

## **Exercício-Programa conjunto MAP3121 / PEA3301**

**1º semestre de 2018**

### **Fluxo de Potência em redes elétricas pelo Método de Newton**

**Versão 5 - 07.05.2018**

#### Índice

1. Introdução
2. Equacionamento do problema e resolução através do Método de Newton
  - 2.1 - Introdução
  - 2.2 - Variáveis, incógnitas e equações
  - 2.3 - Montagem do termo conhecido
  - 2.4 - Montagem da matriz jacobiana
    - 2.4.1 - Introdução
    - 2.4.2 - Barras PQ e PV - desvio de potência ativa
    - 2.4.3 - Barras PQ - desvio de potência reativa
  - 2.5 - Inicialização das tensões
3. Especificação do Exercício-Programa
  - 3.1 - Introdução
  - 3.2 - Redes para cálculo
  - 3.3 - Apresentação de resultados
4. Referências bibliográficas

#### **1. Introdução**

O presente documento especifica o Exercício-Programa a ser desenvolvido conjuntamente nas disciplinas MAP3121 - Métodos Numéricos e Aplicações e PEA3301 - Introdução aos Sistemas de Potência, no primeiro semestre de 2018.

O programa resolverá o problema de fluxo de potência em redes elétricas. Neste problema, o objetivo principal é determinar:

- corrente que circula em todos os trechos da rede, para verificar a existência de sobrecargas (trechos com corrente maior que a corrente admissível nos seus condutores);
- tensão em todos os nós de carga, para verificar a existência de subtensões ou sobretensões (ou seja, verificar se os consumidores recebem energia elétrica em tensão adequada ou não);
- perdas totais na rede, o que permite identificar configurações de operação e intervenções na rede para garantir que a mesma opere de forma eficiente.

Assim, a resolução do problema de fluxo de potência em redes elétricas consiste na utilização de técnicas de resolução de Circuitos Elétricos [1] no contexto específico dos sistemas de potência.

A história do problema de fluxo de potência está intimamente relacionada ao desenvolvimento dos computadores digitais a partir da década de 1960. Nessa época já existia a necessidade de analisar redes elétricas de grande porte e as ferramentas então disponíveis, os analisadores analógicos de rede (circuitos

equivalentes em escala reduzida - “network analyzers”), já não conseguiam representar todos os aspectos relevantes num sistema de potência real.

As primeiras aplicações do método de Newton no problema de fluxo de potência surgiram na década de 1970. Rapidamente o método se impôs como a solução preferida, devido às suas principais características: robustez e rápida convergência. Robustez significa a capacidade de resolver o problema mesmo em situações distantes da condição normal de operação da rede (por exemplo, a saída de operação de uma usina de geração). A convergência quadrática do método de Newton significa que normalmente são necessárias poucas iterações para alcançar a solução. Como será visto mais adiante, as equações que descrevem o problema de fluxo de potência são não lineares, e o método de Newton lineariza essas equações em torno de soluções parciais ao longo da trajetória de estados.

Conclui-se então que o problema de fluxo de potência já é clássico em sistemas de potência. Isto não impede que o problema continue sendo estudado e aprimorado. Os desenvolvimentos atuais continuam beneficiando-se da rápida expansão da capacidade dos computadores modernos. Hoje em dia é possível resolver redes elétricas com mais de 100.000 nós e, principalmente, tratar redes desequilibradas. As redes de Distribuição (127 V - 13,8 kV) são inerentemente desequilibradas e assim exigem uma representação trifásica da rede, ao contrário das redes de Transmissão (acima de 230 kV) nas quais uma representação monofásica (equilibrada) é quase sempre suficiente.

Nos próximos itens serão apresentados os conceitos e definições necessários ao desenvolvimento do trabalho (formulação e resolução do problema). Finalmente é apresentada a especificação do exercício-programa.

## **2. Equacionamento do problema e resolução através do Método de Newton**

### **2.1 - Introdução**

Neste item será apresentada a aplicação do método de Newton ao problema do fluxo de potência utilizando injeções de potência e coordenadas polares (existe a possibilidade de utilizar injeções de corrente e coordenadas retangulares). Nos próximos subitens serão apresentadas as variáveis e as equações a serem resolvidas, a montagem do termo conhecido, a montagem da matriz Jacobiana e por fim a inicialização das tensões para o processo iterativo.

### **2.2 - Variáveis, incógnitas e equações**

A cada *barra* (sinônimo de *nó*, no presente contexto) são associadas quatro variáveis: módulo e ângulo da tensão nodal e potências ativa e reativa injetadas. O conjunto formado por todos os módulos e todos os ângulos de tensão recebe o nome coletivo de estado da rede.

