

## Resenha artigo:

2-D Rayleigh autoregressive moving average model for SAR image modeling

Gabriel D'assumpção de Carvalho

2025-08-09

### Modelo

No artigo “2-D Rayleigh autoregressive moving average model for SAR image modeling”, os autores propõem um modelo autorregressivo e de média móvel bidimensional (2-D ARMA) para modelar imagens de radar de abertura sintética (SAR). Assume-se que as amplitudes seguem a distribuição Rayleigh, adequada por ser estritamente positiva e assimétrica, características compatíveis com sinais SAR.

O modelo é formulado como um GLM espacial com função de ligação logarítmica, resultando no 2-D RARMA(p, q). No caso RARMA(1,1), tem-se:

$$g(\mu[n, m]) = \beta + \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^p \phi_{(i,j)} g(y[n-i, m-j]) + \sum_{k=0}^q \sum_{l=0}^q \theta_{(k,l)} e[n-k, m-l],$$

com  $g(\cdot) = \log(\cdot)$ , em que:

- $g(\mu[n, m])$  é a média sob a ligação logarítmica;
- $\beta$  é o intercepto;
- $\phi_{(i,j)}$  são os parâmetros de autocorrelação espacial (parte AR);
- $\theta_{(k,l)}$  são os parâmetros de média móvel espacial (parte MA);
- $y[\cdot, \cdot]$  são os valores observados da imagem e  $e[\cdot, \cdot]$  os resíduos.

Como a distribuição Rayleigh tem suporte em  $\mathbb{R}^+$ , a ligação log garante predições positivas, coerentes com a natureza das intensidades de radar.

Os modelos analisados incluem o 2-D RARMA(1,1), com parâmetros  $\phi_{(0,1)}, \phi_{(1,0)}, \phi_{(1,1)}$  e  $\theta_{(0,1)}, \theta_{(1,0)}, \theta_{(1,1)}$ , e o 2-D RARMA(1,0), que retém apenas a componente autorregressiva, descartando a média móvel.

A estimação dos parâmetros é realizada por máxima verossimilhança condicional (CMLE), maximizando o logaritmo da densidade condicional Rayleigh em relação a cada parâmetro. O número total de parâmetros do modelo RARMA(p, q) é dado por  $((p+1)^2 + (q+1)^2 - 1)$ .

As predições são obtidas na submatriz de dimensões  $((N-w) \times (M-w))$ , onde  $(N \times M)$  representa o tamanho da imagem original e  $(w = \max(p, q))$ ; as bordas não são estimadas devido à insuficiência de vizinhança para a recursão.

### Teste de hipótese

Após o ajuste dos parâmetros, é possível realizar testes de hipótese com base na estatística de Wald. Os principais testes possíveis são:

1. Verificar se um conjunto  $\lambda_l$  de parâmetros, com dimensão  $d$ , é diferente do conjunto de parâmetros nulos  $\lambda_{l0}$ .
2. Verificar se o conjunto total de parâmetros é diferente do conjunto nulo, ou seja, avaliar se o modelo é estatisticamente significativo.

## Estimação

Para estimar a intensidade do pixel da imagem, utiliza-se a seguinte função:

$$\hat{\mu}[n, m] = g^{-1} \left( \hat{\beta} + \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^p \hat{\phi}_{(i,j)} g(y[n-i, m-j]) + \sum_{k=0}^q \sum_{l=0}^q \hat{\theta}_{(k,l)} e[n-k, m-l] \right)$$

## Detecção de Anomalia

Com as estimativas dos parâmetros do modelo e a estimação da intensidade do pixel, é possível detectar anomalias na imagem. Assume-se que os resíduos  $e[n, m]$  seguem uma distribuição normal com média zero e variância unitária. Assim, define-se o intervalo  $[-3, 3]$ , pois 99,7% dos valores devem estar nesse intervalo. Estimações com resíduos fora desse intervalo são consideradas anômalas.

Além disso, foi proposto um pré-processamento da imagem para ajustar quatro modelos, cada um capturando a influência de uma direção específica: noroeste, nordeste, sudeste e sudoeste. Esse procedimento é realizado aplicando rotações de 90° na imagem.

## Algoritmo

A seguir, exemplifica-se o funcionamento do algoritmo de detecção de anomalias:

1. Considera-se uma imagem fictícia de 100x100 pixels;
2. Escolhe-se uma janela de tamanho  $N \times M$ ;
3. Rotaciona-se  $k$  vezes a janela em 90°;
4. Estima-se o modelo para essa janela;
5. Prediz-se o valor do pixel central;
6. Calcula-se o resíduo entre a estimação e o valor observado;
7. Verifica-se se o resíduo está dentro ou fora do intervalo  $[-3, 3]$ .

