1 Rappels généraux

Mathématiques financières

$$v = \frac{1}{1+i} = 1-d = e^{-\delta t}$$
$$a_{\overline{n}|} = \frac{1-v^n}{i}, \ddot{a}_{\overline{n}|} = \frac{1-v^n}{d}, \bar{a}_{\overline{n}|} = \frac{1-v^n}{\delta}$$

Modèles de survie

- T_x : durée de vie de (x)
- $K_x = \lfloor T_x \rfloor$
- ${}_tp_x = \Pr(T_x > t) = e^{-\int_0^t \mu_{x+s} ds}$
- ${}_tq_x = 1 - {}_tp_x = \Pr(T_x \leq t)$
- ${}_{t+u}p_x = {}_tp_x \cdot {}_up_{x+t}$
- ${}_{t|u}q_x = {}_tp_x \cdot {}_uq_{x+t}$

Loi de mortalité

Force constante $\mu_x = \mu, {}_tp_x = e^{-\mu t}$

Uniforme (DeMoivre)

- $\mu_u = \frac{1}{\omega - x}$, avec $0 \leq x \leq \omega$
- ${}_tp_x = \frac{\omega-x-t}{\omega-x}$

DUD

- $q_{x+h} = h \cdot q_x$
- $\bar{A}_x = \frac{i}{\delta} A_x$

Contrat d'assurance

Assurance entière Cas discret :
$$A_x = \sum_{k=0}^{\infty} b_k v^{k+1} {}_{k|}q_x$$
Cas continu :
$$\bar{A}_x = \int_0^{\infty} v^t {}_tp_x \mu_{x+t} dt$$

Assurance dotation pure (*pure endowment*)
$$A_{x:\overline{n}|} = A^{1}_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}$$
où $A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} = {}_nE_x = v^n {}_np_x$

Assurance temporaire n année
$$A^{1}_{x:\overline{n}|} = A_x - {}_{n|}A_x$$
où ${}_{n|}A_x = {}_nE_x A_{x+n}$ (i.e. une assurance différée)

Assurance différée
$${}_{m|}A_x = {}_mE_x A_{x+m}$$
$${}_{m|}^{2}A_x = v^m {}_mE_x A_{x+m}$$

Assurance payable m fois l'an
$$A_x^{(m)} = \sum_{k=0}^{\infty} v^{\frac{(k+1)}{m}} {}_{\frac{k}{m}|\frac{1}{m}}q_x$$

Contrat de rente

Rente entière Cas discret :
$$\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^k {}_kp_x$$
Cas continu :
$$\bar{a}_x = \int_0^{\infty} v^t {}_tp_x dt$$

Rente temporaire
$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{1 - A_{x:\overline{n}|}}{d} \leftrightarrow A_{x:\overline{n}|} = 1 - d\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$$
Raccourci :
$$a_{x:\overline{n}|} = a_x - {}_nE_x a_{x+n}$$

Principe d'équivalence

π, lorsque calculée sous le principe d'équivalence, est la solution de
$$\mathrm{E}[Z] = \mathrm{E}[Y]$$
où Z est la valeur présente des prestations futures et Y la valeur présente des primes futures à recevoir.

Formule de Woolhouse

$$\begin{aligned}
\ddot{a}_x^{(m)} &\approx \ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m} - \frac{m^2-1}{12m^2}(\delta+\mu_x) \\
\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)} &\approx \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \frac{m-1}{2m}(1-v^n{}_np_x) - \frac{m^2-1}{12m^2}\left(\delta+\mu_x - v^n{}_np_x(\delta+\mu_{x+n})\right) \\
\bar{a}_{x:\overline{n}|} &= \lim_{m\to\infty} \ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)} \approx \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \frac{1}{2}(1-v^n{}_np_x) - \frac{1}{12}\left(\delta+\mu_x - v^n{}_np_x(\delta+\mu_{x+n})\right)
\end{aligned}$$