A Tabela 1 apresenta os tipos de barras, os correspondentes valores especificados (conhecidos), as incógnitas (a determinar) e as equações disponíveis. Todos os símbolos usados nesta tabela são definidos na Tabela 2.

Tabela 1 - Tipos de barras, valores especificados, incógnitas e equações

Tipo de barra (quantidade)	Valores especificados	Incógnitas	Equações
PQ ( $n_1$ )	$P_j, Q_j$	$\theta_j, V_j$	$fp_j = P_{calc_j} - P_{esp_j}$ $fq_j = Q_{calc_j} - Q_{esp_j}$
PV ( $n_2$ )	$P_j, V_j$	$\theta_j, Q_j$	$fp_j = P_{calc_j} - P_{esp_j}$
Swing ( $n_3$ )	$V_j, \theta_j$	$P_j, Q_j$	-

Tabela 2 - Símbolos utilizados na Tabela 4.7.1

Símbolo	Definição
$\dot{V}_j = V_j \angle \theta_j$	Tensão nodal na barra $j$
$\bar{S}_j = P_j + jQ_j$	Potência complexa injetada na barra $j$
$P_{calc_j}$	Valor calculado para a potência ativa injetada pela barra $j$ (PQ ou PV), no estado atual da rede
$P_{esp_j}$	Valor especificado para a potência ativa injetada pela barra $j$ (PQ ou PV)
$Q_{calc_j}$	Valor calculado para a potência reativa injetada pela barra $j$ (PQ), no estado atual da rede
$Q_{esp_j}$	Valor especificado para a potência reativa injetada pela barra $j$ (PQ)
$V_{esp_j}$	Valor especificado para o módulo de tensão na barra $j$ (PV)
$fp_j$	Desvio de potência ativa na barra $j$ (PQ ou PV) (diferença entre o valor calculado e o valor especificado)
$fq_j$	Desvio de potência reativa na barra $j$ (PQ) (diferença entre o valor calculado e o valor especificado)

As barras PQ servem para representar as cargas do sistema, e para elas são especificados os valores de potência ativa e reativa injetadas.

As usinas são normalmente representadas por barras PV, porque esse modelo reflete os principais controles disponíveis num gerador: (i) potência mecânica transferida da fonte primária de energia ao eixo do gerador elétrico (P), e (ii) nível de excitação do gerador, o que determina a tensão nos terminais do mesmo (V).

As barras swing existem por uma necessidade matemática. Se numa rede só existissem barras PQ e PV, a potência ativa total gerada e a potência ativa total absorvida estariam ambas definidas. Mas isso constituiria uma violação do princípio de conservação de energia, porque as perdas de potência ativa que ocorrem nos trechos da rede (e que não são conhecidas a priori) estariam sendo desconsideradas no balanço de potências. Então é preciso ter pelo menos uma barra em que a potência ativa não seja especificada, para proporcionar o necessário grau de liberdade. Esse é o papel da barra swing.

Uma outra razão para a necessidade de haver pelo menos uma barra swing é a questão da referência para o ângulo das tensões. A solução de um problema de fluxo de potência fornece módulos e ângulos de tensão de tal forma que todas as injeções de potência especificadas resultam satisfeitas. Mas uma determinada

solução não se altera fisicamente se a todos os ângulos for adicionado um valor arbitrário. Ou seja, existem infinitas soluções matemáticas que do ponto de vista físico são todas idênticas. A definição de pelo menos uma barra swing elimina esta indeterminação, pois nessa barra o ângulo da tensão é fixado a priori.

Na presente formulação cada barra PQ contribui com duas equações (desvios de potência ativa e reativa, entre o valor calculado a partir do estado da rede e o valor especificado para a barra) e a ela são associadas duas incógnitas (módulo e ângulo da tensão nodal).

Cada barra PV contribui com uma única equação, a qual fornece o desvio de potência ativa injetada (diferença entre a potência calculada através do estado da rede e a potência especificada para a barra). Para manter o balanço entre equações e incógnitas, associa-se à barra PV somente uma incógnita, que é o ângulo de sua tensão. A potência reativa injetada pela barra PV também é incógnita, mas ela não faz parte do sistema de equações a ser resolvido pelo método de Newton; ela é calculada após convergência do processo iterativo.

As barras swings não contribuem para o sistema de equações. As potências ativa e reativa injetadas por estas barras são também calculadas após convergência do processo iterativo.

