Conceitos Sobre Distribuições de Probabilidade

Gabriel D'assumpção de Carvalho

2025-07-22

Contents

1 Introdução

Neste relatório, abordamos os principais conceitos relacionados às seguintes distribuições de probabilidade: Bernoulli, Binomial, Multinomial, Poisson, Exponencial, Geométrica, Hipergeométrica, Gama e Weibull. Essas distribuições são fundamentais para a modelagem estatística, especialmente em contextos de análise de sobrevivência, pois permitem descrever a probabilidade de ocorrência de eventos discretos (como sucesso, falha, etc.) e contínuos (como tempo até a falha ou tempo de vida útil de um sistema).

Neste estudo, geraremos amostras com 1000 observações de cada uma dessas distribuições. Em seguida, construiremos gráficos de barras para variáveis discretas e histogramas para variáveis contínuas, a fim de visualizar o comportamento de suas respectivas probabilidades.

```
# Configuração de reprodutibilidade
n <- 1000
set.seed(42)
```

2 Distribuições Discretas

Distribuições discretas descrevem variáveis aleatórias que podem assumir valores finitos ou contáveis. Abaixo, exploramos algumas das distribuições discretas mais utilizadas na prática estatística.

2.1 Distribuição de Bernoulli

A distribuição de Bernoulli é uma das mais importantes distribuições de probabilidade. Qualquer situação que envolva apenas dois desfechos possíveis pode ser modelada como uma variável de Bernoulli. Os dois resultados possíveis são: sucesso (1) ou fracasso (0). A probabilidade de sucesso é denotada por p e a de fracasso por $q = 1 - p$.

A função de massa de probabilidade (FMP) da distribuição de Bernoulli é dada por:

$$P(X = x) = p^x (1 - p)^{1-x}, \quad x \in \{0, 1\}$$

Onde X representa a variável aleatória que indica o resultado do experimento.

2.1.1 Esperança

A esperança da variável X_i é dada por:

$$E(X) = \mathbb{P}(X = 1) \cdot 1 + \mathbb{P}(X = 0) \cdot 0 = p$$

2.1.2 Variância

Utilizando a identidade $\text{Var}(X_i) = E(X_i^2) - [E(X_i)]^2$, temos:

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = p(1 - p) = pq$$

Sendo:

- $E(X)$: esperança (média) da variável aleatória X;
- $\text{Var}(X)$: variância de X;
- p: probabilidade de sucesso;
- q: probabilidade de fracasso.

2.1.3 Exemplo

```
p <- 0.7
bernoulli <- rbinom(n, 1, p)

barplot(table(bernoulli),
  main = "Distribuição Bernoulli (p = 0.7)",
  names.arg = c("0", "1"),
  col = c("#ff0000", "#55a802"),
  ylab = "Frequência",
  xlab = "Valor"
)
```

