Analisi Matematica

Gabriele de Capoa

25 agosto 2022
Versione 1.1

Prefazione

Questi appunti nascono dalla sistemazione dei miei appunti cartacei presi durante l'anno accademico 2008 - 2009 seguendo le lezioni del Professor Pierpaolo Natalini, tenutesi per la laurea di Ingegneria Informatica dell'Università degli Studi Roma Tre.

Poichè non sono stati revisionati nè dal docente citato nè da altre persone competenti in quest'argomento, eventuali errori di concetto sono da ritenersi mie imprecisioni nella comprensione della materia.

Sono stati aggiunti anche capitoli di approfondimento su nozioni propedeutiche al corso, come capitoli riguardanti argomenti fuori programma ma che agevolano la comprensione di altri corsi.

Indice

Parte I

La costruzione dei numeri

Capitolo 1

Gli insiemi numerici

La matematica, come tutto il mondo, è basata sui numeri.
In base alle loro caratteristiche comuni, possiamo raggruppare i numeri in insiemi particolari, detti insiemi numerici.

1.1 I numeri

Un **numero** è un modo di esprimere una quantità, oppure la posizione in un elenco di elementi, oppure il rapporto tra grandezze dello stesso tipo.

L'idea di numero nasce agli albori della civiltà, per la necessità astrarre il concetto di quantità. Ciò ha permesso al pensiero umano di raggiungere mete notevoli in ogni ambito.

Cenni storici

Già nella preistoria, le popolazioni avevano definito il concetto di *quantità* e avevano rappresentato questo concetto in qualche modo.

Le prime rappresentazioni di numeri con simboli specifici sono però riconducibili ai popoli mesopotamici, dove il *sistema di numerazione* usato per i pittogrammi era sessagesimale (come ora misuriamo il tempo).
Gli egizi, invece, usavano gerolifici specifici per rappresentare i numeri 1, 10, 100, 1000, 10000, 100000, 1000000 e la loro numerazione e tutta decimale.
In Grecia, il concetto di numero è stato alla base di numeri studi filosofici, da quelli di Parmenide a quelli di Platone e Pitagora. In Cina, invece, il concetto di numero era già noto fin dal VI secolo a.C., grazie alle loro conoscenze di astronomia.

Tipologie di numeri

Un numero che esprime la dimensione di un insieme di elementi, così come un numero che identifica la posizione in una successione di oggetti, è detto *numero naturale*.
La necessità di esprimere una grandezza in relazione ad un'altra grandezza ha reso necessaria l'introduzione di altre classi di numeri, come i numeri razionali

ed i numeri reali.

Su ciascuna tipologia di numeri si possono definire una serie di **operazioni** , che permettono di generare nuovi numeri a partire da uno o più numeri. In questo modo, possono essere generati i vari insiemi numerici.
Le operazioni numeriche fondamentali (dette **operazioni aritmetiche**) sono l'addizione, la sottrazione, la moltiplicazione e la divisione.

1.2 Nozioni di teoria degli insiemi

La **teoria degli insiemi** svolge un ruolo importante per i fondamenti della matematica e si colloca nell'ambito della *logica matematica*.

Concetti base

Definizione 1.1 (Insieme)**.** Un **insieme** è una collezione di oggetti aventi una proprietà in comune.

Gli insiemi sono identificati attraverso le lettere maiuscole dell'alfabeto.
Gli **elementi** di un insieme (gli oggetti), invece, vengono identificati tramite le lettere minuscole dell'alfabeto.

Definizione 1.2 (Appartenenza a un insieme)**.** Un elemento x appartiene a un insieme A, e si indica con $x \in A$, se l'elemento è contenuto all'interno dell'insieme.

Osservazione 1.1. $x \in A$ non è da confondere con $\{x\}$, che indica un insieme formato da un solo elemento.

Definizione 1.3 (Insieme vuoto)**.** Un insieme A si dice **vuoto**, e si indica con $A = \emptyset$, se non contiene alcun elemento.

1.3 Rappresentazione di un insieme

Un insime può essere rappresentato in tre modi diversi:

- per **elenco**, definendo tutti gli elementi;
- per **caratteristica**, definendo la proprietà che contraddistingue gli elementi dell'insieme;
- tramite **diagrammi di Eulero–Venn**, che consiste nel racchiuderne gli elementi all'interno di una linea chiusa non intrecciata.

Esempio 1.1

L'insieme

$$A = \{-2, 3, 1\}$$

è definito per elenco, mentre l'insieme

$$A = \{x \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$$

è definito per caratteristica.

Sottoinsiemi

Definizione 1.4 (Sottoinsieme)**.** Un insieme S si dice **sottoinsieme** di un insieme A se ogni elemento dell'insieme S è anche un elemento dell'insieme A.
In termini matematici,

$$S \subseteq A \Leftrightarrow x \in S \Rightarrow x \in A \tag{1.1}$$

Usando i diagrammi di Eulero-Venn, un sottoinsieme può essere rappresentato come nella Figura 1.1. Possiamo notare che sia l'insieme vuoto che l'insieme

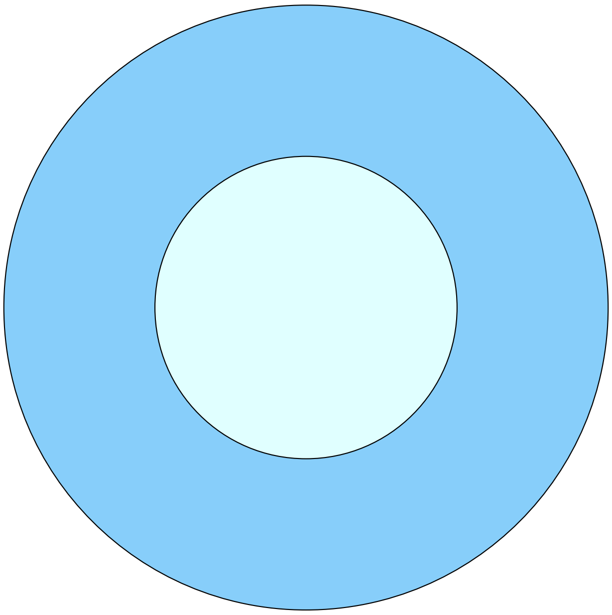


Figura 1.1: Sottoinsieme

stesso sono sottoinsiemi di un insieme A; in questo caso si parla di **sottoinsiemi impropri**. Esistono però anche *sottoinsiemi propri*.

Definizione 1.5 (Sottoinsieme proprio)**.** Un insieme S si dice **sottoinsieme proprio** di un insieme A se $S \subseteq A$ ma $S \neq A$.
In termini matematici,

$$S \subset A \Leftrightarrow (x \in S \Leftarrow x \in S) \wedge (\exists y \in A \mid y \notin S) \tag{1.2}$$

Esempio 1.2

Dato l'insieme $A = \{-2, 3, 1\}$, l'insieme $S = \{-2, 3\}$ è un sottoinsieme proprio di A.

Grazie alla definizione di sottoinsieme, è possibile verificare se due insiemi sono uguali.

Definizione 1.6 (Insiemi uguali)**.** Due insiemi A e B si dicono **uguali** se ogni elemento dell'insieme A è anche elemento dell'insieme B e viceversa.
In termini matematici,

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \land B \subseteq A \tag{1.3}$$

Operazioni sugli insiemi

Sugli insiemi, come su tutti gli enti matematici, si possono effettuare delle **operazioni**.
Le operazioni possibili sugli insiemi sono l'unione, l'intersezione, la differenza e il prodotto cartesiano.

Definizione 1.7 (Unione di insiemi)**.** Siano A e B due insiemi. Si definisce l'operazione di **unione tra insiemi** come la creazione di un insieme contenente gli elementi che appartengono a almeno uno dei due insiemi (Figura 1.2).

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \lor x \in B\} \tag{1.4}$$

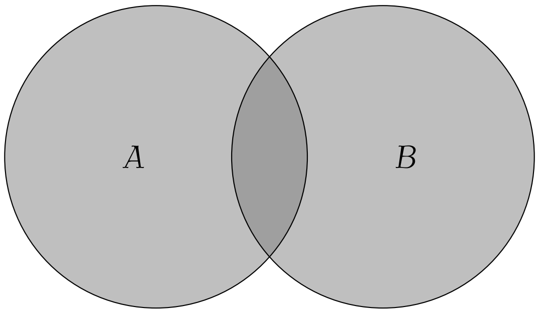


Figura 1.2: Unione di insiemi

Se gli elementi degli insiemi A e B vengono considerati due o più volte, l'unione dei due insiemi è detta *unione disgiunta*.

Definizione 1.8 (Intersezione di insiemi)**.** Siano A e B due insiemi. Si definisce l'operazione di **intersezione tra insiemi** come la creazione di un insieme contenente solamente gli elementi appartenenti a entrambi gli insiemi (Figura 1.3).

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \land x \in B\} \tag{1.5}$$

Se l'intersezione tra i due insiemi restituisce un insieme vuoto, gli insiemi A e B vengono detti *disgiunti*.
Possiamo effettuare considerazioni sull'intersezione. Se l'insieme B è sottoinsieme dell'insieme A allora $A \cap B = B$, mentre se l'insieme A è sottoinsieme dell'insieme B allora $A \cap B = A$; infine, l'affermazione $A \cap A = A$ è sempre vera.

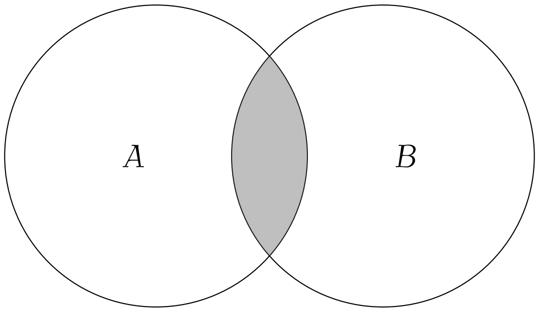


Figura 1.3: Intersezione di insiemi

Le operazioni d'intersezione e di unione hanno proprietà in comune.
Per le due operazioni, infatti, valgono le proprietà **commutativa** ($A \cap B = B \cap A$ e $A \cup B = B \cup A$), **associativa** ($A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ e $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$) e **distributiva** ($A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ e $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$).

Definizione 1.9 (Differenza tra insiemi)**.** Siano A e B due insiemi. Si definisce l'operazione di **differenza tra insiemi**, e si indica con $A \setminus B$, l'insieme contenente gli elementi del primo insieme ma non del secondo (Figura 1.4).

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\} \tag{1.6}$$

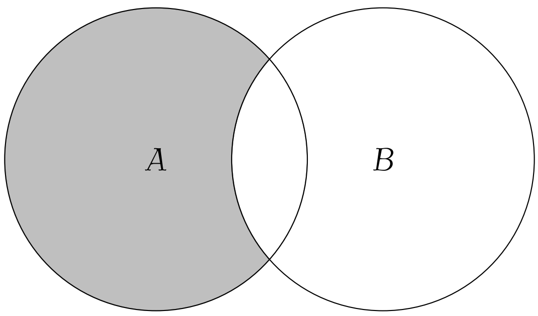


Figura 1.4: Differenza di insiemi

Se l'insieme A è sottoinsieme dell'insieme B, l'insieme differenza prende il nome di **insieme complementare di A in B** ($\complement_B A$, Figura 1.5).

Definizione 1.10 (Prodotto cartesiano)**.** Il **prodotto cartesiano** tra due insiemi A e B, che si indica con il simbolo $\times$, consiste nellll'insieme di tutte le possibili coppie ordinate (a, b) con $a \in A$ e $b \in B$.
In termini matematici, si ha

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\} \tag{1.7}$$

Esempio 1.3

Dati $A = \{a_1, a_2\}$ e $B = \{1, 2, 3\}$, i prodotti cartesiani $A \times B$ e $B \times A$ sono:

$$A \times B = \{(a_1, 1), (a_1, 2), (a_1, 3), (a_2, 1), (a_2, 2), (a_2, 3)\}$$
$$B \times A = \{(1, a_1), (1, a_2), (2, a_1), (2, a_2), (3, a_1), (3, a_2)\}$$

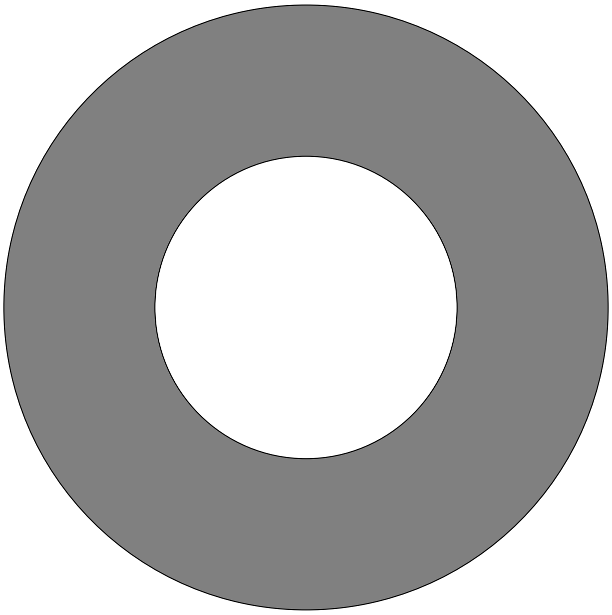


Figura 1.5: Insieme complementare

Come si vede dall'esempio, il prodotto cartesiano non gode della proprietà commutativa.
Se il prodotto cartesiano si esegue sullo stesso insieme A, si può indicare con una forma compatta tramite il simbolo A^2.

1.4 Caratteristiche degli insiemi numerici

Gli insiemi numerici (Figura 1.6 finora conosciuti sono:

$\mathbb{N}$	*Insieme dei numeri naturali*
$\mathbb{N}_0$	*Insieme dei numeri naturali con lo zero*
$\mathbb{Z}$	*Insieme dei numeri interi*
$\mathbb{Q}$	*Insieme dei numeri razionali*
$\mathbb{R}$	*Insieme dei numeri reali*
$\mathbb{C}$	*Insieme dei numeri complessi*

In questo tipo di insiemi, analizziamo alcuni elementi particolari che ci torneranno utili in seguito durante lo studio delle funzioni.

Maggiorante e minorante

Consideriamo un insieme A sottoinsieme di un insieme numerico. Per questo insieme è possibile definire due valori, detti rispettivamente *maggiorante* e *minorante*, che "delimitano" l'insieme.

Definizione 1.11 (Maggiorante di A)**.** Dato un insieme A, un numero $M \in A$ si definisce **maggiorante di A** se $a \leq M \qquad \forall a \in A$.

Definizione 1.12 (Minorante di A)**.** Dato un insieme A, un numero $m \in A$ si definisce **m**inorante di A se $a \geq m \qquad \forall a \in A$.

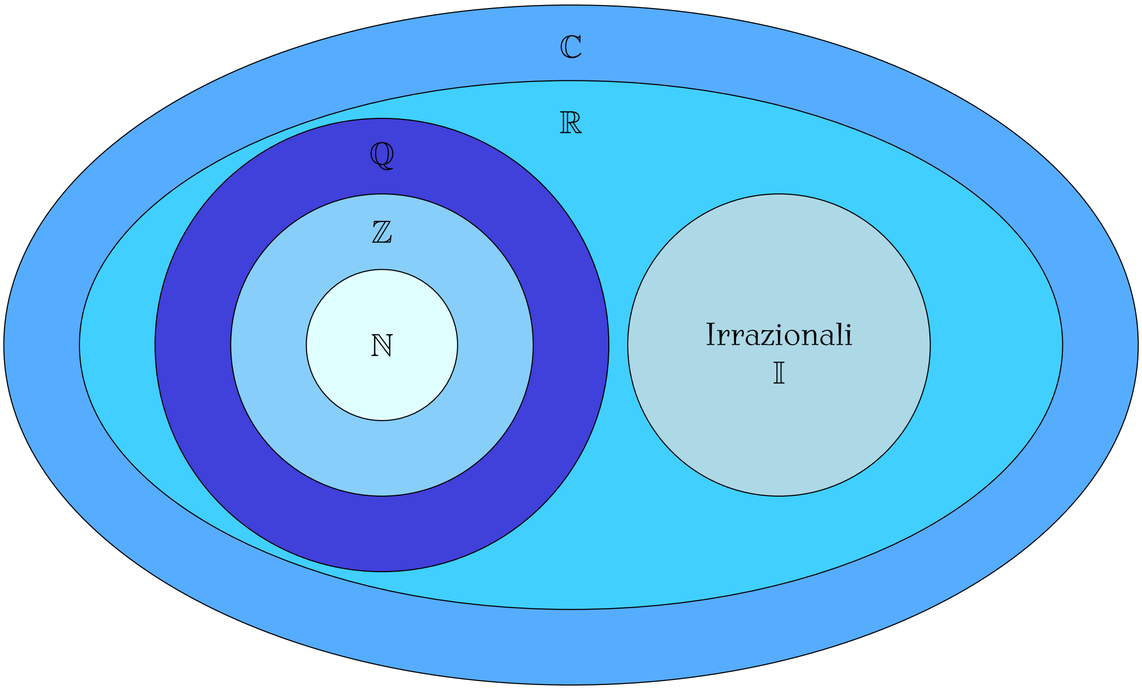


Figura 1.6: Diagramma di Venn degli insiemi numerici

Come abbiamo visto, il maggiorante e il minorante delimitano l'insieme; per questo motivo, definiremo insiemi *limitati* e *illimitati*.

Definizione 1.13 (Insiemi limitati e illimitati superiormente)**.** Dato un insieme A, se esso ammette un maggiorante si definisce **limitato superiormente**; se non lo ammette, l'insieme si definisce **illimitato superiormente**.

Definizione 1.14 (Insiemi limitati e illimitati inferiormente)**.** Dato un insieme A, se esso ammette un minorante si definisce **limitato inferiormente**; se non lo ammette, l'insieme si definisce **illimitato inferiormente**.

Definizione 1.15 (Insiemi limitati e illimitati)**.** Dato un insieme A, se esso ammette un maggiorante e un minorante si definisce **limitato**; se non li ammette, l'insieme si definisce **illimitato**.

Esempio 1.4

I maggioranti dell'insieme $A = \{x \in \mathbb{Q} | x < \frac{1}{2}\}$ *sono tutti i valori* $m \geq \frac{1}{2}$.

Esempio 1.5

I minoranti dell'insieme $B = \{x \in \mathbb{Q} | x \geq 2\}$ *sono tutti i valori* $m < 2$.

Estremo superiore e inferiore

Tra gli infiniti maggioranti di un insieme, è possibile determinare il più piccolo tra essi. Allo stesso modo, è possibile determinare il più grande minorante tra gli infiniti di un insieme.

Definizione 1.16 (Estremo superiore di A)**.** Dato un insieme A, non vuoto e limitato superiormente, il valore $M \in A$ si definisce **estremo superiore di A** se $a \leq M \qquad \forall a \in A$ e se $\forall n \in \mathbb{N} \exists x \in A | x > (M - \frac{1}{n})$.

Definizione 1.17 (Estremo inferiore di A)**.** Dato un insieme A, non vuoto e limitato inferiormente, il valore $m \in A$ si definisce **estremo inferiore di A** se $a \geq M \qquad \forall a \in A$ e se $\forall n \in \mathbb{N} \exists x \in A | x < (m + \frac{1}{n})$.

Massimo e minimo di un insieme

Quando l'estremo superiore o inferiore appartiene all'insieme A, si dice, allora, che l'insieme è dotato un valore *massimo* e/o di un valore *minimo*.

Definizione 1.18 (Massimo di un insieme)**.** Dato un insieme A, non vuoto e limitato superiormente, il valore $M \in A$ si definisce **massimo di A** ($M = \max A$) se $a \leq M \qquad \forall a \in A$ e se $M \in A$.

Definizione 1.19 (Minimo di un insieme)**.** Dato un insieme A, non vuoto e limitato inferiormente, il valore $m \in A$ si definisce **minimo di A** ($M = \min A$) se $a \geq m \qquad \forall a \in A$ e se $m \in A$.

Possiamo dimostrare che, se esistono in un insieme massimo e/o minimo, questi *sono unici*. Dimostriamo solamente l'unicità del massimo, poichè la dimostrazione dell'unicità del minimo è simile.

Teorema 1.1. *Un insieme A non può avere due massimi.*

Dimostrazione: Ipotizziamo di avere due valori $\Lambda = \sup A$ e $\Lambda' = \sup A$. Se considero Λ' come elemento dell'insieme, abbiamo che $\Lambda \geq \Lambda'$; se considero Λ come elemento dell'insieme, abbiamo che $\Lambda' \geq \Lambda$.
Abbiamo così ottenuto che sia Λ sia Λ' sono maggioranti di A; poichè, inoltre, sono entrambi i più piccoli tra i maggioranti, allora è impossibile che $\Lambda \neq \Lambda'$, quindi si ha che $\Lambda = \Lambda'$. □

Capitolo 2

I numeri naturali

Analizziamo ora l'insieme numerico più semplice: quello dei numeri naturali.

2.1 L'insieme $\mathbb{N}$

I **numeri naturali**, il cui insieme si rappresenta con la lettera $\mathbb{N}$, sono *ordinati* tra loro: dati due numeri naturali qualunque e diversi tra loro, si può sempre stabilire se uno è minore o maggiore dell'altro.
Poiché l'insieme dei numeri naturali è il più antico esistente, i suoi elementi sono alla base della *teoria dei numeri*.

É possibile sempre identificare un numero **precendente** e un numero **successivo** ad un dato numero naturale. Questo ci permette di rappresentare l'insieme dei numeri naturali su una *semiretta orientata* (Figura 2.1).

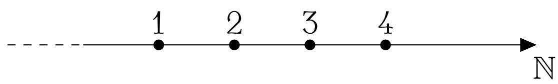


Figura 2.1: Semiretta orientata dei numeri naturali

Questa rappresentazione ci permette di identificare una particolarità dell'insieme $\mathbb{N}$: l'insieme è **discreto**.

2.2 Il principio di induzione

Definiamo ora un particolare principio matematico, che ci tornerà molto comodo per dimostrare molte proprietà matematiche: il **principio di induzione**. Questo principio è l'unica struttura nativa dell'insieme $\mathbb{N}$, e tutte le definizioni che vedremo in seguito saranno dimostrate usandolo.

Definizione 2.1 (Principio di induzione). .
Sia $n_0 \geq 0$ un numero naturale e sia $P(n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ una proprietà definita su di essi.
Supponiamo che siano verificate le seguenti condizioni:

1. $P(n_0)$ è vero
2. per ogni $n \geq n_0$, se $P(n)$ è vero allora $P(n+1)$ è vero.

Allora $P(n)$ è vera.

Dimostriamo come si utilizza questo principio mediante due formule di largo utilizzo nella matematica: la *somma dei primi numeri naturali* e *somma delle prime potenze di un dato numero*.

Esempio 2.1

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n*(n+1)}{2}$$

Passo base: $\sum_{k=1}^{1} k = \frac{1*(1+1)}{2} = 1$
Ipotesi: $1+2+3+\cdots+\bar{n} = \frac{\bar{n}*(\bar{n}+1)}{2}$
Tesi: $1+2+3+\cdots+\bar{n}+(\bar{n}+1) = \frac{(\bar{n}+1)(\bar{n}+2)}{2}$
Dimostrazione:

$$1+2+3+\cdots+\bar{n}+(\bar{n}+1) = \frac{\bar{n}*(\bar{n}+1)}{2} + (\bar{n}+1) =$$
$$\frac{2(\bar{n}+1)+\bar{n}(\bar{n}+1)}{2} = \frac{(\bar{n}+1)(\bar{n}+2)}{2}$$

Esempio 2.2

$$\sum_{k=1}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1$$

Passo base: $2^0 = 2^{0+1} - 1 = 1$
Ipotesi:

$$\sum_{k=1}^{\bar{n}} 2^k = 2^{\bar{n}+1} - 1$$

Tesi:

$$\sum_{k=1}^{\bar{n}+1} 2^k = 2^{\bar{n}+2} - 1$$

Dimostrazione:

$$\sum_{k=1}^{\bar{n}+1} 2^k = \sum_{k=1}^{\bar{n}} 2^k + 2^{\bar{n}+1} =$$
$$= 2^{\bar{n}+1} - 1 + 2^{\bar{n}+1} = 2 * 2^{\bar{n}+1} - 1 = 2^{\bar{n}+2} - 1$$

Per dimostrare, invece, il principio di induzione stesso, bisogna procedere per assurdo, negando la tesi.
Questa dimostrazione non verrà riportata.

2.3 Assiomi di Peano

La particolarità dei numeri naturali è che non si possono definire usando altri elementi, ma solamente tramite tre assiomi, detti **assiomi di Peano**. Questi assiomi sfruttano il principio di induzione.

Assioma 2.1

Nell'insieme $\mathbb{N}$ esiste il numero 1 e l'insieme $\mathbb{N} \setminus \{1\}$ non è vuoto.

Assioma 2.2

Ogni numero naturale possiede un numero successivo.

Assioma 2.3

Ogni numero si ottiene da 1 contando in successione.

Operazioni

Sugli elementi di questo insieme si definiscono le operazioni di **somma** o **addizione** (+) e di **prodotto** o **moltiplicazione** ($*$), definendone poi le regole di calcolo, che prenderemo come postulati.
Gli operandi e il risultato di queste operazioni hanno un nome preciso:

- nell'addizione, i due operandi si chiamano **addendi** mentre il risultato si chiama **somma**;
- nella moltiplicazione, i due operandi si chiamano **fattori** mentre il risultato si chiama **prodotto**.

Postulato 2.1. La somma e il prodotto sono operazioni **chiuse** in $\mathbb{N}$.

$$\forall a, b \in \mathbb{N} \Rightarrow a + b \in \mathbb{N}$$

$$\forall a, b \in \mathbb{N} \Rightarrow a * b \in \mathbb{N}$$

Postulato 2.2. Per le operazioni di somma e prodotto vale la **proprietà commutativa**.

$$\forall a, b \in \mathbb{N} \Rightarrow a + b = b + a$$

$$\forall a, b \in \mathbb{N} \Rightarrow a * b = b * a$$

Postulato 2.3. Per le operazioni di somma e prodotto vale la **la proprietà associativa**.

$$\forall a, b \in \mathbb{N} \Rightarrow (a + b) + c = a + (b + c)$$

$$\forall a, b \in \mathbb{N} \Rightarrow (a * b) * c = a * (b * c)$$

Postulato 2.4. Per le operazioni di somma e prodotto vale la **proprietà distributiva**.

$$\forall a, b, c \in \mathbb{N} \Rightarrow (a + b) * c = a * c + b * c$$

Postulato 2.5. Esiste in $\mathbb{N}$ l'elemento neutro rispetto al prodotto ($\exists 1 \in \mathbb{N} | \forall a \in \mathbb{N} : 1 * a = a$)

Successivamente, viene introdotto nell'insieme dei numeri reali lo zero ($\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup 0$); per questo nuovo insieme, oltre ai cinque postulati precedenti, ne vale anche un altro.

Postulato 2.6. Esiste in $\mathbb{N}_0$ l'elemento neutro rispetto alla somma ($\exists 0 \in \mathbb{N} | \forall a \in \mathbb{N} : 0 + a = a$)

Tutte le regole di calcolo per le operazioni di somma e di prodotto che noi conosciamo sono conseguenze di questi postulati appena enunciati.
Una di queste, con la relativa dimostrazione, è la seguente.

Teorema 2.1. $\exists ! 0 \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow \forall a \in \mathbb{N}_0 : 0 + a = a$

Dimostrazione: $\exists ! \varepsilon \in \mathbb{N} \Rightarrow \forall a \in \mathbb{N}_0 : \varepsilon + a = a \Rightarrow \varepsilon = 0 + \varepsilon = 0$ □

É possibile definire anche le operazioni *inverse* a quelle di somma e moltiplicazione; queste operazioni sono note con il nome di **sottrazione** ($-$) e **divisione** (:).
Anche per queste operazioni gli operandi e il risultato di queste operazioni hanno un nome preciso:

- nella sottrazione, il primo operando si chiama **minuendo**, il secondo **sottraendo** e il risultato **differenza**;
- nella divisione, il primo operando si chiama **dividendo**, il secondo **divisore** e il risultato **quoto** (se il **resto** è nullo) o **quoziente**.