Para facilitar o desenvolvimento do equacionamento, as incógnitas serão agrupadas em vetores. Assim, tem-se um vetor para representar o ângulo das tensões e outro vetor para representar o módulo:

$$\tilde{\theta} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \dots \\ \theta_{n1+n2} \end{bmatrix} \quad \tilde{V} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \dots \\ V_{n1} \end{bmatrix}.$$

### 1) Sistema não linear de equações

a) Barras PQ ( $n_1$  pares de equações):

$$\begin{aligned} fp_j(\tilde{\theta}, \tilde{V}) &= Pcalc_j(\tilde{\theta}, \tilde{V}) - Pesp_j \\ fq_j(\tilde{\theta}, \tilde{V}) &= Qcalc_j(\tilde{\theta}, \tilde{V}) - Qesp_j \end{aligned} \quad (1)$$

b) Barras PV ( $n_2$  equações):

$$fp_j(\tilde{\theta}, \tilde{V}) = Pcalc_j(\tilde{\theta}, \tilde{V}) - Pesp_j \quad (2)$$

O método de Newton parte de uma solução inicial  $(\tilde{\theta}, \tilde{V})$  e sucessivamente calcula correções  $(\Delta\tilde{\theta}, \Delta\tilde{V})$  de tal forma que as soluções corrigidas  $(\tilde{\theta} + \Delta\tilde{\theta}, \tilde{V} + \Delta\tilde{V})$  tendem a anular os desvios nas Eqs. (1) e (2). A convergência do processo iterativo ocorre quando todos os desvios resultarem inferiores a uma tolerância pré-estabelecida. Neste momento, a solução do sistema de equações é dada pela solução atual (mais recente). Nesta formulação tem-se um total de  $(2n_1 + n_2)$  equações e incógnitas.

## 2) Linearização em torno do ponto $(\tilde{\theta}, \tilde{V})$

Para a barra  $j$  do tipo PQ, tem-se:

$$fp_j(\tilde{\theta} + \Delta\tilde{\theta}, \tilde{V} + \Delta\tilde{V}) = fp_j(\tilde{\theta}, \tilde{V}) + \sum_{k=1}^{n1+n2} \frac{\partial fp_j}{\partial \theta_k} \cdot \Delta\theta_k + \sum_{k=1}^{n1} \frac{\partial fp_j}{\partial V_k} \cdot \Delta V_k \quad (3)$$

$$fq_j(\tilde{\theta} + \Delta\tilde{\theta}, \tilde{V} + \Delta\tilde{V}) = fq_j(\tilde{\theta}, \tilde{V}) + \sum_{k=1}^{n1+n2} \frac{\partial fq_j}{\partial \theta_k} \cdot \Delta\theta_k + \sum_{k=1}^{n1} \frac{\partial fq_j}{\partial V_k} \cdot \Delta V_k \quad (4)$$

Se a barra  $j$  for do tipo PV, sua equação é a própria Eq. (3).

## 3) Imposição de que o ponto $(\tilde{\theta} + \Delta\tilde{\theta}, \tilde{V} + \Delta\tilde{V})$ é solução

$$\begin{aligned} fp_j(\tilde{\theta} + \Delta\tilde{\theta}, \tilde{V} + \Delta\tilde{V}) &= 0 \\ fq_j(\tilde{\theta} + \Delta\tilde{\theta}, \tilde{V} + \Delta\tilde{V}) &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

## 4) Sistema linear de equações

Substituindo a Eq. (5) nas Eqs. (3) e (4), resulta:

$$\begin{aligned} 0 &= fp_j(\tilde{\theta}, \tilde{V}) + \sum_{k=1}^{n1+n2} \frac{\partial fp_j}{\partial \theta_k} \cdot \Delta\theta_k + \sum_{k=1}^{n1} \frac{\partial fp_j}{\partial V_k} \cdot \Delta V_k \\ 0 &= fq_j(\tilde{\theta}, \tilde{V}) + \sum_{k=1}^{n1+n2} \frac{\partial fq_j}{\partial \theta_k} \cdot \Delta\theta_k + \sum_{k=1}^{n1} \frac{\partial fq_j}{\partial V_k} \cdot \Delta V_k \end{aligned}$$

Considerando agora todas as barras PQ e todas as barras PV, resulta o sistema linear de equações:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \tilde{f}p}{\partial \tilde{\theta}} & \frac{\partial \tilde{f}p}{\partial \tilde{V}} \\ \frac{\partial \tilde{f}q}{\partial \tilde{\theta}} & \frac{\partial \tilde{f}q}{\partial \tilde{V}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta\tilde{\theta} \\ \Delta\tilde{V} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\tilde{f}p(\tilde{\theta}, \tilde{V}) \\ -\tilde{f}q(\tilde{\theta}, \tilde{V}) \end{bmatrix}, \quad (6)$$

em que a quantidade de equações e incógnitas é detalhada a seguir:

- número de equações de potência ativa:  $(n_1 + n_2)$ ;
- número de equações de potência reativa:  $n_1$ ;
- número de incógnitas de ângulo da tensão:  $(n_1 + n_2)$ ;
- número de incógnitas de módulo da tensão:  $n_1$ ;
- número total de equações e de incógnitas:  $(2n_1 + n_2)$ .