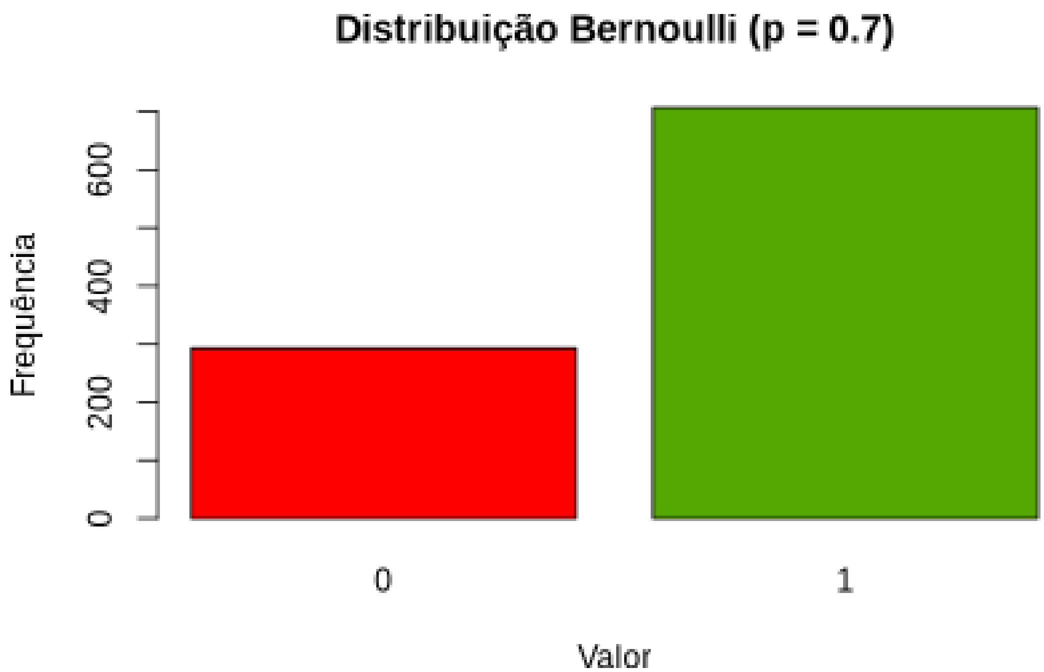

Figure 1: Distribuição de Bernoulli

```
print(paste("Esperança:", mean(bernoulli), " | ", "p = ", p))
```

```
## [1] "Esperança: 0.707  |  p =  0.7"
```

```
print(paste("Variância:", round(var(bernoulli), 4), " | ", "p * q = ", p * (1 - p)))
```

```
## [1] "Variância: 0.2074  |  p * q =  0.21"
```

Podemos observar que a média e a variância empíricas da amostra seguem de perto os valores teóricos $E(X) = p$ e $\mathrm{Var}(X) = pq$, confirmando a adequação da distribuição.

2.2 Distribuição Binomial

A distribuição binomial generaliza a Bernoulli para n repetições independentes do mesmo experimento. Cada tentativa tem probabilidade de sucesso p e fracasso $q = 1 - p$. A variável aleatória X representa o número de sucessos em n tentativas.

A função de massa de probabilidade é dada por:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

Onde:

- n: número total de tentativas;
- k: número de sucessos;
- $\binom{n}{k}$: coeficiente binomial, que representa o número de combinações de n termos, k a k.

Nota-se que quando $n = 1$, a distribuição binomial se reduz à distribuição de Bernoulli. Por isso, foi utilizado `rbinom(n, 1, p)` no exemplo 2.1.3.

2.2.1 Esperança

A esperança da variável X_i é dada por:

$$E(X^i) = \sum_{k=0}^{n} k^i \cdot \binom{n}{k} p^k \cdot (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} k \cdot k^{i-1} \cdot \binom{n}{k} \cdot p \cdot p^{k-1} \cdot (1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \cancel{k} \cdot k^{i-1} \cdot \frac{n \cdot (n-1)!}{\cancel{k} \cdot (k-1)! \cdot (n-k)!} \cdot p \cdot p^{k-1} \cdot (1-p)^{n-k} = n \cdot p \sum_{k=0}^{n} k^{i-1} \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)! \cdot (n-k)!} \cdot p^{k-1} \cdot (1-p)^{n-k}$$

Aplicando a substituição de índice:

$$k = j + 1 \Rightarrow k - 1 = j$$

Obtemos:

$$E(X^i) = n \cdot p \sum_{j=0}^{n-1} (j+1)^{i-1} \cdot \frac{(n-1)!}{j! \cdot (n-j-1)!} \cdot p^j \cdot (1-p)^{n-j-1} = n \cdot p \sum_{j=0}^{n-1} (j+1)^{i-1} \cdot \binom{n-1}{j} \cdot p^j \cdot (1-p)^{n-j-1}$$