Postulato 2.7. La sottrazione e la divisione non sono operazioni chiuse in $\mathbb{N}$.

$$\forall a, b \in \mathbb{N} \Rightarrow a - b \notin \mathbb{N}$$

$$\forall a, b \in \mathbb{N} \Rightarrow a : b \notin \mathbb{N}$$

Postulato 2.8. Per le operazioni di sottrazione e divisione, vale la **proprietà invariantiva**.

$$\forall a, b, c \in \mathbb{N} \Rightarrow a - b = (a \pm c) - (b \pm c)$$

$$\forall a, b, c \in \mathbb{N} \Rightarrow a : b = (a * c) : (b * c) \text{ oppure } a : b = (a : c) : (b : c)$$

Postulato 2.9. Per le operazioni di somma e divisione vale la **proprietà distributiva**.

$$\forall a, b, c \in \mathbb{N} \Rightarrow (a + b) : c = a : c + b : c$$

Capitolo 3

I numeri interi

Siccome i numeri natuali non sono adatti per risolvere tutti i problemi, introduciamo un nuovo insieme numerico: quello dei numeri interi.

3.1 L'insieme $\mathbb{Z}$

In base all'assiomatica vista per $\mathbb{N}_0$, non può esistere un numero naturale ε per cui, dato un numero $a \in \mathbb{N}_0$ si abbia $\varepsilon + a = 0$.
Per risolvere questo tipo di equazioni, quindi, si arriva a definire un nuovo *ente numerico*, che possa essere la soluzione a queste equazioni. Questo nuovo ente numerico prende il nome di **elemento opposto di** a e si indica con $-a$.

Tutto ciò ci porta ad ampliare, sia algebricamente sia geometricamente, l'insieme $\mathbb{N}_0$, definendo l'insieme $\mathbb{Z}$, l'insieme dei numeri interi, come l'unione tra $\mathbb{N}_0$ e tutti gli elementi opposti di $\mathbb{N}$, detti anche *numeri negativi*.
Grazie all'ampliamento geometrico, anche l'insieme $\mathbb{Z}$ può essere rappresentato su una *semiretta orientata* (Figura 3.1), il che significa che, come $\mathbb{N}$ e $\mathbb{N}_0$, anche $\mathbb{Z}$ è un insieme ordinato.

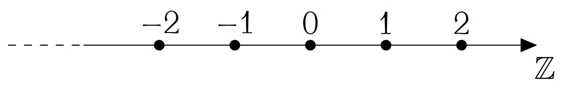


Figura 3.1: Semiretta orientata dei numeri interi

Anche l'insieme $\mathbb{Z}$ è **discreto**.

3.2 Operazioni

Poiché $\mathbb{Z} \supset \mathbb{N}_0 \supset \mathbb{N}$, anche per l'insieme dei numeri interi valgono i postulati visti precedentemente (Postulato 2.1, Postulato 2.2, Postulato 2.3, Postulato 2.4, Postulato 2.5, Postulato 2.6, Postulato 2.8, Postulato 2.9). Inoltre, in questo insieme è possibile definire un ulteriore postulato.

Postulato 3.1. Esiste in $\mathbb{Z}$ l'elemento opposto. ($\forall a \in \mathbb{Z} : a + (-a) = 0$)

Grazie al Postulato 3.1, possiamo definire la chiusura dell'operazione di sottrazione all'interno dell'insieme $\mathbb{Z}$.

Postulato 3.2. La sottrazione è un'operazione **chiusa** in $\mathbb{Z}$.

$$\forall a, b \in \mathbb{Z} \Rightarrow a - b \in \mathbb{Z}$$

Vediamo ora come, tramite questi assiomi, nasce la regola di calcolo dei segni che applichiamo alla moltiplicazione.

Teorema 3.1. $\exists a, b \in \mathbb{Z} : a * (-b) = (-a) * b = -ab$

Dimostrazione: $a * (-b) + ab = a * ((-b) + b) = a * 0 = 0$ oppure $(-a) * b + ab = b * ((-a) + a) = b * 0 = 0$ □

Capitolo 4

I numeri razionali

Come abbiamo visto finora, la divisione non è una operazione chiusa nè per i numeri naturali nè per i numeri interi. Esiste un insieme numerico in cui questa operazione è chiusa: l'insieme dei numeri razionali.

4.1 L'insieme $\mathbb{Q}$

Nell'insieme $\mathbb{Z}$, dato un qualsiasi numero a non nullo, non è possibile determinare un numero ε tale che $\varepsilon * a = 1$.
Per dimostrare ciò, poniamo $a = 2$. In questo modo dobbiamo determinare quel valore ε tale che $\varepsilon * 2 = 1$; l'equazione si semplifica come:

$$\varepsilon * (1 + 1) = 1 \Rightarrow \varepsilon + \varepsilon = 1$$

Da questa espressione, notiamo che ε è un numero naturale, perché se così non fosse la somma $\varepsilon + \varepsilon$ restituirebbe un numero negativo. Pensare che ε è un numero negativo porta a dire che $\varepsilon + (\varepsilon + (-1)) = 0$, cioè che $(\varepsilon + (-1)) = 0$, che è una contraddizione.

Introduciamo così un nuovo *ente matematico* che ci permetta di risolvere questo tipo di equazioni; questo nuovo ente verrà indicato come a^{-1} oppure come $\frac{1}{a}$ e prenderà il nome di **elemento inverso di a.**
L'introduzione di questo nuovo ente provoca l'ampliamento dell'insieme numerico in uso, arrivando a definire l'insieme dei numeri razionali $\mathbb{Q}$ come

$$\mathbb{Q} = \{n * d^{-1} | n \in \mathbb{Z} \land d \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$$

4.2 Operazioni

Per come è definito l'insieme $\mathbb{Q}$, i postulati di definizione delle operazioni e delle loro proprietà visti precedentemente (Postulato 2.1, Postulato 2.2, Postulato 2.3, Postulato 2.4, Postulato 2.5, Postulato 2.6, Postulato 2.8, Postulato 2.9, Postulato 3.2) sono validi anche per i numeri razionali.
Aggiungiamo ora un nuovo postulato.

Postulato 4.1. Esiste in $\mathbb{Q}$ l'elemento inverso $(\forall a \in \mathbb{Q} : a * a^{-1} = 1)$

Grazie a Postulato 4.1, possiamo affermare che l'operazione di divisione è chiusa in $\mathbb{Q}$.

Postulato 4.2. La divisione è un'operazione **chiusa** in $\mathbb{Q}$.

$$\forall a, b \in \mathbb{Q} \Rightarrow a : b \in \mathbb{Q}$$

Frazioni

Un ente matematico che si riesce a definire grazie a Postulato 4.2 è la *frazione*.

Definizione 4.1. Dati due numeri $a, b \in \mathbb{Z}$, con $b \neq 0$, si definisce **frazione** una coppia ordinata di numeri interi.
a si dice **numeratore**, mentre b si dice **denominatore**.

$$\frac{a}{b} = a : b$$

Le frazioni in cui il numeratore è minore del denominatore vengono dette **proprie**, quelle con numeratore maggiore del denominatore vengono dette **improprie**, e quelle con numeratore multiplo del denominatore sono dette **apparenti**.

4.3 Assiomi di ordinamento

Sia per $\mathbb{Z}$, sia per $\mathbb{Q}$ (in particolare, per i sottoinsiemi $\mathbb{Q}^-$ e $\mathbb{Q}^+$) è possibile definire una serie di assiomi, detti *di ordinamento*, che stabiliscono una relazione d'ordine tra i loro elementi.

Assioma 4.1

$$\forall a, b \in \mathbb{Z}, a > b \Rightarrow a + (-b) \in \mathbb{N}$$

Assioma 4.2

$$\forall a, b \in \mathbb{Z}, a < b \Rightarrow b + (-a) \in \mathbb{N}$$

Assioma 4.3

$$\forall a, b \in \mathbb{Z}, a \geq b \Rightarrow a + (-b) \in \mathbb{N} \vee a + (-b) = 0$$

Assioma 4.4

$$\forall a, b \in \mathbb{Z}, a \leq b \Rightarrow b + (-a) \in \mathbb{N} \vee b + (-a) = 0$$

Assioma 4.5

$$\forall a, b \in \mathbb{Q}, a > b \Rightarrow a + (-b) \in \mathbb{Q}^+$$

Assioma 4.6

$$\forall a, b \in \mathbb{Q}, a < b \Rightarrow a + (-b) \in \mathbb{Q}^+$$

Assioma 4.7

$$\forall a, b \in \mathbb{Q}, a \geq b \Rightarrow a + (-b) \in \mathbb{Q}^+ \vee a + (-b) = 0$$

Assioma 4.8

$$\forall a, b \in \mathbb{Q}, a \leq b \Rightarrow a + (-b) \in \mathbb{Q}^+ \vee b + (-a) = 0$$

Ma come viene effettuato il confronto tra due numeri razionali?
Dati due numeri razionali, rappresentati come frazioni $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, il confronto si può effettuare:

1. riducendo al minimo denominatore comune e conforntando i numeratori;

2. moltiplicando in croce numeratori e denominatori e confrontando la *diagonale principale* (ac) con la *diagonale secondaria* (bd).

Grazie a questi criteri di confronto e agli assiomi di ordinamento, possiamo definire $\mathbb{Q}$ come insieme ordinato, e possiamo rappresentarlo su una *semiretta orientata* (Figura 4.1).

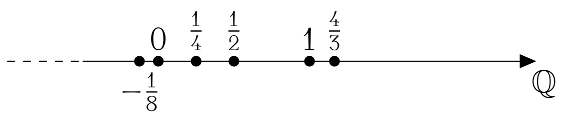


Figura 4.1: Semiretta orientata dei numeri razionali

4.4 Insiemi discreti

Gli insiemi numerici visti finora sono insiemi *infiniti*, cioè non si conosce il loro numero di elementi. Proprio perchè infiniti, sembra strano affermare che i numeri interi e i numeri razionali possono essere messi in relazione biunivoca con i numeri naturali.
Quando ciò avviene, però, si dice che l'insieme ha la **cardinalità del numerabile**.

Definizione 4.2. Un insieme numerico la cui cardinalità è quella del numerabile è detto **insieme discreto**.

Sia gli insiemi $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ sono insiemi discreti.

4.5 Insieme induttivo

Ora che abbiamo definito il principio di induzione, e grazie agli assiomi di ordinamento, possiamo dare ora la definizione di *insieme induttivo*.

Definizione 4.3. Un insieme A viene definito **induttivo** se contiene come elemento l'insieme vuoto e se è sempre possibile trovare al suo interno il successore di un suo generico elemento.

In base a questa definizione, possiamo affermare che $\mathbb{Z}$ è un insieme induttivo, poiché, dato un numero intero, è sempre possibile trovare il suo successivo all'interno dell'insieme stesso.
Al contrario, dato un numero razionale, non è possibile determinare il suo successivo, poiché vi sono infiniti numeri razionali tra due valori a e b; per questo motivo, $\mathbb{Q}$ non è un insieme induttivo.

Capitolo 5

I numeri reali

Ogni numero razionale può essere ricondotto a un numero intero o a un numero decimale finito o periodico. Esistono però dei numeri, derivanti da procedimenti matematici particolari, che possono essere ricondotti a numeri decimali illimitati e non periodici.
Questi numeri ci pemettono di ampliare l'insieme dei numeri razionali, definendo un nuovo insieme, quello dei numeri reali.

5.1 Costruzione di $\mathbb{R}$

Storicamente, i primi a rendersi conto del fatto che $\mathbb{Q}$ è un insieme discreto furono i Pitagorici, secondo i quali ogni cosa esistente in natura era riconducibile a numeri razionali. Inoltre, si resero conto che i numeri razionali erano possibili da rappresentare geometricamente, ma non era possibile definire numericamente ciascun singolo punto di una retta.
I Pitagorici si resero conto di quest'ultima affermazione cercando di determinare il diametro di un quadrato, ovvero di determinare se esisteva un un numero razionale che, elevato al quadrato, restituiva il numero 2.
Seguiamo il loro ragionamento su questa affermazione.

Supponiamo che $\exists a \in \mathbb{Q} | a^2 = 2$, dove $a = \dfrac{n}{d}$ (con $n \in \mathbb{Z}$, $d \in \mathbb{Z} \setminus 0$ e n e d coprimi), quindi possiamo dire che:

$$\frac{n^2}{d^2} = 2 \rightarrow n^2 = 2d^2 \rightarrow n^2 \text{ è pari} \rightarrow n \text{ è pari} \rightarrow$$
$$\rightarrow n = 2k \rightarrow 4k^2 = 2d^2 \rightarrow d^2 \text{ è pari} \rightarrow d \text{ è pari}$$

Poichè è impossibile che n e d siano contemporaneamente pari, in quanto coprimi, allora $\nexists a \in \mathbb{Q} | a^2 = 2$.

Si ha, quindi, la necessità di un successivo ampliamento dell'insieme dei razionali, per riuscire a definire numericamente la retta.
Solamente verso la fine dell'Ottocento si riesce a ottenere ciò, introducendo l'insieme dei numeri reali. Vediamo come avviene la costruzione di questo insieme in modo algebrico.

Consideriamo un insieme $A = \{x \in \mathbb{Q}^+ | x^2 < 2\}$ e cerchiamo un estremo superiore per questo insieme all'interno di $\mathbb{Q}$.
Ipotizziamo, tramite procedimento per assurdo, che esista un valore $\Lambda \in \mathbb{Q}$ che sia estremo superiore per l'insieme A. Poichè $\Lambda^2 \neq 2$, allora $\Lambda^2 < 2$ oppure $\Lambda^2 > 2$.
Se $\Lambda^2 < 2$, allora $\exists r \in \mathbb{Q} | \Lambda^2 < (r + \Lambda)^2 < 2$; poiché $r + \Lambda \in A$, allora Λ non è estremo superiore per l'insieme A, in quanto $r + \Lambda > \Lambda$, cioè $\Lambda^2 < 2$ è impossibile.
Allo stesso modo, se $\Lambda^2 > 2$ allora $\exists r \in \mathbb{Q} | 2 < (r - \Lambda)^2 < \Lambda^2$; poiché $r - \Lambda < \Lambda$, allora esiste almeno un altro maggiorante dell'insieme A minore di Λ, quindi $\Lambda^2 < 2$ è impossibile.
In conclusione, abbiamo dimostrato che non esiste nessun numero razionale che sia estremo superiore dell'insieme A.

Per questo motivo, viene introdotto un nuovo *ente numerico*, denominato **numero irrazionale**, che ha la caratteristica di essere espresso, in qualunque base, tramite un numero con infinite cifre dopo la virgola, tutte non periodiche. L'insieme dei numeri irrazionali con il simbolo $\mathbb{I}$.
L'unione tra l'insieme dei numeri razionali e dei numeri irrazionali da' origine all'insieme dei numeri reali $\mathbb{R} = \{\sup A | A \subset \mathbb{Q} \text{ lim. sup.}\}$. Nella considerazione precedente, ora che abbiamo introdotto i numeri reali, possiamo dire che $\sup A = \sqrt{2}$.
Gli assiomi validi nei precedenti insiemi numerici sono validi anche per l'insieme dei numeri reali; inoltre, per questo insieme, è valido un ulteriore assioma, detto **assioma di completezza**.

Postulato 5.1. Ogni sottoinsieme $A \subset \mathbb{R}$ non vuoto e limitato superiormente ammette un estremo superiore.

Inoltre, anche nell'insieme dei numeri reali è possibile definire maggioranti, minoranti, limiti superiori e inferiori.

5.2 Intervalli

Poichè $\mathbb{R}$ è un insieme, possiamo tranquillamente definire dei sottoinsiemi contenenti un numero di elementi finito o infinito.

Definizione 5.1 (Intervallo)**.** Si definisce **i**ntervallo un sottoinsieme $I \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto.

Possiamo definire intervalli *aperti* o *chiusi*, *limitati* o *illimitati*.

Definizione 5.2 (Intervallo limitato chiuso)**.** Si definisce **i**ntervallo limitato chiuso, e si indica come $[a, b]$, il sottoinsieme $\{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b, a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$.

Definizione 5.3 (Intervallo limitato aperto)**.** Si definisce **i**ntervallo limitato aperto, e si indica come (a, b), il sottoinsieme $\{x \in \mathbb{R} | a < x < b, a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$.

Definizione 5.4 (Intervallo limitato chiuso a sinistra e aperto a destra)**.** Si definisce **i**ntervallo limitato chiuso a sinistra e aperto a destra, e si indica come $[a, b)$, il sottoinsieme $\{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b, a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$.

Definizione 5.5 (Intervallo limitato chiuso a destra e aperto a sinistra)**.** Si definisce **i**ntervallo limitato chiuso a destra e aperto a sinistra, e si indica come $(a, b]$, il sottoinsieme $\{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b, a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$.

Definizione 5.6 (Intervallo chiuso illimitato superiormente)**.** Si definisce **i**ntervallo chiuso illimitato superiormente, e si indica come $[a, +\infty)$, il sottoinsieme $\{x \in \mathbb{R} | x \geq a, a \in \mathbb{R}\}$.

Definizione 5.7 (Intervallo aperto illimitato superiormente)**.** Si definisce **i**ntervallo aperto illimitato superiormente, e si indica come $(a, +\infty)$, il sottoinsieme $\{x \in \mathbb{R} | x > a, a \in \mathbb{R}\}$.

Definizione 5.8 (Intervallo chiuso illimitato inferiormente)**.** Si definisce **i**ntervallo chiuso illimitato inferiormente, e si indica come $[-\infty, a]$, il sottoinsieme $\{x \in \mathbb{R} | x \leq a, a \in \mathbb{R}\}$.

Definizione 5.9 (Intervallo aperto illimitato inferiormente)**.** Si definisce **i**ntervallo aperto illimitato inferiormente, e si indica come $(-\infty, a)$, il sottoinsieme $\{x \in \mathbb{R} | x < a, a \in \mathbb{R}\}$.

In base a questa definizione, l'insieme dei numeri reali è definibile come $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$.

Esempio 5.1

Individuare gli estremi dell'intervallo $I = (a, b]$.

$$b = \sup I = \max I \leftarrow b \in I$$
$$a = \inf I \neq \min I \leftarrow a \notin I$$

Esempio 5.2

Individuare gli estremi superiore e inferiore dell'insieme $A = \{x \in \mathbb{Q} | 0 \leq x \leq 1\}$.

$$1 = \sup A = \max A \leftarrow b \in I$$
$$0 = \inf A = \min A \leftarrow a \in I$$

Esempio 5.3

Verifica se $\sup A = 1$ per l'insieme $A = \{x \in \mathbb{Q} | 0 < x < 1\}$.

$$x \leq 1 \quad \forall x \in A$$
$$\forall \varepsilon > 0 \exists x \in A | x > 1 - \varepsilon$$

Infatti, tra 1 e $1 - \varepsilon$ esiste sicuramente un altro punto, quindi 1 è il più piccolo dei maggioranti.

Esempio 5.4

Sia $A \subset \mathbb{R}$ un insieme illimitato inferiormente e sia $\Lambda = \sup A$. Allora è vero che $\forall \varepsilon > 0, \Lambda - \varepsilon \in A$?

No, perchè A può contenere anche degli intervalli da escludere.

Esempio 5.5

Individuare gli estremi superiore e inferiore dell'insieme $A = \{x \in \mathbb{R} | x = -\frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}\}$.

$$0 = \inf A = \min A$$

$$\forall x \in A\ x < 1$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists x \in A | x > 1 - \varepsilon \Rightarrow 1 - \frac{1}{n} > 1 - \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$$

5.3 Topologia

Passiamo ora a definire la *topologia* dell'insieme dei numeri reali, studiando, quindi, quei particolari luoghi dell'insieme che rispondono a determinate caratteristiche.
Poichè, per il momento, il nostro insieme $\mathbb{R}$ viene rappresentato su una retta, detta *retta dei numeri reali*, i nostri luoghi saranno punti sulla retta.

Intorni

Uno dei concetti fondamentali dell'Analisi Matematica, che è anche puramente topologico, è il concetto di *intorno*.

Definizione 5.10. Dato un punto $x_0 \in \mathbb{R}$, l'intervallo $I \subset \mathbb{R}$ si definisce **i**ntorno di x_0 se I è un intervallo aperto e se $x_0 \in I$.

Un intorno, quindi, è un particolare intervallo che contiene un punto di nostro interesse.
Se il punto è al centro del nostro intervallo, allora si parla di *intorno sferico*.

Definizione 5.11 (Intorno sferico)**.** Dato un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ e un numero $\delta \in \mathbb{R}$, l'intervallo $I \in \mathbb{R}$ si dice **i**ntorno sferico di centro x_0 e raggio δ se $I_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

É possibile anche considerare intorni di un punto senza il punto stesso.

Definizione 5.12 (Intorno bucato)**.** Si definisce *intorno bucato* un intorno sferico di centro x_0 e raggio δ privato del punto x_0 ($I_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$).

Punto di accumulazione

Altro concetto fondamentale della topologia dei numeri reali è il concetto di *punto di accumulazione* (Figura 5.1).

Definizione 5.13. Dato un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$, il punto $x_0 \in \mathbb{R}$ si definisce **p**unto di accumulazione di A se ogni intorno di x_0 contiene infiniti punti di A, ovvero $(I_\delta(x_0) \cap A) \smallsetminus \{x_0\} \neq \emptyset$.

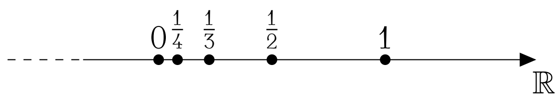


Figura 5.1: Punto di accumulazione

Definizione 5.14 (Derivato di un insieme)**.** Si definisce **d**erivato di A, e si indica come $\mathscr{D}A$, l'insieme di tutti i punti di accumulazione di un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$.

Esiste un particolare teorema, di cui non forniremo la dimostrazione, che usa il concetto di derivato di un insieme.

Teorema 5.1. *Sia $a \in \mathscr{D}A$. Allora $\forall\delta > 0$ l'insieme $(I_\delta(x_0) \cap A) \smallsetminus \{x_0\}$ contiene infiniti elementi.*

Punto isolato

Concetto opposto a quello di punto di accumulazione.

Definizione 5.15. Dato un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$, il punto $x_0 \in \mathbb{R}$ si definisce **p**unto isolato di A se esiste almeno un intorno di x_0 che non contiene altri punti di A diversi da x_0, ovvero $x_0 \notin \mathscr{D}A$.

Esempio 5.6

$$A = \{x \in \mathbb{R} | x = \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}\}$$
$$\mathscr{D}A = \{0\}$$

Esempio 5.7

$$B = \{x \in \mathscr{D}A | 0 < x < 1\} \to \mathscr{D}A = [0, 1]$$

Punto interno, esterno, di frontiera

La topologia, inoltre, definisce matematicamente quali punti sono interni a un insieme, quali esterni e quali di frontiera.

Definizione 5.16 (Punto interno)**.** Dato un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$, il punto $x_0 \in \mathbb{R}$ si definisce **p**unto interno di A, e si indica con $x_0 \in A^{\circ}$, se $\exists \delta > 0 | I_{\delta}(x_0) \subset A$.

Definizione 5.17 (Punto esterno)**.** Dato un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$, il punto $x_0 \in \mathbb{R}$ si definisce **p**unto esterno di A, e si indica con $x_0 \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}A$, un punto appartenente al complementare dell'insieme A.

Definizione 5.18 (Punto di frontiera)**.** Dato un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$, il punto $x_0 \in \mathbb{R}$ si definisce **p**unto di frontiera di A, e si indica con $x_0 \in \partial A$, quel punto determinato dall'intersezione tra l'insieme dei punti interni di A e il suo complementare.

Esempio 5.8

$$\begin{aligned} A &= (0, 1] \\ A^{\circ} &= (0, 1) \\ \mathcal{C}_{\mathbb{R}}A &= (-\infty, 0) \cup (1, +\infty) \\ \partial A &= \{0, 1\} \end{aligned}$$

Capitolo 6

I numeri complessi

Introduciamo ora un nuovo insieme numerico, così da poter risolvere anche quelle equazioni polinomiali irrisolvibili nell'insieme dei numeri reali.
Infatti, esiste un teorema che afferma che anche se non riusciamo a determinare tutti gli zeri del polinomio in $\mathbb{R}$, dovrà esistere un insieme numerico in cui esistano questi zeri mancanti.

Teorema 6.1 (fondamentale dell'algebra)**.** *Il numero di radici (o zeri) di un polinomio $P_n(x)$ di grado n volte è pari al suo grado.*

Questo insieme, in cui possiamo determinare tutti gli zeri di un polinomio, è l'insieme dei **numeri complessi** e viene indicato con la lettera $\mathbb{C}$.

6.1 Introduzione ai numeri complessi

Consideriamo l'equazione di secondo grado $x^2 + 1 = 0$. Questa equazione nell'insieme dei numeri reali è irrisolvibile, poiché si arriverebbe a $x_{1,2} = \pm\sqrt{-1}$, che è un'affermazione assurda in $\mathbb{R}$.
Per questo motivo, definiamo il numero i, detto **unità immaginaria**, tale che $i^2 = -1 \Rightarrow i = \sqrt{-1}$.
In questo modo arriviamo a definire l'esistenza di numeri immaginari, i quali, insieme ai numeri reali, formano i numeri complessi.

Vediamo ora una definizione più algebrica e insiemistica.

Definizione 6.1 (Numero complesso)**.** Un **numero complesso** $z = (a, b) \in \mathbb{C}$ è definito come una coppia ordinata di numeri reali.
Il valore a viene detto **parte reale di** z (si indica anche con $a = \mathrm{Re}[z]$), mentre il valore b viene detto **parte immaginaria di** z (si indica anche con $b = \mathrm{Im}[z]$).

In base a questa definizione, possiamo affermare che

$$\mathbb{C} = \{(a, b)|a, b \in \mathbb{R}\}$$

Dal punto di vista dell'algebra lineare, invece, questo insieme è definito come il campo [1]

$$\mathbb{C} = \frac{\mathbb{R}[x]}{(x^2 + 1)}$$

[1] Per una definizione, vedi la Sezione B.2.

Poiché, per definizione, l'insieme dei numeri complessi è definito per estensione dell'insieme dei numeri reali, possiamo affermare che $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ e che i numeri reali sono particolari numeri complessi con parte immaginaria nulla.
L'insieme $\mathbb{R}$, quindi, è strettamente incluso nell'insieme $\mathbb{C}$ perché esistono particolari numeri, detti *immaginari puri*, la cui parte reale è nulla e che non fanno parte dell'insieme dei numeri reali.

Altra particolarità dell'insieme $\mathbb{C}$ è che, al contrario dell'insieme $\mathbb{R}$, non si possono definire criteri di ordinamento tra i suoi elementi.
Non ha senso, quindi, determinare se un elemento è maggiore o minore di un altro oppure studiare disequazioni.

Siano a e b due numeri complessi, con $a < b$. Moltiplicando entrambi i membri per i, il verso della disequazione può cambiare o meno, a seconda che i sia minore o maggiore di zero.
Se si effettua questa operazione due volte il verso non cambia in entrambi i casi e si ottiene:

$$i^2 a < i^2 b$$

Dato che, per definizione, $i^2 = -1$, si ottiene:

$$-a < -b$$

Si sommi ad entrambi i membri l'espressione $(a + b)$

$$(a + b) - a < (+b) - b$$

Si eliminano le parentesi e i termini opposti e si ottiene

$$b < a$$

Questo è un risultato in contraddizione con la premessa quindi non può essere definito in generale un ordinamento nei numeri complessi.

