Análise de Variáveis de Perda - Segundo Exercício Escolar

2º Questão

Felipe Pereira[1], Gabriel D'assumpção de Carvalho[2], Georgio Kokkosis De Freitas[3]

March 28, 2025

Contents

1 2º Questão

Realize um exercício simulado para uma política de stop-loss baseada no conceito de "stop-loss reinsurance" discutido na Seção 5 do trabalho proposto em Mahmoud (2014). Discuta os resultados da simulação em um estudo com foco nas medidas de risco VaR e TVaR associados à distribuição da perda agregada.

1.1 Hipóteses

Suponha que temos uma carteira com N pagamentos de benefícios, onde a ocorrência de sinistros segue uma distribuição binomial e o valor unitário do benefício x_i segue uma distribuição gamma.

$$N \sim Binomial(10^4, 0.3)$$

Portanto a média de N vai ser aproximadamente 0.3

$$x_i \sim Gamma(20, 10)$$

Sendo assima x_i vai ter uma média de 200.

Assim, a soma agregada das perdas, S, é definida como a soma das perdas individuais x_i, ponderadas pela respectiva ocorrência de sinistro:

$$S = \sum_{i=1}^{N} x_i$$

Dado que o modelo considera uma política de stop-loss, a resseguradora cobre as perdas acima de um limite D, de modo que a perda retida pela seguradora é dada por:

$$(S - D)_+ = \max(S - D, 0)$$

Ou, de forma mais explícita:

$$(S - D)_+ = \begin{cases} 0, & S < D \\ S - D, & S \geq D \end{cases}$$

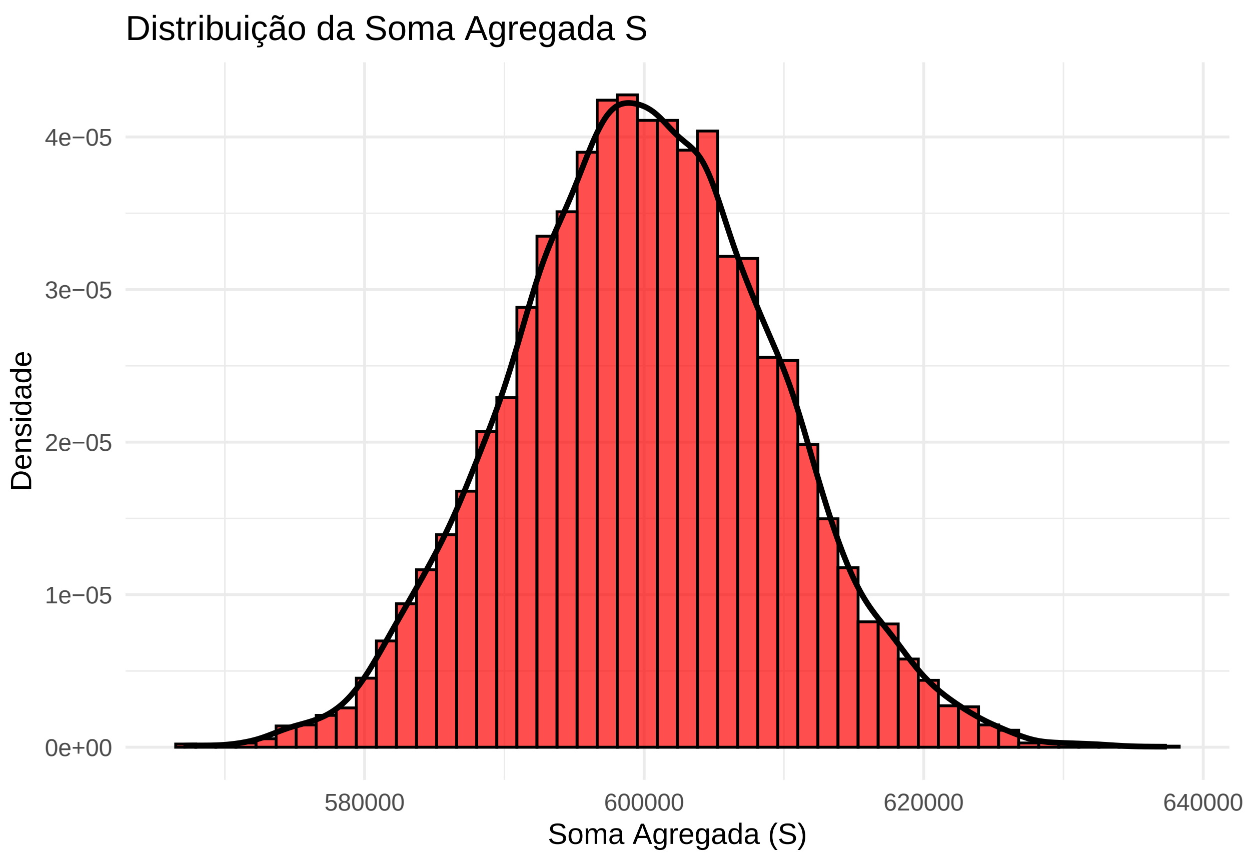
Essa função representa a parte das perdas que excede o limite D, caracterizando o impacto da política de stop-loss na retenção da seguradora.

