1_lista

June 28, 2025

Lista 1 - Processamento de Imagens

Discente:

- Gabriel D'assumpção de Carvalho

1) Defina o que significa um conjunto de funções formar uma base ortonormal no espaço $L^2([-\pi, \pi])$ e cite um exemplo clássico desse conjunto.

GABRIEL D' ASSUMPÇÃO DE CARVALHO.

1. LISTA PROCESSAMENTO DE IMAGEM

1) DEFINA O QUE SIGNIFICA UM CONJUNTO DE FUNÇÕES FORMAR UMA BASE ORTONORMAL NO ESPAÇO $L^2([-\pi,\pi])$ E CITE UM EXEMPLO DESSE CONJUNTO.

(RESPOSTA)

PRIMEIRAMENTE É PRECISO DEFINIR O QUE É UM VETOR ORTONORMAL. DADO 2 VETORES $\underset{\sim}{v}^{(1)}$ E $\underset{\sim}{v}^{(2)}$, ELES VÃO SER ORTONORMAIS SE ATENDEREM AS SEGUINTES PROPRIEDADES:

(I) NORMA UNITÁRIA

UM VETOR POSSUI NORMA UNITÁRIA SE A RAIZ DO SEU PRODUTO INTERNO É IGUAL A 1 SENDO DADO POR:

$$\|\underset{\sim}{v}^{(i)}\| = \sqrt{\langle \underset{\sim}{v}^{(i)}, \underset{\sim}{v}^{(i)} \rangle} = 1, \quad i = 1, 2.$$

(II) ORTOGONALIDADE

DOIS VETORES VÃO SER ORTOGONAIS ENTRE SI SE O SEU PRODUTO INTERNO É IGUAL A ZERO, INDICANDO QUE ELES FORMAM UM ANGULO RETO. ENTÃO

$$\langle \underset{\sim}{v}^{(1)}, \underset{\sim}{v}^{(2)} \rangle = \sum_{i=1}^{N} v_i^{(1)} \cdot v_i^{(2)} = 0.$$

PORTANTO, SE TEMOS UM CONJUNTO DE VETORES QUE POSSUEM NORMA UNITÁRIA E SÃO ORTOGONAIS ENTRE SI, PODEMOS DIZER QUE ESSE CONJUNTO É ORTOGONAL. SABENDO DISSO, UM CONJUNTO DE FUNÇÕES FORMA UMA BASE EM $L^2([-\pi,\pi])$, SE FOREM ORTONORMAL E LIMITADA, OU SEJA, A FUNÇÃO AO QUADRADO É SOMÁVEL. ENTÃO O CONJUNTO DE FUNÇÕES VAI SER EXPRESSO EM L^2 COMO:

"f É UMA FUNÇÃO DEFINIDA NO INTERVALO $[-\pi,\pi]$, COM VALORES COMPLEXOS $\mathbb{C}$, TAL QUE TODAS AS FUNÇÕES SÃO QUADRADO INTEGRÁVEIS

$$L^2([-\pi,\pi]) = \left\{ f:[-\pi,\pi] \to \mathbb{C} : \int_{-\pi}^{\pi} \langle f(x), f(x) \rangle \, dx < \infty \right\}.$$

CONJUNTO CLÁSSICO EM L^2 É O CONJUNTO DE FUNÇÕES

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\operatorname{sen}(nx)}{\sqrt{\pi}} \right\}_{n=1}^{\infty}$$

2) Explique o que representa o termo $F(0,0)$ no espectro bidimensional de uma imagem e por que ele é chamado de componente DC.

