Paper Abstract: "An Introduction To Risk Measures for Actuarial Applications"

Gabriel D'assumpção de Carvalho

2025-02-28

Contents

1 Objetivo

Este documento apresenta um resumo do artigo **An Introduction To Risk Measures for Actuarial Applications**, abordando os seguintes tópicos do artigo:

1. **Introdução**
2. **Medidas de Risco para Requisitos de Capital**

   2.1 **Distribuições de Perdas Exemplares**

   2.2 **Value at Risk (VaR) - A Medida de Risco Quantílica**

   2.3 **Conditional Tail Expectation (CTE)**

2 Introdução

O artigo introduz o conceito de variáveis modeladas pela ciência atuarial, que frequentemente envolvem a distribuição de perdas associadas a riscos financeiros e de seguros. Exemplos incluem a distribuição de Poisson para modelar perdas decorrentes de sinistros em apólices de seguros e a distribuição de lucros e perdas no setor bancário.

As primeiras medidas de risco na análise atuarial foram desenvolvidas para precificação de prêmios. O risco de uma variável aleatória X é mensurado por meio de um funcional de risco H, definido como:

$$H : X \Rightarrow \mathbb{R} \tag{1}$$

Com base nesse conceito, o artigo apresenta métodos de precificação de prêmios, incluindo:

2.1 Princípio do Valor Esperado do Prêmio

O prêmio é determinado pelo valor esperado da perda, acrescido de uma margem de segurança θ, que representa um fator de ajuste para risco:

$$H(X) = (1 + \theta)\mathbb{E}[X], \quad \forall \ \theta \geq 0 \tag{2}$$

2.2 Princípio do Desvio Padrão do Prêmio

Aqui, o prêmio incorpora o desvio padrão da perda como um fator adicional de risco. Isso permite que a precificação leve em conta a dispersão das perdas:

$$H(X) = \mathbb{E}[X] + \theta\sqrt{\mathbb{V}[X]}, \quad \forall \ \theta \geq 0 \tag{3}$$

2.3 Princípio da Variância do Prêmio

Nesta abordagem, a variância da perda é utilizada como um fator de ajuste para o risco, refletindo o impacto da incerteza sobre o valor esperado da perda:

$$H(X) = \mathbb{E}[X] + \theta\mathbb{V}[X], \quad \forall \ \theta \geq 0 \tag{4}$$

A princípio, a modelagem do prêmio gera um valor superior à perda esperada, adicionando-se um carregamento para cobrir os custos operacionais da empresa e, na maioria das vezes, gerar lucro.

3 Medidas de Risco para Requisitos de Capital

As medidas de risco para capital têm como objetivo determinar quanto capital uma seguradora deve manter para garantir que as perdas futuras sejam cobertas com alta probabilidade, assegurando a solvência da empresa.

3.1 Distribuição de Perda

A distribuição de perda é utilizada para mensurar o risco de uma variável observada de interesse, representando a perda associada a determinado evento. Por exemplo, pode-se analisar a distribuição de perdas em casos de óbito por câncer, colisões de veículos ou sinistros de incêndios residenciais, entre outros.

A seguir, apresentamos dois exemplos dessa aplicação:

