Exemplo 3: Uma pedra contém dois isótopos radioativos, RA_1 e RA_2, que pertencem à mesma série radioativa; ou seja, RA_1 decai para RA_2, que então decai para átomos estáveis.
Suponha que a taxa em que RA_1 decai para RA_2 é $50 \cdot e^{-10t}$ kg/s. Como a taxa de decaimento de RA_2 é proporcional à sua massa $y(t)$ presente, indique uma EDO que modele o comportamento da massa de RA_2.
Sendo $K = 2/s$ a constante de proporção do decaimento em relação a massa e se no tempo inicial $t = 0$ temos uma massa de 40 kg de RA_2, encontre a massa $y(t)$ para $t \geq 0$.

· Equação do modelo

$$\frac{dy}{dt} = \text{Taxa de entrada} - \text{Taxa de decaimento}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dt} = 50e^{-10t} - K \cdot y(t)$$

esta é a equação que modela o comportamento da massa $y(t)$ de RA_2.

· Se $K = 2/s$

$y(0) = 40\ Kg$

então encontre $y(t)$.

A equação se torna

$$\frac{dy}{dt} = 50e^{-10t} - 2y$$

com a condição inicial $y(0) = 40$.

: Note que a eq. não é separável

. A equação é linear :)

Usaremos o método dos fatores integrantes para resolve-la.

Multiplicando a eq. por $\mu(t)$ obtemos

$$(1) \quad \mu(t) \cdot \frac{dy}{dt} + \underbrace{2 \cdot \mu(t)}_{\frac{d\mu}{dt}} y = \mu(t) \cdot 50 \cdot e^{-10t}$$

Queremos que

$$\frac{d\mu}{dt} = 2 \cdot \mu(t)$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{\mu(t)} d\mu = \int 2\, dt \Rightarrow \ln|\mu(t)| = 2t + C$$

$$\Rightarrow |\mu(t)| = C_2 e^{2t}.$$

Tomando $\mu(t) = e^{2t}$ teremos por (1) que

$$\underbrace{e^{2t}\cdot\frac{dy}{dt} + 2e^{2t}\cdot y} = e^{2t}\cdot 50\cdot e^{-10t}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left[e^{2t}\cdot y\right] = 50\cdot e^{-8t}$$

Integrando a equação obtemos

$$e^{2t}y = 50\cdot\int e^{-8t}dt$$

$$\Rightarrow e^{2t}y = 50\cdot\frac{e^{-8t}}{(-8)} + C_3$$

$y = y(t)$

$$\Rightarrow y = -\frac{25}{4}e^{-10t} + C_3\cdot e^{-2t}$$

é a família de soluções para a equação.

Desde que $y(0) = 40$, teremos

$$y(0) = -\frac{25}{4} + C_3 = 40$$

$$\Rightarrow C_3 = 40 + \frac{25}{4} = \frac{185}{4}$$

Assim, a função $y(t)$ que descreve a massa de RA_2 para $t \geq 0$ é

$$y(t) = -\frac{25}{4}e^{-10t} + \frac{185}{4}e^{-2t},\ t\geq 0.$$

\#

Seção 2.3. Soluções por substituição

Nesta seção a pergunta relevante é: Se a equação não é separável e nem linear, seria possível alguma substituição que a transforme em um desses tipos?

Esta é uma pergunta que em muitos casos é bem difícil de responder. O que faremos nesta seção é destacar dois formatos de equações que admitem tais substituições.

2º caso: Equação de Bernoulli

$$(2) \qquad \boxed{\frac{dy}{dx} + P(x)\,y = f(x)\cdot y^n,} \qquad \text{com } n \in \mathbb{R}$$

- Note que para $n=0$ ou $n=1$, a equação é linear, e você já está apto a resolver.