Exemplificando, a sub-matriz  $\frac{\partial \tilde{f}p}{\partial \tilde{V}}$  na Eq. (6) possui  $(n_1 + n_2)$  linhas (número de equações de potência ativa) e  $n_1$  colunas (número de incógnitas de módulo da tensão). A resolução do sistema (6) fornece as correções a serem aplicadas à solução obtida na iteração anterior.

### 2.3 - Montagem do termo conhecido

Neste item será apresentado o cálculo do termo conhecido na Eq. (6). Inicialmente calcula-se a potência complexa injetada na barra  $j$  a partir do estado atual da rede (potência calculada):

$$\begin{aligned}\bar{S}calc_j^* &= Pcalc_j - jQcalc_j = \dot{V}_j^* \dot{I}_j = \dot{V}_j^* \sum_k \bar{Y}_{jk} \dot{V}_k = \sum_k V_j \angle -\theta_j \cdot (G_{jk} + jB_{jk}) V_k \angle \theta_k \\ &= \sum_k V_j V_k \cdot (\cos \theta_{kj} + j \operatorname{sen} \theta_{kj}) (G_{jk} + jB_{jk}) \\ &= V_j \sum_k V_k \cdot (G_{jk} \cos \theta_{kj} - B_{jk} \operatorname{sen} \theta_{kj}) + j V_j \sum_k V_k \cdot (G_{jk} \operatorname{sen} \theta_{kj} + B_{jk} \cos \theta_{kj})\end{aligned}$$

em que  $\bar{Y}_{jk} = G_{jk} + jB_{jk}$  indica o elemento  $(j,k)$  da matriz de admitâncias nodais da rede, e  $\theta_{kj} \triangleq \theta_k - \theta_j$ . A parcela calculada das potências ativa e reativa é dada então por:

$$\begin{aligned}Pcalc_j &= \Re[\bar{S}calc_j] = V_j \sum_k V_k \cdot (G_{jk} \cos \theta_{kj} - B_{jk} \operatorname{sen} \theta_{kj}) \\ Qcalc_j &= \Im[\bar{S}calc_j] = -V_j \sum_k V_k \cdot (G_{jk} \operatorname{sen} \theta_{kj} + B_{jk} \cos \theta_{kj})\end{aligned}\quad (7)$$

Com relação à potência especificada, considera-se neste trabalho que todas as cargas são de impedância constante, o que permite incluí-las na matriz de admitâncias nodais da rede. Sendo assim, a potência injetada externamente na rede pelas cargas será nula [1], resultando para todas as barras PQ:

$$Pesp_j = 0, \text{ e} \quad (8)$$

$$Qesp_j = 0. \quad (9)$$

Substituindo as Eqs. (7), (8) e (9) na Eq. (1) resulta para o termo conhecido:

$$fp_j = Pcalc_j = V_j \sum_k V_k \cdot (G_{jk} \cos \theta_{kj} - B_{jk} \operatorname{sen} \theta_{kj}) \quad \text{e} \quad (10)$$

$$fq_j = Qcalc_j = -V_j \sum_k V_k \cdot (G_{jk} \operatorname{sen} \theta_{kj} + B_{jk} \cos \theta_{kj}). \quad (11)$$

As Eqs. (10) e (11) devem ser escritas para cada barra PQ. No caso de barra PV, a potência especificada não é obrigatoriamente nula e assim o termo conhecido se torna:

$$fp_j = Pcalc_j - Pesp_j = V_j \sum_k V_k \cdot (G_{jk} \cos \theta_{kj} - B_{jk} \operatorname{sen} \theta_{kj}) - Pesp_j. \quad (12)$$

## 2.4 - Montagem da matriz jacobiana

### 2.4.1 - Introdução

Neste item será apresentado o cálculo da matriz Jacobiana na Eq. (6). A Tabela 3 apresenta os casos que devem ser considerados na montagem da matriz, de acordo com o tipo de barra e do tipo de equação. Observa-se que, tanto para a potência ativa como para a potência reativa, é conveniente separar o cálculo das derivadas da seguinte forma:

- derivadas em relação ao módulo e ao ângulo da tensão na própria barra, e
- derivadas em relação ao módulo e ao ângulo da tensão em uma barra distinta.