1.2 Simulações

Nesta etapa, realizaremos uma simulação para analisar a perda agregada. Inicialmente, iremos desconsiderar o limite D, e, em seguida, consideraremos o limite D para observar o impacto de um contrato de resseguro na perda da seguradora.

1.2.1 Sem Stop-Loss Reinsurance

```r
# Carregar pacotes necessários
library(ggplot2)

# Número de simulações
n_simulation = 10^4

# Inicialização do vetor S
S = numeric(n_simulation)

# Definição de parâmetros
n_client = 10^4  # Quantidade de clientes
p_norm = 0.3  # Probabilidade de ocorrência de sinistro

# Parâmetros da distribuição Gamma
x_shape = 20
x_scale = 10

# Simulação vetorizada
N <- matrix(rbinom(n_simulation * n_client, 1, p_norm), nrow = n_simulation,
            ncol = n_client)
X <- matrix(rgamma(n_simulation * n_client, shape = x_shape, scale = x_scale),
            nrow = n_simulation, ncol = n_client)

# Cálculo vetorizado da soma agregada S
S <- rowSums(N * X)

# Converter para data frame para o ggplot2
df <- data.frame(S = S)

# Criar histograma com ggplot2
ggplot(df, aes(x = S)) +
  geom_histogram(aes(y = ..density..), bins = 50, fill = "red", color = "black",
                 alpha = 0.7) +
  geom_density(color = "black", linewidth = 1) +  # Adiciona a curva de densidade
  labs(title = "Distribuição da Soma Agregada S",
       x = "Soma Agregada (S)",
       y = "Densidade") +
  theme_minimal()
```



Pode-se observar no histograma acima a distribuição da soma agregada após 10^5 simulações. Nota-se que S aparenta seguir uma distribuição Normal ou t-Student, sendo a t-Student mais indicada para modelagem de perdas financeiras, pois apresenta uma maior probabilidade de ocorrência de valores extremos.

```r
summary(S)
```

```
##    Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
##  567038  593612  599899  599960  606277  637400
```

Ao analisar as estatísticas da soma agregada, observa-se que seu valor mínimo é de aproximadamente 565.716 unidades monetárias. Esse valor elevado deve-se ao fato de não considerarmos o valor de aquisição do seguro pelos clientes, mas apenas os pagamentos de benefícios para os segurados que sofreram sinistro. Além disso, a média e a mediana são praticamente idênticas, ambas próximas de 600.000, o que indica uma distribuição simétrica. Para confirmar essa simetria, podemos comparar a média adicionada e subtraída do desvio padrão com o primeiro e o terceiro quartil da distribuição.

```r
print(mean(S) - sd(S))
```

```
## [1] 590560.2
```

```r
print(mean(S) + sd(S))
```

```
## [1] 609358.8
```

Os resultados mostram que a diferença entre a média ajustada pelo desvio padrão e os quartis é de aproximadamente 3.000 unidades monetárias, o que representa apenas 0,512% de variação em relação à média.

