Análise de Variáveis de Perda - Segundo Exercício Escolar

4º Questão

Felipe Pereira[1], Gabriel D'assumpção de Carvalho[2], Georgio Kokkosis De Freitas[3]

March 31, 2025

Contents

1 4º Questão

Suponha uma variável aleatória $\Lambda > 0$ e defina a função taxa de risco condicional (dado $\Lambda = \lambda$) de X como $h_{X|\Lambda}(x|\lambda) = \lambda \cdot a(x)$, em que $a(x)$ representa uma 'fragilidade' que busca mensurar incertezas associadas à função taxa de risco e que são incorporadas com base na experiência do analista atuarial.

1. De forma geral, descreva a função de sobreviência condicional $S_{X|\Lambda}(x|\lambda)$ considerando a abordagem enunciada acima.
2. Ilustre exemplos para escolhas de estruturas de fragilidade nesse tipo de modelagem.
3. Utilizando-se de simulações, replique o 'EXAMPLE 21.17' descrito abaixo:

1.1 1º Resposta

Sabemos que a função de risco é dada por:

$$h(x) = \frac{f(x)}{S(x)} = \frac{-S'(x)}{S(x)} = -\frac{d}{dx}\log S(x)$$

Ao integrar $h(x)$, recuperamos $\log S(x)$, e aplicando a exponencial, obtemos a função de sobrevivência:

$$S(x) = e^{-\int_0^x h(t)dt}$$

Portanto, considerando a taxa de risco condicional dada no enunciado:

$$h_{X|\Lambda}(x|\lambda) = \lambda \cdot a(x)$$

Substituímos na equação acima:

$$S_{X|\Lambda}(x|\lambda) = \exp\left(-\int_0^x h_{X|\Lambda}(t|\lambda)dt\right) = \exp\left(-\lambda\int_0^x a(t)dt\right)$$

Definindo a integral da fragilidade como:

$$A(x) = \int_0^x a(t)dt$$

A função de sobrevivência condicional pode ser reescrita de forma mais compacta como:

$$S_{X|\Lambda}(x|\lambda) = \exp(-\lambda A(x))$$

Essa formulação evidencia que a função de sobrevivência condicional depende diretamente da fragilidade acumulada até x, ponderada pelo parâmetro λ, que governa a incerteza na taxa de risco.

Abaixo, ilustramos alguns exemplos para a escolha da fragilidade.

1.2 2º Resposta

1.2.1 Estrutura com Risco Constante

Supondo que a escolha de $a(x) = c$, onde

$$c > 0$$

é uma constante qualquer, temos:

$$A(x) = \int_0^x c\,dx = c \cdot x$$

Portanto, a função de sobrevivência será dada por:

$$S_{X|\Lambda}(x|\lambda) = \exp(-\lambda \cdot c \cdot x)$$

Como podemos observar, a variável X segue uma distribuição exponencial com taxa $\lambda \cdot c$. Assim, a fragilidade λ atua apenas como um fator de escala sobre uma taxa de risco constante.

1.2.2 Estrutura com Risco Weibull

A modelagem com a distribuição Weibull é amplamente utilizada na análise de sobrevivência devido à sua flexibilidade, permitindo modelar riscos que podem diminuir, aumentar ou permanecer constantes ao longo do tempo, dependendo da escolha dos seus parâmetros. A função de risco da distribuição Weibull é dada por:

$$h(x) = \frac{\beta}{\eta} \cdot \left(\frac{x}{\eta}\right)^{\beta-1}$$

Assim, temos as seguintes interpretações:

- $\beta > 1 \Rightarrow h(x)$ aumenta ao longo de x, sendo útil para modelar situações de desgaste ou envelhecimento, onde o risco tende a crescer com o tempo.
- $\beta < 1 \Rightarrow h(x)$ diminui ao longo de x, sendo aplicável em cenários como mortalidade infantil ou falhas de foguetes, onde o risco inicial é elevado, mas a sobrevivência melhora após o tempo inicial.
- $\beta = 1 \Rightarrow h(x) = \frac{1}{\eta}$, implicando um risco constante, adequado para modelagem em processos como teoria de filas.