Reconhecendo a estrutura esperada de um momento da distribuição binomial de ordem $n - 1$, temos:

$$E(X^i) = n \cdot p \cdot E\left[(j+1)^{i-1}\right], \quad \text{onde } j \sim \text{Binomial}(n-1, p)$$

Portanto, ao aplicar a propriedade recursiva para o primeiro momento ($i = 1$), temos:

$$E(X) = n \cdot p \cdot E(X^0) = n \cdot p \cdot 1 = n \cdot p$$

2.2.2 Variância

Utilizando a identidade $\text{Var}(X_i) = E(X_i^2) - [E(X_i)]^2$, temos:

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = n \cdot p \cdot E[(j+1)^{2-1}] - n^2 \cdot p^2 = n \cdot p \cdot ((n-1) \cdot p + 1) - n^2 \cdot p^2$$

$$= n \cdot p \cdot (n \cdot p - p + 1) - n^2 \cdot p^2 = \cancel{n^2 \cdot p^2} - n \cdot p^2 + n \cdot p - \cancel{n^2 \cdot p^2} = n \cdot p \cdot (1-p) = n \cdot p \cdot q$$

2.2.3 Exemplo

```
k <- 100

binomial <- rbinom(n, k, 0.7)

barplot(
  table(binomial),
  main = "Distribuição Binomial (n = 1000, k = 100, p = 0.7)",
  col = "#55a802",
  ylab = "Frequência",
  xlab = "Número de Sucessos"
)
```

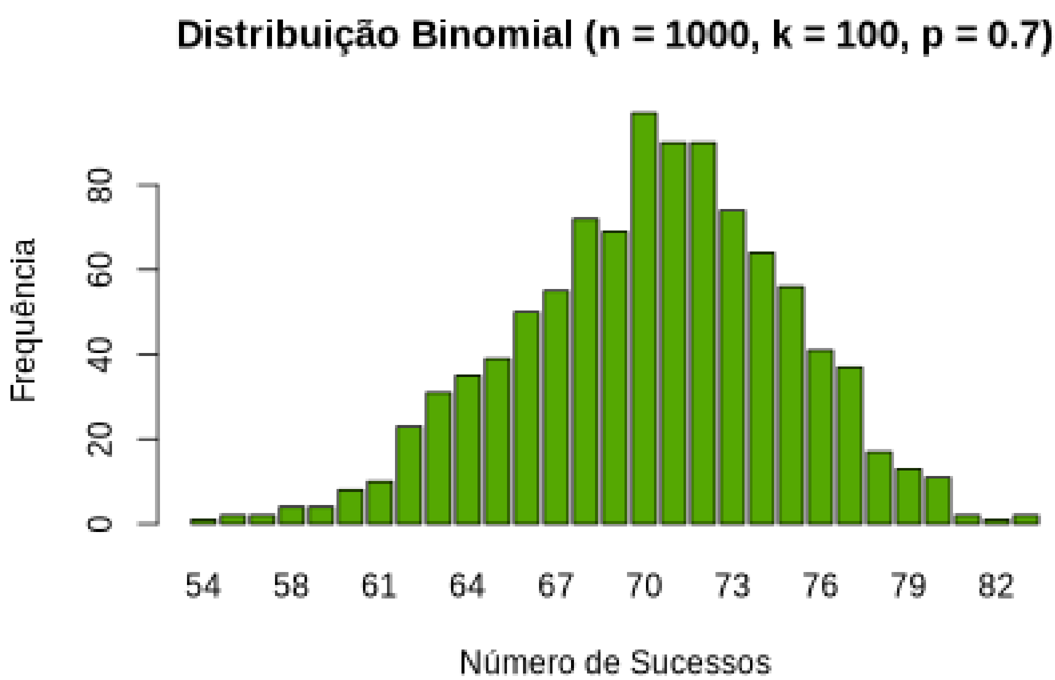

Figure 2: Distribuição Binomial

```
print(paste("Esperança:", mean(binomial), " | ", "k * p = ", k * p))
```

```
## [1] "Esperança: 70.24  |  k * p =  70"
```

```
print(paste("Variância:", round(var(binomial), 4), " | ", "k * p * q = ", k * p * (1 - p)))
```

```
## [1] "Variância: 21.2917  |  k * p * q =  21"
```

