Lista de exercícios - Séries e EDO

Turmas IA - Profa. Cláudia Mesquita

Lista 1 - Capítulos 1 e 2 (em construção)

1. Usando integração, encontre soluções para as seguintes equações diferenciais:

   (Observe que aqui você irá de fato buscar a solução através de uma técnica)

   (a) $\dfrac{dy}{dx} = x(x^2+3)^4$

   (b) $y' = sen^4(3t)$

   (c) $\dfrac{du}{dx} = cos(x)ln(sen(x))$

2. Indique a ordem de cada EDO apontada e classifique quanto a linearidade.

   (a) $x\dfrac{d^3y}{dx^3} - \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^4 + y = 0$

   (b) $\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^3 = -\dfrac{y}{x}$

   (c) $(1-t)y'' - 4xy' = cosy$

   (d) $sen(\theta)\dfrac{d^3y}{d\theta^3} - cos(\theta)\dfrac{dy}{d\theta} = 2$

   (e) $\ddot{u} - \left(1 - \dfrac{\dot{u}}{t}\right)\dot{u} + u = 0$

3. Escreva uma equação que se encaixe na descrição física dada em cada item:

(a) A taxa de mudança da população P de bactérias no instante t é proporcional à população no instante t.

(b) A velocidade no instante t de uma partícula que se move ao longo de uma linha reta é proporcional à quarta potência de sua posição x.

(c) A taxa de mudança na temperatura T do café no instante t é proporcional à diferença entre a temperatura M do ar no instante t e a temperatura do café no instante t.

(d) A taxa de mudança da massa A do sal no instante t é proporcional ao quadrado da massa do sal presente no instante t.

4. Determine os valores da constante r para os quais a equação dada tem uma solução da forma $y(t) = e^{rt}$.

(a) $y' + 2y = 0$

(b) $y'' + y' - 6y = 0$

5. Abaixo temos equações diferenciais e funções indicadas ao lado. Faça o que se pede:

(Aqui queremos trabalhar o conceito de solução e intervalo de definição. Não estamos buscando soluções, apenas verificando que as funções apontadas são soluções em algum intervalo)

I. Mostre que a função indicada é solução explícita da equação diferencial dada;

II. Aponte o domínio da função indicada;

III. Considerando a função como solução da equação, determine um intervalo I de definição da solução.

(a) $\dfrac{dy}{dt} - y = 0; \quad y(t) = 2e^t$

(b) $t\dfrac{du}{dt} - u = t^2; \quad u(t) = 3t + t^2$

(c) $(y - x)y' = y - x + 8; \; y = x + 4\sqrt{x+2}$

(d) $y' = 25 + y^2; \; y = 5tg(5x)$

6. Verifique que a expressão $\ln\left(\frac{2y-1}{y-1}\right) = t$ é uma solução implícita da equação dada por
$$\frac{dy}{dt} = (y-1)(1-2y).$$

7. Dado que $y = sen(x)$ é uma solução explícita da equação $\frac{dy}{dx} = \sqrt{1-y^2}$, qual dos itens apresenta o maior intervalo de definição possível para esta solução? justifique sua escolha.

(a) $(-\infty, +\infty)$

(b) $[0, 2\pi]$

(c) $(0, 2\pi)$

(d) $(-\pi/2, \pi/2)$

(e) $[-\pi/2, \pi/2]$

(f) $[-\pi/2, \pi/2] \cup [3\pi/2, 5\pi/2]$

8. Encontre uma solução para os problemas de valor inicial, esboce o gráfico destas (pode usar uma ferramenta computacional se necessário), e determine o intervalo no qual a solução está definida:

(Aqui estamos buscando soluções, logo precisamos de alguma técnica adequada. Reveja as notas sobre equações separáveis)

(a) $x + ye^{-x}\dfrac{dy}{dt} = 0, \; y(0) = 1$

(b) $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{3x^2 - e^x}{2y - 5},\ y(0) = 1$

(c) $\dfrac{dr}{d\theta} = \dfrac{r^2}{\theta},\ r(1) = 2$

(d) $sen(2x) + cos(3y)\dfrac{dy}{dt} = 0,\ y(\pi/2) = \pi/3$

(e) $\dfrac{dy}{dt} = xy^3(1 + x^2)^{-1/2}, /y(0) = 1$

(f) $y' - 2y = te^{2t},\ y(1) = 0$

(g) $y' + \frac{2}{t}y = \dfrac{cos(t)}{t^2},\ y(\pi) = 0,\ t > 0$

(h) $ty' + 2y = sen(t),\quad y(\pi/2) = 1,\ t > 0$

9. Considere o problema de valor inicial

$$y' + \frac{1}{4}y = 1 - \frac{1}{2}t,\ y(0) = y_0$$

Encontre o valor de y_0 para o qual a solução encosta no eixo t mas não o atravessa.

10. Considere o problema de valor inicial

$$y' + \frac{1}{2}y = 2cos(t),\ y(0) = -1$$

Encontre as coordenadas do primeiro ponto de máximo local da solução para $t > 0$.

11. A formulação matemática da lei empírica de Newton para o resfriamento/aquecimento de um objeto é dada pela equação diferencial linear de primeira ordem

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_m),$$

em que $T(t)$ é a temperatura do objeto para $t > 0$, T_m é a temperatura ambiente e k é uma constante de proporcionalidade. Sabendo disso resolva o seguinte problema:

Quando um bolo é retirado do forno, sua temperatura é 300°F. Três minutos mais tarde, sua temperatura é 200°F. Quanto tempo levará para o bolo resfriar até a temperatura ambiente de 70°F? A resposta está de acordo com sua intuição física? Caso não encontre um tempo exato, faça uma aproximação, utilize uma ferramenta computacional se necessário.

12. Verifique que as equações abaixo são Equações de Bernoulli e resolva-as usando uma substituição adequada.

    (a) $\dfrac{dy}{dx} = y(xy^3 - 1)$

    (b) $3(1 + t^2)\dfrac{dy}{dt} = 2ty(y^3 - 1)$

13. Considere a equação

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - 4x}{x - y} \qquad (1)$$

    (a) Verifique que esta é uma EDO de primeira ordem não-linear, não separável e que também não é do tipo Bernoulli.

    (b) Esta é uma equação que é possível de resolver através de uma mudança de variável. Para encontrar uma mudança adequada, indicamos que observe o segundo membro da equação:

$$f(x, y) = \frac{y - 4x}{x - y}.$$

    Dividindo o denominador e o numerador por x, mostre que podemos reescrever f como uma função da variável $v = v(x) = \dfrac{y}{x}$.

    (c) Agora, calcule $\dfrac{dv}{dx}$ e expresse $\dfrac{dy}{dx}$ como uma função de x, v e $\dfrac{dv}{dx}$.

    (d) Usando os itens (b) e (c), e substituindo os termos encontrados na equação (1) e reescreva esta em termos de x, v e $\dfrac{dv}{dx}$.

(e) Verifique que a EDO encontrada para v é separável e resolva-a.

(f) Encontre a solução da equação (1) substituindo v por $\dfrac{y}{x}$.

OBS: As equações que podem ser escritas na forma $\dfrac{dy}{dx} = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ são conhecidas como *equações homogêneas.*