6.2 Rappresentazioni dei numeri complessi

Esitono tre rappresentazioni di un numero complesso, oltre a quella come coppia di valori reali utilizzata finora:

- la **rappresentazione algebrica** (o *cartesiana*), per cui il numero complesso si esprime come

$$z = a + ib = (a, 0) + (0, 1) \cdot (b, 0) = \mathrm{Re}[z] + i\,\mathrm{Im}[z]$$

- la **rappresentazione trigonometrica**, per cui il numero complesso si esprime come

$$z = |z|[\cos(\arg z)) + i \sin(\arg z))]$$

- la **rappresentazione esponenziale**, per cui il numero complesso si esprime come

$$z = |z|e^{i \arg z}$$

Inoltre, sfruttando l'analogia esistente con la struttura algebrica dei vettori geometrici, si può rappresentare graficamente un numero complesso su un particolare piano cartesiano, in cui l'asse delle ascisse rappresenta la parte reale del

numero (viene anche detto per questo asse reale), mentre l'asse delle ordinate rappresenta la parte immaginaria del numero (asse immaginario).
Questo particolare piano viene detto **piano di Argand-Gauss** (dal nome dei due matematici che per primi lo usarono) oppure *piano complesso* (Figura 6.1).
Nel piano di Gauss si può rappresentare il numero complesso sfruttando le

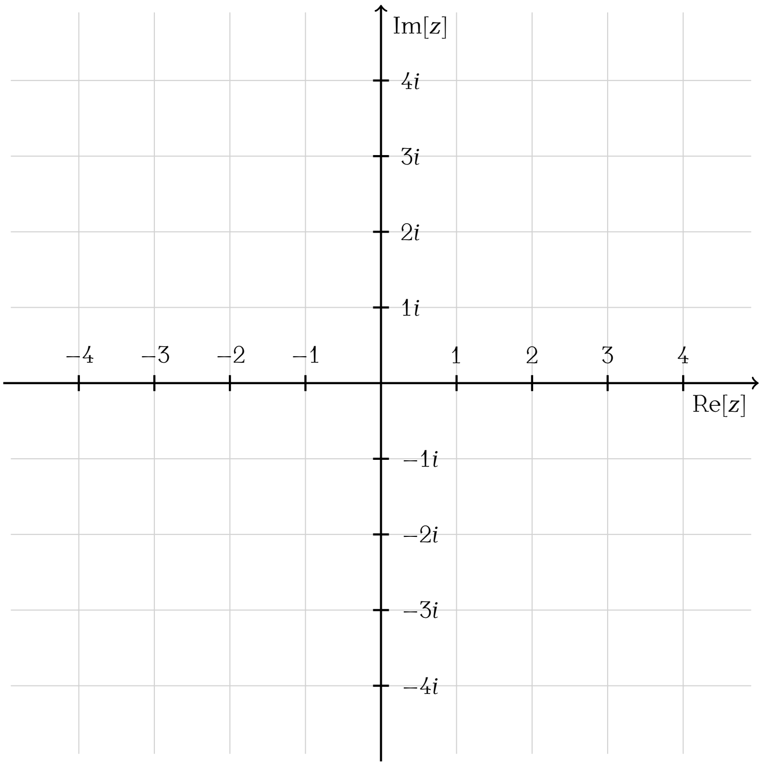


Figura 6.1: Piano complesso

coordinte cartesiane oppure effettuando un cambio di coordinate verso quelle polari.
Per introdurre le *coordinate polari*, occorre definire le operazioni di *modulo* e di *argomento principale* di un numero complesso (Figura 6.2).

Definizione 6.2 (Modulo di un numero complesso)**.** Dato un numero complesso $z = a + ib$, il **modulo** del numero è dato da

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \tag{6.1}$$

Definizione 6.3 (Argomento principale di un numero complesso)**.** Dato un numero complesso $z = a + ib$, il suo **argomento principale** è dato da $\arg z$ e corrisponde all'angolo che univocamente identifica il numero nel piano complesso, con $\arg x \in (-\pi, +\pi]$.

Le coordinate polari di un punto, quindi, sono l'angolo formato rispetto all'asse delle ascisse e la distanza del punto rispetto all'origine degli assi.
Il passaggio tra coordinate cartesiane e polari, nel caso di numeri complessi, segue le seguente formule:

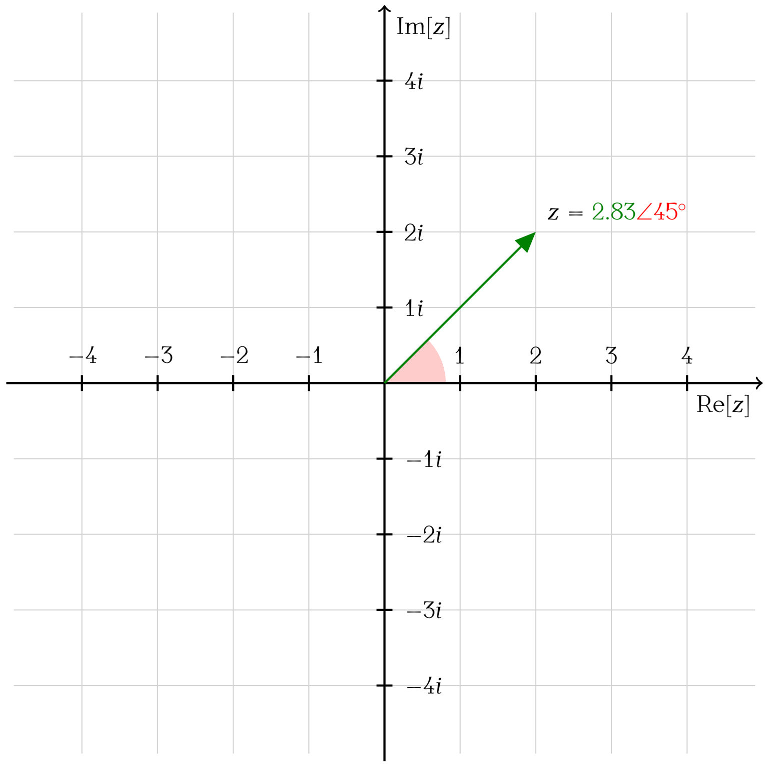


Figura 6.2: Modulo e argomento principale di un numero sul piano complesso

- da polari a cartesiane

$$\mathrm{Re}[z] = |z| \cos(\arg z) \tag{6.2}$$
$$\mathrm{Im}[z] = |z| \sin(\arg z) \tag{6.3}$$

- da cartesiane a polari

$$|z| = \sqrt{\mathrm{Re}^2[z] + \mathrm{Im}^2[z]} \tag{6.4}$$

$$\tan(\arg z) = \frac{\mathrm{Im}[z]}{\mathrm{Re}[z]} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \arg z = \begin{cases} \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}[z]}{\mathrm{Re}[z]}\right), & \text{se } \mathrm{Re}[z] > 0 \text{ e } \arg z \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \\ \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}[z]}{\mathrm{Re}[z]}\right) + \pi, & \text{se } \mathrm{Re}[z] < 0 \text{ e } \mathrm{Im}[z] > 0 \\ \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}[z]}{\mathrm{Re}[z]}\right) - \pi, & \text{se } \mathrm{Re}[z] < 0 \text{ e } \mathrm{Im}[z] < 0 \end{cases} \tag{6.5}$$

6.3 Operazioni sui numeri complessi

Definiamo ora le operazioni tra numeri complessi.

Definizione 6.4 (Somma algebrica di complessi)**.** Dati due numeri complessi $z = (a, b)$ e $w = (c, d)$, la **somma algebrica** dei due numeri complessi è data da

$$z + w = (a + c, b + d) \tag{6.6}$$

Definizione 6.5 (Prodotto fra complessi)**.** Dati due numeri complessi $z = (a, b)$ e $w = (c, d)$, il **prodotto** dei due numeri complessi è dato da

$$z \cdot w = (a \cdot c - b \cdot d, a \cdot d - b \cdot c) \tag{6.7}$$

Definizione 6.6 (Coniugazione complessa)**.** Dato un numero complesso $z = a + ib$, il complesso coniugato del numero è dato da $\bar{z} = z^* = a - ib$, tale che $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$ e $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$.

Definizione 6.7 (Rapporto tra numeri complessi)**.** Dati due numeri complessi $z = a + ib$ e $w = c + id$, il **rapporto** tra i due numeri (con $w \neq 0$) è dato da

$$v = \frac{z}{w} = \frac{a + ib}{c + id} = \frac{(ac + bd) - i(ad - bc)}{c^2 + d^2} \tag{6.8}$$

Definizione 6.8 (Inversione di un numero complesso)**.** Dato un numero complesso $z = a + ib$, l'**inverso** del numero è dato da

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2} \tag{6.9}$$

Finora abbiamo visto come determinare le principali operazioni utilizzando la rappresentazione algebrica del numero complesso. Per alcune operazioni è più utile utilizzare la rappresentazione esponenziale o trigonometrica.
Riguardo la rappresentazione esponenziale, non abbiamo detto che si può passare facilmente da essa alla rappresentazione trigonometrica utilizzando la **formula di Eulero** (Equazione 6.10) , che lega l'esponenziale complesso alle funzioni trigonometriche di seno e coseno.

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \tag{6.10}$$

Questa formula permette di interpretare le funzioni trigonometriche come varianti dell'esponenziale complesso:

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}[e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}]$$
$$\sin\varphi = \frac{1}{2i}[e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}]$$

La formula di Eulero, infine, dà origine a una delle identità più affascinanti e perfette della matematica, la nota **identità di Eulero** ($e^{i\pi} + 1 = 0$), in quanto mette in relazione tra loro i cinque numeri più utilizzati ($e, i, \pi, 1, 0$) mediante operazioni di somma, elevamento a potenza, moltiplicazione ed equivalenza.

Dopo aver visto come è possibile passare tra le rappresentazioni esponenziali e trigonometriche, vediamo le espressioni delle operazioni viste finora in queste rappresentazioni nella Tabella 6.1.

Vediamo, infine, la definizione delle due ultime operazioni sui numeri complessi.

Operazione	Rappresentazione trigonometrica	Rappresentazione esponenziale
Somma	*Simile alla somma dei vettori geometrici*	
Moltiplicazione	$z \cdot w = \lvert z\rvert \cdot \lvert w\rvert[\cos(\arg z + \arg w) + i\sin(\arg z + \arg w)]$	$z \cdot w = \lvert z\rvert \cdot \lvert w\rvert e^{i(\arg z + \arg w)}$
Rapporto	$\frac{z}{w} = \frac{\lvert z\rvert}{\lvert w\rvert}[\cos(\arg z - \arg w) + i\sin(\arg z - \arg w)]$	$\frac{z}{w} = \frac{\lvert z\rvert}{\lvert w\rvert}e^{i(\arg z - \arg w)}$

Tabella 6.1: Operazioni con i numeri complessi indicati tramite la rappresentazione trigonometrica e esponenziale

Definizione 6.9 (Potenza di un numero complesso)**.** Dato un numero complesso $z = |z|[\cos(\arg z) + i\sin(\arg z)]$, la **potenza con esponente intero** $n \in \mathbb{Z}$ del numero è data da

$$z^n = |z|^n[\cos(\arg z) + i\sin(\arg z)]^n = |z|^n[\cos(n\arg z) + i\sin(n\arg z)] \tag{6.11}$$

Se il numero è rappresentato come $z = |z|e^{i\arg z}$, la potenza è

$$z^n = |z|^n e^{n\cdot i\arg z} \tag{6.12}$$

L'espressione $[\cos x + i\sin x]^n = [\cos(nx) + i\sin(nx)]$ è nota come **formula di De Moivre** e lega la potenza di un numero complesso alla sua rappresentazione trigonometrica nel piano di Argand-Gauss.

Definizione 6.10 (Radice n-esima di un numero complesso)**.** Dato un numero complesso $z = |z|[\cos(\arg z) + i\sin(\arg z)]$, la **radice n-esima** del numero (con $n \in \mathbb{N}$) è dato da

$$w = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left[\cos\left(\frac{\arg z + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\arg z + 2k\pi}{n}\right)\right] \quad k \in [0, n-1] \tag{6.13}$$

quindi si ottengono n risultati complessi. Se il numero è rappresentato come $z = |z|e^{i\arg z}$, la radice è

$$z = \sqrt[n]{|z|}e^{i\frac{\arg z + 2k\pi}{n}} \tag{6.14}$$

Nel piano di Argand-Gauss, le radici di un numero complesso rappresentano i vertici di un poligono regolare di n lati inscritto in una circonferenza.

6.4 Esercizi

Vediamo ora qualche esercizio sui numeri complessi.

Esercizio 6.1

Determinare le radici cubiche del numero

$$z = \frac{1-i}{i}$$

Mi riscrivo la formula per la radice, sostituendo $n = 3$:

$$w = \sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{|z|}\left[\cos\left(\frac{\arg z + 2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\arg z + 2k\pi}{3}\right)\right] \qquad k \in [0, 2]$$

Calcolo ora il rapporto indicato nel numero z:

$$z = \frac{1-i}{i}\cdot\frac{-i}{-i} = -1 - i$$

Trasformo ora questo numero in forma trigonometrica:

$$|z| = \sqrt{\mathrm{Re}^2[z] + \mathrm{Im}^2[z]} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}^{\mathbb{R}}$$

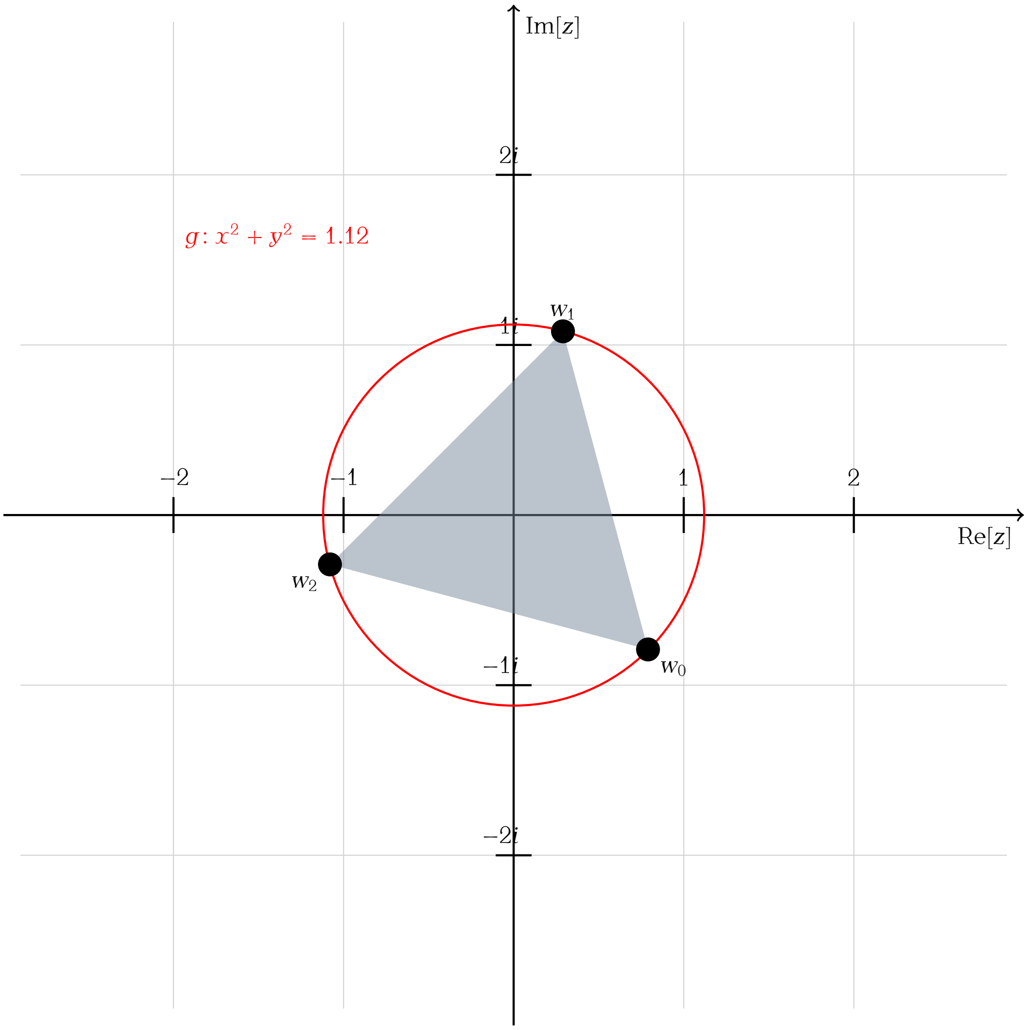
$$\arg z = -\frac{3}{4}\pi$$

Calcolo ora le radici:

$$k = 0 \longrightarrow w_0 = \sqrt[3]{\sqrt{2}}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] = \sqrt[6]{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$$

$$k = 1 \longrightarrow w_1 = \sqrt[3]{\sqrt{2}}\left[\cos\left(\frac{5}{12}\pi\right) + i\sin\left(\frac{5}{12}\pi\right)\right]$$

$$k = 2 \longrightarrow w_2 = \sqrt[3]{\sqrt{2}}\left[\cos\left(\frac{13}{12}\pi\right) + i\sin\left(\frac{13}{12}\pi\right)\right]$$



Esercizio 6.2

Determinare i punti del piano complesso per cui

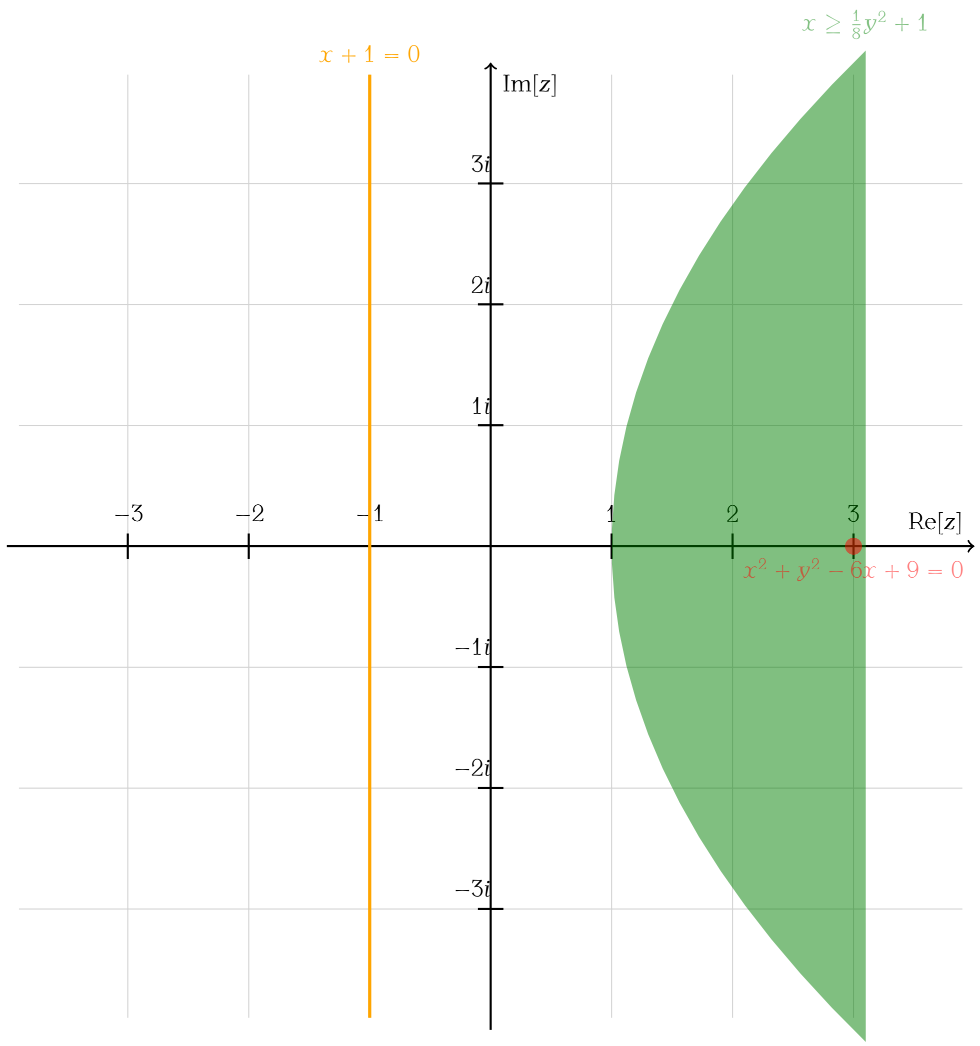
$$|z-3| \leq \text{Re}[z] + 1 \quad z \in \mathbb{C}$$

Indichiamo $z = x + iy$. Abbiamo quindi:

$$|z-3| \geq \text{Re}[z] + 1 \Rightarrow |(x-3) + iy| \leq x + 1 \Rightarrow \sqrt{x^2 - 6x + 9 + y^2} \leq x + 1$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x + 9 \geq 0 \\ x + 1 \geq 0 \\ x^2 + y^2 - 6x + 9 \leq x^2 + 2x + 1 \end{cases} \cup \underbrace{\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x + 9 \geq 0 \\ x + 1 \leq 0 \end{cases}}_{\textit{trascurabile}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 6x + 9 \geq 0 \\ x + 1 \geq 0 \\ y^2 - 8x + 8 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 6x + 9 \geq 0 \\ x + 1 \geq 0 \\ x \geq \frac{1}{8}y^2 + 1 \end{cases}$$



La parte colorata è il risultato del sistema.
Per ricavarla algebricamente, basta prendere un qualsiasi punto e verificare se è soluzione del sistema. Poiché l'origine degli assi non soddisfa la terza condizione del sistema, allora si ottiene la figura soprastante, in cui $\mathrm{Re}[z] \geq \frac{1}{8}\mathrm{Im}[z] + 1$.

Esercizio 6.3

Determinare i punti del piano complesso per cui

$$z - 3 = \mathrm{Re}[z] + 1 \quad x \in \mathbb{C}$$

Indichiamo $z = x + iy$*. Abbiamo quindi:*

$$z - 3 = \mathrm{Re}[z] + 1 \Rightarrow (x-3) + iy = x - 1$$

$$\begin{cases} x - 3 = x - 1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \textit{impossibile}$$

Esercizio 6.4

Determinare due numeri complessi z e w, distinti tra loro, tali che l'uno sia l'opposto del quadrato dell'altro.

$$\begin{cases} z = -w^2 \\ w = -z^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = -z^4 \\ w^2 = z^4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z^4 + z = 0 \\ w^2 = z^4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z(z^3+1) = 0 \\ w^2 = z^4 \end{cases}$$

Otteniamo così una prima soluzione al sistema $(z_0 = 0, w_0 = 0)$ *che non è accettabile.*
Determiniamo allora le radici cubiche del numero complesso -1*:*

$$z = \sqrt[3]{-1+0i} = \sqrt[3]{1}\left[\cos\left(\frac{\pi + 2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi+2k\pi}{3}\right)\right] \qquad k \in [0,2]$$

$$\begin{cases} z_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ w_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2} \end{cases}, \underbrace{\begin{cases} z_2 = -1 \\ w_2 = -1 \end{cases}}_{\textit{non accettabile}}, \begin{cases} z_3 = \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2} \\ w_3 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Appendice A

Richiami di Algebra

Forniamo ora alcuni richiami a concetti di Algebra elementare, che ci torneranno utili durante i capitoli successivi.

A.1 Le potenze

Esistono moltiplicazioni particolari, nelle quali tutti i fattori sono uguali; ad esempio $2 \times 2 \times 2 \times 2$. Per evitare scritture così lunghe, possiamo introdurre l'operazione di *potenza*.

Definizione A.1. Dati due numeri $a, b \in \mathbb{Z}$, si chiama **potenza** l'operazione di moltiplicazione di a b volte per se stesso.

$$a^b = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{b \text{ volte}}$$

a viene detto **base** della potenza, b è l'**esponente** della potenza.

Se l'esponente è pari a 1, allora $a^1 = a$ ovviamente. Se invece l'esponente è pari a 0 (con $a \neq 0$), allora $a^0 = 1$.
La potenza 0^0 non esiste, come vedremo in seguito.

Proprietà delle potenze

Sebbene la potenza sarebbe una moltiplicazione, esistono delle proprietà specifiche di questa operazione.

Postulato A.1. Date due potenze a^m e a^n, la cui base è la stessa e gli esponenti sono diversi, la loro moltiplicazione corrisponderà ad una potenza avente per base a e per esponente la somma degli esponenti.

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

Postulato A.2. Date due potenze a^m e a^n, la cui base è la stessa e gli esponenti sono diversi, la loro divisione corrisponderà ad una potenza avente per base a e per esponente la differenza degli esponenti.

$$a^m : a^n = a^{m-n}$$

Postulato A.3. Date una potenza a^m e un numero $n \in \mathbb{Z}$, la potenza n-esima della potenza corrisponde ad una potenza avente per base a e per esponente il prodotto di m e n.

$$a^{m^n} = a^{m \cdot n}$$

Postulato A.4. Date due potenze a^m e b^m, il cui esponente è lo stesso ma la base è differente, la loro moltiplicazione corrisponderà ad una potenza avente per base il prodotto delle basi e come esponente m.

$$a^m \times b^m = (a \cdot b)^m$$

Postulato A.5. Date due potenze a^m e b^m, il cui esponente è lo stesso ma la base è differente, la loro divisione corrisponderà ad una potenza avente per base la divisione delle basi e come esponente m.

$$a^m : b^m = (a : b)^m$$

A.2 Sommatoria e produttoria

Introduciamo, per completezza, gli operatori di sommatoria e di produttoria, che ci torneranno utili in seguito.

La ***sommatoria*** è un simbolo matematico che abbrevia, in una notazione sintetica, la somma di un certo insieme di addendi. Nel caso più generale possibile, abbiamo, quindi, una scrittura del tipo

$$\sum_{k=N}^{M} f(k)$$

La ***produttoria*** è un simbolo che abbrevia, in una notazione sintetica, la moltiplicazione di un certo numero di fattori. Nel caso più generale possibile, abbiamo, quindi, una scrittura del tipo

$$\prod_{i=m}^{n} x_i$$

A.3 Massimo comun divisore e minimo comune multiplo

La definizione delle operazioni di prodotto e divisione porta con sè anche la definizione di concetti relativi, come quello di multiplo e di divisore.

Definizione A.2. Dati due numeri $a, b \in \mathbb{N}$, e un terzo numero q tale che $a = b \cdot q$, allora possiamo dire che:

- a è **multiplo** di b;
- b è **divisore** di a.

Basandoci sulla sua definizione, possiamo dire che i multipli di un numero sono infiniti. In alcune occasioni, però, è comodo individuare il più piccolo multiplo che due o più numeri hanno in comune tra loro.

Definizione A.3. Dati due numeri $a, b \in \mathbb{N}$, si definisce **minimo comune multiplo** come il più piccolo fra i multipli comuni di a e b diversi da zero.

$$\mathrm{mcm}\,(a, b)$$

Dall'altro lato, sempre basandoci sulla sua definizione, possiamo notare che i divisori di un numero sono in numero finito.

Definizione A.4. Dati due numeri $a, b \in \mathbb{N}$, si definisce **massimo comun divisore** come il più grande fra i divisori comuni di a e b diversi da zero.

$$\mathrm{MCD}\,(a, b)$$

Sia per il calcolo del massimo comun divisore che del minimo comune multiplo si può procedere per enumerazione dei possibili valori. Un metodo più efficiente per il calcolo di questi due valori consiste nella **scomposizione in numeri primi**[1].

Postulato A.6. Dati due numeri $a, b \in \mathbb{N}$, si definisce $\mathrm{MCD}(a, b)$ come il prodotto di *tutti i fattori comuni*, presi una sola volta, con l'*esponente minore*.

Postulato A.7. Dati due numeri $a, b \in \mathbb{N}$, si definisce $\mathrm{mcm}(a, b)$ come il prodotto di *tutti i fattori comuni e non comuni*, presi una sola volta, con l'*esponente maggiore*.

A.4 Le frazioni

Come abbiamo visto, le frazioni sono enti matematici che vengono definiti nell'insieme $\mathbb{Q}$ come rapporto tra due numeri.
Vediamo ora alcune caratteristiche delle frazioni.

Definizione A.5. Siano $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$. I due valori si dicono **frazioni equivalenti** se il prodotto del numeratore del primo per il denominatore del secondoa è uguale a prodotto del numeratore del secondo per il denomniatore del primo.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow ac = bd$$

Essendo una divisione, le frazioni godono della *proprietà invariantiva*.

Postulato A.8. Sia $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ e sia $c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Allora:

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}$$
$$\frac{a}{b} = \frac{a : c}{b : c}$$

[1] Si dice **numero primo** un numero naturale che è divisibile solamente per 1 e per se stesso.

La proprietà invariantiva ci permette di identificare un metodo per semplificare una frazione e ridurla ai minimi termini. Per farlo, è sufficiente dividiere il numeratore e il denominatore per il loro massimo comun divisore.
Date due frazioni diverse, invece, se si vuole portarle allo stesso denominatore (cioè *ridurle a denominatore comune*, si calcola il minimo comune multiplo tra i denominatori.