Com isso, podemos ver que a média e a variância empírica da amostra de uma variável aleatória que segue uma distribuição binomial com parâmetros n e p se aproximam dos valores teóricos $E(X) = n \cdot p$ e $\text{Var}(X) = n \cdot p \cdot q$, confirmando as propiedades demonstradas.

2.3 Distribuição Multinomial

A distribuição multinomial é uma generalização da distribuição binomial para experimentos com mais de dois possíveis resultados. Ela é usada quando realizamos n experimentos independentes, cada um resultando em exatamente uma das k categorias possíveis. Cada categoria $i = 1, 2, \ldots, k$ tem uma probabilidade associada p_i, com $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$. A função de massa de probabilidade da distribuição é dada por:

$$P(X_1 = n_1, \ldots, X_k = n_k) = \binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k} \cdot p_1^{n_1} \cdots p_k^{n_k}$$

Podemos expandir o coeficiente multinomial como:

$$= \frac{n!}{n_1! \cdot \cancel{(n - n_1)!}} \cdot \frac{\cancel{(n - n_1)!}}{n_2! \cdot \cancel{(n - n_1 - n_2)!}} \cdots \frac{\cancel{(n - n_1 - \cdots - n_{k-1})!}}{n_k! \cdot 0!} \cdot p_1^{n_1} \cdots p_k^{n_k}$$

Resultando em:

$$= \frac{n!}{n_1! \cdots n_k!} \cdot p_1^{n_1} \cdots p_k^{n_k}$$

Onde:

- X_i: número de ocorrências da categoria i;
- n: número total de experimentos;
- n_i: número de vezes que a categoria i ocorreu (ou seja, $X_i = n_i$);
- p_i: probabilidade de ocorrência da categoria i.

2.3.1 Esperança

A esperança da variável X_i é dada por:

$$E(X_i) = \sum_{x_1 + \cdots + x_k = n} X_i \cdot \frac{n!}{x_1! \cdots x_k!} \cdot p_1^{x_1} \cdots p_k^{x_k}$$

Aplicando a manipulação:

$$E(X_i) = n \cdot p_i \cdot \overbrace{\sum \frac{(n-1)!}{(x_1 - \delta_{1i})! \cdots (x_k - \delta_{ki})!} \cdot p_1^{x_1 - \delta_{1i}} \cdots p_k^{x_k - \delta_{ki}}}^{1}, \quad \delta_{ji} = \begin{cases} 1, & \text{se } j = i \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Essa soma corresponde a uma distribuição multinomial de ordem $(n - 1)$ e soma 1:

$$\Rightarrow E(X_i) = n \cdot p_i$$

2.3.2 Variância

Utilizando a identidade $\text{Var}(X_i) = E(X_i^2) - [E(X_i)]^2$, temos:

$$E(X_i^2) = E(X_i(X_i - 1)) + E(X_i)$$

Sabendo que:

$$E(X_i(X_i - 1)) = n(n-1)p_i^2 \quad \text{e} \quad E(X_i) = np_i$$

Substituímos:

$$\text{Var}(X_i) = n(n-1)p_i^2 + np_i - (np_i)^2 = n^2p_i^2 - np_i^2 + np_i - n^2p_i^2$$

$$= -np_i^2 + np_i = np_i(1 - p_i)$$

Logo, a variância da variável X_i na distribuição multinomial é:

$$\text{Var}(X_i) = np_i(1 - p_i)$$

2.3.3 Exemplo

```
class <- 4
ps <- c(p, rep((1 - p) / (class - 1), class - 1))
multnom <- rmultinom(n, size = k, prob = ps)
frequencias <- rowSums(multnom)
```

```
barplot(
  frequencias,
  names.arg = paste("Classe", 1:class),
  col = colorRampPalette(c("#b2df8a", "#33a02c"))(class),
  main = paste("Distribuição Multinomial: n =", n, ", size =", k, "class =", class),
  cex.main = 0.9,
  xlab = "Classe",
  ylab = "Frequência"
)
```