Tabela 3 - Termos da matriz Jacobiana

Tipo de barra	Desvios e variáveis independentes	Derivadas a calcular
PQ e PV	Desvio da potência ativa em função do ângulo e do módulo das tensões	$\frac{\partial p_j}{\partial \theta_j}, \frac{\partial p_j}{\partial V_j}, \frac{\partial p_j}{\partial \theta_k}, \frac{\partial p_j}{\partial V_k}$
PQ	Desvio da potência reativa em função do ângulo e do módulo das tensões	$\frac{\partial q_j}{\partial \theta_j}, \frac{\partial q_j}{\partial V_j}, \frac{\partial q_j}{\partial \theta_k}, \frac{\partial q_j}{\partial V_k}$

O cálculo das derivadas será apresentado em detalhe nos subitens subsequentes.

### 2.4.2 – Barras PQ e PV - desvio de potência ativa

As derivadas do desvio de potência ativa são obtidas imediatamente a partir das Eqs. (10) e (12), lembrando que a potência especificada de uma barra PV é constante (independe do estado da rede):

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial p_j}{\partial \theta_j} &= V_j \sum_i V_i \cdot (-G_{ji} \sin \theta_{ij} \cdot (-1) - B_{ji} \cos \theta_{ij} \cdot (-1)) \\
 &= V_j \sum_i V_i \cdot (G_{ji} \sin \theta_{ij} + B_{ji} \cos \theta_{ij}) = -Q_{calc_j} \\
 \frac{\partial p_j}{\partial V_j} &= \sum_i V_i \cdot (G_{ji} \cos \theta_{ij} - B_{ji} \sin \theta_{ij}) = \frac{P_{calc_j}}{V_j} \\
 \frac{\partial p_j}{\partial \theta_k} &= V_j V_k \cdot (-G_{jk} \sin \theta_{kj} \cdot (1) - B_{jk} \cos \theta_{kj} \cdot (1)) \\
 &= -V_j V_k \cdot (G_{jk} \sin \theta_{kj} + B_{jk} \cos \theta_{kj}) \\
 \frac{\partial p_j}{\partial V_k} &= V_j (G_{jk} \cos \theta_{kj} - B_{jk} \sin \theta_{kj})
 \end{aligned} \tag{13}$$

### 2.4.3 – Barras PQ - desvio de potência reativa

As derivadas do desvio de potência reativa são obtidas imediatamente a partir da Eq. (11):

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f q_j}{\partial \theta_j} &= -V_j \sum_i V_i \cdot (G_{ji} \cos \theta_{ij} \cdot (-1) - B_{ji} \operatorname{sen} \theta_{ij} \cdot (-1)) \\
 &= V_j \sum_i V_i \cdot (G_{ji} \cos \theta_{ij} - B_{ji} \operatorname{sen} \theta_{ij}) = P_{calc_j} \\
 \frac{\partial f q_j}{\partial V_j} &= -\sum_i V_i \cdot (G_{ji} \operatorname{sen} \theta_{ij} + B_{ji} \cos \theta_{ij}) = \frac{Q_{calc_j}}{V_j} \\
 \frac{\partial f q_j}{\partial \theta_k} &= -V_j V_k \cdot (G_{jk} \cos \theta_{kj} \cdot (1) - B_{jk} \operatorname{sen} \theta_{kj} \cdot (1)) \\
 &= -V_j V_k \cdot (G_{jk} \cos \theta_{kj} - B_{jk} \operatorname{sen} \theta_{kj}) \\
 \frac{\partial f q_j}{\partial V_k} &= -V_j (G_{jk} \operatorname{sen} \theta_{kj} + B_{jk} \cos \theta_{kj})
 \end{aligned} \tag{14}$$

### 2.5 - Inicialização das tensões

Todo método iterativo exige que seja atribuído um valor inicial às incógnitas do problema. No presente caso deverá ser atribuído um valor inicial de tensão de acordo com o tipo de barra, conforme mostra a Tabela 4.