Dada uma imagem de 100x100:

##	[,1]	[,2]	[,3]	[,4]	[,5]	[,6]	[,7]	[,8]	[,9]	[,10]
##	[1,]	1	2	3	4	5	6	7	8	9
##	[2,]	11	12	13	14	15	16	17	18	19
##	[3,]	21	22	23	24	25	26	27	28	29
##	[4,]	31	32	33	34	35	36	37	38	39
##	[5,]	41	42	43	44	45	46	47	48	49
##	[6,]	51	52	53	54	55	56	57	58	59
##	[7,]	61	62	63	64	65	66	67	68	69
##	[8,]	71	72	73	74	75	76	77	78	79
##	[9,]	81	82	83	84	85	86	87	88	89
##	[10,]	91	92	93	94	95	96	97	98	99

Escolhendo uma janela de tamanho 3x3 para exemplificar o algoritmo:

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    1    2    3
## [2,]   11   12   13
## [3,]   21   22   23
```

Em seguida, realizam-se três rotações de 90° para capturar a influência das direções *northwest*, *northeast*, *southeast* e *southwest*:

```
## [1] "Northwest"

##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    1    2    3
## [2,]   11   12   13
## [3,]   21   22   23

## [1] "Northeast"

##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    3   13   23
## [2,]    2   12   22
## [3,]    1   11   21

## [1] "Southeast"

##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]   23   22   21
## [2,]   13   12   11
## [3,]    3    2    1

## [1] "Southwest"

##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]   21   11    1
## [2,]   22   12    2
## [3,]   23   13    3
```

Após as rotações e a estimação do modelo, cada previsão de pixel é comparada ao valor real.

- Se o resíduo for maior que 3 ou menor que -3, o pixel recebe valor 0 (branco).
- Caso contrário, recebe valor 1 (preto).

Cada pixel terá quatro estimativas, uma para cada direção. Ao final:

- Se pelo menos uma das matrizes apresentar valor 1, o pixel é considerado **normal**.
- Se todas apresentarem 0, o pixel é considerado **anômalo**.

Exemplo:

```
## [1] "Matriz NW"

##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    0    0    1
## [2,]    0    1    1
## [3,]    0    1    0

## [1] "Matriz NE"

##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    1    0    0
## [2,]    0    1    1
## [3,]    1    0    1
```

```
## [1] "Matriz SE"

##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    0    0    0
## [2,]    0    0    0
## [3,]    0    0    0

## [1] "Matriz SW"

##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    0    0    0
## [2,]    0    0    0
## [3,]    0    0    0