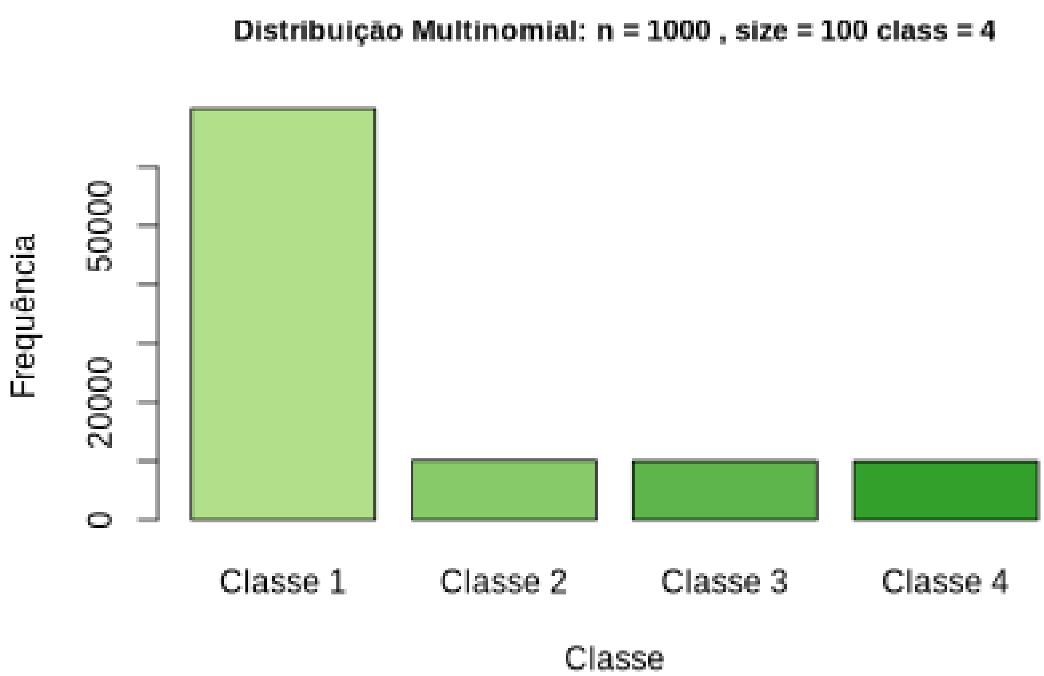

Figure 3: Distribuição Multinomial

```
E_empirica <- rowSums(multnom) / n
E_teorica <- k * ps

data.frame(
  Classe = paste0("Classe ", 1:length(ps)),
  `E(empírica)` = round(E_empirica, 3),
  `E(teórica)` = round(E_teorica, 3)
)
```

```
##     Classe E.empírica E.teórica
## 1 Classe 1     69.929        70
## 2 Classe 2     10.101        10
## 3 Classe 3      9.999        10
## 4 Classe 4      9.971        10
```

Dado um experimento multinomial com $n = 1000$, tamanho de ensaio $k = 100$, probabilidade da primeira classe $p_1 = 0.7$ e as probabilidades restantes definidas como $p_i = \frac{1-p_1}{\text{número de classes}-1}$, totalizando 6 classes, observa-se que a média empírica se aproxima da média teórica, confirmando assim as propriedades esperadas da distribuição multinomial.