3.1.1 Perda Normalmente Distribuida

```r
dNorm = dnorm(c(0:1000), mean=33, sd=109)
```

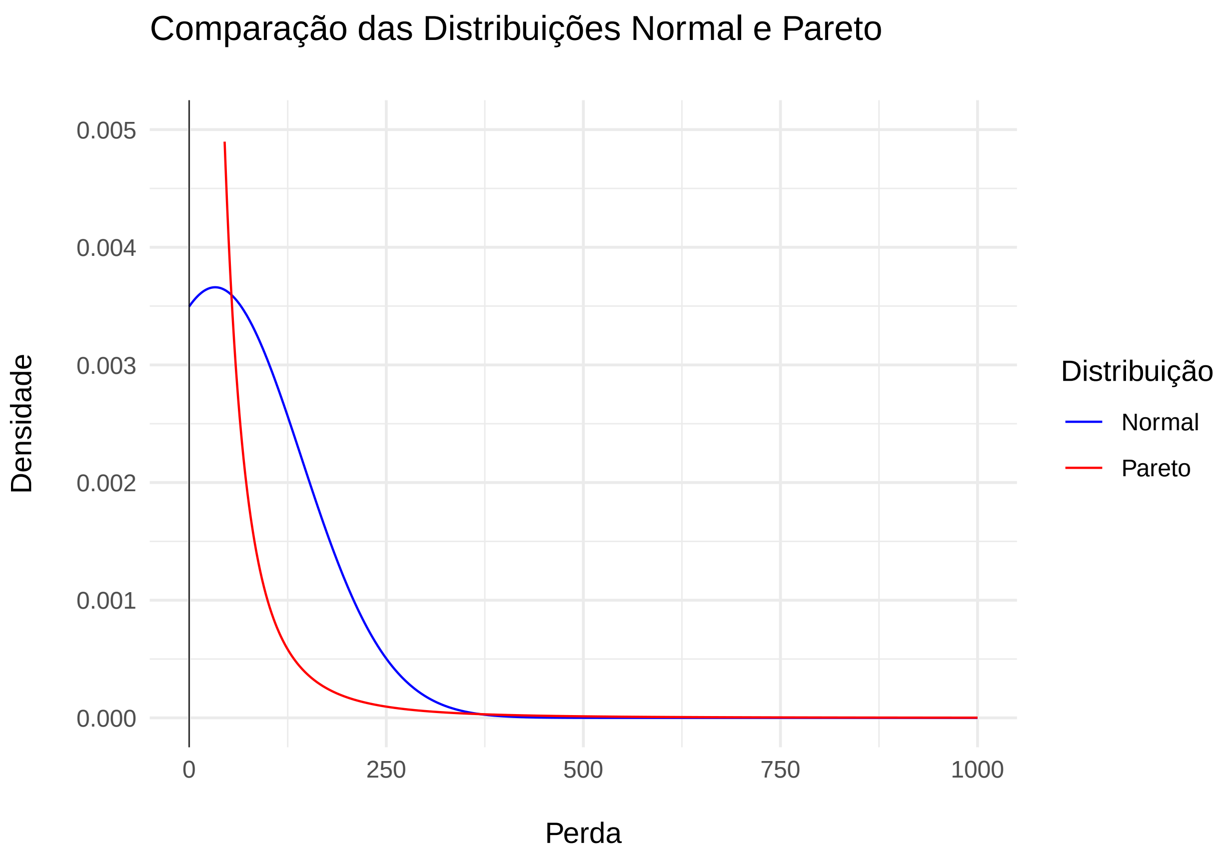
3.1.2 Perda com Distribuição de Pareto

```r
# Biblioteca da Distribuição de Pareto
#install.packages("actuar")
suppressPackageStartupMessages(library(actuar))

dPareto = dpareto(c(1:1000), 39.660, shape = 2.2018)
```

```r
library(ggplot2)

ggplot() +
  geom_line(aes(x = 0:1000, y = dNorm, color = "Normal"), size = 0.4) +
  geom_line(aes(x = 1:1000, y = dPareto, color = "Pareto"), size = 0.4) +
  geom_vline(xintercept = 0, color = "black", size = 0.2, linetype = "solid") +
  labs(title = "Comparação das Distribuições Normal e Pareto\n",
       x = "\nPerda",
       y = "Densidade\n",
       color = "Distribuição") +
  scale_color_manual(values = c("Normal" = "blue", "Pareto" = "red")) +
  scale_y_continuous(limits = c(0, NA)) +
  ylim(0, 0.005) +
  theme_minimal()
```

