# Análise de Variáveis de Perda - Segundo Exercício Escolar

2º Questão

Felipe Pereira[1], Gabriel D'assumpção de Carvalho[2], Georgio Kokkosis De Freitas[3]

March 28, 2025

## Contents

**1 2º Questão** **2**

1.1 Hipóteses . . . 2

1.2 Simulações . . . 2

**2 Conclusão** **8**

**3 Referência** **9**

# 1 2º Questão

Realize um exercício simulado para uma política de stop-loss baseada no conceito de "stop-loss reinsurance" discutido na Seção 5 do trabalho proposto em Mahmoud (2014). Discuta os resultados da simulação em um estudo com foco nas medidas de risco VaR e TVaR associados à distribuição da perda agregada.

## 1.1 Hipóteses

Suponha que temos uma carteira com $N$ pagamentos de benefícios, onde a ocorrência de sinistros segue uma distribuição binomial e o valor unitário do benefício $x_i$ segue uma distribuição gamma.

$$N \sim Binomial(10^4, 0.3)$$

Portanto a média de N vai ser aproximadamente 0.3

$$x_i \sim Gamma(20, 10)$$

Sendo assima $x_i$ vai ter uma média de 200.

Assim, a soma agregada das perdas, $S$, é definida como a soma das perdas individuais $x_i$, ponderadas pela respectiva ocorrência de sinistro:

$$S = \sum_{i=1}^{N} x_i$$

Dado que o modelo considera uma política de stop-loss, a resseguradora cobre as perdas acima de um limite $D$, de modo que a perda retida pela seguradora é dada por:

$$(S - D)_+ = \max(S - D, 0)$$

Ou, de forma mais explícita:

$$(S - D)_+ = \begin{cases} 0, & S < D \\ S - D, & S \geq D \end{cases}$$

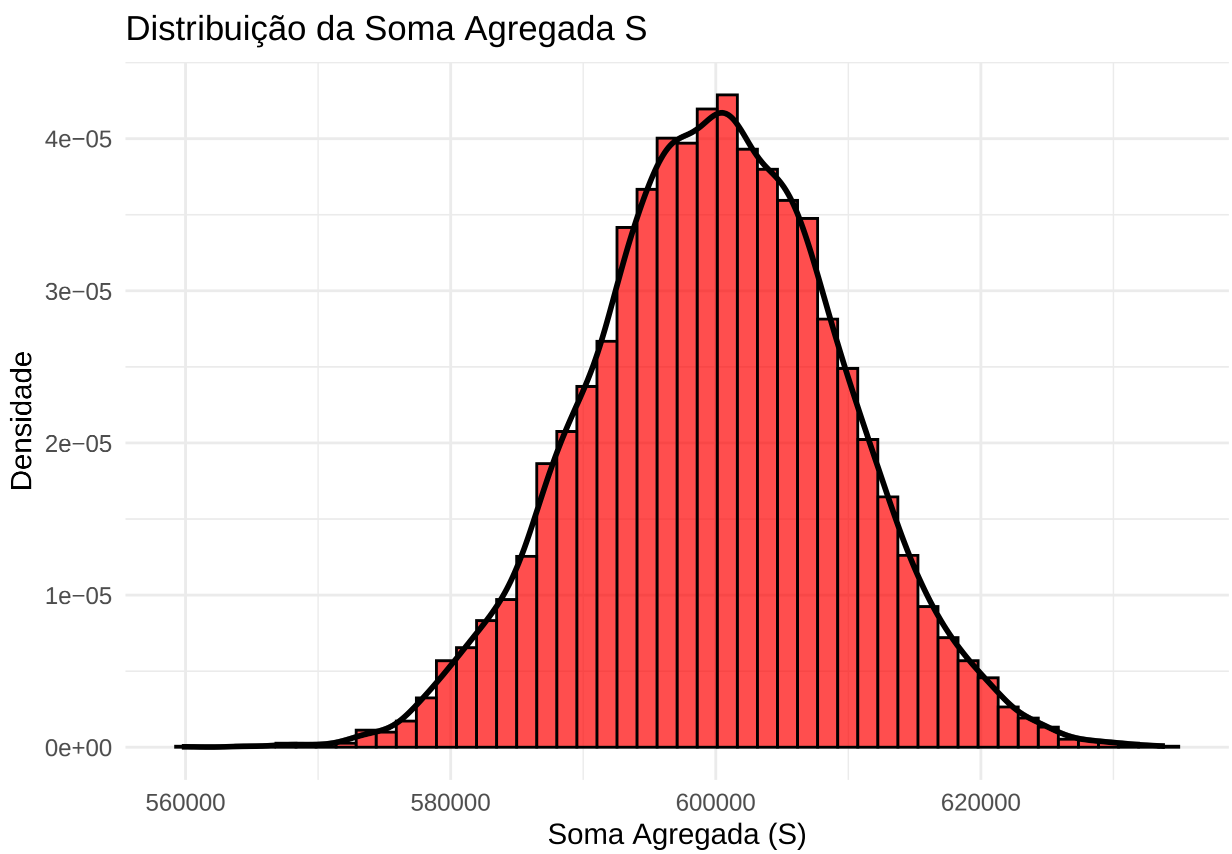
Essa função representa a parte das perdas que excede o limite $D$, caracterizando o impacto da política de stop-loss na retenção da seguradora.

