la lettre  $S$  pour désigner dans stratégie l'action de faire un achat ferme (i.e. acheter et se faire livrer le sous-jacent à  $t = 0$ ) et  $B$  pour désigner un dépôt/emprunt (qu'on exprime comme une obligation zéro-coupon).

## Call( $K, T$ )

Contrat qui *permet* au détenteur de se procurer  $S$  au prix  $K$  à l'échéance  $T$ . **position longue dans le sous-jacent**

$$\text{Premium} = C(K, T)$$

$$\text{Payoff} = \begin{cases} 0 & , S_T \leq K \\ S_T - K & , S_T > K \end{cases}$$

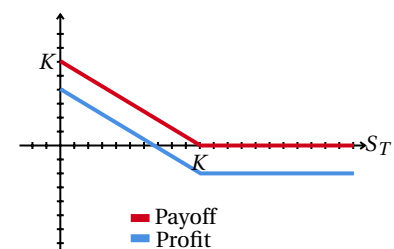


## Put( $K, T$ )

Contrat qui *permet* au détenteur de vendre  $S$  au prix  $K$  à l'échéance  $T$ . **position courte dans le sous-jacent**

$$\text{Premium} = P(K, T)$$

$$\text{Payoff} = \begin{cases} K - S_T & , S_T \leq K \\ 0 & , S_T > K \end{cases}$$



## Forward synthétique

On peut créer un Forward synthétique 2 de façon (en combinant d'autres transactions) :

$$\text{Forward} = \text{Stock} - \text{Bond}$$

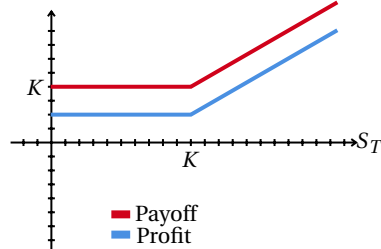
$$\text{Forward} = \text{Call}(K, T) - \text{Put}(K, T)$$

### 3 Stratégie de couverture

#### Floor

On achète  $S$  en se protégeant contre une baisse trop importante du sous-jacent (**position longue**)

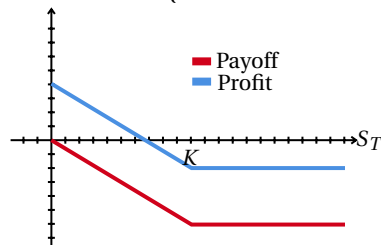
$$\begin{aligned} \text{Floor} &= \text{Stock} + \text{Put}(K, T) \\ \text{Premium} &= S_0 + P(K, T) > 0 \\ \text{Payoff} &= \begin{cases} K & , S_T \leq K \\ S_T & , S_T > K \end{cases} \end{aligned}$$



#### Cap

On vend à découvert  $S$  en se protégeant contre une hausse trop importante du sous-jacent (car il faudra éventuellement le racheter!). **Position courte.**

$$\begin{aligned} \text{Cap} &= \text{Call}(K, T) - \text{Stock} \\ \text{Premium} &= C(K, T) - S_0 < 0 \\ \text{Payoff} &= \begin{cases} -S_T & , S_T \leq K \\ -K & , S_T > K \end{cases} \end{aligned}$$



### 4 Bull Spread

Combinaison de 2 Call (ou 2 Put) pour spéculer sur un marché haussier. Avec  $K_1 < K_2$ , on a

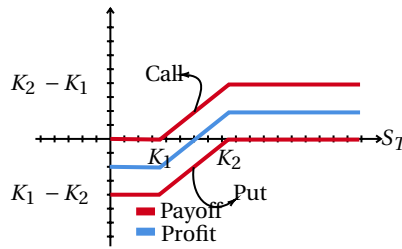
#### Avec option d'achat

$$\begin{aligned} \text{Bull}(\text{Call}) &= \text{Call}(K_1, T) - \text{Call}(K_2, T) \\ \text{Premium} &= C(K_1, T) - C(K_2, T) > 0 \\ \text{Payoff} &= \begin{cases} 0 & , S_T \leq K_1 \\ S_T - K_1 & , K_1 < S_T \leq K_2 \\ K_2 - K_1 & , S_T > K_2 \end{cases} \end{aligned}$$

#### Avec option de vente

$$\begin{aligned} \text{Bull}(\text{Put}) &= \text{Put}(K_1, T) - \text{Put}(K_2, T) \\ \text{Premium} &= P(K_1, T) - P(K_2, T) < 0 \\ \text{Payoff} &= \begin{cases} K_1 - K_2 & , S_T \leq K_1 \\ K_2 - S_T & , K_1 < S_T \leq K_2 \\ 0 & , S_T > K_2 \end{cases} \end{aligned}$$

2. On peut faire cette stratégie avec des options de vente aussi.



### Bear Spread

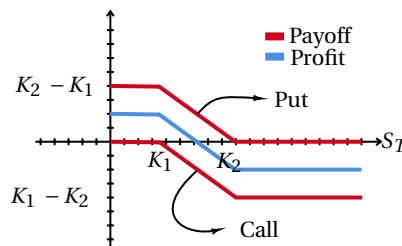
Combinaison de 2 Call ou 2 Put pour spéculer sur un marché baissier.

#### Avec option d'achat

$$\begin{aligned} \text{Bear}(\text{Call}) &= -\text{Bull}(\text{Call}) \\ &= \text{Call}(K_2, T) - \text{Call}(K_1, T) \\ \text{Premium} &= C(K_2, T) - C(K_1, T) < 0 \\ \text{Profit} &= \begin{cases} 0 & , S_T \leq K_1 \\ K_1 - S_T & , K_1 < S_T \leq K_2 \\ -(K_2 - K_1) & , S_T > K_2 \end{cases} \end{aligned}$$

#### Avec option de vente

$$\begin{aligned} \text{Bear}(\text{Put}) &= -\text{Bull}(\text{Put}) \\ &= \text{Put}(K_2, T) - \text{Put}(K_1, T) \\ \text{Premium} &= P(K_2, T) - P(K_1, T) > 0 \\ \text{Profit} &= \begin{cases} K_2 - K_1 & , S_T \leq K_1 \\ K_2 - S_T & , K_1 < S_T \leq K_2 \\ 0 & , S_T > K_2 \end{cases} \end{aligned}$$



### Ratio Spread

Cette stratégie est une combinaison un peu sur mesure (on ne peut pas nécessairement dire si elle est longue ou courte). On achète  $n$  options d'achat à un prix d'exercice  $K_1$  et on en vend  $m$  à un prix d'exercice  $K_2$ .<sup>2</sup>

$$\begin{aligned} \text{RatioSpread} &= n\text{Call}(K_1, T) - m\text{Call}(K_2, T) \\ \text{Premium} &= nC(K_1, T) - mC(K_2, T) \\ \text{Payoff} &= \dots \end{aligned}$$

### Box Spread

Cette stratégie réplique l'achat d'une obligation zéro-coupon, en impliquant 4 contrats.

### 9 Put-Call Parity

définition de base :

$$C(K, T) - P(K, T) = F_{0,T} - K(1 + r_f)^T$$

dans le cas où l'action verse des dividendes :

$$\begin{aligned} C(K, T) - P(K, T) &= S_0 - \text{PV}(\text{Div}) - K(1 + r_f)^T \\ &= S_0 e^{-\delta T} - K e^{-r_f T} \end{aligned}$$

Dans le cas où le sous-jacent en question est une devise étrangère (DÉ) qu'on achète avec notre devise locale (DD) :