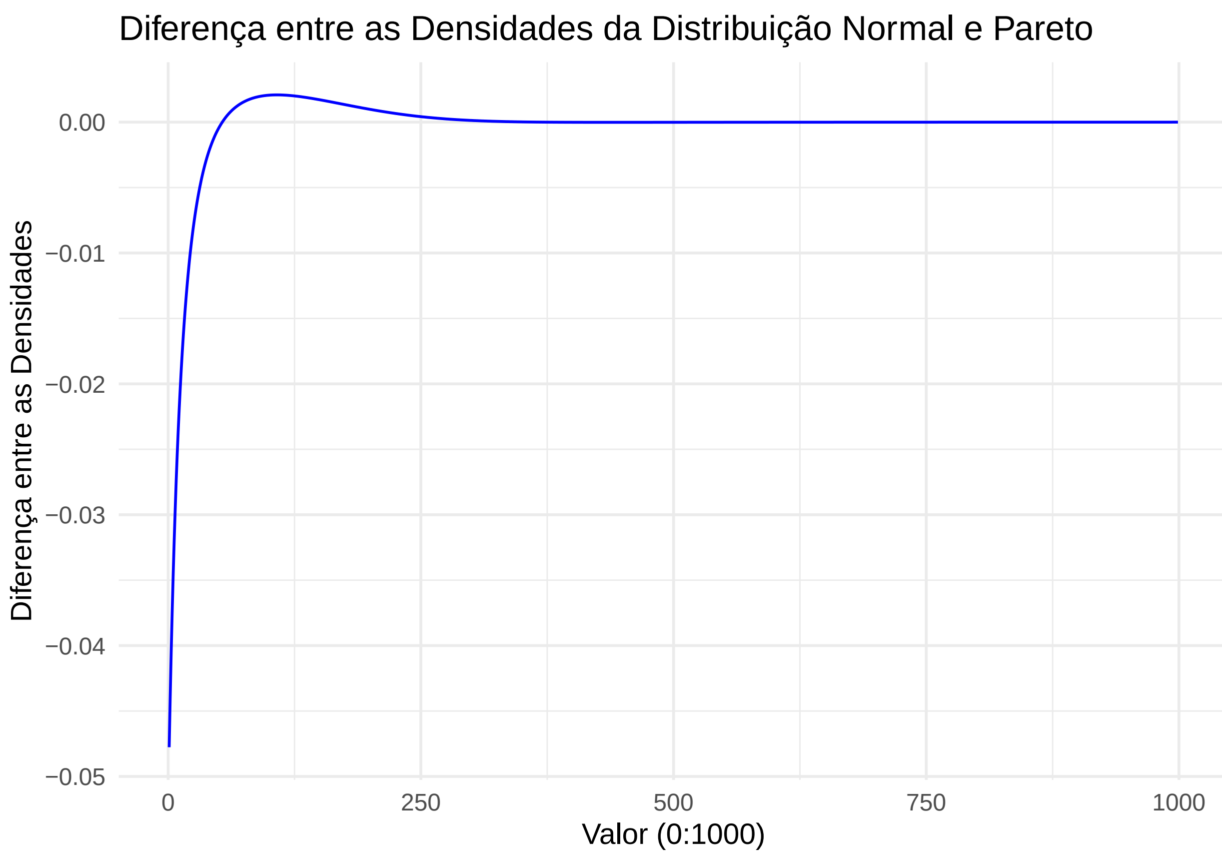


Pode-se observar no gráfico acima que a distribuição de Pareto apresenta uma alta densidade de probabilidade para valores próximos de 0. No entanto, à medida que nos afastamos da origem, a densidade cai abruptamente, ficando inferior à da distribuição normal a partir de perdas em torno de 50. Ambas as distribuições possuem uma cauda leve, o que indica uma baixa probabilidade para perdas extremamente altas.

```r
# Calcular a diferença entre as densidades
diff_density <- dNorm - dPareto
```

```
## Warning in dNorm - dPareto: longer object length is not a multiple of shorter
## object length
```

```r
diff_density = diff_density[0:999]
# Criar o gráfico de linha com ggplot
ggplot(data = data.frame(x = c(1:999), y = diff_density), aes(x = x, y = y)) +
  geom_line(color = "blue") +
  labs(title = "Diferença entre as Densidades da Distribuição Normal e Pareto",
       x = "Valor (0:1000)",
       y = "Diferença entre as Densidades") +
  theme_minimal()
```



Entre as perdas de 250 a 1000, a diferença de densidade entre as distribuições é quase nula, sugerindo que ambas exibem um comportamento similar para perdas elevadas. Contudo, a distribuição de Pareto tem uma densidade maior para perdas pequenas, enquanto a distribuição normal apresenta uma probabilidade mais alta de ocorrência para perdas na faixa entre 50 e 250.