Attraverso le frazioni è possibile anche rappresentare le frazioni con esponente intero negativo.

Esempio A.1

$$3^{-2} = \frac{3^4}{3^6} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{1}{3^2} = \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

Numeri decimali periodici e frazioni generatrici

Se una frazione è apparente, si può associare ad essa un numero intero.

Esempio A.2

$$\frac{12}{3} = 4$$
$$-\frac{22}{2} = -11$$

Per quelle frazioni che hanno come denominatore una potenza di 10, dette **frazioni decimali**, invece, possiamo determinare una rappresentazione speciale: la **rappresentazione decimale**, la quale si basa sull'uso della virgola e sulla posizione delle cifre.

Esempio A.3

$$\frac{2357}{100} = \frac{2000 + 300 + 50 + 7}{100} = 20 + 3 + \frac{5}{10} + \frac{7}{100} = 23,57$$

Questa tipologia di numeri viene detta **numeri decimali finito**.

Per tutte le altre frazioni, che non possono essere trasformate in frazioni decimali, è possibile associare un **numero decimale periodico**, in cui le cifre decimali sono infinite e da un certo punto in poi si ripetono a gruppi sempre uguali.
Il gruppo di cifre ripetute si chiama **periodo**, mentre l'insieme delle cifre comprese fra la virgola e il periodo si chiama **antiperiodo**.

Esempio A.4

$$\frac{1}{3} = 0,33333\cdots = 0,\bar{3}$$
$$\frac{35}{8} = 5,833333\cdots = 5,8\bar{3}$$

Esiste una regola che permettere di scrivere ogni numero decimale periodico sotto forma di frazione. Questa frazione viene detta **frazione generatrice** del numero decimale.

Questa frazione ha:

- come numeratore il numero, scritto senza virgola, a cui va sottratto il numero costituito dalla parte intera e dall'antiperiodo;

- come denominatore il numero costituito da tanti 9 quante sono le cifre del period, seguito da tanti 0 quante sono le cifre dell'anti periodo.

Esempio A.5

$$3,\overline{45} = \frac{345-3}{99} = \frac{342}{99} = \frac{38}{11}$$
$$0,9\bar{3} = \frac{93-9}{90} = \frac{84}{90} = \frac{14}{15}$$

A.5 I radicali

Durante l'estensione dell'insieme $\mathbb{Q}$ per ottenere l'insieme $\mathbb{R}$, abbiamo introdotto l'insieme dei numeri irrazionali, senza definirli per bene.

Definizione A.6. Si definisce **numero irrazionale** ogni numero decimale illimitato non periodico.

Esistono due tipologie di numeri naturali, quelli rappresentabili tramite *estrazione di radice* e quelli rappresentabili tramite costanti, come $\pi = 3,14159\ldots$ o $e = 2,7182818\ldots$.
Per quanto riguarda la rappresentazione come estrazione di radice, definiamo i *radicali aritmetici* e i *radicali algebrici*.

Definizione A.7. Dato un numbero naturale $n \neq 0$ e un numero reale $a \geq 0$, la **radice aritmetica n-esima** di a è quel numero reale $b \geq 0$ la cui potenza n-esima è a.
$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$$

Definizione A.8. Dato un numbero naturale $n \neq 0$ e un numero reale a, la **radice algebrica n-esima** di a è quel numero reale b la cui potenza n-esima è a.
$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$$

Il numero n viene detto **indice** del radicale, il numero a si chiama **radicando**.

Proprietà e operazioni sui radicali

I radicali godono di alcune proprietà e si possono effettuare una serie di operazioni. Tutte queste operazioni sfruttano il seguente assioma.

Assioma A.1

Dati due numeri reali $a, b \geq 0$ e un numero naturale $n \neq 0$, a e b sono uguali se e solo se sono uguali anche le loro potenze n-esime.

Teorema A.1 (Proprietà invariantiva dei radicali)**.** *Dato un radicale aritmetico, si può ottenere un radicale equivalente moltiplicando per uno stesso numero naturale $p \neq 0$ sia l'indice del radicale sia l'esponente del radicando.*

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}}$$

Dimostrazione: Poiché $\sqrt[n]{a^m}$ e $\sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}}$ sono radicali aritmetici, i loro valori sono numeri positivi o nulli.
Eleviamo duneuq i due radicali allo stesso esponente $n \cdot p$.

Partiamo dal primo membro.

$$(\sqrt[n]{a^m})^{n \cdot p} = [(\sqrt[n]{a^m})^n]^p = [a^m]^p = a^{m \cdot p}$$

Consideriamo ora il secondo membro.

$$(\sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}})^{n \cdot p} = a^{m \cdot p}$$

□

È possibile anche, dato un radicale aritmetico, ottenere un radicale equivalente dividento l'indice della radice e l'esponende del radicando per un divisore comune, ovvero si **semplifica** il radicale.

$$\sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}} = \sqrt[n]{a^m}$$

La proprietà invariantiva permette anche di definire un criterio per confrontare due radicali.

Esempio A.6

Confrontiamo due radicali $\sqrt[4]{5}$ e $\sqrt[6]{8}$, riducendoli allo stesso indice.

$$\sqrt[4]{5} = \sqrt[4 \cdot 3]{5^3} = \sqrt[12]{125}$$
$$\sqrt[6]{8} = \sqrt[6 \cdot 2]{8^2} = \sqrt[12]{64}$$

Poiché $64 < 125$, allora $\sqrt[12]{64} < \sqrt[12]{125}$ e quindi $\sqrt[6]{8} < \sqrt[4]{5}$.

Teorema A.2 (Prodotto tra radicali)**.** *Il prodotto di due radicali con lo steso indice è un radicale che ha per indice lo stesso indice e per radicando il prodotto dei radicandi.*

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b} \quad (a, b \in \mathbb{R}_0^+, n \in \mathbb{N})$$

Dimostrazione: Eleviamo i due membri dell'uguaglianza allo stesso esponente.

$$(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b})^n = (\sqrt[n]{a \cdot b})^n$$

Analizziamo il primo membro.

$$(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b})^n = (\sqrt[n]{a})^n \cdot (\sqrt[n]{b})^n = a \cdot b$$

Analizziamo il secondo membro.

$$(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b})^n = a \cdot b$$

Poiché le potenze n-esime forniscono lo stesso risultato $a \cdot b$, allora anche le loro basi sono uguali. □

Teorema A.3 (Divisione tra radicali)**.** *La divisione di due radicali (il secondo diverso da 0) con lo steso indice è un radicale che ha per indice lo stesso indice e per radicando la divisione dei radicandi.*

$$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a : b} \quad (a \in \mathbb{R}_0^+, b \in \mathbb{R}^+, n \in \mathbb{N})$$

Teorema A.4 (Potenza di un radicale)**.** *La potenza m-esima di un radicale è un radicale che ha per indice lo stesso indice e per radicando la potenza m-esima del radicando.*

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m} \quad (a \in \mathbb{R}_0^+, n, m \in \mathbb{N})$$

Teorema A.5 (Radice di un radicale)**.** *La radice m-esima di un radicale di indice n è un radicale che ha per indice il prodotto degli indici e per radicando lo stesso radicando.*

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a} \quad (a \in \mathbb{R}_0^+, n, m \in \mathbb{N})$$

Teorema A.6 (Somma algebrica di radicali)**.** *La somma algebrica di due o più radicali simili (stesso indice e stesso radicale, diveso coefficiente) è il radicale che ha come coefficiente la somma algebrica dei radicali.*

$$a\sqrt[n]{m} \pm b\sqrt[n]{m} = (a \pm b)\sqrt[n]{m} \quad (a, b \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{R}_0^+, n \in \mathbb{N})$$

Definizione A.9 (Potenza con esponente razionale)**.** Una potenza con esponente razionale $\frac{m}{n}$ di un numero reale $a \geq 0$ è la radice n-esima di a^m.

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Razionalizzazione di denominatori

Razionalizzare il denominatore di una frazione significa trasformare la frazione in una equivalente che non ha radicali a denominatore. La razionalizzazione è possible grazie alla proprietà invariantiva delle frazioni.

I casi più comuni sono i seguenti.

1. **Il denominatore è un unico radicale**

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} = \frac{\sqrt[n]{a^{n-m}}}{\sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[n]{a^{n-m}}} = \frac{\sqrt[n]{a^{n-m}}}{a}$$

2. **Il denominatore è la somma o la differenza di due termini, dei quali almeno uno è un radicale quadratico**
   Si applica il *prodotto notevole* $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

Radicali quadratici doppi

Si chiama **radicale quadratico doppio** una espressione del tipo

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$$

Un radicale doppio può essere trasformato nella somma o nella differenza di due radicali semplici solo se $a^2 - b$ è il quadrato di un numero razionale o di una espressione che non contiene radicali.

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} + \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$$

$$\sqrt{a-\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} - \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$$

Esempio A.7

Trasformiamo il radicale doppio $\sqrt{8-\sqrt{15}}$ *nella differenza di due radicali semplici. Ciò è possibile poiché* $8^2 - 15 = 64 - 15 = 49 = 7^2$.

$$\sqrt{8-\sqrt{15}} = \sqrt{\frac{8+\sqrt{49}}{2}} - \sqrt{\frac{8-\sqrt{49}}{2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{8+7}{2}} - \sqrt{\frac{8-7}{2}} = \sqrt{\frac{15}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{15}-1}{\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{15}-1)\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{30}-\sqrt{2}}{2}$$

Algoritmo di estrazione della radice quadrata

Per calcolare la radice quadrata di qualsiasi numero intero, sia esatta sia approssimata per difetto, esiste un algoritmo ben preciso.

1. Scomporre il numero in gruppi di due cifre da destra verso sinistra; l'ultimo gruppo a sinistra può essere anche formato da una sola cifra.

2. Calcolare mentalmente la radice quadrata, esatta o approssimata per difetto, del numero che forma il primo gruppo di cifre a sinistra.

3. Elevare al quadrato il risultato appena ottenuto e sottrarlo al primo gruppo di cifre, ottenendo il primo resto.

4. Appendere il secondo gruppo di cifre al primo resto e separare l'ultima cifra a destra.

5. Raddoppiare la prima cifra della radice e usarla come divisore con il primo gruppo di cifre del resto.

6. Moltiplicare il numero ottenuto dal raddoppio della cifra di radice cui si concatena il risultato della divisione appena effettuata con il risultato della divisione stessa.

7. Sottraiamo questo risultato dal resto e concateniamo alla radice prima calcolata il risultato della divisione.

8. Ripetere i passi 4, 5, 6 e 7 fino a resto nullo o fino a finire le cifre.

Esempio A.8

$$\sqrt{53361} = ?$$

La prima cifra a sinistra è 5 *la cui radice quadrata è* 2.
Elevo 2 *al quadrato e lo sottraggo a* 5*, ottenendo* 1. *Concateno il secondo gruppo di cifre, ottenendo* 133.
Moltiplico per due la radice finora ottenuta, $2 \cdot 2 = 4$ *e la uso come divisore del resto:* $133 : 4 = 3$*; concateno il risultato della divisione a quello della moltiplicazione ottenendo* 43. *Moltiplico* 43 *per il risultato della divisione:* $43 \cdot 3 = 129$*; sottraggo questo risultato al resto:* $133 - 129 = 4$. *Concateno alla radice finora ottenuta il risultato della divisione, ottenendo* 23.
Concateno al nuovo resto il gruppo di cifre successivo ottenendo 461. *Raddoppio la radice finora ottenuta, ottenendo* $23 \cdot 2 = 46$. *Divido le prime due cifre del resto per il numero appena ottenuto:* $46 : 46 = 1$. *Concateno il risultato della divisione a quello della moltiplicazione, ottenendo* 461*, e lo moltiplico per il risultato della divisione:* $461 \cdot 1 = 461$.
Sottraggo il risultato appena ottenuto per il resto, ottenendo $461 - 461 = 0$.
Concateno alla radice finora ottenuta il risultato della divisione, ottenendo 231

$$\sqrt{53361} = 231$$

A.6 Le equazioni

Definizione A.10. Si dice **equazione** una uguaglianza fra due espressioni letterali per la quale si cercano i valori da attribuire alle lettere che la rendono vera.

L'espressione a sinistra del segno di uguaglianza si chiama **primo membro**, mentre a l'espressione a destra si chiama **secondo membro**. Le variabili letterali sono dette **incognite** dell'equazione.
I valori che rendono vera una equazione si chiamano **soluzioni** o radici dell'equazione..

Tipologie di equazioni

Esistono varie tipologie di equazioni, in base a varie classificazioni.
In base alla posizione dell'incognita, possiamo dire che un'equazione è **intera** se

l'incognita è presenta solo nei numeratori; viceversa, un'equazione è **fratta** se l'incognita è presente anche nei denominatori.

In base alla tipologia di coefficienti, si può dire che:

- un'equazione è **numerica** se i coefficienti sono tutti numerici;
- un'equazione è **letterale** se tra i coefficienti ci sono anche lettere.

In base al numero di soluzioni, si può dire che:

- un'equazione si dice **determinata** se il numero di soluzioni è finito;
- un'equazione si dice **indeterminata** se il numero di soluzioni è infinito;
- un'equazione si dice **impossibile** se non ha soluzioni.

Il termine senza incognita si chiama **termine noto**, mentre il massimo esponente del polinomio dell'equazione è detto **grado** dell'equazione.

Principi di equivalenza delle equazioni

Per risolvere un'equazione si deve transformarla in equazioni equivalenti via via più semplici, fino a giungere ad un'equazione in cui sia immediato trovare le radici. Queste regole di trasformazione si chiamano **principi di equivalenza**.

Assioma A.2 (***Primo principio di equivalenza***)

Data un'equazione, se si aggiunge ai due membri uno stesso numero o una stessa espressione, si ottiene una equazione equivalente.

Assioma A.3 (***Regola del trasporto***)

Data un'equazione, se ne ottiene una equivalente se si trasporta un termine da un membro all'altro, cambiandolo di segno.

Assioma A.4 (***Regola di cancellazione***)

Termini uguali presenti in entrambi i membri di un'equazione possono essere soppressi, ottenendo un'equazione equivalente.

Assioma A.5 (***Secondo principio di equivalenza***)

Data una equazione, si ottiene un'equazione equivalente se si moltiplicano o si dividono i due membri per uno stesso numbero, o espressione, diversi da 0.

Assioma A.6 (***Regola della divisione per un fattore comune***)

Quando tutti i termini di un'equazione hanno un fattore numerico comune diverso da 0, si ottiene un'equazione equivalente dividendo tutti i termini per quel fattore.

Assioma A.7 (***Regola del cambiamento di segno***)

Cambiando segno a tutti i termini di una equazione, si ottiene un'equazione equivalente.

Risoluzione delle equazioni lineari

Applicando i principi di equivalenza, è sempre possibile trasformare un'equazione di primo grado (detta anche *lineare*) intera in una equazione equivalente, scritta nella forma $ax = b$. In questo modo, la soluzione si ottiene come $x = \frac{b}{a}$.

Per risolvere un'equazione fratta numerica, invece, occorre:

- determinare le **condizioni di esistenza** delle frazioni algebriche presenti;
- portare tutte le frazioni algebriche a **denominatore comune**;
- moltiplicare entrambi i membri dell'equazione per tale denominatore, in modo da ottenere un'equazione intera;
- calcolare le soluzioni dell'equazione intera;
- verificare che le soluzioni rispettino le condizioni di esistenza.

Risoluzione delle equazioni di secondo grado

La risoluzione delle equazioni di secondo grado $ax^2 + bx + c = 0$ dipende dal numero di termini nell'equazione. Se sono presenti tutti i termini, l'equazione si dice *completa*, altrimenti *incompleta*.

Le equazioni incomplete del tipo $ax^2 + c = 0$ (dette anche **equazioni pure**) si risolvono con la formula $x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$ se a e c sono discorsi, altrimenti non hanno radici.
Le equazioni incomplete del tipo $ax^2 + bx = 0$ (dette anche **equazioni spurie**) hanno sempre due soluzioni reali: $x_1 = 0$ e $x_2 = -\frac{b}{a}$.
Le equazioni incomplete del tipo $ax^2 = 0$ (dette anche **equazioni monomie**) hanno una soluzione reale doppia $x = 0$.
Le equazioni complete si risolvono tramite la formula

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Le radici di una equazione di secondo grado sono in relazione tra loro da proprietà ben precise.

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$
$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Risoluzione delle equazioni di grado superiore al secondo

La risoluzione di equazioni di grado superiore al secondo si basa principalmente su metodi di scomposizione del polinomio in fattori primi, come il *raccoglimento a fattor comune*, il *raccoglimento parziale*, l'*uso dei prodotto notevoli* o della *regola di Ruffini*.
Esistono, però, tipologie di equazioni di grado superiore al secondo facilmente riconducibili a equazioni di secondo grado, come le **equazioni biquadratiche** ($ax^4 + bx^2 + x = 0$) o le **equazioni trinomie** ($ax^{2n} + bx^n + c = 0$), tramite l'uso di una incognita ausiliaria.

Risoluzione di equazioni irrazionali

Una **equazione irrazionale** è una equazione in cui l'incognita fa parte di un radicando. La sua risoluzione consiste in:

1. elevare entrambi i membri del'equazione per l'indice della radice;

$$\sqrt[n]{A(x)} = B(x) \quad \Rightarrow A(x) = [B(x)]^n$$

2. controllare se l'indice n è pari o dispari

   - se n è dispari, le soluzioni trovate sono le soluzioni dell'equazione originaria;
   - se n è pari dobbiamo controllare le soluzioni, tramite verifica (sostituzione manuale) o tramite le condizioni di esistenza.

A.7 Le disequazioni

Definizione A.11. Si dice **disequazione** una diseguaglianza fra due espressioni letterali per la quale si vuole stabilire quali valori delle lettere rendono la disuguaglianza vera.

Per risolvere una disequazione possiamo basarci sull'applicazione di due principi di equivalenza.

Assioma A.8 (*Primo principio di equivalenza*)

Data una disequazione, di ottiene una disequazione ad essa equivalente aggiungendo ad entrambi i membri uno stesso polinomio.

Assioma A.9 (***Secondo principio di equivalenza***)

Per trasformare una disequazione in una equivalente si possono moltiplicare (o dividere) entrambi i membri per uno stesso numero positivo. In alternativa, si possono moltiplicare (o dividere) entrambi i membri per un numero negativo e cambiare il verso della disequazione.

Risoluzione di disequazioni lineari

La strategia risolutiva di una disequazione lineare intera è simile a quella delle equazioni lineari intere.

Esempio A.9

$$\begin{gathered} \frac{1}{3}x - 4 + 2x > \frac{3+x}{2} \\ 2x - 24 + 12x > 9 + 3x \\ 11x > 33 \\ x > 3 \end{gathered}$$

Per quanto riguarda la risoluzione di disequazioni lineari fratte, la strategia risolutiva consiste nello studiare il segno della frazione.

Esempio A.10

$$\begin{gathered} \frac{3x-5}{1-x} > 0 \\ N: 3x - 5 > 0 \rightarrow x > \frac{5}{3} \\ D: 1 - x > 0 \rightarrow x < 1 \frac{N}{D} >= \Leftrightarrow 1 < x < \frac{5}{3} \end{gathered}$$

Risoluzione di disequazioni di grado superiore al primo

Per la risoluzione di disequazioni di grado superiore al primo, occorre risolvere l'equazione associata, scomponendo il polinomio in tanti monomi, e studiando il segno del prodotto dei monomi.

Esempio A.11

Risolviamo la disequazione $6x^2 + x - 2 > 0$*, analizzando l'equazione associata.*

$$\begin{gathered} 6x^2 + x - 2 = 0 \\ x_1 = \frac{-1 - \sqrt{1+48}}{12} = -\frac{8}{12} = -\frac{2}{3} \\ x_2 = \frac{-1 + \sqrt{1+48}}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \end{gathered}$$

Possiamo riscrivere la disequazione come $6(x+\frac{2}{3})(x-\frac{1}{2})>0$*. Lo studio del prodotto dei tre fattori trova la soluzione della disequazione:* $x<-\frac{2}{3}\vee x>\frac{1}{2}$.

A.8 Sistemi di equazioni e disequazioni

Definizione A.12. Un sistema di equazioni (o di disequazioni) è un insieme di equazioni (disequazioni) tutte nelle stesse incognite. Le soluzioni del sistema sono le soluzioni comuni a tutte le equazioni (disequazioni) che lo compongono.

Ogni sistema di equazioni (o di disequazioni) è caratterizzato da una proprietà nota come **grado**, che corrisponde al prodotto dei gradi delle singole equazioni che lo compongono.

Risoluzione di sistemi lineari

Esistono quattro metodi per la risoluzione dei sistemi lineari.

- **Metodo di sostituzione**
  1. Ricavare un'incognita in funzione dell'altra, da una delle due equazioni.
  2. Sostituire l'espressione trovata per l'incognita nell'altra equazione; si ottiene una equazione in una sola incognita.
  3. Risolvere l'equazione in una sola incognita.
  4. Sostituire la soluzione trovata nell'espressione dell'incognita ancora da determinare.
- **Metodo di confronto**
  1. Ricavare la stessa incognita da entrambe le equazioni.
  2. Uguagliare le due espressioni ottenute; si ricava così un'equazione nella quale compare solo l'altra incognita.
  3. Risolvere l'equazione in una sola incognita.
  4. Sostituire il valore dell'incognita in una delle due equazioni iniziali.
  5. Risolvere la seconda equazione in una sola incognita.
- **Metodo di riduzione**
  1. Moltiplicare una o entrambi le equazioni per fattori non nulli, in modo che i coefficienti di una delle variabili risultino uguali o opposti.
  2. Se i coefficienti ottenuti precedentemente sono uguali, sottrarre membro a membro le due equazioni, viceversa sommare membro a membro; si ottiene una equazione in una sola incognita.
  3. Risolvere l'equazione ottenuta.
  4. Sostituire il valore dell'incognita in una delle due equazioni iniziali e risolvere l'equazione.
- **Metodo di Cramer**

1. Calcolare il determinante del sistema.

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = ab_1 - ba_1$$

2. Calcolare il determinante ottenuto sostituendo alla prima colonna la colonna dei termini noti.

$$D_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c_1 & b_1 \end{vmatrix} = cb_1 - bc_1$$

3. Calcolare il determinante ottenuto sostituendo alla seconda colonna la colonna dei termini noti.

$$D_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix} = ac_1 - ca_1$$

4. Calcolare la soluzione

$$\begin{pmatrix} \frac{D_x}{D} & \frac{D_y}{D} \end{pmatrix}$$

Appendice B

Approfondimenti insiemistici

B.1 Costruzione insiemistica dei numeri

Abbiamo visto che $\mathbb{N}_0$ è un insieme *chiuso* rispetto alle operazioni di somma e prodotto. La chiusura rispetto alla somma è dovuta alla definzione degli assiomi di Peano, mentre la chiusura rispetto al prodotto è una diretta conseguenza della precedente.
Vediamo ora come possiamo definire le altre operazioni aritmetiche basilari in maniera insiemistica.

Consideriamo il prodotto cartesiano $\mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, formato dalle coppie ordinate di numeri naturali (a, b), indicati per brevità con il simbolo $a - b$.
Introduciamo la relazione di equivalenza $\approx$, definita come $(a - b \approx c - d) \Leftrightarrow a + d = b + c$. Questa relazione introduce intuitivamente l'operazione di *sottrazione* come operazione inversa dell'addizione, creando sull'insieme $\mathbb{N}^2$ una partizione in classi di equivalenza, ciascuna delle quali definisce un numero intero.

Consideriamo il prodotto cartesiano $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, formato dalle coppie ordinate di numeri naturali (a, b), indicati per brevità con il simbolo a/b.
Introduciamo la relazione di equivalenza $\approx$, definita come $(m/a \approx n/b) \Leftrightarrow m*b = n*a$. Questa relazione introduce intuitivamente l'operazione di *divisione* come operazione inversa della moltiplicazione, creando su questo insieme una partizione in classi di equivalenza, ciascuna delle quali definisce un numero razionale.

L'insieme A usato per la definizione di numero reale è un particolare insieme di $\mathbb{Q}^+$ denominato **t**aglio di Dedekind.
Un sottoinsieme di $\mathbb{Q}^+$ viene così denominato quando è un sottoinsieme proprio, diverso dall'insieme vuoto e dall'insieme stesso; inoltre, dato un elemento del sottoinsieme e un elemento dell'insieme $\mathbb{Q}^+$, dove il numero razionale è minore del numero del sottoinsieme, abbiamo che il numero razionale è un elemento del sottoinsieme. Infine, questo sottoinsieme ha la proprietà di avere un elemento maggiore di un suo qualunque elemento prefissato.
Definiamo ora come T l'insieme di tutti i possibili tagli di Dedekind e consideriamo il prodotto cartesiano $T^2 = T \times T$, formato dalle coppie ordinate dei tagli (a, b), indicate per comodità come $a - b$. Introduciamo su T^2 la relazione

di equivalenza $\approx$, definita come $(a - b \approx c - d) \Leftrightarrow a + d = b + c$, che definisce intuitivamente l'operazione di sottrazione come inversa dell'addizione. Questa relazione induce una partizione in classi di equivalenza sul prodotto cartesiano; ogni classe di equivalenza definisce un numero reale.

B.2 Campo algebrico

L'insieme K, dotato di due operazioni binarie $+$ e $*$, è un campo se valgono i seguenti assiomi:

- $(K, +)$ è un gruppo abeliano con elemento neutro 0:
  - $(a + b) + c = a + (b + c)$
  - $a + b = b + a$
  - $0 + a = a + 0 = a$
  - $\forall a \exists (-a) | a + -a = -a + a = 0$
- $(K \setminus \{0\}, *)$ è un gruppo abeliano con elemento neutro 1:
  - $(a * b) * c = a * (b * c)$
  - $a * b = b * a$
  - $1 * a = a * 1 = a$
  - $\forall a \neq 0 \exists (a - 1) | a * a - 1 = a - 1 * a = 1$
- La moltiplicazione è distributiva rispetto alla somma $(a * (b + c) = (a * b) + (a * c))$

(le relazioni devono valere per ogni a, b e c in K).

B.3 Coniugazione complessa

In algebra lineare, la coniugazione complessa corrisponde a un *automorfismo*, cioè una funzione biunivoca tra una struttura algebrica e se stessa, del campo dei numeri complessi, poiché gode delle seguenti proprietà:

$$\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$$
$$\overline{zw} = \bar{z} \cdot \bar{w}$$

Valgono inoltre le seguenti relazioni:

$$\overline{z^{-1}} = (\bar{z})^{-1}$$
$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$
$$z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}[z]$$
$$z - \bar{z} = 2i\,\mathrm{Im}[z]$$

Parte II

Calcolo differenziale e studio delle funzioni reali a variabile reale

Capitolo 7

Le funzioni reali a variabile reale

Abbiamo parlato finora di insiemi numerici, della loro costruzione e delle operazioni tra di essi. Queste operazioni possono essere definite come *relazioni* tra elementi dello stesso insieme.
Iniziamo ora a studiare le *funzioni*.

7.1 Relazioni e funzioni

Definizione 7.1. Dati due insiemi A e B, si chiama **relazione binaria** $\mathscr{R}$ un qualunque sottoinsieme di $A \times B$.

Definizione 7.2 (Dominio e codominio)**.** Si definisce **dominio** di una relazione binaria l'insieme dei valori che compongono l'insieme di partenza.
Si definisce **codominio** di una relazione l'insieme $C \subseteq B$ composto dagli elementi coinvolti nella funzione, cioè dagli elementi che sono immagini di un elemento del dominio.