2 Calcul de réserve

Perte prospective

$$\begin{aligned}
{}_tL &= \{{}_tL | T_x > t\} \\
&= VP_{@t}(\text{Prest.}) - VP_{@t}(\text{Primes}) \\
&= Z - Y
\end{aligned}$$

Réserve au temps t Selon la méthode prospective,

$${}_tV = \mathrm{E}\left[{}_tL\right] = \mathrm{E}\left[Z\right] - \mathrm{E}\left[Y\right]$$

Selon la méthode rétrospective,

$${}_tV = \frac{\text{VPA}_{@t}(\pi \text{ reçues avant } h) - \text{VPA}_{@t}(\text{Prest. à payer avant } h)}{g}$$

Relation récursive pour les réserves (discrètes) Formule générale [1] :

$${}_{h+1}V = \frac{({}_hV + G_h - e_h)(1+i) - (b_{h+1} - E_{h+1})q_{x+h}}{p_{x+h}}$$

où G_h est la prime à recevoir à $t = h$, e_h les frais relié à la collecte de la prime et E_h les frais reliés aux paiement de la prestation.

Formules alternatives pour Contrat d'assurance-vie entière (si π^{PE})

$${}_hV = MA_{x+h} - \pi\ddot{a}_{x+h} = M\left(1 - \frac{\ddot{a}_{x+h}}{\ddot{a}_x}\right) = M\left(\frac{A_{x+h} - A_x}{1 - A_x}\right)$$

Remarque : ces formules fonctionnent aussi dans le cas d'un contrat d'assurance-vie entière continu.

Approximation classique pour les réserves à durées fractionnaires

$${}_{h+s}V = ({}_hV + G_h - e_h)(1-s) + ({}_{h+1}V)(s)$$

1. Si les frais ne sont pas applicables pour le problème, simplement poser $G_h = E_h = 0$.

Profit de l'assureur

Profit de l'assureur en changeant les 3 composantes

$$\begin{aligned}
{}_{k+1}V^A - {}_{k+1}V^E = {} & N_k({}_kV + G - e'_k)(1+i') - (b_{k+1} + E'_{k+1} - {}_{k+1}V)N_kq'_{x+k} \\
& - [N_k({}_kV + G = e_k)(1+i) - (b_{k+1} + E_{k+1} - {}_{k+1}V)N_kq_{x+k}]
\end{aligned}$$

Profit de l'assureur en changeant une seule composante :

Intérêt (i)	$N_k({}_kV + G - e_k)(i' - i)$
Frais e_k ou E_k	$N_k(e_k - e'_k)(1+i) + (E_{k+1} - E'_{k+1})N_kq_{k+1}$
Mortalité q_{x+k}	$(b_{k+1} + E_{k+1} - {}_{k+1}V)(N_kq_{x+k} - N_kq'_{x+k})$

Quote-Part de l'actif (*Asset shares*)

Alors que la réserve ${}_tV$ nous dit le montant que l'assureur doit avoir de côté, la quote-part de l'actif nous indique plutôt le montant réel que l'assureur a de côté pour le contrat donné.

$$AS_{K+1} = \frac{(AS_k + G_k - e'_k)(1+i') - (b_{k+1} + E'_{k+1})q'_{x+k}}{p'_{x+k}}$$

Équation de Thiele

Cette équation permet d'obtenir le *taux instantanné d'accroissement* de ${}_tV$.

$$\frac{\partial}{\partial t}({}_tV) = \delta_t{}_tV + G_t - e_t - (b_t + E_t) - {}_tV\mu_{[x]+t}$$

on peut approximer ${}_tV$ avec la Méthode d'Euler :

$${}_tV = \frac{{}_{t+h}V - h(G_t - e_t - (b_t + E_t)\mu_{[x]+t})}{1 + h\delta_t + h\mu_{[x]+t}}$$

Modification de contrat

Valeur de rachat (*Cash value at surrender*)