## [1] "Matriz de Detecção Final"

##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    1    0    1
## [2,]    0    1    1
## [3,]    1    1    1
```

Com isso, a detecção de anomalias, neste exemplo, identificaria que os pixels (1, 2) e (2, 1) são anômalos.

## Resultados dos modelos

O artigo apresentou os resultados dos modelos 2-D RARMA(1, 0) e 2-D RARMA(1, 1), considerando dados simulados a partir do método de geração inversa da distribuição Rayleigh. Observou-se que o modelo sem médias móveis apresentou melhor desempenho para as métricas de viés relativo total e quadrado da média do erro, nos tamanhos de amostra  $10 \times 10$ ,  $20 \times 20$ ,  $40 \times 40$  e  $80 \times 80$ . Para ambos os modelos, verificou-se redução dessas métricas com o aumento do tamanho da amostra.

A seleção do melhor modelo foi feita com base no teste de Wald, para verificar se os parâmetros são significativamente diferentes de zero, analisar se os resíduos se distribuem aleatoriamente em torno de zero e comparar as métricas MSE e erro percentual absoluto médio (MAPE).

## Simulação

O artigo também propôs uma simulação de dados pelo método de Monte Carlo para avaliar as estimativas de cada parâmetro. A simulação consistiu nos seguintes passos:

Considerou-se apenas o modelo RARMA(1, 0), com parâmetros inicialmente estimados a partir de uma imagem que segue a distribuição Rayleigh:  $\beta = -0.2031$ ,  $\phi(0, 1) = 0.4562$ ,  $\phi(1, 0) = 0.4523$  e  $\phi(1, 1) = -0.1054$ . Esses parâmetros foram tratados como valores verdadeiros. Na primeira simulação, gerou-se uma nova imagem e estimaram-se novamente os parâmetros, comparando-os com os valores verdadeiros. Esse processo foi repetido 1000 vezes, calculando-se a média final dos parâmetros, o viés relativo ( $RB = (ValorEstimado - ValorVerdadeiro)/ValorVerdadeiro$ ), o erro quadrático médio e o intervalo de confiança. Em seguida, verificou-se quantas vezes os parâmetros verdadeiros estavam dentro do intervalo de confiança, obtendo o valor de CR.

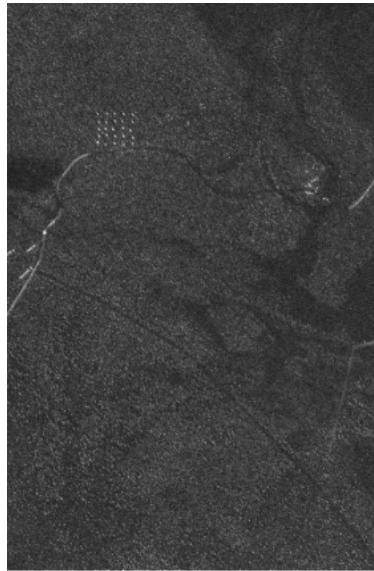
**Table 1**  
Simulation results on point and interval estimation of the 2-D RARMA(1, 0) model.

Measures	Mean	RB(%)	MSE	CR
<i>N = M = 10</i>				
$\hat{\beta}$	-0.2629	29.4370	0.0244	0.9230
$\hat{\phi}_{(0,1)}$	0.4385	-3.8767	0.0071	0.9400
$\hat{\phi}_{(1,0)}$	0.4339	-4.0692	0.0073	0.9360
$\hat{\phi}_{(1,1)}$	-0.0998	-5.2979	0.0081	0.9430
<i>N = M = 20</i>				
$\hat{\beta}$	-0.2160	6.3468	0.0051	0.9360
$\hat{\phi}_{(0,1)}$	0.4523	-0.8514	0.0014	0.9400
$\hat{\phi}_{(1,0)}$	0.4492	-0.6841	0.0014	0.9510
$\hat{\phi}_{(1,1)}$	-0.1054	-0.0223	0.0016	0.9600
<i>N = M = 40</i>				
$\hat{\beta}$	-0.2063	1.5865	0.0012	0.9520
$\hat{\phi}_{(0,1)}$	0.4551	-0.2409	0.0003	0.9550
$\hat{\phi}_{(1,0)}$	0.4514	-0.2021	0.0003	0.9440
$\hat{\phi}_{(1,1)}$	-0.1049	-0.4706	0.0004	0.9520
<i>N = M = 80</i>				
$\hat{\beta}$	-0.2043	0.6020	0.0003	0.9520
$\hat{\phi}_{(0,1)}$	0.4560	-0.0464	0.0001	0.9430
$\hat{\phi}_{(1,0)}$	0.4516	-0.1504	0.0001	0.9520
$\hat{\phi}_{(1,1)}$	-0.1052	-0.1450	0.0001	0.9640

Como podemos ver acima, quanto menor a amostra, maior é a variabilidade das estimativas dos parâmetros. Observa-se que uma amostra de  $40 \times 40$  já é suficientemente grande, apresentando apenas o parâmetro  $\phi(1, 0)$  com maior variabilidade, estando o valor verdadeiro dentro do intervalo de confiança em 94,4% das repetições.