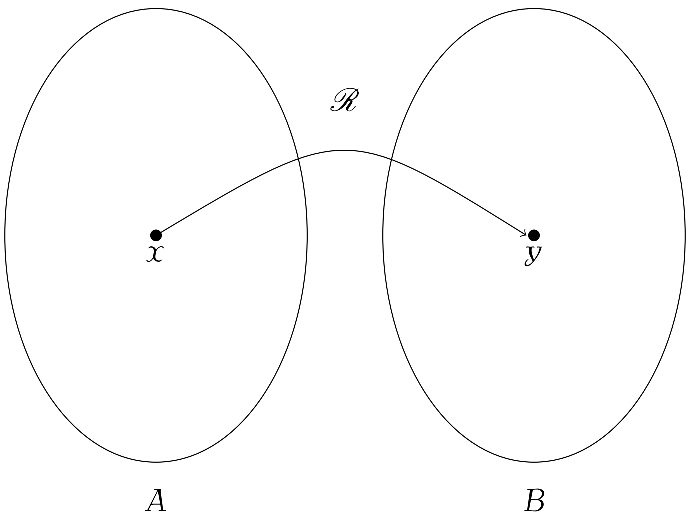


Figura 7.1: Relazione binaria

Definizione 7.3. Dati due insiemi $A, B \subseteq \mathbb{R}$ e una relazione f tra loro, questa relazione si definisce **funzione reale di variabile reale** se nella relazione esiste un insieme di partenza e di arrivo e se a ogni elemento dell'insieme di partenza è associato uno e un solo elemento dell'insieme di arrivo.

Dalla definizione di funzione che abbiamo enunciato qui sopra, notiamo che il nostro studio si concentrerà su funzioni *suriettive* ($\forall y \in B\ \exists x \in A |\ f(x) = y$); esistono anche funzioni *iniettive* ($\forall x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$). Funzioni che sono contemporaneamente iniettive e suriettive vengono dette *iniettive*. Dando per scontato la suriettività, quando una funzione è iniettiva allora possiamo dire che è **i**nvertibile ($f^{-1}\colon C \to D$).

La rappresentazione nel piano cartesiano di una funzione reale di variabile reale prende il nome di **grafico della funzione** e si definisce come sottoinsieme del piano cartesiano:

$$G_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \in D \wedge y = f(x) \in C\} \tag{7.1}$$

Conoscendo il grafico di una funzione, è possibile determinare il grafico della sua funzione inversa tramite la simmetria rispetto alla bisettrice del $I°$ e del $III°$ quadrante.

Esempio 7.1

$$f\colon \mathbb{R} \to [0, +\infty) x \mapsto y = x^2$$

f non è iniettiva.
Per renderla iniettiva bisogna restringere il dominio:

$$g\colon [0, +\infty) \to [0, +\infty) x \mapsto y = x^2 g^{-1}\colon x = \sqrt{y}$$

7.2 Funzioni limitate

Se il codominio di una funzione è un insieme limitato, allora si parla di *funzioni limitate*.

Definizione 7.4 (Funzione limitata superiormente o inferiormente)**.** La funzione $f\colon D \to C$ si definisce **limitata superiormente** (o **inferiormente**) se $\exists M \in \mathbb{R} | f(x) \leq M\ \forall x \in D$ ($\exists m \in \mathbb{R} | f(x) \geq m\ \forall x \in D$)

Poichè il codominio della funzione può essere limitato, possiamo determinare per la funzione gli estremi e i valori minimi e massimi.

Definizione 7.5 (Estremo superiore o inferiore di una funzione)**.** Data una funzione $f\colon D \to C$, limitata superiormente (o inferiormente), si dice che la funzione ammette **estremo superiore** $\Lambda \in \mathbb{R}$ (**estremo inferiore** $\lambda \in \mathbb{R}$) se $f(x) \leq \Lambda \forall x \in D$ e $\forall \varepsilon > 0 \exists x \in D | f(x) > \Lambda - \varepsilon$ ($f(x) \geq \lambda \forall x \in D$ e $\forall \varepsilon > 0 \exists x \in D | f(x) < \lambda - \varepsilon$)

Definizione 7.6 (Massimo e minimo assoluto)**.** Si definisce **massimo assoluto**$M \in \mathbb{R}$ (**minimo assoluto** $m \in \mathbb{R}$) della funzione $f\colon D \to C$ quel valore che $\exists x_M \in D | f(x_M) = M \geq f(x)\ \forall x \in D$ ($\exists x_m \in D | f(x_m) = m \leq f(x)\ \forall x \in D$)

7.3 Funzioni crescenti e descrescenti

In base all'andamento dei valori della funzione, possiamo definire funzioni *crescenti* o *decrescenti*.

Definizione 7.7 (Funzione crescente)**.** Sia data una funzione $f\colon D \to C$; si dice che f è **strettamente crescente** (Figura 7.2) se $\forall x_1, x_2 \in D, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$. Si dice che f è **debolmente crescente** se $\forall x_1, x_2 \in D, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$.

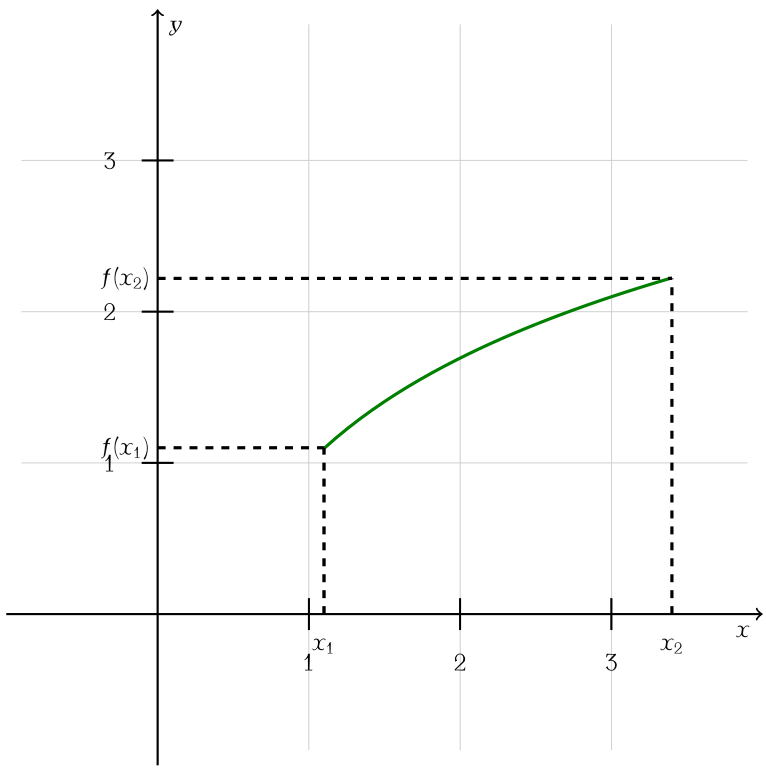


Figura 7.2: Funzione crescente

Definizione 7.8 (Funzione decrescente)**.** Sia data una funzione $f\colon D \to C$; si dice che f è **strettamente decrescente** (Figura 7.3) se $\forall x_1, x_2 \in D, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$. Si dice che f è **debolmente decrescente** se $\forall x_1, x_2 \in D, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.

Quando una funzione risulta essere strettamente crescente (decrescente), si dice anche che è **monotòna in senso stretto**.[1]
Notando la possibile monotònia di una funzione, si può stabilire anche la sua invertibilità in base al seguente teorema.

[1] La definizione di *monotònia* deriva dalla teoria degli ordini.

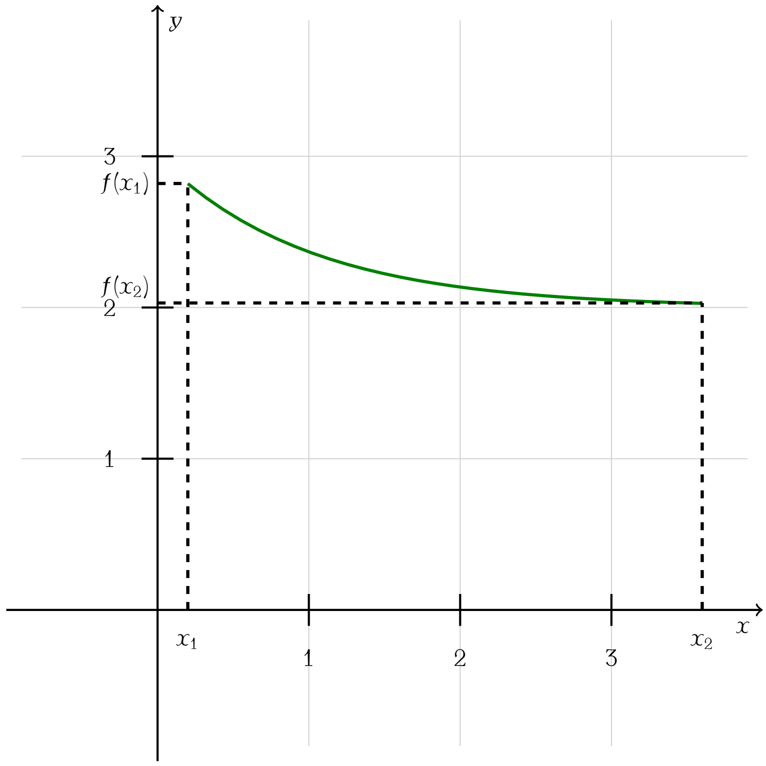


Figura 7.3: Funzione decrescente

Teorema 7.1. *Se $f: D \to C$ è una funzione monotòna in senso stretto, allora è una funzione iniettiva e invertibile.*

Corollario 7.1. *Se $f: D \to C$ è una funzione invertibile, allora non è sempre monotòna in senso stretto.*

7.4 Simmetrie di funzioni

Possiamo, infine, definire delle proprietà di simmetria delle funzioni reali di variabile reale.

Definizione 7.9 (Funzione pari)**.** Sia data una funzione $f: D \to C$, con D simmetrico rispetto all'origine ($\forall x \in D \to -x \in D$). La funzione si definisce **pari** (Figura 7.4) se $f(x) = f(-x)$, cioè se il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate.

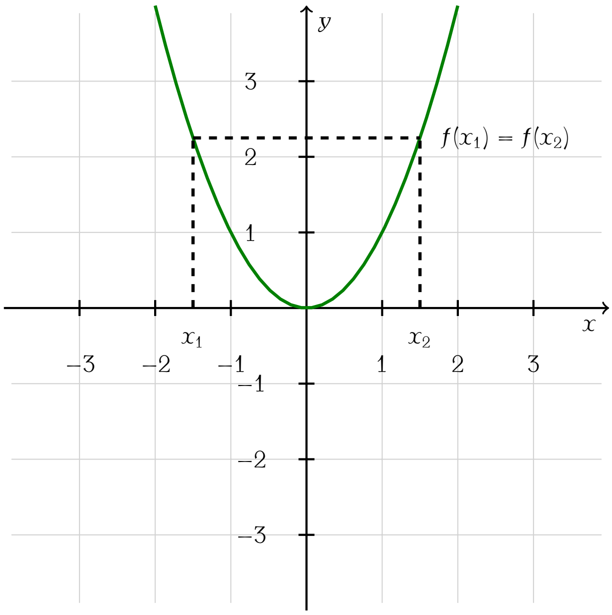


Figura 7.4: Funzione pari

Definizione 7.10 (Funzione dispari)**.** Sia data una funzione $f\colon D \to C$, con D simmetrico rispetto all'origine ($\forall x \in D \to -x \in D$). La funzione si definisce **dispari** (Figura 7.5) se $f(x) = -f(-x)$, cioè se il suo grafico è simmetrico rispetto all'origine degli assi.

In entrambi i casi, la funzione non è invertibile.

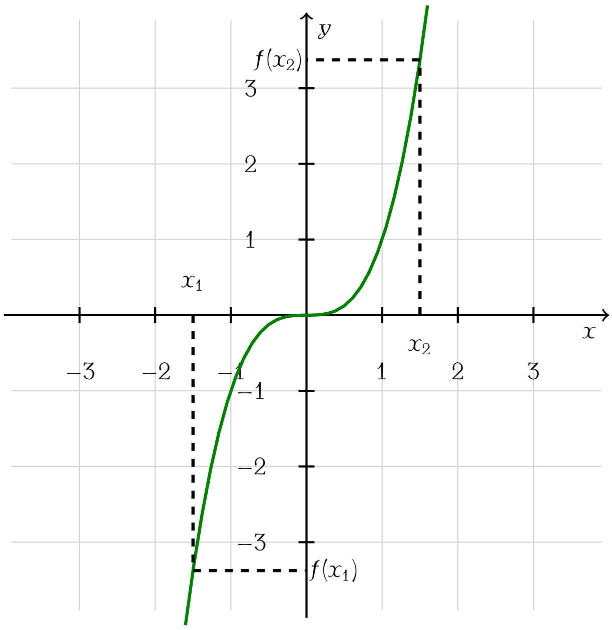


Figura 7.5: Funzione dispari

Definizione 7.11 (Funzione periodica)**.** Sia data una funzione $f\colon D \to C$ e un valore $T > 0$. La funzione si definisce **periodica di periodo** T se $f(x) = f(x + kT) \quad \forall k \in \mathbb{Z}$.

Capitolo 8

Funzioni elementari

Dopo aver definito il concetto di funzione a variablie reale, iniziamo ora a studiare alcune funzioni elementari, vedendone andamento e proprietà varie.

8.1 La successione numerica

Un particolare tipo di funzione reale a variabile reale, la più semplice che possiamo studiare, corrisponde alla **successione numerica** ($f\colon \mathbb{N} \to C \subseteq \mathbb{N}$).

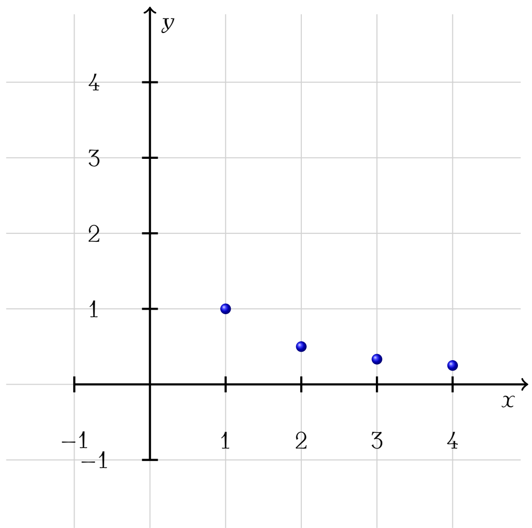


Figura 8.1: Successione numerica

Definizione 8.1 (Successione numerica)**.** Si definisce **successione numerica**, e viene spesso indicata come $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a_1, a_2, \dots\}$, un insieme induttivo e discreto di numeri reali che sono in corrispondenza biunivoca con l'insieme dei numeri naturali (o un suo sottoinsieme).

Nella Figura 8.1 viene rappresentata la successione $n \mapsto y = f(n) = \frac{1}{n}$.

Una successione numerica, come ogni funzione, può essere decrescente ($a_{n+1} < a_n\ \forall n \in \mathbb{N}$) o crescente ($a_{n+1} > a_n\ \forall n \in \mathbb{N}$); inoltre, una successione numerica può avere un limite superiore e/o inferiore, un minimo e/o un massimo assoluto.

8.2 Le rette

Le *rette* sono funzioni reali di variabile reale molto semplici.
Una **retta** ($f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ x \mapsto y = mx + q$) é una funzione illimitata, senza valore minimo o massimo e senza alcuna particolare simmetria.

Vediamo alcune particolari rette.

Funzione costante

Una funzione reale molto semplice è la funzione **costante** (Figura 8.2).

Definizione 8.2 (Funzione costante)**.**

$$f\colon \mathbb{R} \to \{k\}\ x \mapsto y = k$$

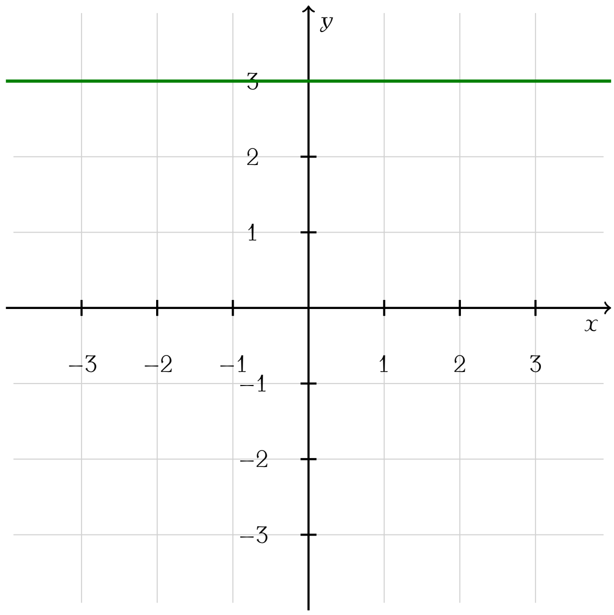


Figura 8.2: Funzione costante

Una funzione costante è contemporaneamente debolmente crescente e debolmente decrescente; il suo valore minimo e massimo coincidono nel valore del codominio k.
La funzione costante, quindi, è una retta parallela all'asse delle x.

Bisettrici

Un'altra retta importante è quella che rappresenta la **bisettrice dei quadranti**, come quella del primo e del terzo quadrante. La bisettrice è una funzione illimitata, dispari e strettamente crescente (Figura 8.3).

Definizione 8.3 (Bisettrice del I e III quadrante)**.**

$$f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\; x \mapsto y = x$$

Definizione 8.4 (Bisettrice del II e IV quadrante)**.**

$$f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\; x \mapsto y = -x$$

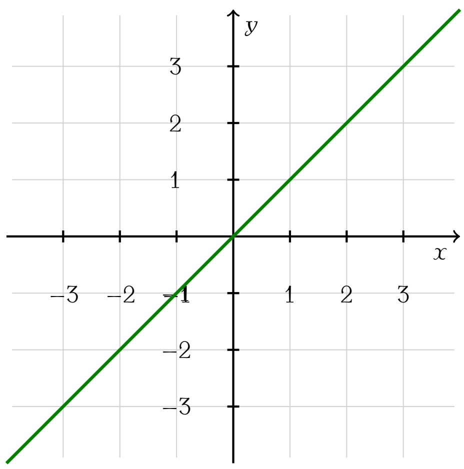


Figura 8.3: Bisettrice del primo e del terzo quadrante

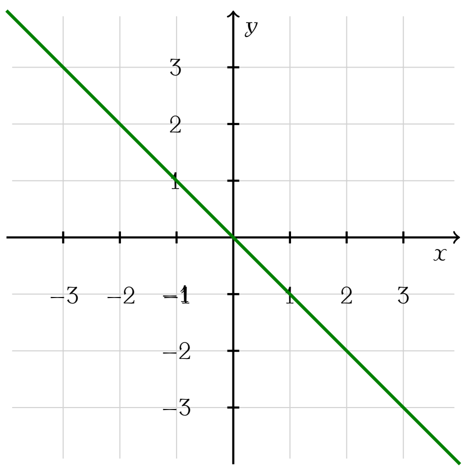


Figura 8.4: Bisettrice del secondo e del quarto quadrante

8.3 Le parabole

Se la retta è una funzione elementare di primo grado, la prossima funzione elementare che vediamo è di secondo grado.

La **parabola** è una funzione limitata, avente valore minimo o massimo a seconda dei casi e di simmetria pari rispetto al proprio asse di simmetria (Figura 8.5).

Definizione 8.5 (Parabola)**.**

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\; x \mapsto y = ax^2 + bx + c$$

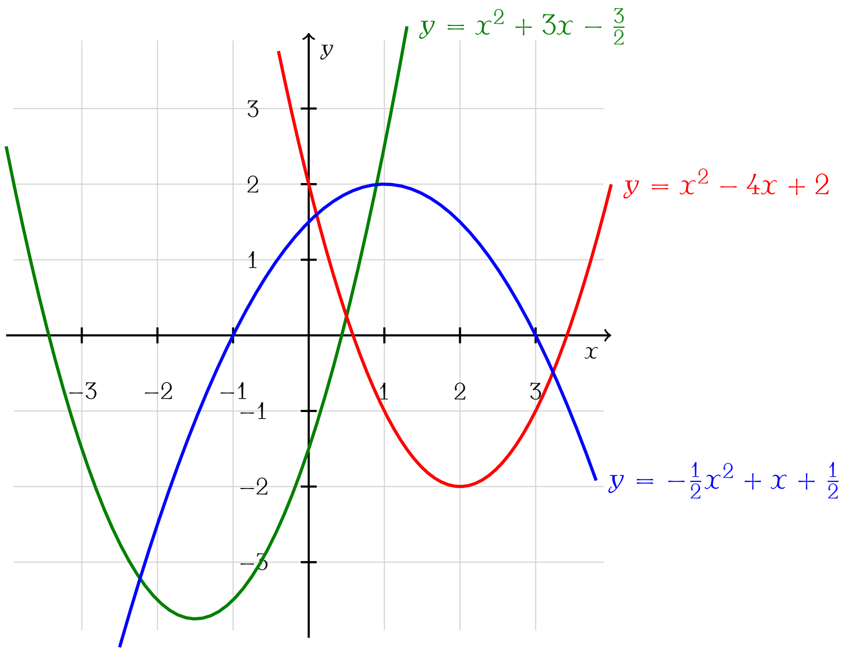


Figura 8.5: Parabole

La parabola, però, in genere non è invertibile nel suo dominio; per determinare la sua funzione inversa, occorre *restringere il dominio*, ottenendo due funzioni diverse: la **radice quadrata** e il suo opposto (Figura 8.6).

Definizione 8.6 (Radice quadrata)**.**

$$f\colon [0, +\infty) \to [0, +\infty)\; y \mapsto x = \sqrt{y}$$

Definizione 8.7 (Opposto di radice quadrata)**.**

$$f\colon [0, +\infty) \to [0, +\infty)\; y \mapsto x = -\sqrt{y}$$

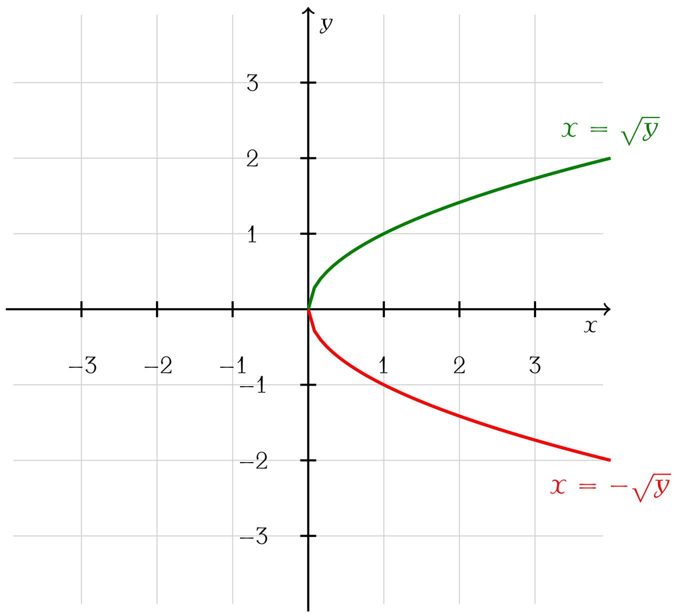


Figura 8.6: Radice quadrata e suo opposto

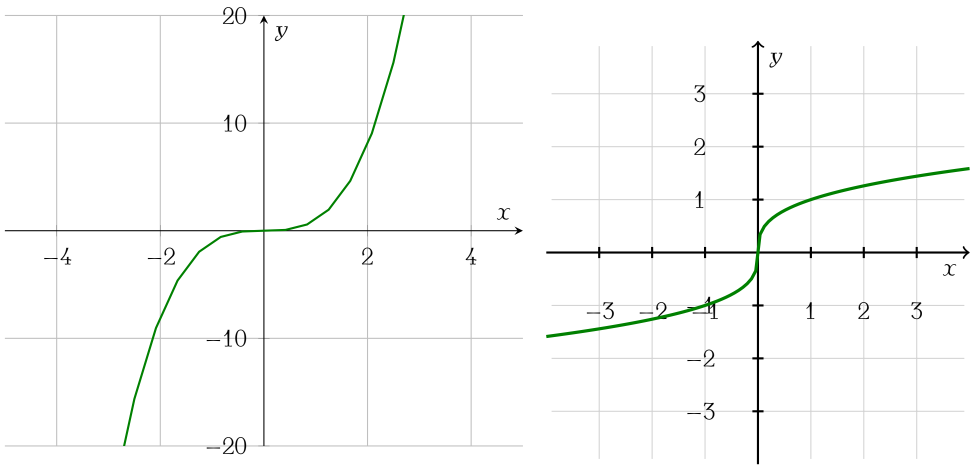
Salendo ancora di grado, si ottiene una funzione di terzo grado: la **parabola cubica** (Figura 8.7a), che è una funzione strettamente crescente, illimitata e di simmetria dispari. La funzione inversa della parabola cubica è la **radice cubica** (Figura 8.7b).

Definizione 8.8 (Parabola cubica)**.**

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ x \mapsto y = x^3$$

Definizione 8.9 (Radice cubica)**.**

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ y \mapsto x = \sqrt[3]{y}$$



(a) Parabola cubica

(b) Radice cubica

Figura 8.7: Parabola e radice cubica

8.4 Funzioni polinomiali

La retta, la parabola e la parabola cubica sono forme particolari di funzioni aventi come espressione analitica un polinomio.
Queste funzioni sono note come **funzioni polinomiali**.

Definizione 8.10 (Funzione polinomiale)**.**

$$f\colon \mathbb{R} \to C \subseteq \mathbb{R}\ x \mapsto y = P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

In una funzione polinomiale, se tutti i coefficienti dei termini di grado pari sono nulli, possiamo affermare che essa ha simmetria dispari e il codominio concide con l'insieme dei numeri reali; viceversa, se tutti i coefficienti dei termini di grado dispari sono nulli, possiamo affermare che la funzione ha simmetria pari.

8.5 Le funzioni razionali

Dividendo una funzione polinomiale con un'altra, si ottiene un altro particolare tipo di funzione elementare: la **funzione razionale**.

Definizione 8.11 (Funzione razionale)**.**

$$f\colon D \to C \subseteq \mathbb{R}\ x \mapsto y = f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}, \text{ con } D = \{x \in \mathbb{R} | Q_m(x) \neq 0\}$$

Vediamone qualche esempio.

L'iperbole equilatera

Il tipico esempio di funzione razionale é quello dell'**iperbole equilatera** (Figura 8.8).
L'iperbole é una funzione illimitata, di simmetria dispari e strettamente decrescente.

Definizione 8.12 (Iperbole equilatera)**.**

$$f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}\ x \mapsto y = \frac{1}{x}$$

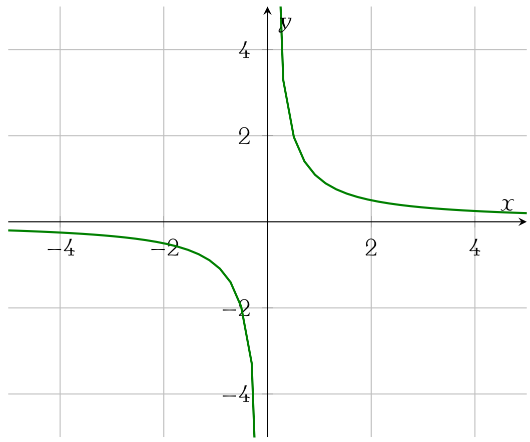


Figura 8.8: Iperbole equilatera

La funzione $\frac{1}{x^2}$

Un'altra funzione razionale elementare é quella data da $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^+$ $x \mapsto y = \frac{1}{x^2}$ (Figura 8.9).
Questa funzione ha simmetria pari ed è invertibile solamente tramite riduzione di dominio ($f^{-1}\colon (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ $y \mapsto x = \frac{1}{\sqrt{y}}$).

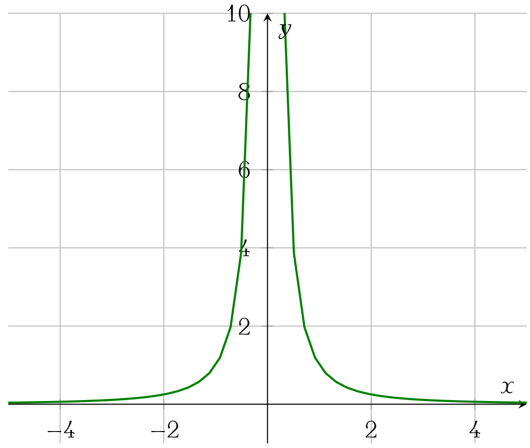


Figura 8.9: La funzione $\dfrac{1}{x^2}$

8.6 Funzioni trascendenti

Passiamo ora a studiare particolari funzioni elementari, dette *funzioni trascendenti*.