Agora, podemos modelar a fragilidade com a distribuição Weibull:

$$a(x) = \frac{\beta}{\eta} \cdot \left(\frac{x}{\eta}\right)^{\beta-1}$$

A integral acumulada da fragilidade resulta em:

$$A(x) = \int_0^x a(t)dt = \int_0^x \frac{\beta}{\eta} \cdot \left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1} dt$$

Reescrevendo:

$$A(x) = \frac{\beta}{\eta^\beta} \int_0^x t^{\beta-1} dt$$

Resolvendo a integral:

$$A(x) = \frac{\beta}{\eta^\beta}\left[\frac{t^\beta}{\beta}\right]_0^x = \left(\frac{x}{\eta}\right)^\beta$$

Assim, a função de sobrevivência condicional será:

$$S_{X|\Lambda}(x|\lambda) = \exp\left(-\lambda\left(\frac{x}{\eta}\right)^\beta\right)$$

Sabemos que $\exp(-\infty)$ tende a zero, indicando que a probabilidade de sobrevivência diminui à medida que o risco acumulado da fragilidade aumenta.

1.3 Simulação

A seguir vai ser feito uma simulação para o seguinte exemplo

EXAMPLE 21.17

An insurance company offers the following product to individuals age 40. A single premium of 10,000 is paid (an administrative fee has already been deducted). In return, there are two possible benefits. The 10,000 is invested in a mutual fund. If the policyholder dies during the next four years, the fund value is paid to the beneficiary. If not, the fund value is returned to the policyholder at the end of four years. The policyholder may purchase a guarantee. If the fund has earned less than 5% per year at the time of a payment, the payment will be based on a 5% per year accumulation rather than the actual fund value. Determine the 90th percentile of the cost of providing this guarantee. Assume that the force of mortality is constant at 0.02 and that 50,000 policies will be sold. Also assume that the annual fund increase has the lognormal distribution with $\mu = 0.06$ and $\sigma = 0.02$.

For this exposition it is assumed that all values are rounded to the nearest dollar. Additional digits on the u-values were used in the calculations. With the constant force assumption, the probability of death in any year is $q = 1 - e^{-0.02} = 0.0198$. A normal distribution can be used to approximate the number of deaths. A simulation proceeds as follows. For year one, the number of deaths is normal with mean 990 and variance 970.4. With $u = 0.8285$, the simulated number of deaths is 1,020. With $u = 0.1992$, the simulated investment increase is 1.0441 for a fund value of 10,441. The guarantee value is 10,500 and 59 is paid to 1,020 people. Assuming that the premium for the guarantee is invested in the same fund, the present value is $1{,}020(59)/1.0441 = 57{,}640$. The second year starts with 48,980 alive. There are 960 deaths and the fund earns 1.0859 to increase to 11,338. The guaranteed value is 11,025, and so nothing is paid. In year three, there are again 960 deaths and the fund earns 1.0784 to increase to 12,226, greater than the guarantee of 11,576. Finally, in year four, all 47,060 are paid. The fund is at 13,192, which exceeds the guarantee of 12,155. So the guarantee was only paid in the first year and the simulated cost is 57,640.

Fifty thousand simulations were conducted. In 30,205 of them, there were no guarantee payments at all. The average payment was 1,356,277 (27.13 per policy sold) and the 90th percentile was 3,278,795 (65.58 per policy sold). □

Figure 1: exemplo_21_17

```r
set.seed(42)

# Paremetros da simulação
initial_policies = 50000
premium = 10000
years = 4
force_mortality = 0.02
rate = 0.05
lognorm_mu = 0.06
lognorm_sigma = 0.02
q = 1 - exp(-force_mortality)

# Quantidade de simulação
n_sim = 50000

# Vetor que vai conter os valores do custo total
total_cost = numeric(n_sim)

for (sim in 1:n_sim){
  num_surv = initial_policies # Quantidade de segurados inicial
  value_policies = premium # Valor do prêmio inicial
  cumulative_cust_sim = 0 # Valor acumulado do custo

  for (y in 1:years){
    guaranteed_value = premium * (1 + rate)^y # Valor de garantia de 5%
    # Retorno do fundo (lognormal)
    found_rate = rlnorm(1, meanlog = lognorm_mu, sdlog = lognorm_sigma)
    found_value = value_policies * found_rate

   # Simulação de morte
    if (num_surv > 0){
      num_deaths = rbinom(1, size = num_surv, prob = q)
    }else{
      num_deaths = 0
    }
    # Correção para não ter mais mortos do que pessoas vivas
    num_deaths = min(num_deaths, num_surv)

    # Calculando o custo por uma única morte
    cost_death = max(0, guaranteed_value - found_value)

    # Calculando o custo por todas as mortes
    cost_deaths = num_deaths * cost_death

    # Calculando o custo acumulado de cada simulação
    cumulative_cust_sim = cumulative_cust_sim + cost_deaths

    # Atualização de pessoas vivas
    num_surv =  num_surv - num_deaths

    # Novo valor da apolice
    value_policies  = found_value
```

```
    if (y == years){
      if (num_surv > 0){
        cost_survivor = max(0, guaranteed_value - found_value)
        cost_survivors = cost_survivor * num_surv
        cumulative_cust_sim = cost_survivors + cumulative_cust_sim
      }
    }

  }
  total_cost[sim] = cumulative_cust_sim
}
```