Tabela 4 - Inicialização de tensões

Tipo de barra	Valor inicial da tensão complexa [V]
PQ	$V_{nom} \angle 0^{(1)}$
PV	$V_{esp} \angle 0^{(2)}$
Swing	$V_{esp} \angle \theta_{esp}^{(2)}$
<sup>(1)</sup> Módulo igual à tensão nominal <u>de fase</u> da barra	
<sup>(2)</sup> Valores especificados para o módulo e o ângulo da tensão <u>de fase</u>	

Para justificar o uso da tensão nominal como valor de inicialização da tensão, considere o caso simplificado de uma rede que (i) não possui representação do efeito capacitivo das linhas, (ii) se encontra operando em vazio (sem cargas), e (iii) a tensão de todos os geradores foi ajustada no valor nominal. Nestas condições, a tensão resultante em cada barra será a sua própria tensão nominal.

Cabe lembrar que nas barras PV o módulo da tensão permanece constante ao longo das iterações, e nas barras swing tanto o módulo como o ângulo da tensão permanecem constantes.



### 3. Especificação do Exercício-Programa

#### 3.1 - Introdução

Neste trabalho deverá ser desenvolvido um programa para cálculo de fluxo de potência pelo método de Newton, conforme metodologia descrita no item precedente. As principais características do programa são listadas a seguir:

- possibilidade de representação de barras PQ, PV e Swing;
- cargas representadas pelo modelo de impedância constante e inseridas diretamente na matriz de admitâncias nodais da rede (injeção externa de potência igual a zero nas barras PQ).

#### 3.2 - Redes para cálculo

A Tabela 5 mostra as redes que deverão ser calculadas pelo programa. As Redes 3 e 4 são redes reais de Distribuição.

Tabela 5 - Redes para cálculo

Índice	Nome	Tipo	Tensão nominal de fase [V]	Número de barras			
				PQ	PV	Swing	Total
1	Stevenson [2]	Transmissão	$230000/\sqrt{3} = 132790,56$	3	1	1	<b>5</b>
2	Reticulada	Distribuição	$13800/\sqrt{3} = 7967,434$ $220/\sqrt{3} = 127,017$	76	0	1	<b>77</b>
3	Distribuição Primária (radial)		$13800/\sqrt{3} = 7967,434$	1694	0	1	<b>1695</b>
4	Distribuição Primária e Secundária (radial)		$13800/\sqrt{3} = 7967,434$ $440/\sqrt{3} = 254,034$ $380/\sqrt{3} = 219,393$	6259	0	1	<b>6260</b>

#### IMPORTANTE:

Os resultados do cálculo da primeira rede (Stevenson) estão disponíveis para consulta [2], mas não são diretamente comparáveis com os resultados deste EP porque na referência original todas as cargas são de potência constante, e neste EP considera-se que todas as cargas são de impedância constante. Os resultados considerando cargas de impedância constante serão divulgados oportunamente.

Em todos os casos são fornecidos dois arquivos de dados:

- arquivo com dados de barras, e
- arquivo com a matriz de admitâncias nodais da rede. As cargas da rede já foram inseridas na matriz como cargas de impedância constante; logo, você não deve inseri-las na matriz (se fizer isso, as cargas estarão sendo representadas duplicadamente).

Os dados fornecidos correspondem à representação monofásica (equilibrada) da rede elétrica.

O primeiro passo na execução do programa deverá ser a leitura de ambos arquivos, cuja estrutura é apresentada nas Tabelas 6 e 7.

Tabela 6 - Estrutura do arquivo de barras

Linha	Campo 1 ( <i>int</i> )	Campo 2 ( <i>int</i> )	Campo 3 ( <i>double</i> )	Campo 4 ( <i>double</i> )	Campo 5 ( <i>double</i> )
1	Número de barras no arquivo (NB)	-	-	-	-
2 a (NB+1)	Número da barra	Tipo da barra:  0 = PQ 1 = PV 2 = Swing	Tensão nominal <u>de fase</u> [V]	PQ: potência ativa absorvida nominal [W]	PQ: potência reativa absorvida nominal [VAr]
				PV: potência ativa de geração [W]	PV: módulo da tensão especificada [V]
				Swing: módulo da tensão especificada [V]	Swing: ângulo da tensão especificada [°]

Tabela 7 - Estrutura do arquivo da matriz de admitâncias nodais

Linha	Campo 1 ( <i>int</i> )	Campo 2 ( <i>int</i> )	Campo 3 ( <i>double</i> )	Campo 4 ( <i>double</i> )
1	Número de elementos de [Ynodal] no arquivo (NE)	-	-	-
2 a (NE+1)	Linha do elemento ( <i>j</i> )	Coluna do elemento ( <i>k</i> )	Condutância do elemento ( <i>j,k</i> ): $G_{jk} = \Re[\bar{Y}_{jk}]$ [S]	Susceptância do elemento ( <i>j,k</i> ): $B_{jk} = \Im[\bar{Y}_{jk}]$ [S]

Destaca-se que a numeração de nós na matriz de admitâncias nodais é a própria numeração das barras. Por exemplo, o elemento  $\bar{Y}_{3,5}$  da matriz corresponde ao trecho de rede que liga as barras de números 3 e 5.