Si chiamano **funzioni trascendenti** tutte quelle funzioni che non sono algebriche, cioè che contengano operazioni diverse dalle quattro operazioni standard dell'aritmetica e dall'operazione di potenza (e radice): logaritmo, esponenziale, espressioni trigonometriche,. . . .

Funzioni esponenziali e logaritmiche

La prima funzione trascendente che studiamo è la funzione **esponenziale** (Figura 8.10).
Questo tipo di funzioni sono monotòne crescenti (se $a > 1$) o decrescenti (se $0 < a < 1$). Sono, inoltre, funzioni limitate inferiormente, ma non hanno alcun valore minimo.

Definizione 8.13 (Funzione esponenziale)**.**

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \ x \mapsto y = a^x \ (a > 0)$$

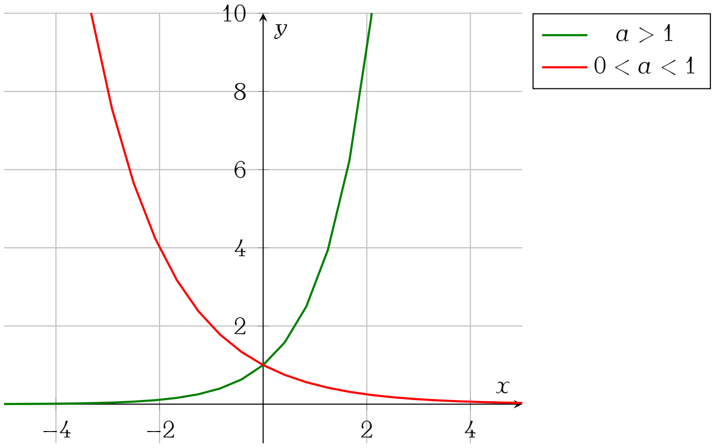


Figura 8.10: Funzioni esponenziali

La funzione esponenziale, infine, è invertibile nel suo dominio; la sua funzione inversa ǹota con il nome di **logaritmo** (Figura 8.11).

Definizione 8.14 (Funzione logaritmo)**.**

$$f : \mathbb{R}^+ \to (0, +\infty) \ y \mapsto x = \log_a y \ (a > 0)$$

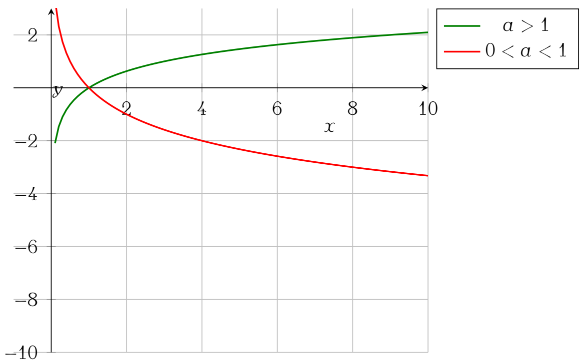


Figura 8.11: Funzioni logaritmiche

Una particolare coppia di funzione esponenziale/logaritmica è quella che ha come funzione logaritmica il cosiddetto **logaritmo naturale** e come funzione esponenziale l'**esponenziale di Nepero**, dove *e* rappresenta il **numero di Nepero**, estremo superiore di una particolare successione numerica (Figura 8.12).

Definizione 8.15 (Logaritmo naturale)**.**

$$f\colon \mathbb{R}^+ \to (0, +\infty)\ y \mapsto x = \log_e y = \ln y$$

Definizione 8.16 (Esponenziale di Nepero)**.**

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+\ x \mapsto y = e^x$$

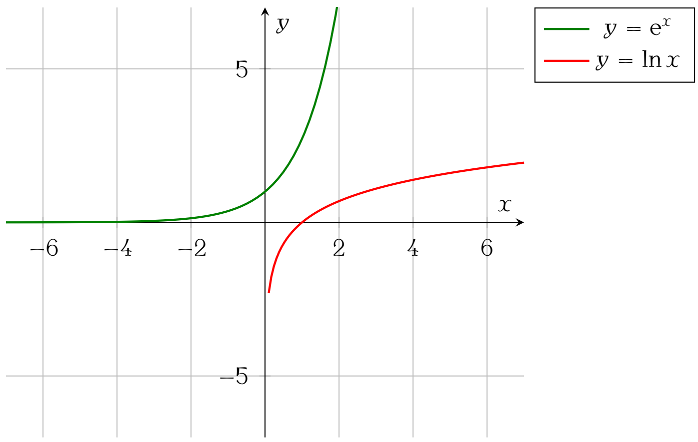


Figura 8.12: Logaritmo naturale e esponenziale di Nepero

Funzioni gonometriche

Le funzioni gonometriche o *funzioni circolari* sono funzioni di un angolo; esse sono importanti nello studio dei triangoli e nella modellizzazione dei fenomeni periodici, oltre a un gran numero di altre applicazioni.
Esse sono spesso definite come rapporti fra i lati di un triangolo rettangolo contenenti l'angolo e, equivalentemente, possono essere definite come le lunghezze di diversi segmenti costruiti dal cerchio unitario, denominata **circonferenza goniometrica** (la cui equazione è $x^2 + y^2 = 1$, Figura 8.13).

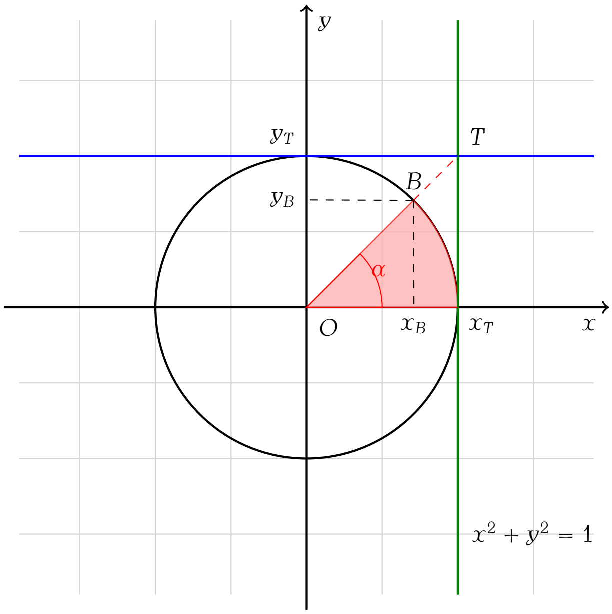


Figura 8.13: Circonferenza goniometrica

Funzione seno

La prima funzione trigonometrica che conosciamo è la funzione **seno** (Figura 8.14a).
La funzione seno è una funzione periodica di periodo 2π, avente simmetria dispari e invertibile solamente tramite restrizione del dominio; infatti, se il dominio fosse l'intervallo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, potremmo invertire la funzione, ottenendo l'**arcoseno** (Figura 8.14b), che corrisponde geometricamente all'arco sotteso all'angolo s il cui seno è y.

Definizione 8.17 (Seno di un angolo)**.** Consideriamo la circonferenza goniometrica e un angolo orientato α, e sia B il punto della circonferenza associato ad α. Definiamo **seno** dell'angolo α, e lo indichiamo con $\sin\alpha$, le funzioni che ad α associano, rispettivamente, il valore dell'ordinata del punto B.

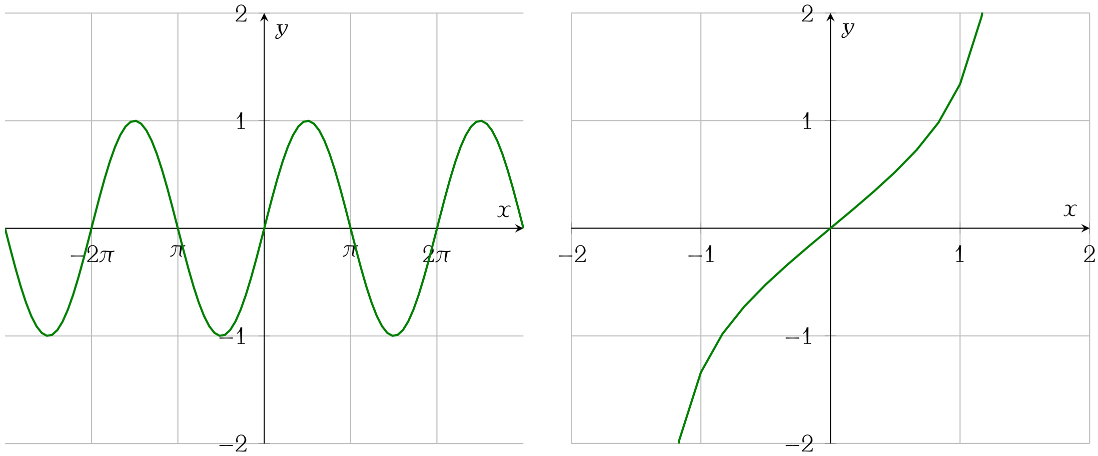
$$\sin\alpha = y_B$$

Definizione 8.18 (Funzione seno)**.**

$$f\colon \mathbb{R} \to [-1, 1] \; x \mapsto y = \sin x$$

Definizione 8.19 (Funzione arcoseno)**.**

$$f\colon [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \; y \mapsto x = \arcsin y$$



(a) Funzione seno (b) Funzione arcoseno

Figura 8.14: Seno e arcoseno

La funzione arcoseno può assumere espressione diverse a seconda della restrizione del dominio che venne effettuata.
Ad esempio, se il dominio ristretto della funzione seno fosse $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right]$, la funzione inversa diventa $y \mapsto x = \arcsin y + \pi$.

Funzione coseno

Correlata alla funzione seno è la funzione **coseno**, che è una funzione periodica di periodo 2π, avente simmetria pari e invertibile solamente tramite restrizione del dominio ottenendo la funzione **arcocoseno**.
Possiamo osservare il grafico di queste due funzioni nella Figura 8.15.

Definizione 8.20 (Coseno di un angolo)**.** Consideriamo la circonferenza goniometrica e un angolo orientato α, e sia B il punto della circonferenza associato ad α.
Definiamo **coseno** dell'angolo α, e indichiamo con $\cos\alpha$, le funzioni che ad α associano, rispettivamente, il valore dell'ascissa del punto B.

$$\cos\alpha = x_B$$

Definizione 8.21 (Funzione coseno)**.**

$$f\colon \mathbb{R} \to [-1, 1] \; x \mapsto y = \cos x$$

Definizione 8.22 (Funzione arcocoseno)**.**

$$f\colon [-1, 1] \to [0, \pi] \; y \mapsto x = \arccos y$$

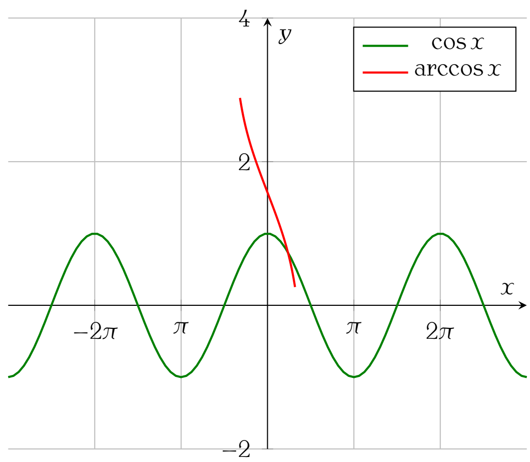


Figura 8.15: Funzione coseno e arcocoseno

Funzione tangente

Un'altra funzione trigonometrica elementare, derivata dalle due precedenti, è la funzione **tangente** (Figura 8.16a), che è una funzione periodica di periodo π, avente simmetria dispari e invertibile mediante restrizione del dominio.
La funzione inversa, che prende il nome di **arcotangente**, è una funzione monòtona crescente, avente simmetria dispari (Figura 8.16b).

Definizione 8.23 (Tangente di un angolo)**.** Consideriamo un angolo orientato α e chiamiamo B l'intersezione fra il lato termine e la circonferenza goniometrica di centro O.
Definiamo **tangente di** α la funzione che ad α associa il rapporto, quando esiste, fra l'ordinata e l'ascissa del punto B.

$$\tan\alpha = \frac{y_B}{x_B}$$

Alternativamente, si definisce come tangente di α l'ordinata del punto di intersezione T tra la retta $y = 1$ e il prolungamento del lato termine OB.

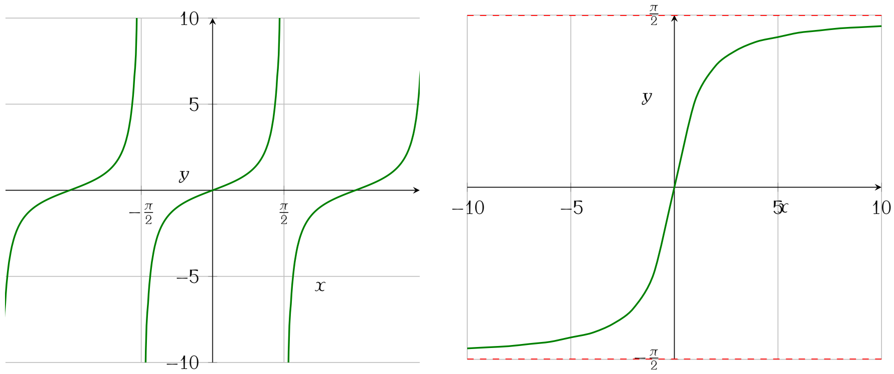
$$\tan\alpha = y_T$$

Definizione 8.24 (Funzione tangente)**.**

$$f\colon \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R}\ x \mapsto y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

Definizione 8.25 (Funzione arcotangente)**.**

$$f\colon \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\ y \mapsto x = \arctan y$$



(a) Funzione tangente (b) Funzione arcotangente

Figura 8.16: Tangente e arcotangente

Funzione cotangente

Un'altra funzione goniomentrica è la funzione **cotangente** (Figura 8.17a), che è una funzione periodica di periodo π e avente simmetria dispari.
La cotangente è invertibile solamente mediante restrizione del dominio; la funzione inversa, che prende il nome di **arcocotangente** (Figura 8.17b) è strettamente decrescente e simmetrica rispetto al punto $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Definizione 8.26 (Cotangente di un angolo)**.** Consideriamo un angolo orientato α e chiamiamo B l'intersezione fra il lato termine e la circonferenza goniometrica di centro O.
Definiamo **cotangente di** α la funzione che ad α associa il rapporto, quando esiste, fra l'ascissa e l'ordinata del punto B.

$$\cot \alpha = \frac{x_B}{y_B}$$

Alternativamente, si definisce come cotangente di α l'ascissa del punto di intersezione T tra la retta $x = 1$ e il prolungamento del lato termine OB.

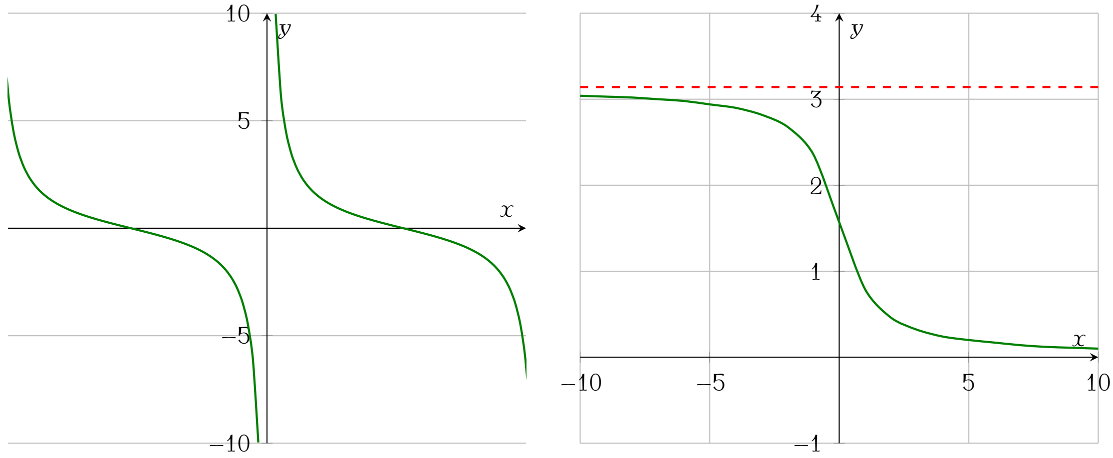
$$\cot \alpha = x_T$$

Definizione 8.27 (Funzione cotangente)**.**

$$f \colon \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R} \; x \mapsto y = \cot x$$

Definizione 8.28 (Funzione arcocotangente)**.**

$$f \colon \mathbb{R} \to (0, \pi) \; y \mapsto x = \operatorname{arccot} y$$



(a) Funzione cotangente (b) Funzione arcotangente

Figura 8.17: Cotangente e arcocotangente

Funzione secante e cosecante

Un'altra funzione goniometrica è la funzione **secante** (Figura 8.18), che è una funzione periodica di periodo π e avente simmetria pari.

Definizione 8.29 (Secante di un angolo)**.** Dato un angolo α, si definisce **secante di** α la funzione che associa ad α il reciproco del valore di $\cos\alpha$, purché $\cos\alpha$ sia diverso da 0.

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}, \text{ con } \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

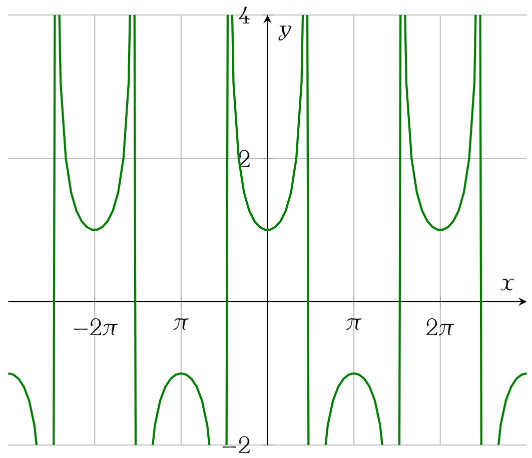


Figura 8.18: Funzione secante

L'ultima funzione goniometrica che vediamo è la funzione **cosecante**, che è una funzione periodica di periodo π e avente simmetria dispari.

Definizione 8.30 (Cosecante di un angolo)**.** Dato un angolo α, si definisce **cosecante di** α la funzione che associa ad α il reciproco del valore di $\sin\alpha$, purché $\sin\alpha$ sia diverso da 0.

$$\csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}, \text{ con } \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

8.7 Funzioni iperboliche

Un'altra classe di funzioni interessanti sono le cosiddette **funzioni iperboliche**.
Consideriamo, sull'iperbole equilatera di equazione I: $x^2 - y^2 = 1$, un generico punto P sul ramo destro dell'iperbole tale che il settore AOP (dove $A(1;0)$) abbia area pari a $\frac{x}{2}$. Le coordinate del punto P saranno $(\cosh x; \sinh x)$, dove $\cosh x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ rappresenta la funzione **coseno iperbolico** ($\mathbb{R} \to [1, +\infty)$), mentre $\sinh x = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$ rappresenta la funzione **seno iperbolico** ($\mathbb{R} \to \mathbb{R}$).

Vediamo perché le espressioni del seno iperbolico e del coseno iperbolico sono legate a quelle della funzione e^x.
Consideriamo il triangolo mistilineo OPA nella Figura 8.19.

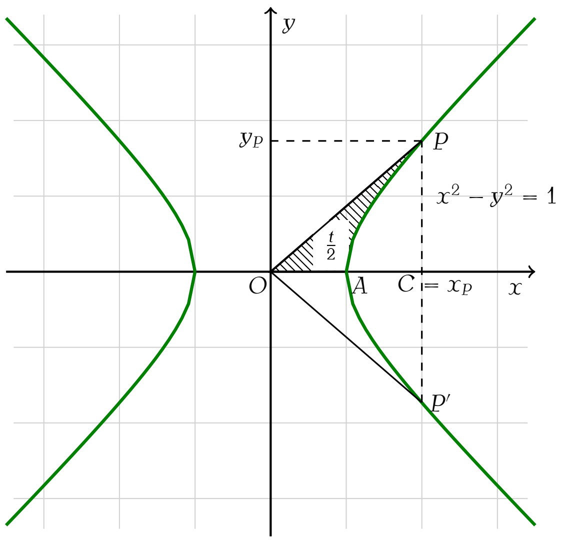


Figura 8.19: Costruzione delle funzioni iperboliche

Di questo triangolo sappiamo la lunghezza di tre segmenti ($\overline{OC} = x, \overline{OA} = 1, \overline{PC} = \sqrt{x^2 - a^2}$), quindi la sua area, che in precedenza abbiamo definito pari a $\frac{x}{2}$, è data dall'area del triangolo OPC meno l'area del settore APC[1].

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{x\sqrt{x^2-1}}{2} - \int_1^x \sqrt{x^2-1}\,dx = \\
&= \frac{x\sqrt{x^2-1}}{2} - \left[\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2}\ln(2\sqrt{x^2-1}+2x)\right]_1^x = \\
&= \frac{x\sqrt{x^2-1}}{2} - \frac{x\sqrt{x^2-1}}{2} + \frac{1}{2}\ln(2\sqrt{x^2-1}+2x) - \frac{1}{2}\ln 2 = \\
&= \frac{1}{2}\ln(2\sqrt{x^2-1}+2x) - \frac{1}{2}\ln 2 = \\
&= \frac{1}{2}\ln(\sqrt{x^2-1}+x)
\end{aligned}
$$

Se poniamo $2A = t$, abbiamo:

$$
\begin{aligned}
&\ln(\sqrt{x^2-1}+x) = t \\
&\sqrt{x^2-1}+x = \mathrm{e}^t \\
&\sqrt{x^2-1} = \mathrm{e}^t - x \\
&x^2-1 = (\mathrm{e}^t - x)^2 \\
&x^2-1 = \mathrm{e}^{2t} - 2x\mathrm{e}^t + x^2 \\
&\mathrm{e}^{2t}+1 = 2x\mathrm{e}^t \\
&x = \frac{\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}}{2}
\end{aligned}
$$

che corrisponde alla definizione del coseno iperbolico. Allo stesso modo possiamo definire il seno iperbolico.

Seno iperbolico

La prima funzione iperbolica che analizziamo è il **seno iperbolico** (Figura 8.20).

Definizione 8.31 (Funzione seno iperbolico)**.**

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ x \mapsto y = \sinh x$$

[1]Per calcolare l'area del settore APC faremo uso degli integrali definiti, che vedremo nel Capitolo 14

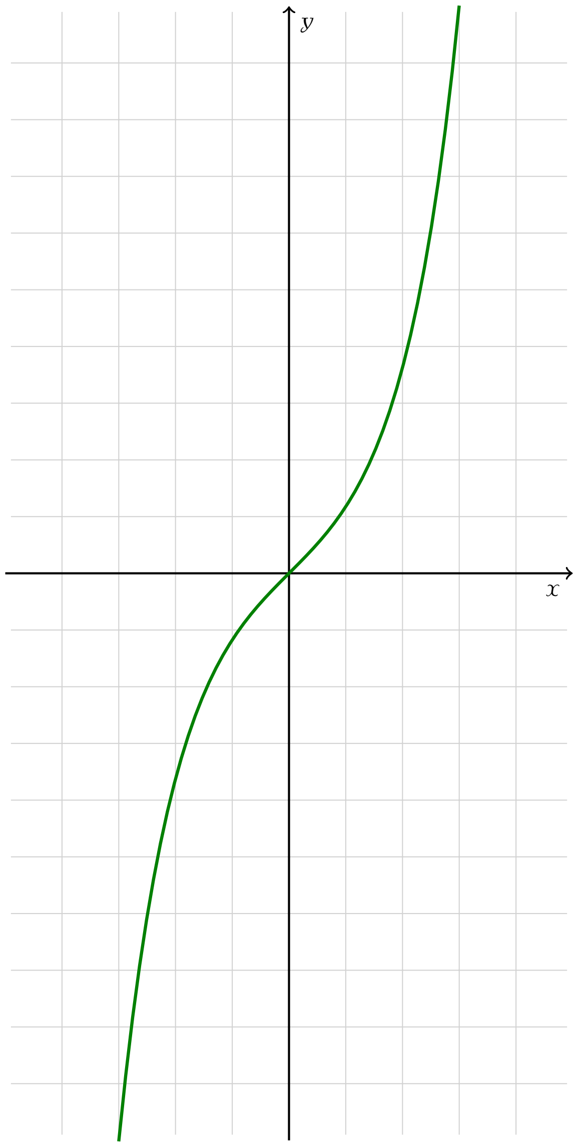


Figura 8.20: Seno iperbolico

Come possiamo notare dal grafico, il seno iperbolico è una funzione dispari ed è monòtona crescente.

La funzione inversa del seno iperbolico è nota come **settore seno iperbolico**.

Definizione 8.32 (Funzione settore seno iperbolico)**.**

$$f^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ y \mapsto x = \operatorname{settsinh} y = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})$$

Coseno iperbolico

Passiamo ora a definire la funzione **coseno iperbolico** (Figura 8.21).

Definizione 8.33 (Funzione coseno iperbolico)**.**

$$f\colon \mathbb{R} \to [1, +\infty)\ x \mapsto y = \cosh x$$

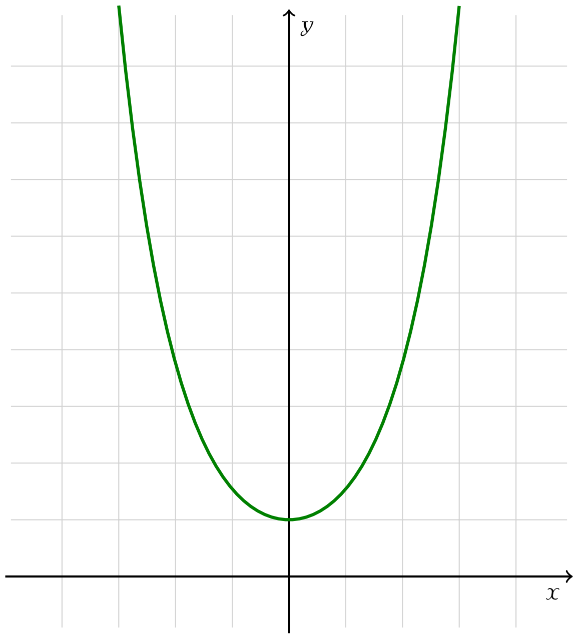


Figura 8.21: Coseno iperbolico

Come si può vedere dal grafico, la funzione ha la concavità rivolta verso l'alto ed è una funzione pari.

La funzione inversa del coseno iperbolico è nota come **settore coseno iperbolico**.

Definizione 8.34 (Funzione settore coseno iperbolico)**.**

$$f^{-1}\colon [1, +\infty) \to [0, +\infty)\ y \mapsto x = \operatorname{settcosh} y = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1})$$

Tangente iperbolica

Anche per le funzioni iperboliche è possibile definire la funzione **tangente iperbolica** (Figura 8.22).

Definizione 8.35 (Funzione tangente iperbolica)**.**

$$f\colon \mathbb{R} \to (-1, 1)\ x \mapsto y = \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

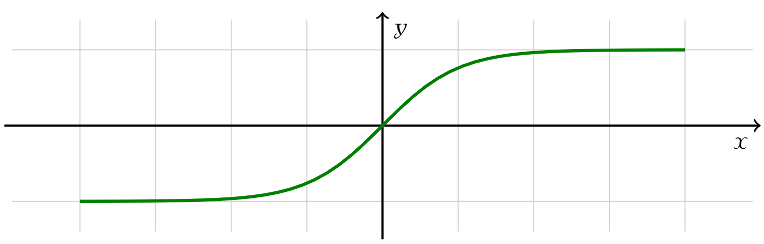


Figura 8.22: Tangente iperbolica

Come si può notare dal grafico, la funzione è monòtona crescente in tutto il suo dominio ed ha simmetria dispari.

La funzione inversa della tangente iperbolica è nota come **settore tangente iperbolica**.

Definizione 8.36 (Funzione settore tangente iperbolico)**.**

$$f^{-1}\colon (-1,+1) \to \mathbb{R}\ y \mapsto x = \operatorname{setttanh} y = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

Cotangente iperbolica

Anche per le funzioni iperboliche è possibile definire la funzione **cotangente iperbolica** (Figura 8.23).