3.2 Value at Risk (VAR) - a Medida de Risco Quantil

O **VaR** é uma medida de risco baseada em quantis, normalmente expressa com um nível de confiança (α) entre 95% e 99%. Essa métrica indica o valor máximo de perda que um portfólio ou ativo pode sofrer em um determinado período, com uma probabilidade de não ser excedido dentro do intervalo de confiança escolhido.

Por exemplo, um **VaR a 95%** representa o valor da perda que **não será ultrapassado em 95% dos casos**. Ou seja, em 95% das vezes, as perdas serão menores ou iguais ao valor calculado como Q_{95}.

Entretanto, ao calcular o VaR, pode ocorrer que a variável analisada não tenha exatamente um valor para o Q_α, mas apenas uma massa de probabilidade ao seu redor. Para lidar com isso, vamos definir para o caso discreto:

$$H(X) = Q_\alpha = \min \{Q : P[X \leq Q] \geq \alpha\} \tag{5}$$

A função acima representa que, para uma distribuição discreta, o Q_α será dado pelo menor valor de perda X que tenha probabilidade acumulada maior ou igual ao nível de confiança α. Por exemplo, dada a seguinte variável aleatória:

$$L = \begin{cases} 100 & \text{com probabilidade } 0.005 \\ 50 & \text{com probabilidade } 0.045 \\ 10 & \text{com probabilidade } 0.10 \\ 0 & \text{com probabilidade } 0.85 \end{cases}$$

Temos a seguinte tabela de probabilidade acumulada:

x	$P[L \leq x]$
100	1.00
50	0.995
10	0.95
0	0.85

Se escolhermos analisar um VaR com 99% de confiança, não conseguimos um valor exato para o Q_{99}. Nesse caso, devemos pegar o menor valor de x que tenha probabilidade maior ou igual a 99%, o que, neste exemplo, seria $x = 5$.

Para os casos contínuos, o VaR é dado por:

$$P[X \leq Q_\alpha] = \alpha \tag{6}$$

3.2.1 VaR da Distribuição Normal

Considerando a variável aleatória descrita na seção [#Perda_Normalmente_Distribuída], com média de 33 e desvio padrão de 109, o **VaR com 99% de confiança** é dado pela equação:

$$P[X \leq Q_{99}] = 0.99 \tag{7}$$

```
q99Norm = qnorm(0.99, mean=33, sd=109)
print(q99Norm)
```

```
## [1] 286.5719
```

A partir dessa equação, podemos calcular que o **VaR a 99%** é igual a **286,57**. Isso pode ser interpretado de duas maneiras: a primeira, informando que as perdas não ultrapassarão **286,57 unidades monetárias** em 99% das ocorrências, e a segunda, preparando-nos para o cenário em que, em 1% das ocorrências, a variável de interesse pode ultrapassar os **286,57**.

3.2.2 VaR da Distribuição de Pareto

Para uma distribuição de Pareto com média de 33 e desvio padrão de 109, o **VaR a 99%** é dado por:

```
q99Pareto = qpareto(0.99, 39.660, shape = 2.2018)
print(q99Pareto)
```

```
## [1] 281.4845
```

Uma característica importante de uma variável que segue uma distribuição de Pareto é que ela possui **valores mais baixos para observações na extremidade inferior**, o que é refletido no gráfico de densidade com uma **cauda mais leve**. Com isso, podemos observar que, para essa distribuição, o **VaR a 99%** indica que a perda **não ultrapassará as 281,48 unidades monetárias**.