### 3.3 - Apresentação de resultados

As Tabelas 8, 9 e 10 apresentam o “template” de resultados de barras, de trechos e globais, respectivamente. A Tabela 11 apresenta as barras e os trechos a serem considerados em cada uma das redes.

Tabela 8 - “Template” de resultados nas barras - Rede X (X = 1, 2, 3 ou 4)

Barra	Tensão complexa		Módulo da tensão complexa (V)
	Módulo (pu)	Ângulo (°)	

Tabela 9 - “Template” de resultados nos trechos - Rede X

Trecho		Potência ativa (kW)	Potência reativa (kVAr)	Perda ativa (kW)
Barra inicial	Barra final			

Tabela 10 - “Template” de resultados globais - Rede X

	Valor (kW)
Potência ativa total gerada	
Potência ativa total de carga (absorvida)	
Perda ativa total	

Tabela 11 - Barras e trechos para apresentação de resultados

Rede	Barras	Trechos
1 - Stevenson	Todas (total 5)	Todos (total 6)
2 - Reticulada	2 11 25 28 30 42 43 47 48 49	3-4 6-5 12-28 13-9 17-1 18-2 19-20 24-52 60-62 75-2
3 - Distribuição Primária	0 1 47 633 1414 1429 1528 1607 1609 1636	0-1185 1-2 1-92 47-6 47-31 633-632 633-634 1414-1415 1607-286 1621-1622
4 - Distribuição Primária e Secundária	3 990 1310 1466 3947 4015 4188 5820 5830 5840	0-1185 710-543 776-1748 1543-1542 1600-1387 1631-1630 1748-776 2867-2868 2878-2877 3640-3947

#### **4. Referências bibliográficas**

- [1] L. Q. Orsini, D. Consonni: *Curso de circuitos elétricos*, Ed. Edgard Blücher, São Paulo, 1993/94, 2v.
- [2] W. D. Stevenson Jr.: *Elementos de análise de sistemas de potência*. McGraw-Hill, São Paulo, 1986.
- [3] A. Monticelli: *Fluxo de carga em redes de energia elétrica*, Ed. Edgard Blücher, São Paulo, 1983.

## Método de Newton para funções de várias variáveis

Vamos descrever o método de Newton para determinação de raízes de funções  $F(x)$  de  $R^n$  em  $R^n$ . Como no caso unidimensional, parte-se de uma aproximação inicial  $x^{(0)}$  para o valor  $\bar{x} \in R^n$  tal que  $F(\bar{x}) = 0$  e calcula-se a sequência

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - J_F^{-1}(x^{(k)})F(x^{(k)})$$

onde  $J_F(x)$  é a matriz Jacobiana de  $F$  avaliada no ponto  $x$ . Para  $F$  de  $R^n$  em  $R^n$ ,  $J_F(x)$  é dada por:

$$J_F(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix},$$

onde  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$  são as componentes de  $F(x)$ .

Na descrição da iteração do método de Newton aparece a inversa de  $J_F(x)$ . Pode-se evitar a necessidade de inverter  $J_F(x)$  reescrevendo a iteração na forma:

$$J_F(x^{(k)}) (x^{(k+1)} - x^{(k)}) = -F(x^{(k)}) .$$

Assim, a cada passo do método de Newton resolve-se o sistema linear

$$J_F(x^{(k)}) c^{(k)} = -F(x^{(k)})$$

e calcula-se a nova aproximação como  $x^{(k+1)} = x^{(k)} + c^{(k)}$ . Quando  $F$  é de classe  $C^2$  e a matriz Jacobiana é não singular na raiz de  $F$  (ou seja, tem determinante não nulo), pode-se mostrar que o método de Newton converge quadraticamente para a raiz de  $F$ , desde que  $x^{(0)}$  seja escolhido suficientemente próximo da raiz.

Você encontra mais informações sobre o método de Newton n-dimensional nos livros de Burden e Faires (veja as informações gerais do curso) ou Isaacson e Keller (Analysis of Numerical Methods), disponíveis na Biblioteca do IME, ou mesmo através de uma busca na Internet.

