Análise de Variáveis de Perda - Segundo Exercício Escolar

4º Questão

Felipe Pereira[1], Gabriel D'assumpção de Carvalho[2], Georgio Kokkosis De Freitas[3]

March 29, 2025

Contents

1 4º Questão

Suponha uma variável aleatória $\Lambda > 0$ e defina a função taxa de risco condicional (dado $\Lambda = \lambda$) de X como $h_{X|\Lambda}(x|\lambda) = \lambda \cdot a(x)$, em que $a(x)$ representa uma 'fragilidade' que busca mensurar incertezas associadas à função taxa de risco e que são incorporadas com base na experiência do analista atuarial.

1. De forma geral, descreva a função de sobreviência condicional $S_{X|\Lambda}(x|\lambda)$ considerando a abordagem enunciada acima.
2. Ilustre exemplos para escolhas de estruturas de fragilidade nesse tipo de modelagem.
3. Utilizando-se de simulações, replique o 'EXAMPLE 21.17' descrito abaixo:

1.1 1º Resposta

Sabemos que a função de risco é dada por:

$$h(x) = \frac{f(x)}{S(x)} = \frac{-S'(x)}{S(x)} = -\frac{d}{dx} \log S(x)$$

Ao integrar $h(x)$, recuperamos $\log S(x)$, e aplicando a exponencial, obtemos a função de sobrevivência:

$$S(x) = e^{-\int_0^x h(t)dt}$$

Portanto, considerando a taxa de risco condicional dada no enunciado:

$$h_{X|\Lambda}(x|\lambda) = \lambda \cdot a(x)$$

Substituímos na equação acima:

$$S_{X|\Lambda}(x|\lambda) = \exp\left(-\int_0^x h_{X|\Lambda}(t|\lambda)dt\right) = \exp\left(-\lambda \int_0^x a(t)dt\right)$$

Definindo a integral da fragilidade como:

$$A(x) = \int_0^x a(t)dt$$

A função de sobrevivência condicional pode ser reescrita de forma mais compacta como:

$$S_{X|\Lambda}(x|\lambda) = \exp(-\lambda A(x))$$

Essa formulação evidencia que a função de sobrevivência condicional depende diretamente da fragilidade acumulada até x, ponderada pelo parâmetro λ, que governa a incerteza na taxa de risco.

Abaixo, ilustramos alguns exemplos para a escolha da fragilidade.

1.2 2º Reposta

1.2.1 Estrutura com Risco Constante

Supondo que a escolha de $a(x) = c$, onde
$$c > 0$$
é uma constante qualquer, temos:

$$A(x) = \int_0^x c\,dx = c \cdot x$$

Portanto, a função de sobrevivência será dada por:

$$S_{X|\Lambda}(x|\lambda) = \exp(-\lambda \cdot c \cdot x)$$

Como podemos observar, a variável X segue uma distribuição exponencial com taxa $\lambda \cdot c$. Assim, a fragilidade λ atua apenas como um fator de escala sobre uma taxa de risco constante.

1.2.2 Estrutura com Risco Weibull

A modelagem com a distribuição Weibull é amplamente utilizada na análise de sobrevivência devido à sua flexibilidade, permitindo modelar riscos que podem diminuir, aumentar ou permanecer constantes ao longo do tempo, dependendo da escolha dos seus parâmetros. A função de risco da distribuição Weibull é dada por:

$$h(x) = \frac{\beta}{\eta} \cdot \left(\frac{x}{\eta}\right)^{\beta-1}$$

Assim, temos as seguintes interpretações:

- $\beta > 1 \Rightarrow h(x)$ aumenta ao longo de x, sendo útil para modelar situações de desgaste ou envelhecimento, onde o risco tende a crescer com o tempo.
- $\beta < 1 \Rightarrow h(x)$ diminui ao longo de x, sendo aplicável em cenários como mortalidade infantil ou falhas de foguetes, onde o risco inicial é elevado, mas a sobrevivência melhora após o tempo inicial.
- $\beta = 1 \Rightarrow h(x) = \frac{1}{\eta}$, implicando um risco constante, adequado para modelagem em processos como teoria de filas.

Agora, podemos modelar a fragilidade com a distribuição Weibull:

$$a(x) = \frac{\beta}{\eta} \cdot \left(\frac{x}{\eta}\right)^{\beta-1}$$

A integral acumulada da fragilidade resulta em:

$$A(x) = \int_0^x a(t)dt = \int_0^x \frac{\beta}{\eta} \cdot \left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1} dt$$

Reescrevendo:

$$A(x) = \frac{\beta}{\eta^\beta} \int_0^x t^{\beta-1} dt$$

Resolvendo a integral:

$$A(x) = \frac{\beta}{\eta^\beta} \left[\frac{t^\beta}{\beta} \right]_0^x = \left(\frac{x}{\eta} \right)^\beta$$

Assim, a função de sobrevivência condicional será:

$$S_{X|\Lambda}(x|\lambda) = \exp\left(-\lambda \left(\frac{x}{\eta} \right)^\beta \right)$$

Sabemos que $\exp(-\infty)$ tende a zero, indicando que a probabilidade de sobrevivência diminui à medida que o risco acumulado da fragilidade aumenta.

1.3 Simulação

2 Referência

BERNARDINO, W. Aula 2: Variáveis aleatórias em atuária. [Material de ensino]. Disponível em: Ambiente Virtual de Aprendizagem da . Acesso em: 29 mar. 2025.

DISTRIBUIÇÃO de Weibull. In: WIKIPÉDIA, a enciclopédia livre. Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/DistribuiÃğÃčo_de_Weibull. Acesso em: 29 mar. 2025.