## Dados reias

Uma das aplicações do modelo foi realizada em uma imagem capturada pelo radar CARABAS II SAR, retirada de uma floresta, contendo 25 caminhões do exército, visíveis no canto superior esquerdo da imagem como 25 pontos brancos.



**Fig. 3.** Original CARABAS II SAR image.

O modelo estimado foi o seguinte:

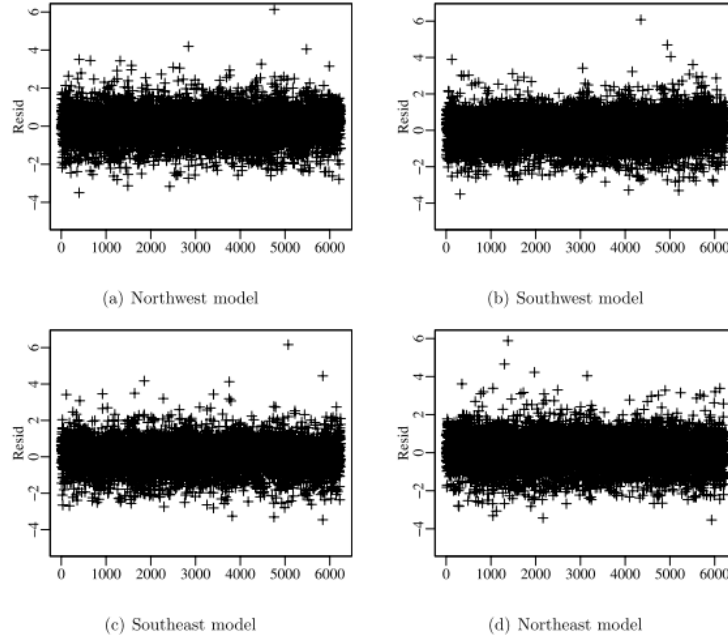
**Table 3**  
Estimated parameters, standard error (SE), and  $p$ -values of the overall significance Wald test of the 2-D RARMA(1, 1) model for the CARABAS II SAR image.

Rotated image								
	Northwest		Southwest		Southeast		Northeast	
	Estimate	SE	Estimate	SE	Estimate	SE	Estimate	SE
$\hat{\beta}$	-1.2274	0.0681	-1.1146	0.0854	-1.1986	0.0666	-1.2076	0.0892
$\hat{\phi}_{(0,1)}$	0.1723	0.0303	0.1659	0.0396	0.2218	0.0308	0.1912	0.0392
$\hat{\phi}_{(1,0)}$	0.1526	0.0316	0.2206	0.0351	0.1572	0.0316	0.1616	0.0361
$\hat{\phi}_{(1,1)}$	0.0675	0.0303	0.0512	0.0275	0.0294	0.0308	0.0387	0.0270
$\hat{\theta}_{(0,1)}$	0.1773	0.0329	0.1263	0.0418	0.1305	0.0336	0.1127	0.0416
$\hat{\theta}_{(1,0)}$	0.1646	0.0338	0.1208	0.0378	0.1808	0.0335	0.1685	0.0383
$\hat{\theta}_{(1,1)}$	0.1935	0.0252	-0.0691	0.0250	0.2064	0.0251	-0.0461	0.0256
$p$ -value	< 0.001		< 0.001		< 0.001		< 0.001	

Podemos observar na tabela acima que os quatro modelos, referentes às quatro direções, apresentaram valores- $p$  inferiores a 0,1% e erro padrão máximo de 0,0892. Analisando cada modelo isoladamente:

- O modelo NW mostrou maior correlação no parâmetro ( $\phi_{(1,1)}$ ), correspondente ao elemento  $(n-1, m-1)$ , com valor 0,1935.
- No modelo SW, a maior correlação foi no parâmetro ( $\phi_{(1,0)}$ ), relativo à correlação entre o pixel  $(n, m-1)$ , com valor 0,2206.
- Para o modelo SE, o parâmetro ( $\phi_{(0,1)}$ ) apresentou a maior correlação, elemento  $(n, m+1)$ , com valor 0,2218.
- Por fim, o modelo NE teve maior correlação no parâmetro ( $\phi_{(0,1)}$ ), correspondente ao pixel  $(n-1, m)$ , com valor 0,1906.

Os resíduos dos modelos podem ser observados na imagem abaixo, evidenciando que estão distribuídos em torno de zero e dentro do intervalo  $[-3, 3]$ , com algumas observações fora desse intervalo.



**Fig. 4.** Residual charts of the 2-D RARMA(1, 1) models for the CARABAS II SAR image.

Em seguida, aplicou-se o algoritmo de detecção de anomalias apresentado anteriormente, resultando na imagem a seguir:

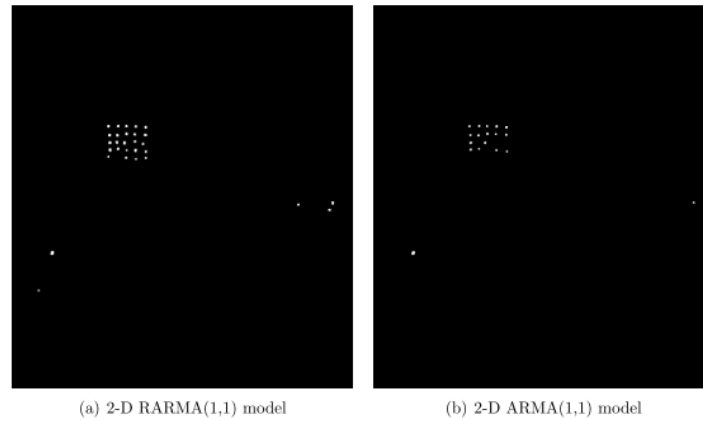


Fig. 5. Zoomed detected images in the region where anomaly changes were identified, considering 2-D RARMA(1, 1) and 2-D ARMA(1, 1) models.

No lado esquerdo, observa-se que o modelo 2-D RARMA(1, 1) detectou corretamente 24 dos 25 caminhões, mas apresentou 5 erros do tipo I. Já o modelo 2-D ARMA(1, 1), que assume distribuição gaussiana, detectou 16 dos 25 caminhões e apresentou 2 erros do tipo I.

Esses resultados confirmam as vantagens do modelo 2-D RARMA para detecção de anomalias em imagens SAR conforme discutido por Palm et al. (Palm, Bayer, and Cintra (2022)).

## Referências

Palm, Bruna G., Fábio M. Bayer, and Renato J. Cintra. 2022. “2-d Rayleigh Autoregressive Moving Average Model for SAR Image Modeling.” *Computational Statistics and Data Analysis* 171 (July). <https://doi.org/10.1016/j.csda.2022.107453>.