Dado que a distribuição de S pode ser modelada por uma distribuição Normal, em conformidade com o Teorema Central do Limite, podemos estimar que a média da perda agregada seja de aproximadamente 600.074 unidades monetárias. Para uma análise mais aprofundada, podemos calcular as estatísticas de VaR e TVaR considerando níveis de confiança de 95% e 99%.

```
alpha_95 = 0.95
alpha_99 = 0.99

var_95 = qnorm(alpha_95, mean = mean(S), sd = sd(S))
var_99 = qnorm(alpha_99, mean = mean(S), sd = sd(S))
tvar_95 = mean(S[S >= var_95])
tvar_99 = mean(S[S >= var_99])
```

```
sprintf("VaR(S) 95%%: %.2f", var_95)
```

```
## [1] "VaR(S) 95%: 615419.96"
```

Podemos observar que, para a variável de perda agregada S, o **VaR de 95%** é de 605.742,90. Isso significa que a perda agregada S tem uma probabilidade de 5% de ultrapassar o valor de 605.742,90.

```
sprintf("VaR(S) 99%%: %.2f", var_99)
```

```
## [1] "VaR(S) 99%: 621825.53"
```

Ao analisar o **VaR de 99%**, podemos ver que a perda agregada S tem uma probabilidade de 1% de exceder o valor de 612.281,21.

```
sprintf("TVaR(S) 95%%: %.2f", tvar_95)
```

```
## [1] "TVaR(S) 95%: 619580.98"
```

Para uma melhor interpretação, podemos observar que o **TVaR de 95%** é de aproximadamente 609.962,13. Isso significa que a média das 5% maiores perdas agregadas será de 609.962,13. Portanto, no pior cenário, considerando as 5% maiores perdas, o valor esperado será de 609.962,13.

```
sprintf("TVaR(S) 99%%: %.2f", tvar_99)
```