3.3 Conditional Tail Expectation (CTE)

O **CTE** (Conditional Tail Expectation), também conhecido como **Tail-VaR**, é uma medida complementar ao **VaR**. Ele analisa a **pior das hipóteses** em relação às perdas, concentrando-se no valor da **cauda** da distribuição, com uma probabilidade de $1 - \alpha$. O CTE é dado pela fórmula:

$$CTE = \mathbb{E}[X|X > Q_\alpha] \tag{8}$$

onde $\mathbb{E}[X|X > Q_\alpha]$ é a **expectativa condicional de X** dado que **X** é maior que Q_α, ou seja, a média das perdas acima do quantil Q_α.

Contudo, em algumas distribuições, a variável de perda X pode ter múltiplos valores com probabilidades iguais, fazendo com que haja mais de um valor para Q_α (por exemplo, para Q_{95}). Isso gera uma situação diferente do VaR, onde precisamos considerar a maior perda X associada a Q_α. Assim, definimos:

$$\beta' = \max\{\beta : Q_\alpha = Q_\beta\} \tag{9}$$

A partir disso, o CTE é uma **combinação ponderada** de dois termos:

1. $(\beta' - \alpha)Q_\beta$: Este termo leva em consideração a probabilidade de repetição dos quantis devido à massa de probabilidade ao redor de Q_α, ponderando a maior perda associada ao quantil Q_β.
2. $(1 - \beta')\mathbb{E}[X|X > Q_\alpha]$: Este termo representa as perdas além da massa de probabilidade e leva em conta a expectativa condicional das perdas maiores que Q_α.

Portanto, a fórmula final do CTE é dada por:

$$CTE = \frac{(\beta' - \alpha)Q_\beta + (1 - \beta')\mathbb{E}[X|X > Q_\alpha]}{1 - \alpha} \tag{10}$$

Essa fórmula ajustada assegura que o CTE capture corretamente a cauda da distribuição, levando em consideração tanto os quantis repetidos devido à massa de probabilidade quanto as perdas nas extremidades da distribuição.

Com isso, podemos ver o exemplo abaixo:

$$X = \begin{cases} 0 & \text{com probabilidade } 0.9 \\ 100 & \text{com probabilidade } 0.06 \\ 1000 & \text{com probabilidade } 0.04 \end{cases}$$

O cálculo do $CTE_{0.90}$ será feito como uma **soma ponderada** dos valores das perdas acima do quantil $Q_{90} = 0$. Ou seja, vamos considerar as perdas que são superiores a 0 (ou seja, as perdas de 100 e 1000), ponderadas pelas suas respectivas probabilidades.

O $CTE_{0.90}$ é dado pela fórmula:

$$CTE_{0.90} = \frac{(0.06 \times 100) + (0.04 \times 1000)}{(0.04 + 0.06)} = 406$$

Portanto, o $CTE_{0.90}$ indica que, dado que a perda ultrapassou o quantil de 90%, a média das perdas será **406 unidades monetárias**.

3.3.1 CTE da Distribuição Normal

Abaixo, apresentamos o cálculo do $CTE_{0.95}$ para uma distribuição normal com média 33 e desvio padrão 109. O primeiro passo é calcular o **quantil de 95%** para a variável $X \sim N(33, 109)$. Em seguida, padronizamos esse quantil para a distribuição normal padrão $X \sim N(0, 1)$, para obter a densidade correspondente a esse quantil. Por fim, calculamos o **CTE**, que nos fornece a **expectativa condicional** para as perdas além do quantil.

```
mu <- 33
sd <- 109
qt <- 0.95

q95Norm <- qnorm(qt, mean = mu, sd = sd)

z95 <- (q95Norm - mu) / sd

phi_z95 <- dnorm(z95)

cte95 <- mu + (sd / (1 - qt)) * phi_z95

print(cte95)
```

```
## [1] 257.8357
```

No caso da variável $X \sim N(33, 109)$, o $CTE_{0.95}$ indica que as **5% piores perdas** terão, em média, uma perda de **257.84 unidades monetárias**.