- Para $n \neq 0$ e $n \neq 1$ podemos usar a substituição

$$\boxed{u = y^{1-n},}$$

para reduzi-la ao caso linear. De fato, note que

$$u = y^{1-n} \Rightarrow \frac{du}{dx} = \underbrace{(1-n)\cdot y^{-n}}\cdot\frac{dy}{dx}, \quad \begin{matrix} n \neq 0 \\ n \neq 1 \end{matrix}$$

Multiplicando (2) por $(1-n)y^{-n}$ obtemos a seguinte eq.

$$\frac{du}{dx} + (1-n)\,P(x)\,u = (1-n)\,f(x)$$

que é linear para u.

Digitalizado com CamScanner

Exemplo 2: Encontre uma família de soluções para a equação

$$y^{1/2}\frac{dy}{dx} + y^{3/2} = 1 \qquad (1)$$

Reescrevendo a equação obtemos para $y>0$

$$\frac{dy}{dx} + y = y^{-1/2} \qquad (2)$$

que é uma equação do tipo Bernoulli. Vamos usar uma substituição para obtermos uma equação linear.

Tomando $u = y^{1-(-1/2)} = y^{3/2}$

e logo

$$\frac{du}{dx} = \frac{3}{2}\cdot y^{1/2}\cdot\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dg}{dx} = \frac{dg}{dy}\frac{dy}{dx}$$

$g(y)$

Multiplicando a equação (1) por $\frac{3}{2}$ temos:

$$\underbrace{\frac{3}{2}y^{1/2}\frac{dy}{dx}} + \frac{3}{2}y^{3/2} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{du}{dx} + \frac{3}{2}u = \frac{3}{2}} \qquad (3)$$

Esta é linear e vamos resolver usando fator integrante.

regra da cadeia $\quad f(g(x))$

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dg}\cdot\frac{dg}{dx}$$

→ quociente de diferenciais

Multiplicando a equação (3) por uma função $\alpha(x)$ obtemos

$$\frac{d}{dx}\left(f(x)\,g(x)\right) = \frac{df}{dx}\cdot g(x) + f(x)\cdot\frac{dg}{dx}$$

$$(4)\quad \alpha(x)\frac{du}{dx} + \overbrace{\frac{3}{2}\alpha(x)}^{\frac{d\alpha}{dx}}u = \frac{3}{2}\alpha(x)$$

e queremos que $\alpha(x)$ satisfaça

$$\frac{d\alpha}{dx} = \frac{3}{2}\alpha(x).$$

Logo,

$$\frac{1}{\alpha(x)}\frac{d\alpha}{dx} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \int\left(\frac{1}{\alpha(x)}\frac{d\alpha}{dx}\right)dx = \int\frac{3}{2}\,dx$$

$$\Rightarrow \int\frac{1}{\alpha(x)}\,d\alpha = \frac{3}{2}x + C_1$$

$$\Rightarrow \ln|\alpha(x)| = \frac{3}{2}x + C_1$$

$$\Rightarrow |\alpha(x)| = C\cdot e^{3/2x}$$

Tomando $\alpha(x) = e^{3/2x}$ obtemos da eq. (4)

$$\underbrace{e^{3/2x}\frac{du}{dx} + \frac{3}{2}e^{3/2x}u}_{} = \frac{3}{2}e^{3/2x}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(e^{3/2x}\cdot u\right) = \frac{3}{2}e^{3/2x}$$

$$\Rightarrow e^{3/2x}\cdot u = \int \frac{3}{2}e^{3/2x}\,dx$$

integrando em x

$$\Rightarrow e^{3/2x} u = e^{3/2x} + C$$

$$\Rightarrow u = 1 + \frac{C}{e^{3/2x}}$$

$$\Rightarrow u = 1 + C \cdot e^{-3/2x}$$

Assim,

$$y^{3/2} = 1 + C \cdot e^{-3/2x}$$

$$\Rightarrow y = \left(1 + Ce^{-3/2x}\right)^{2/3}$$

e esta expressão defini uma família de soluções definidas em algum intervalo $I \subset \mathbb{R}$.

$\therefore$ intervalo I contido nos reais