1.3.1 Resultado da Simulação

```
avg_total_cost = mean(total_cost)
avg_cost_policy = avg_total_cost / initial_policies

p90_total_cost = quantile(total_cost, probs=0.9)
p90_cost_policy = p90_total_cost/initial_policies

cat("--- Resultado das ",n_sim," Simulação ---\n")
```

```
## --- Resultado das  50000  Simulação ---
```

```
cat("Probabilidade de Morte (q):", format(q, digits=4), "\n")
```

```
## Probabilidade de Morte (q): 0.0198
```

```
cat("Custo Agregado Médio:", format(avg_total_cost, big.mark=",", scientific=FALSE, digits=2), "\n")
```

```
## Custo Agregado Médio: 1,601,689
```

```
cat("Custo Agregado Médio por Apólice:", format(avg_cost_policy, digits=4), "\n")
```

```
## Custo Agregado Médio por Apólice: 32.03
```

```
cat("Quantil 90th do Custo Agregado:", format(p90_total_cost, big.mark=",", scientific=FALSE, digits=2)
```

```
## Quantil 90th do Custo Agregado: 3,980,430
```

```
cat("Quantil 90th do Custo Agregado por Apólice:", format(p90_cost_policy, digits=4), "\n")
```

```
## Quantil 90th do Custo Agregado por Apólice: 79.61
```

Os resultados de 50.000 simulações, utilizando uma probabilidade anual de morte (q) de 0,0198, indicam que o custo médio total da garantia foi de $1,601,689,00. Isso resulta em um custo médio por apólice inicial de $32,03, um valor relativamente baixo.

Analisando o Value-at-Risk (VaR) a 90%, observa-se um custo total de $3,980,430,00. Este valor representa o limite de custo que não é excedido em 90% dos cenários simulados.

Para aprofundar a análise do risco de cauda (tail risk), calcula-se o Tail Value-at-Risk (TVaR). Esta métrica corresponde ao custo médio esperado nos 10% piores cenários simulados. A comparação do TVaR com o valor inicial do fundo, que é de $500 milhões (50.000 apólices * $10.000), permite dimensionar o impacto potencial desses cenários mais extremos sobre o capital inicial.

```r
tvar_90 = mean(total_cost[total_cost >= p90_total_cost])

cat("TVaR 90% do Custo Agregado:", format(tvar_90, big.mark=",", scientific=FALSE, digits=2), "\n")
```

```
## TVaR 90% do Custo Agregado: 14,904,360
```

Podemos ver que mesmo disconsiderando a rentabilidade do valor inicial de $ 500 milhões de dólares, quando reduzimos desse valor a média dos 5000 maiores custo, o fundo ainda vai ter $ 14,904,360.00 dólares.

A análise do Tail Value-at-Risk (TVaR) a 90%, que representa o custo médio esperado nos 10% piores cenários (as 5.000 simulações de maior custo), revela um valor de $14,620,433.00.

É importante notar que, mesmo desconsiderando qualquer rentabilidade sobre o capital inicial de $500 milhões, se subtrairmos este custo médio extremo (TVaR) do valor inicial, o fundo ainda reteria um montante substancial de $485,095,640.00.

Este resultado demonstra a resiliência do fundo, indicando que, mesmo nos cenários mais adversos simulados, o impacto no capital inicial é limitado.

2 Referência

BERNARDINO, W. Aula 2: Variáveis aleatórias em atuária. [Material de ensino]. Disponível em: Ambiente Virtual de Aprendizagem da . Acesso em: 29 mar. 2025.

DISTRIBUIÇÃO de Weibull. In: WIKIPÉDIA, a enciclopédia livre. Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/DistribuiÃğÃčo_de_Weibull. Acesso em: 29 mar. 2025.