Definizione 8.37 (Funzione cotangente iperbolica)**.**

$$f\colon \mathbb{R}\setminus \to [(-\infty,-1)\cup(+1,+\infty)]\ x \mapsto y = \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

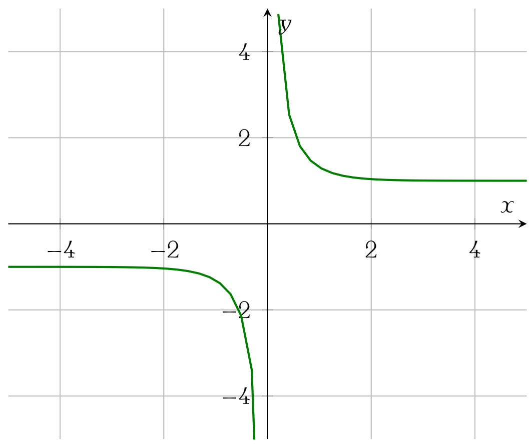


Figura 8.23: Cotangente iperbolica

Come si può notare dal grafico, la funzione è monòtona decrescente in tutto il suo dominio ed ha simmetria dispari.

La funzione inversa della contangente iperbolica è nota come **settore cotangente iperbolica**.

Definizione 8.38 (Funzione settore tangente iperbolico)**.**

$$f^{-1}\colon [(-\infty,-1)\cup(+1,+\infty)] \to \mathbb{R}\ y \mapsto x = \operatorname{settcoth} y = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

8.8 Funzione modulo

Ultima funzione elementare che analizziamo è la funzione **modulo** (Figura 8.24), che ha simmetria pari e non è invertibile.

Definizione 8.39 (Funzione modulo)**.**

$$f\colon \mathbb{R} \to [0, +\infty)\ x \mapsto y = |x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

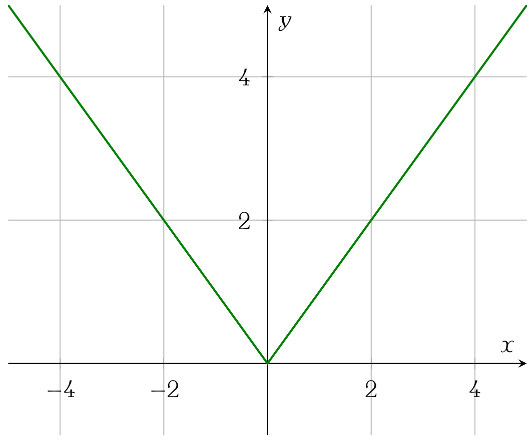


Figura 8.24: Funzione modulo

8.9 Teoremi sull'uso delle funzioni elementari

Ora che abbiamo definito le principali funzioni elementari, possiamo definire quasi tutte le funzioni possibili, mediante combinazione lineare, prodotto o rapporto tra più funzioni elementari.

Teorema 8.1. *Date due o più funzioni elementari $f, g, \ldots$, se si combinano linearmente tra loro (si effettua la somma algebrica), il dominio della funzione F così ottenuta è dato dall'intersezione dei rispettivi domini.*

Teorema 8.2. *Date due o più funzioni elementari $f, g, \ldots$, se si moltiplicano tra loro, il dominio della funzione F così ottenuta è dato dall'intersezione dei rispettivi domini.*

Teorema 8.3. *Date due o più funzioni elementari $f, g, \ldots$, se si effettua il loro rapporto, il dominio della funzione F così ottenuta è dato dall'intersezione dei rispettivi domini, a cui vengono sottratti i valori che annullano le funzioni a denominatore.*

Inoltre, due o più funzioni possono essere *composte* tra loro, mediante l'operatore di **prodotto operatorio**.

Definizione 8.40. Data una funzione $f\colon D \to C$ $x \mapsto y = f(x)$ e una funzione $g\colon D' \to C'$ $y \mapsto z = g(y)$, la funzione F, ottenuta come composizione delle funzioni f e g ($F = g \circ f$) è definita come $F\colon D'' \to C'' \subseteq C'$ $x \mapsto z = g[f(x)]$, dove $D'' = \{x \in D | f(x) \in D'\} \subseteq D$.

Vediamo qualche esempio su come determinare il dominio delle funzioni composte.

Esempio 8.1

$$F(x) = g \circ f = \sqrt{x^2 - 1}$$

$$\begin{gathered} f\colon \mathbb{R} \to [-1, +\infty) \\ x \mapsto y = f(x) = x^2 - 1 \\ g\colon [0, +\infty) \to [0, +\infty) \\ y \mapsto z = g(y) = \sqrt{y} \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} D'' = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - 1 \in [0, +\infty)\} \Rightarrow \\ \Rightarrow x^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow D'' = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \end{gathered}$$

Esempio 8.2

$$\begin{gathered} F(x) = g \circ f = |x^2 - 1| = \\ = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{se } x^2 - 1 \geq 0 \\ -(x^2 - 1), & \text{se } x^2 - 1 < 0 \end{cases} = \\ \begin{cases} x^2 - 1, & \text{se } x \leq -1 \wedge x \geq 1 \\ -(x^2 - 1), & \text{se } -1 < x < 1 \end{cases} \end{gathered}$$

E ora vediamo un esempio sullo studio del segno di una funzione.

Esempio 8.3

$$\begin{gathered} y = \sqrt{x^2 - 1} - x \\ D = \{(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)\} \cap \mathbb{R} = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \end{gathered}$$

Studio del segno:

$$\begin{gathered} \sqrt{x^2 - 1} - x \geq 0 \\ \sqrt{x^2 - 1} \geq x \\ \begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 \\ x \geq 0 \\ x^2 - 1 \geq x^2 \end{cases} \cup \begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 \\ x < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x \leq -1 \wedge x \geq 1 \\ x \geq 0 \\ x^2 - 1 \geq x^2 \end{cases} \cup \begin{cases} x \geq -1 \wedge x \geq 1 \\ x < 0 \end{cases} \\ \emptyset \cup (-\infty, -1] \Rightarrow y \geq 0 \text{ se } x \in (-\infty, -1] \end{gathered}$$

Capitolo 9

I limiti

Consideriamo una funzione $f\colon D \to C \; x \mapsto y = f(x)$ e un numero reale $x \in \mathscr{D}D$ e cerchiamo di trovare uno strumento matematico che ci permetta di descrivere con precisione l'andamento della funzione per valori di x che si trovano nell'intorno bucato di x_0.

L'andamento della funzione può rispettare tre casi.
Si può verificare che, prendendo un intorno bucato sempre più piccolo, la funzione tenda ad un numero reale l; in questo caso, la funzione viene detta **convergente** e converge al valore l.
Se, invece, prendendo un intorno bucato sempre più piccolo, la funzione assume valori sempre più grandi (o sempre più piccoli) senza mai raggiungere un numero preciso, si dice che la funzione è **divergente positivamente** (**negativamente**).
Quando la funzione converge o diverge, la funzione si dice **regolare**, altrimenti la funzione è detta **irregolare**.

Lo strumento matematico che ci permette di descrivere l'andamento convergente, divergente o irregolare è il **limite**.

9.1 Funzione convergente a un valore finito nell'intorno di un punto

Per verificare che una funzione converge a un valore l nell'intorno di un punto, si prende un intorno di l di ampiezza indefinita e, per ogni punto dell'intorno, deve esistere in corrispondenza un intorno di x_0 tale che il grafico della funzione sia compreso nella parte di piano delimitata dall'intersezione tra gli intorni.

Definizione 9.1. Si dice che la funzione $f(x)$ ha per limite il numero reale l per x che tende a x_0 (Figura 9.1) quando, comunque si scelga un numero reale positivo ε piccolo a piacere, si può determinare un intorno circolare di x_0 tale che risulti $|f(x) - l| < \varepsilon$ per ogni x appartenente all'intorno, diverso al più da x_0.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

In linguaggio matematico, possiamo dire che:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 | \forall x \in D, \text{con } 0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon, |f(x) - l| < \varepsilon \tag{9.1}$$

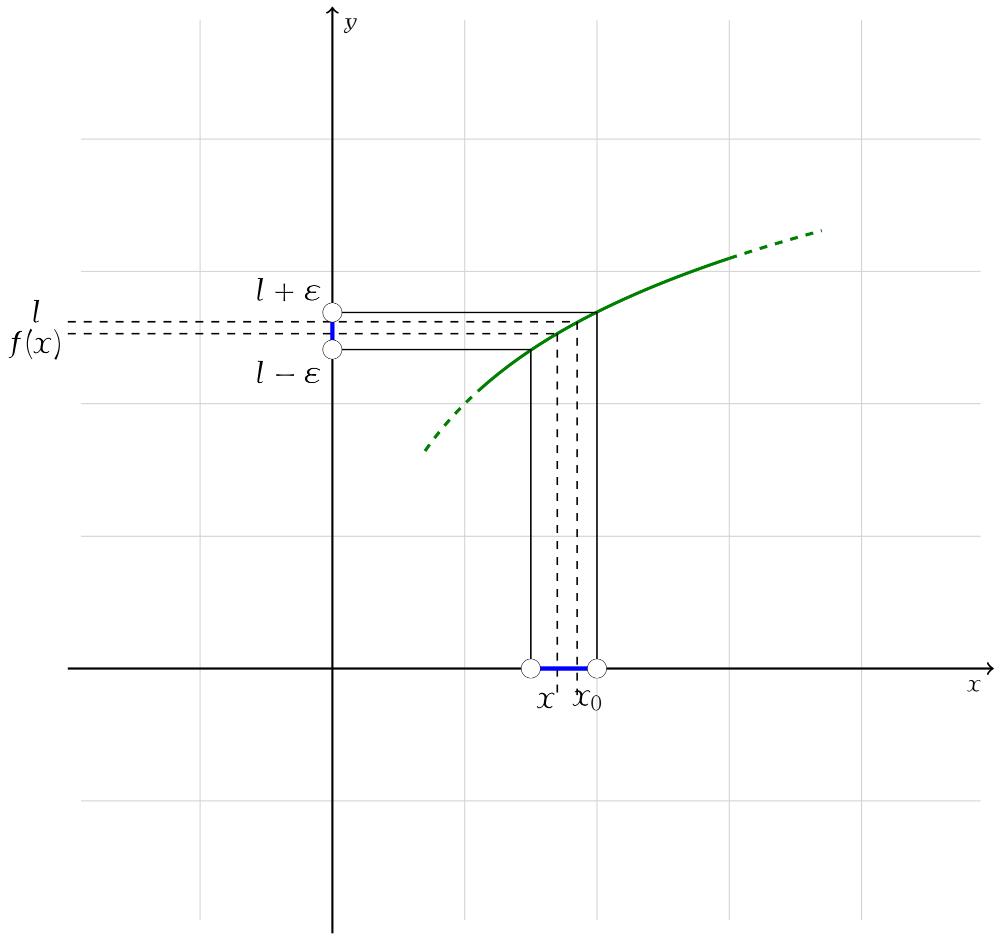


Figura 9.1: Funzione convergente a un valore finito nell'intorno di un punto

La verifica di questo tipo di limite si esegue applicando la definizione enunciata nell'Equazione 9.1. Vediamo qualche esempio.

Esempio 9.1

$$\lim_{x \to 0}(x - 1) = -1$$
$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 | \forall x \in \mathbb{R}, \text{con } 0 < |x| < \delta_\varepsilon, |x - 1 + 1| < \varepsilon$$
$$|x| < \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < x < \varepsilon \Rightarrow S = (-\varepsilon, \varepsilon)$$
$$\exists ? \delta_\varepsilon > 0 | (-\delta_\varepsilon, \delta_\varepsilon) \setminus \{0\} \subset S \Rightarrow \delta_\varepsilon = \varepsilon$$

Esempio 9.2

$$\lim_{x \to 0}(x-1) = 0?$$
$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 | \forall x \in \mathbb{R}, \textit{con } 0 < |x| < \delta_\varepsilon, |x-1| < \varepsilon$$
$$|x-1| < \varepsilon \Rightarrow 1-\varepsilon < x < 1+\varepsilon \Rightarrow S = (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$$
$$\exists ? \delta_\varepsilon > 0 | (-\delta_\varepsilon, \delta_\varepsilon) \setminus \{0\} \subset S \Rightarrow NO \Rightarrow l = 0 \textit{ è falso!}$$

Esempio 9.3

$$\begin{cases} x^2, & \textit{se } x \neq 0 \\ 1, & \textit{se } x = 0 \end{cases}$$
$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0$$
$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 | \forall x \in \mathbb{R}, \textit{con } 0 < |x| < \delta_\varepsilon, |x^2| < \varepsilon$$
$$|x^2| < \varepsilon \Rightarrow S = (-\sqrt{\varepsilon}, \sqrt{\varepsilon})$$
$$\exists ? \delta_\varepsilon > 0 | (-\delta_\varepsilon, \delta_\varepsilon) \setminus \{0\} \subset S \Rightarrow \delta_\varepsilon = \sqrt{\varepsilon}$$

9.2 Limite destro e sinistro

Vediamo una funzione particolare, rappresentata nella Figura 9.2.

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & \text{se } x > 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \\ \sqrt{x^2+2}, & \text{se } x < 0 \end{cases} \tag{9.2}$$

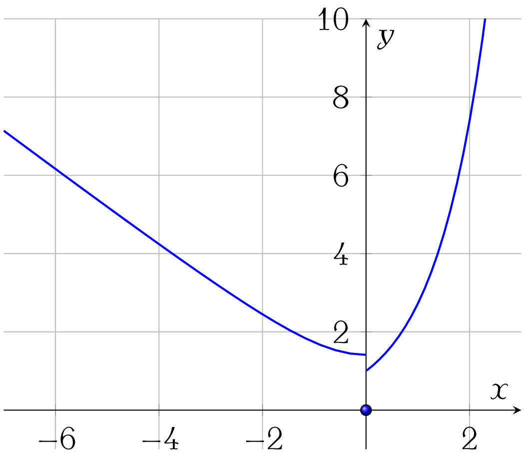


Figura 9.2: Funzione definita per casi

Come possiamo vedere dal grafico, per la funzione in Equazione 9.2 non è possibile determinare il limite per $x \to 0$, in quanto, nell'intorno di 0, la funzione

è *irregolare*.
Possiamo, però, considerare l'intorno destro e l'intorno sinistro di 0, determinando così il cosiddetto **limite destro** e **limite sinistro**.

Definizione 9.2. Si dice che la funzione $f(x)$ ha per limite destro il numero reale l per x che tende a x_0 quando, comunque si scelga un numero reale positivo ε piccolo a piacere, si può determinare un intorno di x_0 ($]x_0; x_0+\delta[$) tale che risulti $|f(x)-l| < \varepsilon$ per ogni x appartenente all'intorno, diverso al più da x_0.

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l$$

In linguaggio matematico, possiamo dire che:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 | \forall x \in D, \text{con } |x - x_0| < \delta, |f(x) - l| < \varepsilon \tag{9.3}$$

Definizione 9.3. Si dice che la funzione $f(x)$ ha per limite sinistro il numero reale l per x che tende a x_0 quando, comunque si scelga un numero reale positivo ε piccolo a piacere, si può determinare un intorno di x_0 ($]x_0-\delta; x_0[$) tale che risulti $|f(x)-l| < \varepsilon$ per ogni x appartenente all'intorno, diverso al più da x_0.

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l$$

In linguaggio matematico, possiamo dire che:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 | \forall x \in D, \text{con } \delta < |x - x_0|, |f(x) - l| < \varepsilon \tag{9.4}$$

Esempio 9.4

Consideriamo la funzione in Equazione 9.2.

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$$
$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 | \forall x \in \mathbb{R}, \textit{ con } 0 < x < \delta_\varepsilon, |e^x - 1| < \varepsilon$$
$$|e^x - 1| < \varepsilon \Rightarrow 1 - \varepsilon < e^x < 1 + \varepsilon \Rightarrow S = (\ln(1-\varepsilon), \ln(1+\varepsilon))$$
$$\exists ? \delta_\varepsilon > 0 | (0, \delta_\varepsilon) \setminus \{0\} \subset S \Rightarrow \delta_\varepsilon = \ln(1+\varepsilon)$$

9.3 Funzione divergente positivamente nell'intorno di un punto

Anche per verificare se una funzione diverge positivamente nell'intorno di un punto si applica lo stesso meccanismo descritto precedentemente.

Osserviamo, infatti che, per valori di x sempre più vicini a x_0, i valori di della funzione $f(x)$ crescono sempre di più.
Per essere sicuri che l'avvicinamento non sia dovuto ai particolari valori che abbiamo scelto, ma sia vero sempre, è necessario poter affermare che, preso un numero reale positivo M grande quanto vogliamo, esiste sempre un intorno di x_0 tale per cui $f(x)$ è ancora più grande del valore scelto.

Definizione 9.4. Sia $f(x)$ una funzione non definita in x_0. Si dice che $f(x)$ tende a $+\infty$ per x che tende a x_0 (Figura 9.3) quando, per ogni numero reale positivo M grande a piacere, si può determinare un intorno circolare di x_0 tale che risulti $f(x) > M$ per ogni x appartenente all'intorno e diverso da x_0.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

In linguaggio matematico, possiamo dire che:

$$\forall M > 0 \exists \delta_M > 0 | \forall x \in D, \text{ con } 0 < |x - x_0| < \delta_M, f(x) > M \tag{9.5}$$

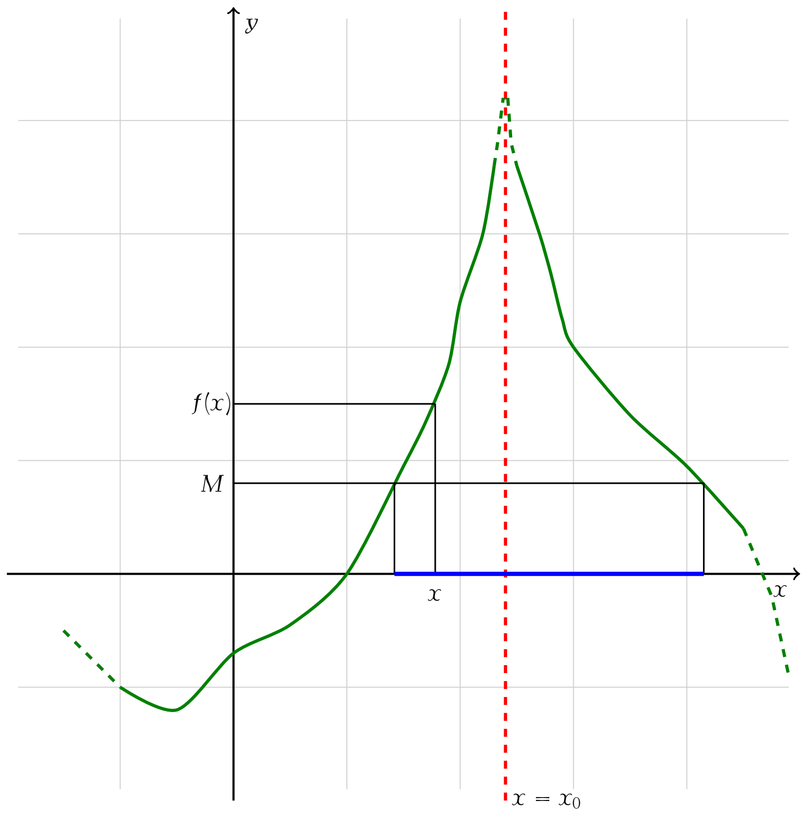


Figura 9.3: Funzione divergente positivamente nell'intorno di un punto

Esempio 9.5

$$\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x^2} \right) = +\infty$$

$$\forall M > 0 \exists \delta_M > 0 | \forall x \in \mathbb{R}, \, con \; 0 < |x| < \delta_M, \frac{1}{x^2} > M$$

$$\frac{1}{x^2} > M \Rightarrow x^2 < \frac{1}{M} \Rightarrow -\sqrt{\frac{1}{M}} < x < \sqrt{\frac{1}{M}} \Rightarrow S = \left(-\sqrt{\frac{1}{M}}, \sqrt{\frac{1}{M}} \right)$$

$$\exists ? \delta_M > 0 | (-\delta_M, \delta_M) \setminus \{0\} \subset S \Rightarrow \delta_M = \sqrt{\frac{1}{M}}$$

9.4 Funzione divergente negativamente nell'intorno di un punto

Ci sono anche funzioni che decrescono sempre di più in prossimità di un certo punto x_0.
Anche per verificare se una funzione diverge negativamente nell'intorno di un punto si applica lo stesso meccanismo descritto precedentemente.

Definizione 9.5. Sia $f(x)$ una funzione non definita in x_0. Si dice che $f(x)$ tende a $-\infty$ per x che tende a x_0 (Figura 9.4) quando, per ogni numero reale positivo M grande a piacere, si può determinare un intorno circolare di x_0 tale che risulti $f(x) < -M$ per ogni x appartenente all'intorno e diverso da x_0.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$$

In linguaggio matematico, possiamo dire che:

$$\forall M > 0 \exists \delta_M > 0 | \forall x \in D, \text{ con } 0 < |x - x_0| < \delta_M, f(x) < -M \tag{9.6}$$

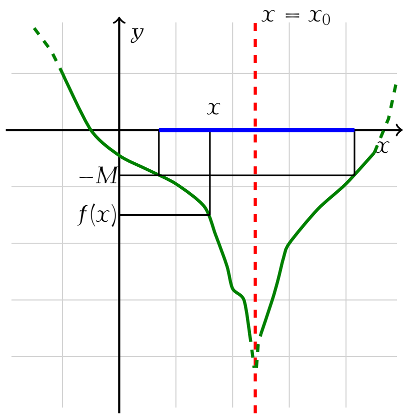


Figura 9.4: Funzione divergente negativamente nell'intorno di un punto

9.5 Tendenza della funzione agli estremi del dominio

Finora abbiamo studiato il comportamento di una funzione nell'intorno di un punto. Lo stesso comportamento lo possiamo identificare anche nell'intorno dell'estremo destro o dell'estremo sinistro del dominio della funzione.

La **tendenza della funzione all'estremo destro del suo dominio** si determina calcolando il limite per x che tende a $+\infty$. Anche in questo caso, possiamo identificare un comportamento convergente, divergente o irregolare.

Definizione 9.6. Si dice che la funzione $f(x)$ ha per limite il numero reale l per x che tende a $+\infty$ (Figura 9.5) quando, comunque si scelga un numero reale positivo ε piccolo a piacere, si può determinare un intorno di $+\infty$ tale che risulti $|f(x) - l| < \varepsilon$ per ogni x appartenente all'intorno.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$$

In linguaggio matematico, possiamo dire che:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 | \forall x \in D, \text{ con } x > \delta_\varepsilon, |f(x) - l| < \varepsilon \tag{9.7}$$

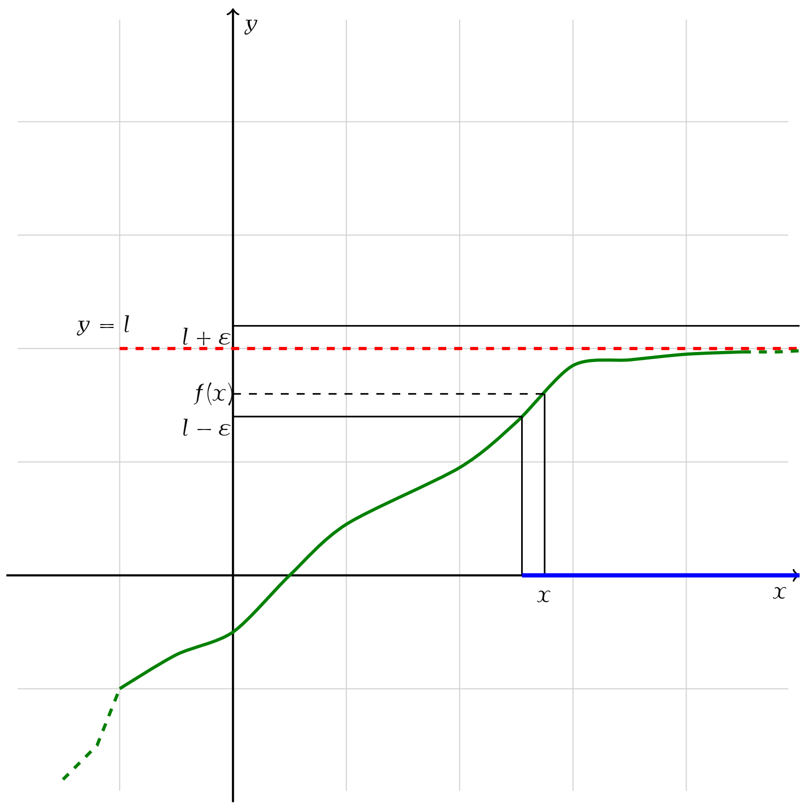


Figura 9.5: Funzione convergente a un valore reale all'estremo destro del dominio

Esempio 9.6

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x = 0^+ \quad \text{(leggi "zero per eccesso")}$$

$$\forall\varepsilon > 0 \exists\delta_\varepsilon > 0 | \forall x \in \mathbb{R}, \text{ con } x > \delta_\varepsilon, \left|\left(\frac{1}{2}\right)^x\right| < \varepsilon$$

$$\text{(si sarebbe potuto scrivere anche } 0 < \left(\frac{1}{2}\right)^x < \varepsilon\text{)}$$

$$\left|\left(\frac{1}{2}\right)^x\right| < \varepsilon \Rightarrow x > \log_{\frac{1}{2}}\varepsilon \Rightarrow s = \left(\log_{\frac{1}{2}}\varepsilon, +\infty\right)$$

$$\exists ?\delta_\varepsilon > 0 | (-\delta_\varepsilon, \delta_\varepsilon) \setminus \{0\} \subset S \Rightarrow \delta_\varepsilon = \log_{\frac{1}{2}}\varepsilon$$

Definizione 9.7. Si dice che la funzione $f(x)$ tende a $+\infty$ per x che tende a $+\infty$ (Figura 9.6) quando, comunque si scelga un numero reale positivo M grande a piacere, si può determinare un intorno di $+\infty$ tale che risulti $f(x) > M$ per ogni x appartenente all'intorno.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

In linguaggio matematico, possiamo dire che:

$$\forall M > 0 \exists\delta_M > 0 | \forall x \in D, \text{ con } x > \delta_M, f(x) > M \tag{9.8}$$

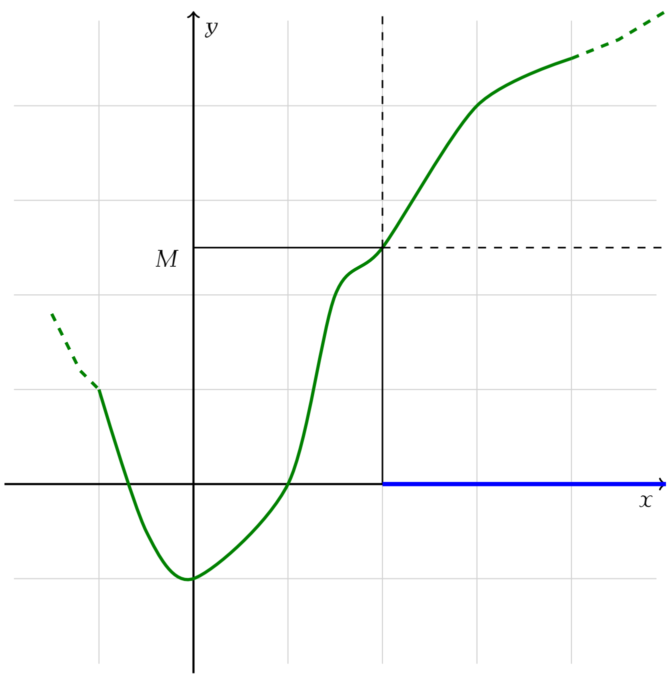


Figura 9.6: Funzione divergente positivamente all'estremo destro del dominio

Esempio 9.7

$$\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$$
$$\forall M > 0 \exists \delta_M > 0 | \forall x \in \mathbb{R}^+, \text{ con } x > \delta_M, \ln x > M$$
$$\ln x > M \Rightarrow x > e^M \Rightarrow S = (e^M, +\infty)$$
$$\exists ? \delta_M > 0 | (-\delta_M, \delta_M) \setminus \{0\} \subset S \Rightarrow \delta_M = e^M$$

Definizione 9.8. Si dice che la funzione $f(x)$ tende a $-\infty$ per x che tende a $+\infty$ (Figura 9.7) quando, comunque si scelga un numero reale positivo M grande a piacere, si può determinare un intorno di $+\infty$ tale che risulti $f(x) < -M$ per ogni x appartenente all'intorno.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

In linguaggio matematico, possiamo dire che:

$$\forall M > 0 \exists \delta_M > 0 | \forall x \in D, \text{ con } x > \delta_M, f(x) < -M \tag{9.9}$$

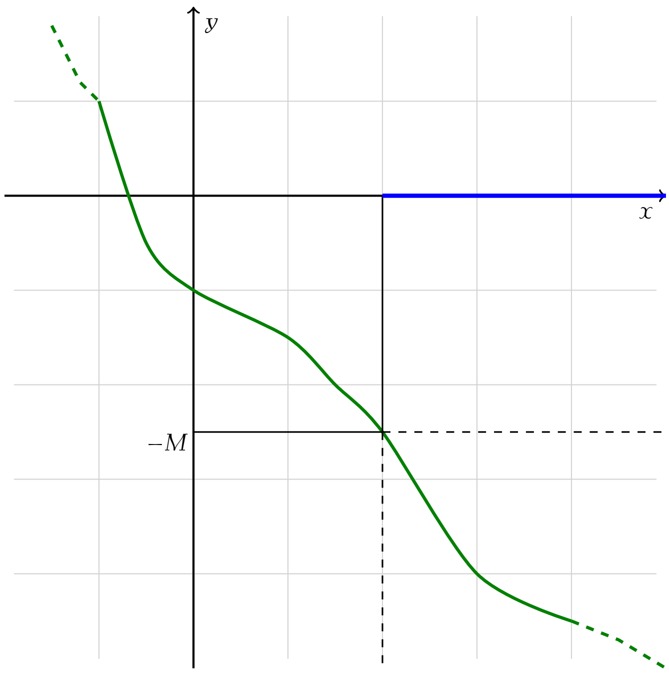


Figura 9.7: Funzione divertgente negativamente all'estremo destro del dominio

La **tendenza della funzione all'estremo sinistro del suo dominio** si determina calcolando il limite per x che tende a $-\infty$. Anche in questo caso, possiamo identificare un comportamento convergente, divergente o irregolare.