### Programando o método de Newton

A implementação do método de Newton requer rotinas para a avaliação de  $F(x)$  e da matriz jacobiana  $J_F(x)$ . Além disso, deve-se resolver um sistema linear a cada passo. Para a solução do sistema linear usaremos a decomposição LU da matriz. Descrevemos abaixo o algoritmo (com pivotação parcial) para o cálculo da decomposição LU de uma matriz  $A$  (eventualmente permutada), onde  $L$  é triangular unitária (ou seja, tem 1's na diagonal) inferior e  $U$  é triangular superior.

Dados  $n$  e uma matriz  $A$  ( $n \times n$ ) temos:

- Para  $k$  de 1 a  $n$  faça
  - para  $i$  de  $k$  a  $n$  faça
 
$$a(i, k) = a(i, k) - \sum_{j=1}^{k-1} a(i, j) * a(j, k)$$
  - Determine  $l \geq k$  tal que  $|a(l, k)| = \max_{k \leq i \leq n} |a(i, k)|$
  - defina  $p(k) = l$
  - se  $k \neq p(k)$  troque linhas  $k$  e  $p(k)$  da matriz  $A$
  - para  $j$  de  $k+1$  a  $n$  faça
 
$$a(k, j) = a(k, j) - \sum_{i=1}^{k-1} a(k, i) * a(i, j)$$

$$a(j, k) = a(j, k) / a(k, k)$$

#### Observações:

- Ao final do algoritmo a matriz  $L$  tem seus valores abaixo da diagonal principal armazenados nas posições correspondentes de  $A$  (lembre-se que a diagonal de  $L$  é composta de 1's).
- A matriz  $U$  tem seus valores da diagonal principal e acima desta armazenados nas posições correspondentes de  $A$
- A decomposição  $LU$  calculada corresponde à matriz  $A$  permutada. As permutações realizadas estão armazenadas no vetor  $p$  definido no algoritmo.
- Lembre-se que ao final do algoritmo a matriz  $A$  foi modificada. Caso esta ainda seja necessária, uma cópia sua deve ser anteriormente salva.
- Somatórios de 1 a 0 e loops de  $n+1$  a  $n$  devem ser entendidos como vazios

Voce deve implementar também um procedimento para resolver um sistema  $Ax = b$ , que utilize a decomposição  $LU$  calculada. Lembre-se que o vetor  $b$  deve ser permutado correspondentemente (para tal use o vetor de permutações  $p$ ).

#### Testes Iniciais

- Use seu código para determinar o ponto de mínimo da função  $F(x, y) = (x - 2)^2 + (y - 3)^2$ , calculando para tanto o ponto onde seu gradiente se anula. (Quantas iterações do método de Newton são necessárias para convergência?)
- Dada a função  $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (4x_1 - x_2 + x_3 - x_1x_4, -x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_2x_4, x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_3x_4, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1)$ , determine a raiz que se obtém pelo método de Newton tomando  $x = (1, 1, 1, 1)$  como valor inicial.
- Utilize o método de Newton para determinar solução do sistema  $n - 1 \times n - 1$ , cujas equações são

$$-x_{i-1} + 2x_i - x_{i+1} = \frac{e^{x_i}}{n^2}, \quad i = 1, \dots, n - 1,$$

com  $x_0 = x_n = 0$  , a partir da aproximação inicial nula. (Teste para  $n = 20, 40$  e  $80$ )

### Instruções

As análises e resultados obtidos devem ser organizados em um relatório que deve minimamente discutir os problemas estudados e os resultados obtidos.

- O exercício deve ser feito em linguagem C.
- O exercício pode ser feito em duplas, mas sempre com alguém da mesma área - Elétrica (não necessariamente da mesma turma).
- Apenas **um** aluno deve entregar o exercício, destacando no relatório e código o nome de ambos os alunos.
- A entrega deve conter o relatório (em .pdf), contendo a análise do problema estudado, e o código usado para as simulações computacionais (arquivos .c). A entrega deve ser feita em um arquivo compactado único.

O seu código deve estar bem comentado e estruturado. A entrada e saída devem ser feitas de forma a ajudar o usuário a executar o programa e deve facilitar a análise dos resultados. Inclua qualquer arquivo adicional necessário para o seu programa no arquivo compactado a ser entregue. Como o seu programa terá que ler arquivos de entrada, considere que os mesmos encontram-se na mesma pasta do executável, ou solicite o caminho/nome do arquivo ao usuário.

Você deve resolver tanto os exercícios relativos à aplicação, descritos na parte de Fluxo de Potência em redes elétricas, quanto os testes descritos na seção anterior de Testes Iniciais.