2) EXPLIQUE O QUE REPRESENTA O TERMO F(0,0) NO ESPECTRO bidimensional DE UMA IMAGEM E PORQUE ELE É CHAMADO DE COMPONENTE DIRECT CURRENT (DC)

(RESPOSTA)

A TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER VAI SER DADA COMO

$$X(k_1,k_2) = \frac{1}{N_1 N_2}\sum_{n_1=0}^{N_1-1}\sum_{n_2=0}^{N_2-1} x(n_1,n_2)\cdot e^{-i2\pi\left(\frac{n_1k_1}{N_1}+\frac{n_2k_2}{N_2}\right)}.$$

NOTA-SE QUE QUANDO $k_1 = k_2 = 0$, VAMOS TER

$$X(0,0) = \frac{1}{N_1N_2}\sum_{n_1=0}^{N_1-1}\sum_{n_2}^{N_2-1} x(n_1,n_2)\cdot e^{0} = \frac{1}{N_1N_2}\sum_{n_1=0}^{N_1-1}\sum_{n_2=0}^{N_2-1} x(n_1,n_2).$$

PORTANTO, A REPRESENTAÇÃO DO SINAL NO ESPAÇO DAS FREQUÊNCIAS NO DOMÍNIO (0,0) VAI SER A MÉDIA DO SINAL. POR CONTA DISSO ELE É CHAMADO DE DIRECT CURRENT

... ESPECTROS DE FOURIER bidimensionais E O QUE

3) Para que serve aplicar o fftshift em espectros de Fourier bidimensionais e o que muda na visualização prática?

3) PARA QUE SERVE APLICAR O FFTSHIFT EM ESPECTROS DE FOURIER bidimensionais E O QUE MUDA NA VISUALIZAÇÃO PRÁTICA?

(RESPOSTA)

O FFTSHIFT SERVE PARA CENTRALIZAR O DC, POIS ELE É O ESPECTRO QUE POSSUI MAIS ENERGIA, FACILITANDO A VISUALIZAÇÃO DAS ALTAS E BAIXAS FREQUÊNCIAS.

4) Em uma série de Fourier real, por que sinais pares contêm apenas cossenos e sinais ímpares contêm apenas senos?

4) EM UMA SÉRIE DE FOURIER REAL, POR QUE SINAIS PARES CONTÉM APENAS COSSENOS E SINA
ÍMPARES CONTÉM APENAS SENOS?

<u>(RESPOSTA)</u>

NA SÉRIE DE FOURIER 1D NO DOMÍNIO $\mathbb{R}$, UM SINAL PODE SER EXPRESSO COMO

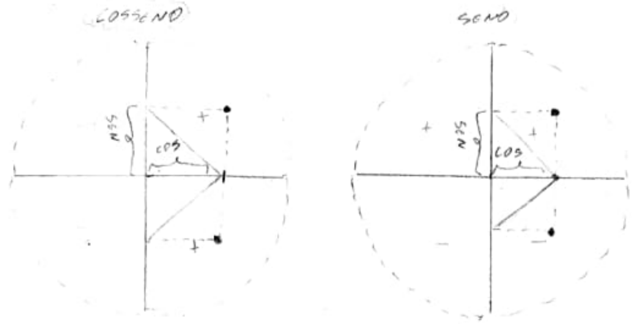
$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \{ a_k \cos(nx) + b_k \cos(nx) \}$$

SENDO OS COEFICIENTES

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x), \quad a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx = \langle f(x), \cos(nx) \rangle$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, \mathrm{sen}(nx)\, dx = \langle f(x), \mathrm{sen}(nx) \rangle$$

SABENDO DESSA RELAÇÃO, A AMPLITUDE DE CADA HARMÔNICO É DADO PELO PRODUTO INTERNO ENTRE O SINAL E AS FUNÇÕES SEN OU COS. ENTRETANTO, PODEMOS MOSTRAR ABAIXO QUE COS E SEN SÃO FUNÇÕES PARES E ÍMPARES RESPECTIVAMENTE.



PODEMOS VER NO CIRCULO TRIGONOMETRICO QUE O COS É O CATETO ADJACENTE, PORTANTO SE O ANGULO DO TRIÂNGULO FOR INVERTIDO O COS CONTINUA COM SEU SINAL POSITIVO, JÁ O CATETO OPOSTO, OU SEJA, O SENO TEM SEU SINAL ALTERADO, CARACTERIZANDO-OS COMO FUNÇÕES PARES E ÍMPARES.