2.4 Distribuição de Poisson

A distribuição de poisson é uma distribuição discreta que modela o número de eventos que ocorrem em um intervalo fixo de tempo, tendo uma taxa média de ocorrência *lambda*, constante e independente do tempo. Com isso, a função de massa de probabilidade é dada por:

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Onde:

- k: Valor que a variável aleatória X pode assumir (número de eventos);
- λ: Taxa média de ocorrência de eventos no intervalo considerado;
- e: Base do logaritmo natural, aproximadamente 2.71828.

2.4.1 Esperança

A esperança da variável X é dada por:

$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot P(X = k) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \lambda \cdot \cancel{k} \cdot \frac{\lambda^{k-1} \cdot e^{-\lambda}}{\cancel{k} \cdot (k-1)!} = \lambda \cdot e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$= \lambda \cdot e^{-\lambda} \cdot \left[\cancelto{e^{\lambda}}{\frac{\lambda^0}{0!} + \frac{\lambda^1}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!} + \ldots} \right] = \lambda$$

2.4.2 Variância

A variância da variável que segue a distribuição de Poisson é dada por:

$$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot P(X = k) - \lambda^2$$

$$E(X^2) = 1^2 \left[\frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^1}{1!} \right] + 2^2 \left[\frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^2}{2!} \right] + 3^2 \left[\frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^3}{3!} \right] + \ldots + n^2 \left[\frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^n}{n!} \right] + \cdots$$

$$= e^{-\lambda} \cdot \lambda \left[1 + 2 \cdot \lambda + 3 \cdot \frac{\lambda^2}{2!} + \ldots + n \cdot \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots \right]$$

$$= e^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}, \text{ onde } n - 1 = k \text{ e } n = k + 1$$

$$= e^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot \left[0 + \frac{\lambda}{1!} + \frac{\cancel{2} \cdot \lambda^2}{\cancel{2!}} + \frac{\cancel{3} \cdot \lambda^3}{\cancel{3} \cdot 2!} + \ldots + e^{\lambda} \right]$$

$$= e^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot \left[\lambda \cancelto{e^{\lambda}}{\left(1 + \frac{\lambda}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!} + \cdots + \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}\right)} + e^{\lambda} \right] = e^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot [\lambda \cdot e^{\lambda} + e^{\lambda}] = e^0 \cdot \lambda^2 + e^0 \cdot \lambda = \lambda^2 + \lambda$$

$$\mathrm{Var}(X) = \cancel{\lambda^2} + \lambda - \cancel{\lambda^2} = \lambda$$

2.4.3 Exemplo

```
lambda <- 5
poisson <- rpois(n, lambda)

barplot(
  table(poisson),
  main = paste("Distribuição de Poisson (lambda =", lambda, ")"),
  col = "#55a802",
  ylab = "Frequência",
  xlab = "Número de Eventos"
)
```