## 1.2 Simulações

Nesta etapa, realizaremos uma simulação para analisar a perda agregada. Inicialmente, iremos desconsiderar o limite $D$, e, em seguida, consideraremos o limite $D$ para observar o impacto de um contrato de resseguro na perda da seguradora.

### 1.2.1 Sem Stop-Loss Reinsurance

```r
set.seed(42)
# Carregar pacotes necessários
library(ggplot2)

# Número de simulações
n_simulation = 10^4

# Inicialização do vetor S
S = numeric(n_simulation)

# Definição de parâmetros
n_client = 10^4  # Quantidade de clientes
p_norm = 0.3  # Probabilidade de ocorrência de sinistro

# Parâmetros da distribuição Gamma
x_shape = 20
x_scale = 10

# Simulação vetorizada
N <- matrix(rbinom(n_simulation * n_client, 1, p_norm), nrow = n_simulation,
            ncol = n_client)
X <- matrix(rgamma(n_simulation * n_client, shape = x_shape, scale = x_scale),
            nrow = n_simulation, ncol = n_client)

# Cálculo vetorizado da soma agregada S
S <- rowSums(N * X)

# Converter para data frame para o ggplot2
df <- data.frame(S = S)

# Criar histograma com ggplot2
ggplot(df, aes(x = S)) +
  geom_histogram(aes(y = ..density..), bins = 50, fill = "red", color = "black",
                 alpha = 0.7) +
  geom_density(color = "black", linewidth = 1) +  # Adiciona a curva de densidade
  labs(title = "Distribuição da Soma Agregada S",
       x = "Soma Agregada (S)",
       y = "Densidade") +
  theme_minimal()
```




Pode-se observar no histograma acima a distribuição da soma agregada após $10^5$ simulações. Nota-se que $S$ aparenta seguir uma distribuição Normal ou t-Student, sendo a t-Student mais indicada para modelagem de perdas financeiras, pois apresenta uma maior probabilidade de ocorrência de valores extremos.

```
summary(S)
```

```
##    Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
##  559717  593621  600021  599975  606393  633880
```

Ao analisar as estatísticas da soma agregada, observa-se que seu valor mínimo é de aproximadamente 565.716 unidades monetárias. Esse valor elevado deve-se ao fato de não considerarmos o valor de aquisição do seguro pelos clientes, mas apenas os pagamentos de benefícios para os segurados que sofreram sinistro. Além disso, a média e a mediana são praticamente idênticas, ambas próximas de 600.000, o que indica uma distribuição simétrica. Para confirmar essa simetria, podemos comparar a média adicionada e subtraída do desvio padrão com o primeiro e o terceiro quartil da distribuição.

```
print(mean(S) - sd(S))
```

```
## [1] 590514.5
```

```
print(mean(S) + sd(S))
```

```
## [1] 609436
```

Os resultados mostram que a diferença entre a média ajustada pelo desvio padrão e os quartis é de aproximadamente 3.000 unidades monetárias, o que representa apenas 0,512% de variação em relação à média.

Dado que a distribuição de $S$ pode ser modelada por uma distribuição Normal, em conformidade com o Teorema Central do Limite, podemos estimar que a média da perda agregada seja de aproximadamente 600.000 unidades monetárias. Para uma análise mais aprofundada, podemos calcular as estatísticas de VaR e TVaR considerando níveis de confiança de 95% e 99%.

```r
alpha_95 = 0.95
alpha_99 = 0.99

var_95 = qnorm(alpha_95, mean = mean(S), sd = sd(S))
var_99 = qnorm(alpha_99, mean = mean(S), sd = sd(S))
tvar_95 = mean(S[S >= var_95])
tvar_99 = mean(S[S >= var_99])
```

```r
sprintf("VaR(S) 95%%: %.2f", var_95)
```

```
## [1] "VaR(S) 95%: 615536.76"
```

Podemos observar que, para a variável de perda agregada $S$, o **VaR de 95%** é de 615.536,76. Isso significa que a perda agregada $S$ tem uma probabilidade de 5% de ultrapassar o valor de 615.536,76.

```r
sprintf("VaR(S) 99%%: %.2f", var_99)
```

```
## [1] "VaR(S) 99%: 621984.21"
```