SABENDO QUE UMA FUNÇÃO PAR $f(x) = f(-x)$ E UMA FUNÇÃO ÍMPAR $f(-x) = -f(x)$, TEMOS QUE

$$\begin{cases} \text{PAR} \times \text{PAR} = \text{PAR}, \\ \quad '' \times \text{ÍMPAR} = \text{ÍMPAR}, \\ \text{ÍMPAR} \times \; '' = \text{PAR} \end{cases}$$

(i) $f(x)$ PAR

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx, \quad P/\ a \in \mathbb{R}.$$

(ii) $f(x)$ ÍMPAR

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0.$$

ENTÃO, PODEMOS CONCLUIR QUE

(i) SE $f(x)$ PAR

$$\langle f(x), \text{sen}(nx)\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\overset{\text{PAR}}{f(x)}\,\overset{\text{ÍMPAR}}{\text{sen}(nx)}}_{\text{ÍMPAR}}\,dx = 0; \quad \langle f(x), \cos(nx)\rangle = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \underbrace{\overset{\text{PAR}}{f(x)}\,\overset{\text{PAR}}{\cos(nx)}}_{\text{PAR}}\,dx.$$

(ii) SE $f(x)$ ÍMPAR

$$\langle f(x), \text{sen}(nx)\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\overset{\text{ÍMPAR}}{f(x)}\,\overset{\text{ÍMPAR}}{\text{sen}(nx)}}_{\text{PAR}}\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\,\text{sen}(nx)\,dx; \quad \langle f(x), \cos(nx)\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = 0$$

COM ISSO, TEMOS QUE SE $f(x)$ É PAR A SUA REPRESENTAÇÃO SÓ VAI CONTER COSSENOS E SE FOR ÍMPAR VAI CONTER APENAS SENOS.

5) O que significa dizer que a Transformada de Fourier de um sinal escalonado $f(ax, by)$ resulta em $F(w_1/a, w_2/b)/|ab|$? Interprete fisicamente esse resultado.

5) O que significa dizer que a transformada de Fourier de um sinal escalonado $f(ax, by)$ resulta em $F(\frac{w_1}{a}, \frac{w_2}{b})/|ab|$? Interprete fisicamente esse resultado.

(RESPOSTA)

Dado o sinal escalonado temos que

$$F\{f(ax, by)\} = \iint_{\mathbb{R}} f(ax, by)\, e^{-i2\pi(w_x x + w_y y)}\, dx\,dy \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{matrix} x' = ax \\ y' = by \end{matrix} \therefore \underbrace{\begin{vmatrix} 1/a & 0 \\ 0 & 1/b \end{vmatrix}}_{\text{Matriz Jacobiana}} \quad = \iint_{\mathbb{R}} f(x', y') . e^{-i2\pi\left(\frac{w_x x'}{a} + \frac{w_y y'}{b}\right)} . \frac{1}{|ab|}\, dx'\,dy' = \frac{1}{|ab|} . F\left(\frac{w_x}{a}, \frac{w_y}{b}\right)$$

Portanto quando escalonamos um sinal vamos estar esticando $(a, b > 1)$ ou comprimindo $(a, b < 1)$, isso implica em um espectro de menor e maior frequência respectivamente. Sendo normalizado por $1/|ab|$: isso acontece pois alteramos o período do harmônico, alterando a sua velocidade.

6) Considere o sinal unidimensional periódico definido por:

$f(x) = cos(x)$ no intervalo $[-\pi, \pi]$, e estendido periodicamente. Escreva os primeiros três coeficientes da série de Fourier para esse sinal.

6) Considere o sinal unidimensional periódico definido por: $f(x) = cos(x)$ no intervalo $[-\pi, \pi]$, e estendido periodicamente escreva os três primeiros coeficientes da série para esse sinal.

(RESPOSTA)

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(x)\, dx = \frac{1}{2\pi} . \operatorname{sen}(x) \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

Como $f(x)$ é par

$$b_n = \langle \cos(x), \operatorname{sen}(nx) \rangle = 0$$

$$\cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

$$a_1 = \langle \cos(x), \cos(x) \rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(x)\, dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + \cos(2x)}{2}\, dx \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{1}{\pi}\left[\frac{x}{2}\Big|_{-\pi}^{\pi} + \underbrace{\frac{\operatorname{sen}(2x)}{4}\Big|_{-\pi}^{\pi}}_{0} \right] = \frac{1}{\pi} \frac{2\pi}{2} = 1$$