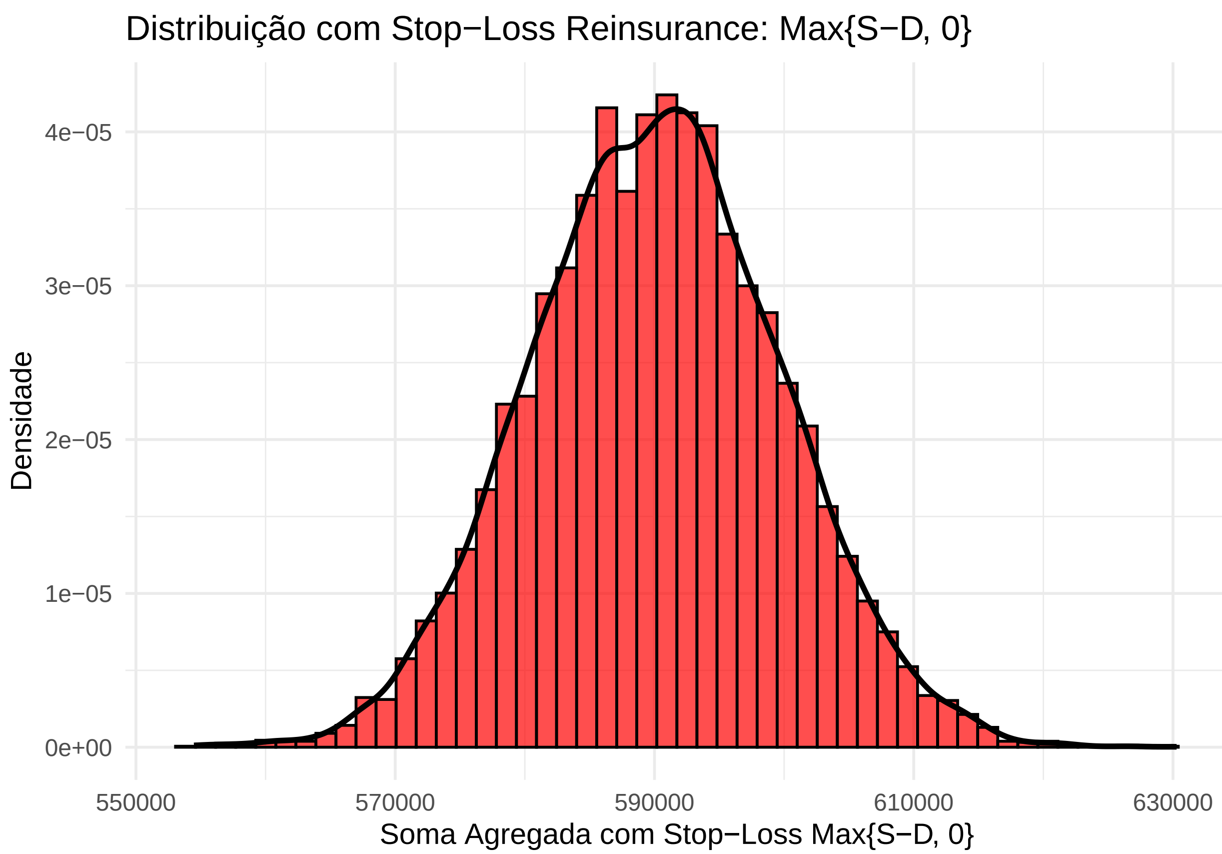
```
## [1] "TVaR(S) 99%: 625029.49"
```

Por fim, ao analisarmos o **TVaR de 99%**, podemos observar que, em média, 1% das maiores perdas serão de aproximadamente 615.323,93.

1.2.2 Com Stop-Loss Reinsurance

Nesta simulação, vamos considerar que uma seguradora tenha um contrato de resseguro que cobre até 123.456 unidades monetárias da perda agregada. Com isso, iremos observar a distribuição da perda agregada considerando o impacto desse limite de cobertura.

```r
# Definir o valor do limite de resseguro
D <- 10000

# Simulação vetorizada
N <- matrix(rbinom(n_simulation * n_client, 1, p_norm), nrow = n_simulation,
            ncol = n_client)
x <- matrix(rgamma(n_simulation * n_client, shape = x_shape, scale = x_scale),
            nrow = n_simulation, ncol = n_client)

# Cálculo da soma agregada S sem limite de resseguro
S <- rowSums(N * x)

# Aplicar o limite de resseguro usando ifelse() de forma vetorizada
S <- ifelse(S <= D, 0, S - D)

# Converter para data frame para o ggplot2
df <- data.frame(S = S)

# Criar histograma com ggplot2
ggplot(df, aes(x = S)) +
  geom_histogram(aes(y = ..density..), bins = 50, fill = "red", color = "black",
                 alpha = 0.7) +
  geom_density(color = "black", linewidth = 1) +  # Adiciona a curva de densidade
  labs(title = "Distribuição com Stop-Loss Reinsurance: Max{S-D, 0}",
       x = "Soma Agregada com Stop-Loss Max{S-D, 0}",
       y = "Densidade") +
  theme_minimal()
```


Distribuição com Stop−Loss Reinsurance: Max{S−D, 0}
Densidade
4e−05
3e−05
2e−05
1e−05
0e+00
550000
570000
590000
610000
630000
Soma Agregada com Stop−Loss Max{S−D, 0}

2 Referência

Mahmoud, O. H. (2014). Construction Actuarial Model for Aggregate Loss under Exponentiated Inverted Weibull Distribution. Applied Mathematical Sciences, 8(162), 8085-8097.