

2-D Rayleigh autoregressive moving average model for SAR image modeling

Gabriel D'Assumpção de Carvalho

Ciências Atuárias - UFPE

10 de agosto de 2025

2-D RARMA

Objetivo:

Modelar amplitudes SAR (positivas, assimétricas) via distribuição Rayleigh, usando modelo autorregressivo + média móvel bidimensional (2-D RARMA). **Formulação:**

GLM espacial com ligação log:

$$g(\mu[n, m]) = \beta + \sum \phi_{i,j} g(y[n - i, m - j]) + \sum \theta_{k,l} e[n - k, m - l]$$

- $g(x) = \log(x)$
- $\phi_{i,j}$: parâmetros AR (autocorrelação espacial)
- $\theta_{k,l}$: parâmetros MA (média móvel)
- y : valores observados
- e : resíduos

Casos estudados:

- RARMA(1,1): AR e MA
- RARMA(1,0): apenas AR

Estimação:

- Máxima verossimilhança condicional (CMLE)
- Nº parâmetros: $(p + 1)^2 + (q + 1)^2 - 1$

Detecção de Anomalia

Ideia:

- Com parâmetros estimados e $\hat{\mu}[n, m]$, calcular resíduos $e[n, m]$.
- Supor $e[n, m] \sim N(0, 1)$.
- Intervalo esperado: $[-3, 3]$ (99,7% dos valores).
- Resíduos fora do intervalo \Rightarrow anomalia.

Pré-processamento:

- Ajustar 4 modelos, cada um para uma direção (NO, NE, SE, SO).
- Obter direções aplicando rotações de 90° na imagem.

Fluxo do Algoritmo

Algorithm 1 Anomaly detection method based on the 2-D RARMA(p, q) model.

Input: Interest image $\mathbf{X}_{\text{input}}$

Output: Anomaly detection image $\mathbf{X}_{\text{detected}}$

- 1) Select region of interest $\mathbf{X}_{\text{selected}} \subset \mathbf{X}_{\text{input}}$ which anomaly detection is to be tested against.
- 2) Fit the 2-D RARMA(p, q) model for the following images:

$$\mathbf{X}_0 = \mathbf{X}_{\text{selected}}$$

$$\mathbf{X}_k = \text{rot90}(\mathbf{X}_{k-1}),$$

for $k = 1, 2, 3$, where **rot90**(\cdot) rotates its argument counterclockwise by 90 degrees.

- 3) For each resulting fitted image, compute residuals $r_k[n, m]$ relative to $\mathbf{X}_{\text{input}}$.

- 4) Obtain four binary images as follows

if ($r_k[n, m] \leq -3$) or ($r_k[n, m] \geq 3$) **then**

$$\tilde{\mathbf{X}}_k[n, m] \leftarrow 1$$

else

$$\tilde{\mathbf{X}}_k[n, m] \leftarrow 0$$

end if

for $k = 0, 1, 2, 3$.

- 5) Compute binary image from the following pixel-wise Boolean union: $\tilde{\mathbf{X}} \leftarrow \bigcup_{k=0}^3 \tilde{\mathbf{X}}_k$.

- 6) Apply morphological operators as a final post-processing step: $\mathbf{X}_{\text{detected}} \leftarrow \text{post-processing}(\tilde{\mathbf{X}})$.
-

Figura: Detecção de anomalias baseada no modelo 2-D RARMA(p, q).

Simulações

Objetivo: avaliar estimativas do RARMA(1,0) por simulação Monte Carlo.

Procedimento:

- Parâmetros verdadeiros obtidos de uma imagem Rayleigh: $\beta = -0.2031$, $\phi_{0,1} = 0.4562$, $\phi_{1,0} = 0.4523$, $\phi_{1,1} = -0.1054$.
- Gerar imagem \rightarrow estimar parâmetros \rightarrow comparar com valores verdadeiros.
- Repetir 1000 vezes; calcular média, viés relativo (RB), EQM, IC e cobertura (CR).