Ao analisar o **VaR de 99%**, podemos ver que a perda agregada $S$ tem uma probabilidade de 1% de exceder o valor de 612.984,21.

```r
sprintf("TVaR(S) 95%%: %.2f", tvar_95)
```

```
## [1] "TVaR(S) 95%: 619482.24"
```

Para uma melhor interpretação, podemos observar que o **TVaR de 95%** é de aproximadamente 619.482,24. Isso significa que a média das 5% maiores perdas agregadas será de 619.482,24. Portanto, no pior cenário, considerando as 5% maiores perdas, o valor esperado será de 619.482,24.

```r
sprintf("TVaR(S) 99%%: %.2f", tvar_99)
```

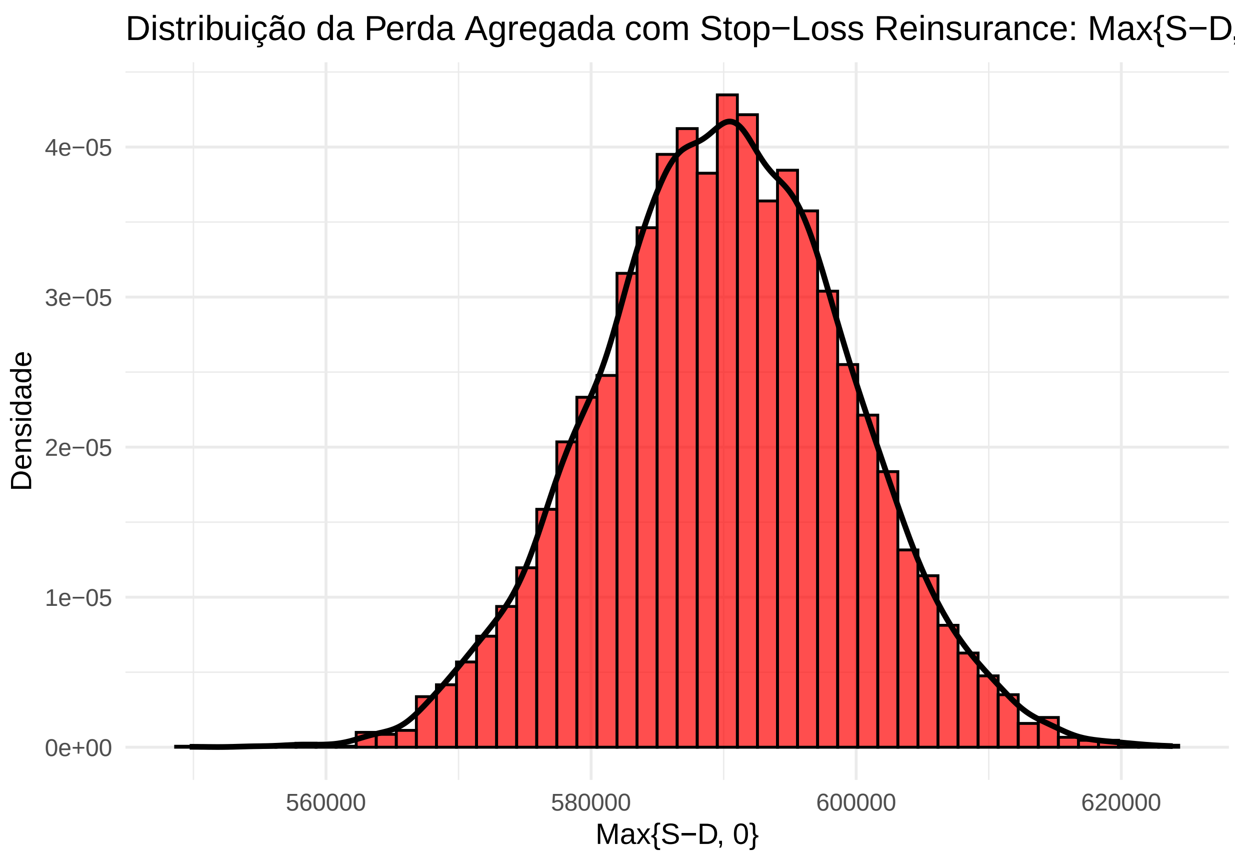
```
## [1] "TVaR(S) 99%: 625063.02"
```

Por fim, ao analisarmos o **TVaR de 99%**, podemos observar que, em média, 1% das maiores perdas serão de aproximadamente 625.063,02.