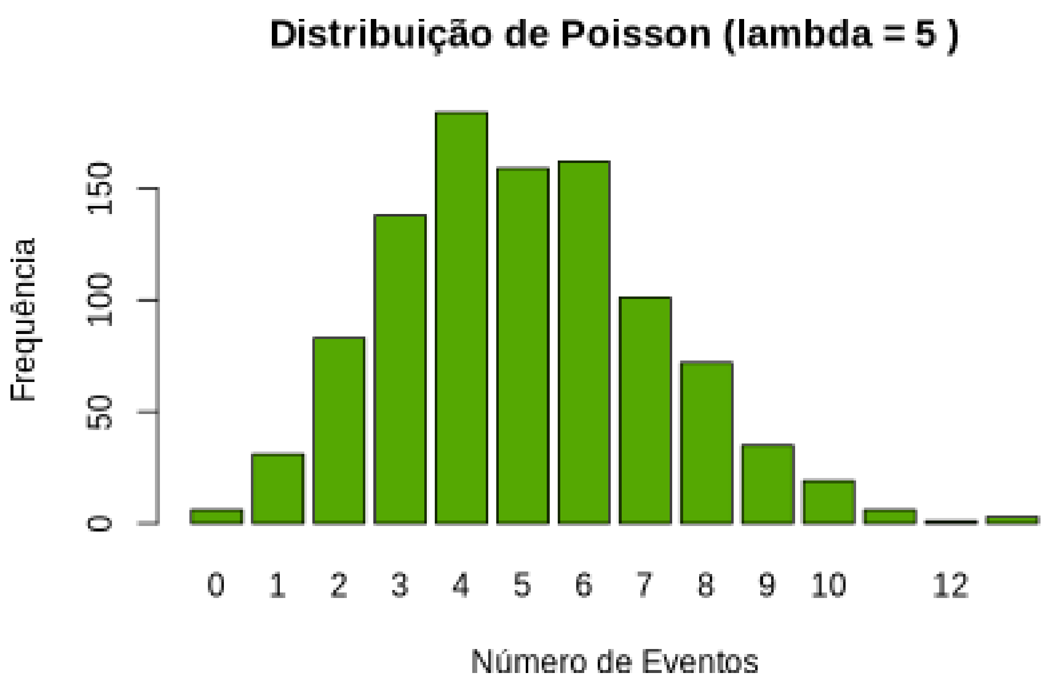

Figure 4: Distribuição de Poisson

```
print(paste("Esperança:", mean(poisson), " | ", "lambda = ", lambda))
```

```
## [1] "Esperança: 5.019  |  lambda =  5"
```

```
print(paste("Variância:", round(var(poisson), 4), " | ", "lambda = ", lambda))
```

```
## [1] "Variância: 4.8395  |  lambda =  5"
```

Portanto, podemos observar que a média e a variância empírica da amostra de uma variável aleatória que segue uma distribuição de Poisson com parâmetro λ se aproximam dos valores teóricos $E(X) = \lambda$ e $\text{Var}(X) = \lambda$, confirmando as propriedades esperadas da distribuição.

2.5 Distribuição Geométrica

A distribuição geométrica modela o número de tentativas até a ocorrência do primeiro sucesso em uma sequência de experimentos de Bernoulli independentes. Sua função de massa de probabilidade é dada por:

$$P(X = k) = (1-p)^{k-1} \cdot p, \quad k = 1, 2, \ldots$$

2.5.1 Esperança

A esperança da variável aleatória X é calculada como:

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot P(X = k) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot (1-p)^{k-1} \cdot p = p \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot (1-p)^{k-1}$$

Denotando $q = 1 - p$, reconhecemos que a soma é uma série geométrica diferenciada, cuja soma é:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot q^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$$

Como $1 - q = p$, temos:

$$E(X) = \cancel{p} \cdot \frac{1}{p^{\cancel{2}}} = \frac{1}{p}$$

2.5.2 Variância

A variância é obtida por:

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = E[X(X-1)] + E(X) - \left(\frac{1}{p}\right)^2$$

onde:

$$E[X(X-1)] = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) \cdot q^{k-1} \cdot p$$

Utilizando as propriedades das séries geométricas diferenciadas, temos:

1. Primeira derivada:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot q^{k-1} = \frac{d}{dq} \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{(1-q)^2}$$

2. Segunda derivada:

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)\cdot q^{k-2} = \frac{d^2}{dq^2}\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{d^2}{dq^2}\left(\frac{1}{1-q}\right) = \frac{2}{(1-q)^3}$$

Multiplicando por q, obtemos:

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)\cdot q^{k-1} = \frac{2q}{(1-q)^3}$$

Assim, substituindo na fórmula da variância:

$$\mathrm{Var}(X) = p\cdot\frac{2q}{(1-q)^3} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{2qp}{p^3} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{2q}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2}$$

Simplificando os termos:

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{2q+p-1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2} = \frac{q}{p^2}$$