Table 1
Simulation results on point and interval estimation of the 2-D RARMA(1,0) model

Measures	Mean	RB (%)	EQM	CR
$N = M = 10$				
$\hat{\beta}$	-0.2029	20.4078	0.0348	0.9230
$\hat{\phi}_{0,1}$	0.4585	-3.8767	0.0071	0.9880
$\hat{\phi}_{1,0}$	0.4539	-4.0002	0.0075	0.9380
$\hat{\phi}_{1,1}$	-0.0968	-5.2370	0.0081	0.9430
$N = M = 20$				
$\hat{\beta}$	-0.2160	6.3908	0.0051	0.9380
$\hat{\phi}_{0,1}$	0.4523	-0.8114	0.0014	0.9680
$\hat{\phi}_{1,0}$	0.4492	-0.6841	0.0014	0.9510
$\hat{\phi}_{1,1}$	-0.1054	-0.0223	0.0016	0.9680
$N = M = 40$				
$\hat{\beta}$	-0.2003	1.5805	0.0012	0.9520
$\hat{\phi}_{0,1}$	0.4591	-0.2489	0.0005	0.9750
$\hat{\phi}_{1,0}$	0.4514	-0.2821	0.0003	0.9480
$\hat{\phi}_{1,1}$	-0.1080	-0.4786	0.0004	0.9520
$N = M = 80$				
$\hat{\beta}$	-0.2043	0.0020	0.0003	0.9520
$\hat{\phi}_{0,1}$	0.4560	-0.0464	0.0001	0.9430
$\hat{\phi}_{1,0}$	0.4516	-0.1594	0.0001	0.9520
$\hat{\phi}_{1,1}$	-0.1052	-0.1450	0.0001	0.9640

Figura: Simulação dos parâmetros do modelo RARMA(1,0).

Conclusão: amostras 40×40 já produzem estimativas estáveis; apenas $\phi_{1,0}$ apresentou maior variabilidade (CR $\approx 94,4\%$).

Dados Reais

Imagem SAR (CARABAS II) de floresta com 25 caminhões do exército no canto superior esquerdo.

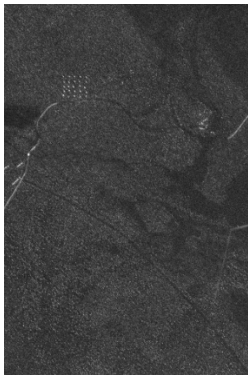


Fig. 3. Original CARABAS II SAR image.

Figura: Imagem original

Table 3

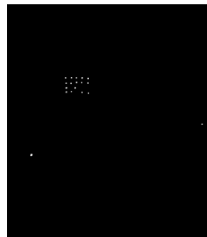
Estimated parameters, standard error (SE), and p -values of the overall significance Wald test of the 2-D RARMA(1, 1) model for the CARABAS II SAR image.

Rotated image	Northwest		Southwest		Southeast		Northeast	
	Estimate	SE	Estimate	SE	Estimate	SE	Estimate	SE
$\hat{\beta}$	-1.2274	0.0681	-1.1146	0.0854	-1.1986	0.0666	-1.2076	0.0892
$\hat{\alpha}_{(0,1)}$	0.1723	0.0303	0.1659	0.0396	0.2218	0.0308	0.1912	0.0392
$\hat{\alpha}_{(1,0)}$	0.1526	0.0316	0.2206	0.0351	0.1572	0.0316	0.1616	0.0361
$\hat{\alpha}_{(1,1)}$	0.0675	0.0305	0.0512	0.0275	0.0294	0.0398	0.0387	0.0270
$\hat{\beta}_{(0,1)}$	0.1773	0.0329	0.3263	0.0418	0.1305	0.0336	0.1227	0.0416
$\hat{\beta}_{(1,0)}$	0.1646	0.0338	0.1208	0.0378	0.1808	0.0335	0.1685	0.0383
$\hat{\beta}_{(1,1)}$	0.1935	0.0252	-0.0691	0.0250	0.2064	0.0251	-0.0461	0.0256
p -value	< 0.001		< 0.001		< 0.001		< 0.001	

Figura: Resultados do modelo nos dados reais



(a) 2-D RARMA(1,1) model



(b) 2-D ARMA(1,1) model