### 1.2.2 Com Stop-Loss Reinsurance

Nesta simulação, vamos considerar que uma seguradora tenha um contrato de resseguro que cobre até 10000 unidades monetárias da perda agregada. Com isso, iremos observar a distribuição da perda agregada considerando o impacto desse limite de cobertura.

```r
# Definir o valor do limite de resseguro
D = 10000

S_stop = numeric(n_simulation)

# Simulação vetorizada
N =matrix(rbinom(n_simulation * n_client, 1, p_norm), nrow = n_simulation,
            ncol = n_client)
x = matrix(rgamma(n_simulation * n_client, shape = x_shape, scale = x_scale),
            nrow = n_simulation, ncol = n_client)

# Cálculo da soma agregada S sem limite de resseguro
S_stop = rowSums(N * x)

# Aplicar o limite de resseguro usando ifelse() de forma vetorizada
S_stop = ifelse(S <= D, 0, S - D)

# Converter para data frame para o ggplot2
df_stop = data.frame(S_stop = S_stop)

# Criar histograma com ggplot2
ggplot(df_stop, aes(x = S_stop)) +
  geom_histogram(aes(y = ..density..), bins = 50, fill = "red", color = "black",
                 alpha = 0.7) +
  geom_density(color = "black", linewidth = 1) +  # Adiciona a curva de densidade
  labs(title = "Distribuição da Perda Agregada com Stop-Loss Reinsurance: Max{S-D, 0}",
       x = "Max{S-D, 0}",
       y = "Densidade") +
  theme_minimal()
```




Ao comparar com a distribuição do primeiro gráfico, podemos observar que a soma agregada com **stop-loss** não difere significativamente da soma agregada sem **stop-loss**. No entanto, o ponto médio da distribuição com **stop-loss** gira em torno de 590.000, o que representa uma diferença de aproximadamente 10.000, que é o valor da dedução **D**.

```
summary(S_stop)
```

```
##    Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
##  549717  583621  590021  589975  596393  623880
```

Analisando as estatísticas mais detalhadamente, percebemos que todas as medidas apresentaram uma dedução de 10.000, confirmando o impacto direto do valor do stop-loss na soma agregada.

```
library(e1071)
kurtosis(S_stop)
```

```
## [1] -0.02087319
```

Além disso, a kurtosis obtida é próxima de zero, o que indica que a dispersão das caudas da variável **S** com **stop-loss** está muito próxima da kurtosis da distribuição **N(0,1)**, que é igual a 3. Com base nesse comportamento, podemos continuar utilizando a metodologia de cálculo do **VaR** e **TVaR** para distribuições normais.

```
var_95_stop = qnorm(alpha_95, mean = mean(S_stop), sd = sd(S_stop))
var_99_stop = qnorm(alpha_99, mean = mean(S_stop), sd = sd(S_stop))
tvar_95_stop = mean(S_stop[S_stop >= var_95_stop])
tvar_99_stop = mean(S_stop[S_stop >= var_99_stop])
```

```
sprintf("VaR(S) 95%%: %.2f", var_95_stop)
```

```
## [1] "VaR(S) 95%: 605536.76"
```

Ao analisar o **VaR de 95%** da perda com dedução, observamos uma redução exata de 10.000 em comparação com a soma agregada sem **stop-loss**. Portanto, com o **stop-loss**, a perda agregada tem uma probabilidade de 5% de ultrapassar o valor de 605.536,76.

```
sprintf("VaR(S) 99%%: %.2f", var_99_stop)
```

```
## [1] "VaR(S) 99%: 611984.21"
```

Para o **VaR de 99%** da perda com dedução, também houve uma redução exata de 10.000, quando comparado com a distribuição sem **stop-loss**. Assim, a perda agregada com dedução tem uma probabilidade de 1% de ultrapassar a quantia de 611.984,21.

```
sprintf("TVaR(S) 95%%: %.2f", tvar_95_stop)
```

```
## [1] "TVaR(S) 95%: 609482.24"
```

Ao verificar o **TVaR(S) 95%**, que é uma medida mais explicativa, observamos que a dedução fez com que a média das 5% maiores perdas seja de aproximadamente 609.482,24. Esse valor reflete o impacto da dedução sobre os piores cenários da perda agregada.

```
sprintf("TVaR(S) 99%%: %.2f", tvar_99_stop)
```

```
## [1] "TVaR(S) 99%: 615063.02"
```

Finalizando com o **TVaR(S) 99%**, podemos concluir que a média das 1% maiores perdas será de aproximadamente 615.063,02. Esse valor é uma boa indicação do valor médio das perdas mais extremas, considerando a dedução **D**.

# 2 Conclusão

Como visto ao longo da análise, a utilização de um **stop-loss**, que atua como uma redução na perda agregada, teve um impacto positivo na carteira da seguradora, diminuindo o valor total da perda. O efeito foi observável em todas as métricas de risco, como **VaR** e **TVaR**, evidenciando uma proteção adicional proporcionada pela reseguradora, reduzindo os piores cenários de perdas.

# 3 Referência

Mahmoud, O. H. (2014). Construction Actuarial Model for Aggregate Loss under Exponentiated Inverted Weibull Distribution. Applied Mathematical Sciences, 8(162), 8085-8097.