2.5.3 Exemplo

```r
geom <- rgeom(n, p) + 1

barplot(
  table(geom),
  main = paste("Distribuição Geométrica (p =", p, ")"),
  col = "#55a802",
  ylab = "Frequência",
  xlab = "Número de Tentativas"
)
```

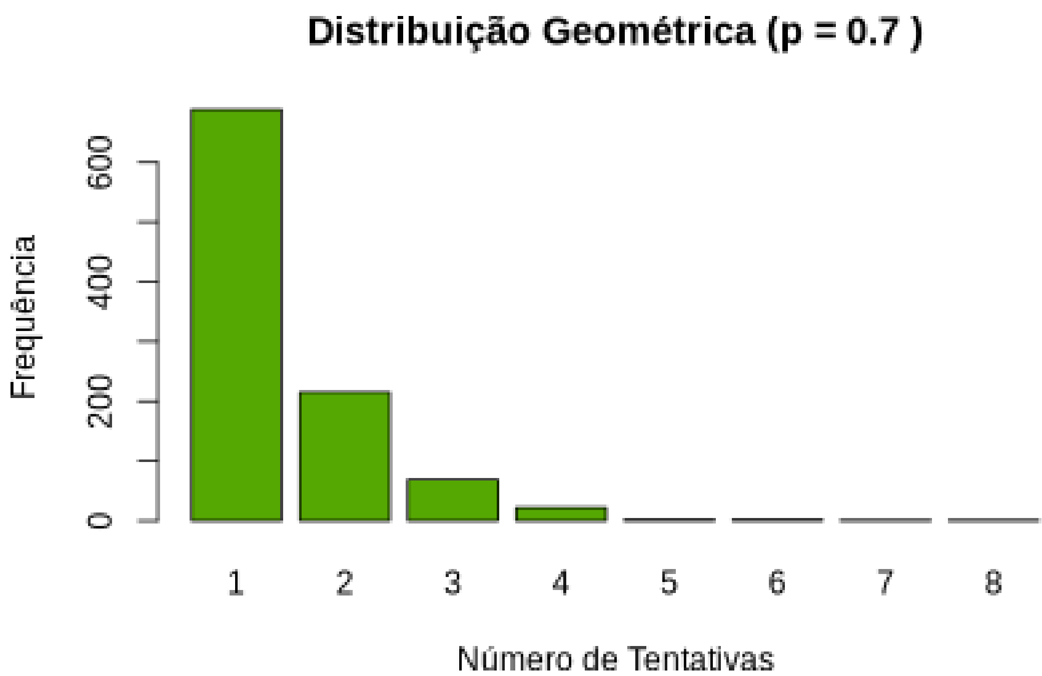

Figure 5: Distribuição Geométrica

```
print(paste("Esperança:", mean(geom), " | ", "1 / p = ", round(1 / p, 4)))
```

```
## [1] "Esperança: 1.45  |  1 / p =  1.4286"
```

```
print(paste("Variância:", round(var(geom), 4), " | ", "q / p^2 = ", round((1 - p) / p^2, 4)))
```

```
## [1] "Variância: 0.6542  |  q / p^2 =  0.6122"
```

Como podemos ver o experimento do número de tentativas até o primeiro sucesso, seguindo uma distribuição geométrica com parâmetro p, resulta em uma média e variância empíricas que se aproximam dos valores teóricos $E(X) = \frac{1}{p}$ e $\text{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2}$, confirmando as propriedades esperadas da distribuição.

2.6 Distribuição Hipergeométrica

2.6.1 Esperança

2.6.2 Variância

2.6.3 Exemplo

3 Distribuições Contínuas

3.1 Distribuição Exponencial

3.1.1 Esperança

3.1.2 Variância

3.1.3 Exemplo

3.2 Distribuição Gamma

3.2.1 Esperança

3.2.2 Variância

3.2.3 Exemplo

3.3 Distribuição Weibull

3.3.1 Esperança

3.3.2 Variância

3.3.3 Exemplo