Definizione 9.9. Si dice che la funzione $f(x)$ ha per limite il numero reale l per x che tende a $-\infty$ (Figura 9.8) quando, comunque si scelga un numero reale positivo ε piccolo a piacere, si può determinare un intorno di $-\infty$ tale che risulti $|f(x) - l| < \varepsilon$ per ogni x appartenente all'intorno.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = l$$

In linguaggio matematico, possiamo dire che:

$$\forall\varepsilon > 0 \exists\delta_\varepsilon > 0 | \forall x \in D, \text{con } x < -\delta_\varepsilon, |f(x) - l| < \varepsilon \tag{9.10}$$

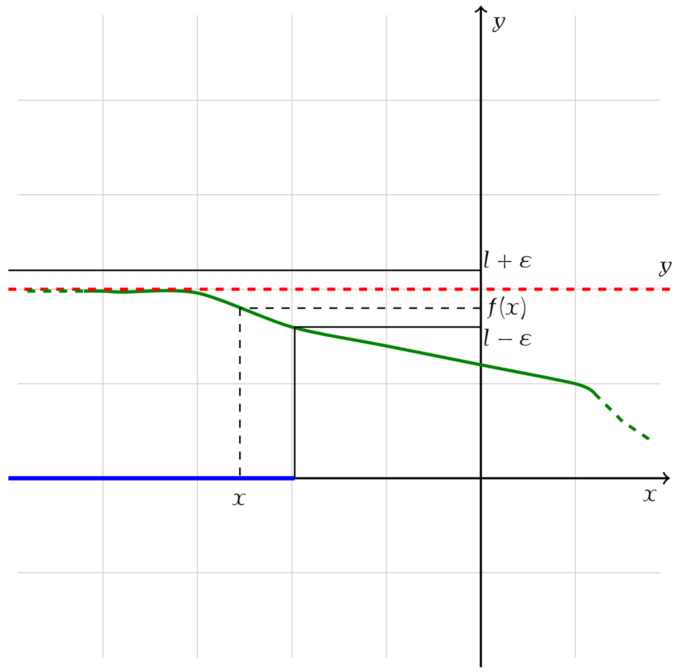


Figura 9.8: Funzione convergente a un valore reale all'estremo sinistro del dominio

Definizione 9.10. Si dice che la funzione $f(x)$ tende a $+\infty$ per x che tende a $-\infty$ (Figura 9.9) quando, comunque si scelga un numero reale positivo M grande a piacere, si può determinare un intorno di $-\infty$ tale che risulti $f(x) > M$ per ogni x appartenente all'intorno.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

In linguaggio matematico, possiamo dire che:

$$\forall\varepsilon > 0 \exists\delta_\varepsilon > 0 | \forall x \in D, \text{con } x < -\delta_\varepsilon, f(x) > M \tag{9.11}$$

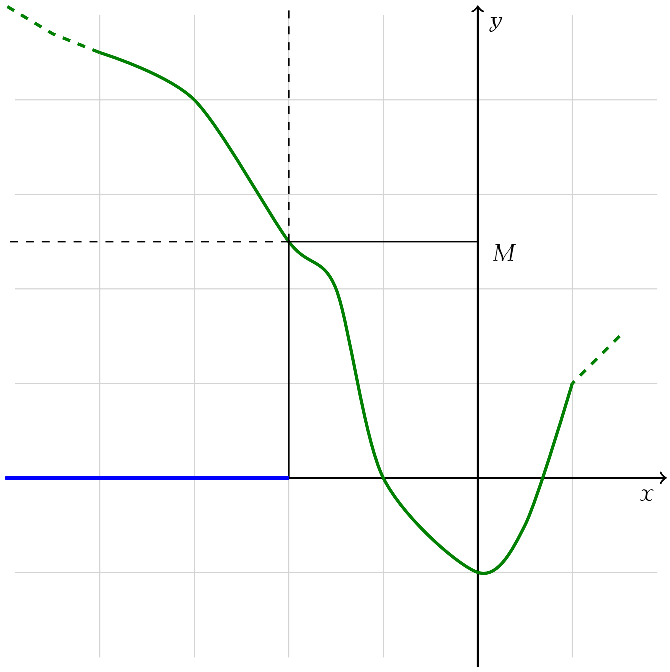


Figura 9.9: Funzione divergente positivamente all'estremo sinistro del dominio

Definizione 9.11. Si dice che la funzione $f(x)$ tende a $-\infty$ per x che tende a $-\infty$ (Figura 9.10) quando, comunque si scelga un numero reale positivo M grande a piacere, si può determinare un intorno di $-\infty$ tale che risulti $f(x) < -M$ per ogni x appartenente all'intorno.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

In linguaggio matematico, possiamo dire che:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 | \forall x \in D, \text{ con } x < -\delta_\varepsilon, f(x) < -M \tag{9.12}$$

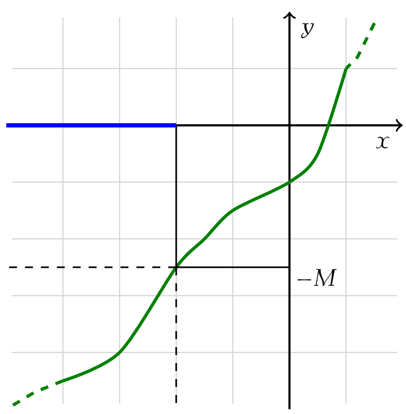


Figura 9.10: Funzione divergente negativamente all'estremo sinistro del dominio

9.6 Teoremi sui limiti

Vediamo ora due primi teoremi sui limiti.
Questi teoremi sono definiti per x tendente a λ, dove con λ intendiamo sia il punto x_0 che i valori $\pm\infty$ e per funzioni regolari (dove il valore l o $\pm\infty$ viene indicato con Λ).

Teorema 9.1 (Unicità del limite). *Se, per x che tende a λ, la funzione $f(x)$ ha per limite il valore Λ, allora tale limite è unico.*

Dimostrazione: Dimostriamo la tesi per assurdo.
Supponiamo che la tesi sia falsa e cioè che Λ non sia unico. In tal caso dovrebbe esistere un numero reale Λ' diverso da Λ tale che risulti

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \Lambda', \ \Lambda' \neq \Lambda$$

Possiamo supporre $\Lambda < \Lambda'$ e, poiché nella definizione di limite possiamo scegliere ε£ arbitrariamente purché sia positivo, consideriamo:

$$\varepsilon < \frac{\Lambda' - \Lambda}{2}$$

Applichiamo la definizione di limite in entrambi i casi. Dovrebbero esistere due intorni I e I' di x_0 tali che:

$$\begin{aligned} |f(x) - \Lambda| &< \varepsilon \qquad \forall x \in I \\ |f(x) - \Lambda'| &< \varepsilon \qquad \forall x \in I' \end{aligned}$$

Osserviamo che anche $I \cap I'$ è un intorno di x_0. In $I \cap I'$ devono valere contemporaneamente le due disequazioni, ossia:

$$\begin{cases} |f(x) - \Lambda| < \varepsilon \\ |f(x) - \Lambda'| < \varepsilon \qquad \forall x \in I \cap I' \end{cases}$$

Possiamo anche scrivere:

$$\begin{cases} \Lambda - \varepsilon < f(x) z \Lambda + \varepsilon \\ \Lambda' - \varepsilon < f(x) z \Lambda' + \varepsilon \end{cases}$$

Dal confronto delle disuguaglianze, ricordando che $\Lambda < \Lambda'$, risulta che $\Lambda' - \varepsilon < f(x) < \Lambda + \varepsilon$, da cui segue $\Lambda' - \varepsilon < \Lambda + \varepsilon$.
Ricavando ε otteniamo $\varepsilon > \frac{\Lambda' - \Lambda}{2}$, che va contro l'ipotesi. La supposizione che ci siano due limiti è falsa, per cui il limite è unico. □

Teorema 9.2 (Permanenza del segno). *Se il limite di una funzione per x che tende a x_0 è un valore Λ diverso da 0, allora esiste un intorno I di x_0 (escluso al più x_0) in cui $f(x)$ e Λ sono entrambi positivi oppure entrambi negativi.*

Dimostrazione: Per ipotesi, abbiamo che

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \Lambda \neq 0$$

Se $\Lambda > 0$, per l'arbitrarietà di ε, scegliamo $\varepsilon = \Lambda$. Esiste allora un intorno I di x_0 in cui $|f(x) - \Lambda| < \Lambda$, ossia $0 < f(x) < 2\Lambda$, quindi $f(x) > 0 \quad \forall x \in I$. Con queste premesse, Λ e $f(x)$ sono entrambi positivi.

Viceversa, se $\Lambda < 0$ possiamo scegliere $\varepsilon = -\Lambda$. Esiste allora un intorno I di x_0 in cui $|f(x) - \Lambda| < -\Lambda$, ossia $2\Lambda < f(x) < 0$, quindi $f(x) < 0 \quad \forall x \in I$. Con queste premesse, Λ e $f(x)$ sono entrambi negativi. □

Teorema 9.3 (Confronto (o due carabinieri))**.** *Siano $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$ delle funzioni definite nello stesso dominio $D \subseteq \mathbb{R}$. Se in ogni punto di un intorno circolare di Λ risulta $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ e il limite delle due funzioni $h(x)$ e $g(x)$, per x che tende a Λ è uno stesso valore Λ, allora anche il limite di $f(x)$ per x che tende a Λ è uguale al valore Λ.*

Dimostrazione: Fissiamo $\varepsilon > 0$ piccolo a piacere. É vero che:

- $|h(x) - \Lambda| < \varepsilon$, per ogni $x \in I_1 \cap D$, perché $h(x) > \Lambda$ per $x > x_0$;
- $|g(x) - \Lambda| < \varepsilon$, per ogni $x \in I_2 \cap D$, perché $g(x) > \Lambda$ per $x > x_0$.

Le disuguaglianze valgono entrambe per ogni x del dominio appartenente all'intorno $I = I_1 \cap I_2$, escluso al più x_0. Quindi, per ogni $x \in I$, abbiamo:

$$\Lambda - \varepsilon < h(x) < \Lambda + \varepsilon$$
$$\Lambda - \varepsilon < g(x) < \Lambda + \varepsilon$$

Tenendo conto della relazione fra le funzioni, abbiamo $\Lambda - \varepsilon < h(x) \leq f(x) \leq g(x) < \Lambda + \varepsilon$ per ogni $x \in I$, il che implica $\Lambda - \varepsilon < f(x) < \Lambda + \varepsilon$, ossia $|f(x) - \Lambda| < \varepsilon$.
Quest'ultima relazione implica proprio che $\lim_{x \to x_0} f(x) = \Lambda$. □

9.7 Limiti di una successione numerica

Poiché abbiamo definito una successione numerica come una particolare funzione, ha senso cercare di studiare il suo andamento all'estremo destro del suo dominio, ma non all'estremo sinistro. Inoltre, non ha senso determinare l'andamento della successione intorno a un punto poiché il suo dominio, in genere l'insieme dei numeri naturali, non ammette punti di accumulazione.

Definizione 9.12. Data la successione a_n di numeri reali, si dice che per n che tende a $+\infty$ la successione ha per limite il numero reale l quando, comunque si scelga un numero reale positivo ε piccolo a piacere, si può determinare un corrispondente numero positivo δ_ε tale che risulti $|a_n - l| < \varepsilon$ per ogni $n > \delta_\varepsilon$.

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = l$$

In linguaggio matematico, possiamo dire che:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 | \forall x > \delta_\varepsilon, |a_n - l| < \varepsilon \tag{9.13}$$

Definizione 9.13. Data la successione a_n di numeri reali, si dice che per n che tende a $+\infty$ la successione tende a $+\infty$ quando, comunque si scelga un numero reale positivo M grande a piacere, si può determinare un corrispondente numero positivo δ_M tale che risulti $a_n > M$ per ogni $n > \delta_\varepsilon$.

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty$$

In linguaggio matematico, possiamo dire che:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_M > 0 | \forall x > \delta_M, a_n > M \tag{9.14}$$

Definizione 9.14. Data la successione a_n di numeri reali, si dice che per n che tende a $+\infty$ la successione tende a $-\infty$ quando, comunque si scelga un numero reale positivo M grande a piacere, si può determinare un corrispondente numero positivo δ_M tale che risulti $a_n < -M$ per ogni $n > \delta_\varepsilon$.

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$$

In linguaggio matematico, possiamo dire che:

$$\forall\varepsilon > 0 \exists\delta_M > 0 | \forall x > \delta_M, a_n < -M \tag{9.15}$$

9.8 Verifica dei limiti - esercizi

Mostriamo ora lo svolgimento di alcuni esercizi sulla verifica dei limiti.

Esercizio 9.1

Dimostra, attraverso la definizione, il seguente limite:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{x^2-3x+1}}{x}\right) = 1$$

Determino, prima di tutto, il dominio della funzione:

$$D: \begin{cases} x^2-3x+1 \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow D = (-\infty, 0) \cup \left(0, \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\frac{3+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right)$$

Applico ora la definizione:

$$\forall\varepsilon > 0 \exists\delta_\varepsilon > 0 | \forall x \in D, \textit{ con } x > \delta_\varepsilon, \left|\frac{\sqrt{x^2-3x+1}}{x} - 1\right| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{\sqrt{x^2-3x+1}}{x} - 1\right| < \varepsilon \Rightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2-3x+1}}{x} < 1+\varepsilon \\ \frac{\sqrt{x^2-3x+1}}{x} < 1-\varepsilon \end{cases}$$

Nell'ipotesi che $x > 0$:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - 3x + 1} < (1 + \varepsilon)x \\ \sqrt{x^2 - 3x + 1} < (1 - \varepsilon)x \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} x^2 - 3x + 1 \geq 0 \\ (1 + \varepsilon)x > 0 \\ x^2 - 3x + 1 < (1 + \varepsilon)^2 x^2 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 - 3x + 1 \geq 0 \\ (1 - \varepsilon)x > 0 \\ x^2 - 3x + 1 < (1 - \varepsilon)^2 x^2 \end{cases} \cup \begin{cases} x^2 - 3x + 1 \geq 0 \\ (1 - \varepsilon)x < 0 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} x \leq \frac{3-\sqrt{5}}{2} \vee x \geq \frac{3+\sqrt{5}}{2} \\ x > 0 \\ x^2 - 3x + 1 < x^2 + 2\varepsilon x^2 + \varepsilon^2 x^2 \end{cases} \\ \begin{cases} x \leq \frac{3-\sqrt{5}}{2} \vee x \geq \frac{3+\sqrt{5}}{2} \\ x > 0 \\ x^2 - 3x + 1 < x^2 + 2\varepsilon x^2 + \varepsilon^2 x^2 \end{cases} \cup \emptyset \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} x \leq \frac{3-\sqrt{5}}{2} \vee x \geq \frac{3+\sqrt{5}}{2} \\ x > 0 \\ (\varepsilon^2 + 2\varepsilon)x^2 + 3x - 1 > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x \leq \frac{3-\sqrt{5}}{2} \vee x \geq \frac{3+\sqrt{5}}{2} \\ x > 0 \\ (2\varepsilon - \varepsilon^2)x^2 + 3x - 1 > 0 \end{cases} \cup \emptyset \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} x \leq \frac{3-\sqrt{5}}{2} \vee x \geq \frac{3+\sqrt{5}}{2} \\ x > 0 \\ x < \frac{-3-\sqrt{9+4(\varepsilon^2+2\varepsilon)}}{2(\varepsilon^2+2\varepsilon)} \vee x \geq \frac{-3+\sqrt{9+4(\varepsilon^2+2\varepsilon)}}{2(\varepsilon^2+2\varepsilon)} \end{cases} \\ \begin{cases} x \leq \frac{3-\sqrt{5}}{2} \vee x \geq \frac{3+\sqrt{5}}{2} \\ x > 0 \\ x < \frac{3-\sqrt{9-4(2\varepsilon-\varepsilon^2)}}{2(2\varepsilon-\varepsilon^2)} \vee x \geq \frac{3+\sqrt{9-4(2\varepsilon-\varepsilon^2)}}{2(2\varepsilon-\varepsilon^2)} \end{cases} \cup \emptyset \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} S = (\delta, +\infty), \text{ con } \delta = \max\left\{\frac{-3+\sqrt{9+4(\varepsilon^2+2\varepsilon)}}{2(\varepsilon^2+2\varepsilon)}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right\} \\ S' = (\delta', +\infty), \text{ con } \delta' = \max\left\{\frac{3+\sqrt{9-4(2\varepsilon-\varepsilon^2)}}{2(2\varepsilon-\varepsilon^2)}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right\} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S \cap S' = (\delta'', +\infty), \text{ con } \delta'' = \max\{\delta, \delta'\}$$

$$\exists ? \delta_\varepsilon > 0 | x > \delta_\varepsilon \subset (S \cap S') \Rightarrow \delta_\varepsilon = \delta''$$

Esercizio 9.2

Verifica, attraverso la definizione, il seguente limite:

$$\lim_{x \to 0} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = +\infty$$

$$\forall M > 0 \exists \delta_M > 0 | \forall x \in \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}, \text{ con } 0 < |x| < \delta_M, \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} > M$$

$$\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} > M \Rightarrow \frac{1}{x} \log \mathrm{e} > \log M \Rightarrow \frac{1}{x} > \log M \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x > 0 : x < \frac{1}{\log M} \Rightarrow \left(0, \frac{1}{\log M}\right) \cup \emptyset \Rightarrow S = \left(0, \frac{1}{\log M}\right) \\ x < 0 : \mathit{FALSO!} \end{cases}$$

$$\exists ? \delta_M > 0 | (-\delta_M, 0) \cup (0, \delta_M) \subset S \Rightarrow \mathit{FALSO!}$$

***N.B.**: Alcuni testi e docenti usano indicare il logaritmo naturale con* log.

9.9 Limiti particolari

Esistono due particolari limiti di successioni che generano due limiti particolari.

Il numero e

Il numero e, il cui valore approssimato è $2,718281828\ldots$ è un numero decimale illimitato non periodico, quindi irrazionale. Si ottiene come limite della successione il cui termine generale è

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \qquad n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 1$$

Sì può dimostrare che, per $n \to +\infty$, la successione converge proprio al numero e.

Il numero π

π è un numero irrazionale il cui valore approssimato è $3,14159265\ldots$; rappresenta il rapporto costante che c'è tra la misura di una circonferenza e quella del suo diametro, o, il limite di una particolare successione numerica.

$$\lim_{n \to +\infty} \left(n \cdot \sin \frac{180^\circ}{n}\right) = \pi$$

9.10 Limiti notevoli

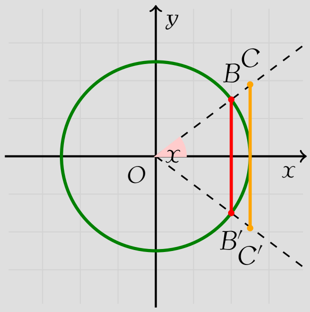
Esistono, inoltre, alcuni limiti, detti limiti notevoli, che sono fondamentali nelle applicazioni dell'Analisi Matematica, che non possono essere dimostrati mediante l'uso della verifica del limite.

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Il primo limite notevole che analizziamo è $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Dimostrazione: Sfruttiamo il teorema del confronto per verificare questo limite.
Cerchiamo due funzioni che facciano da maggiorante e da minorante alla funzione $\frac{\sin x}{x}$. Provo con le funzioni $\frac{1}{x}$ e $-\frac{1}{x}$, poiché esistono nello stesso dominio.
Poiché $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to 0^-} -\frac{1}{x} = -\infty$, non possiamo usare queste funzioni come minorante e maggiorante.

Effettuo allora delle considerazioni, usando le conoscenze di trigonometria pregresse.



Se misuriamo gli angoli in radianti, sappiamo che in una circonferenza goniometrica l'arco delimitato da due punti e l'angolo sotteso misurano x. Possiamo quindi affermare che $\overline{BB'} = 2\sin x$ e $\overline{CC'} = 2\tan x$.
Dalla geometria sappiamo che $2\sin x < 2x < 2\tan x$, ovvero:

$$\sin x < x < \tan x$$

Poiché dobbiamo determinare il limite per x che tende a 0, consideriamo solamente l'intervallo $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

Consideriamo prima di tutto la parte di intervallo in cui il seno è positivo, cioè $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Possiamo quindi dividere per il seno, ottenendo:

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

Si passa ai reciproci:

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$$
$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

Poiché $\lim\limits_{x\to 0^+} \cos x = 1$ e $\lim\limits_{x\to 0^+} 1 = 1$, allora $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$.
Per quanto riguarda la parte di intervallo in cui il seno è negativo, possiamo ragionare osservando che la funzione $\frac{\sin x}{x}$ è pari, quindi $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$. □

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0$

Dimostrazione:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = \lim_{x\to 0} \left[\frac{1-\cos x}{x} \cdot \frac{1+\cos x}{1+\cos x}\right] =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0} \left[\frac{\sin x}{x} \cdot \sin x \cdot \frac{1}{1+\cos x}\right] = 0$$

□

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$

Dimostrazione:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{1+\cos x}{1+\cos x}\right]=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{1+\cos x}\right]=\frac{1}{2}$$

□

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$

Dimostrazione:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}\cdot\ln(1+x)\right]=\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=$$
$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^+}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}, & \text{per } x>0\\ \lim\limits_{x\to 0^-}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}, & \text{per } x<0\end{cases}=$$
$$\begin{cases}\text{Sostituisco } t=\frac{1}{x}: x\to 0^+\to t\to +\infty \Rightarrow \lim\limits_{t\to+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)^t, & \text{per } x>0\\ \text{Sostituisco } t=\frac{1}{x}: x\to 0^-\to t\to -\infty \Rightarrow \lim\limits_{t\to+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)^t, & \text{per } x<0\end{cases}=$$
$$\begin{cases}\lim\limits_{t\to+\infty}\ln e=1, & \text{per } x>0\\ \lim\limits_{t\to-\infty}\ln e=1, & \text{per } x<0\end{cases}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\lim_{x\to 0}\lim(1+x)^{\frac{1}{x}}=1$$

□

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$

Dimostrazione:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}\Rightarrow$$
$$\text{Sostituisco } t=e^x-1\text{: }\lim_{t\to 0}\frac{t}{\ln(1+t)}=1$$

□

Altri limiti notevoli

Enunciamo ora una serie di limiti notevoli senza dimostrarli.

- $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)=e^a$, con $a\in\mathbb{R}$
- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(nx)}{mx}=\frac{n}{m}$
- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$

9.11 Teoremi sul calcolo dei limiti e forme indeterminate

Iniziamo ora a vedere come determinare il limite per funzioni non elementari.

Teorema 9.4 (Limite di una funzione composta). *Consideriamo due funzioni $y = f(x)$ e $z = g(y)$ per le quali si può effettuare la composizione. Sia la funzione f regolare per $x \to x_0$, quindi $\lim_{x \to x_0} [g(x) \circ f(x)] = \lim_{y \to \Lambda} g(y)$.*

Se il dominio della funzione composta è illimitato superiormente o inferiormente, allora anche il dominio della funzione f è illimitato superiormente o inferiormente; se f è regolare per $x \to \pm\infty$, allora $\lim_{x \to x_0} [g(x) \circ f(x)] = \lim_{y \to \Lambda} g(y)$.

Esempio 9.8

$$\lim_{x \to \infty} e^{x^2 - 1}$$

$$y = x^2 - 1 \Longrightarrow \lim_{y \to +\infty} y = +\infty \Longrightarrow \lim_{y \to +\infty} e^y = +\infty$$

Esempio 9.9

$$\lim_{x \to \infty} e^{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$y = x^2 - 1 \Longrightarrow \lim_{y \to +\infty} y = +\infty t = \sqrt{y} \Longrightarrow \lim_{t \to +\infty} t = +\infty = \lim_{t \to +\infty} e^t = +\infty$$

Esempio 9.10

$$\lim_{x \to \infty} e^{\frac{1}{x}}$$

$$y = \frac{1}{x} \Longrightarrow \lim_{y \to +\infty} y = 0 \Longrightarrow \lim_{y \to +\infty} e^y = 1$$

Teorema 9.5 (Limite di una combinazione lineare)**.** *Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni regolari per $x \to \lambda$ e siano $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ due valori costanti.*
Se $\lim_{x \to \lambda} f(x) = \Lambda_f$ e $\lim_{x \to \lambda} g(x) = \Lambda_g$, allora $\lim_{x \to \lambda}[c_1 f(x) + c_2 g(x)] = \Lambda$, dove:

- $\Lambda = c_1\Lambda_f + c_2\Lambda_g$ *se* $\Lambda_f, \Lambda_g \in \mathbb{R}$
- $\Lambda = +\infty$ *se una delle due funzioni tende a* $+\infty$*, l'altra tende a un valore reale e le costanti sono positive, oppure se una delle due funzioni tende a* $-\infty$*, l'altra tende a un valore reale e le costanti sono negative, oppure se entrambi le funzioni tendono a* $+\infty$ *e le costanti sono positive, oppure se entrambi le funzioni tendono a* $-\infty$ *e le costanti sono negative, oppure se una delle due funzioni tende a* $+\infty$*, l'altra a* $-\infty$ *e le costanti sono discordi*
- $\Lambda = -\infty$ *se una delle due funzioni tende a* $-\infty$*, l'altra tende a un valore reale e le costanti sono discordi, oppure se una delle due funzioni tende a* $+\infty$*, l'altra tende a un valore reale e le costanti sono discordi, oppure se entrambi le funzioni tendono a* $-\infty$ *e le costanti sono positive*

Per quanto riguarda il calcolo del limite di una combinazione lineare di funzioni, esiste un caso particolare: se una delle due funzioni tende a $+\infty$, l'altra a $-\infty$ e le costanti sono concordi, il limite della combinazione lineare è $\Lambda = +\infty - \infty$. Questa situazione viene definita come **forma indeterminata** $+\infty - \infty$.

Esempio 9.11

$\lim_{x \to +\infty} (x + \sin x) = +\infty$*, perchè, in base al teorema del confronto:*

$$x - 1 \leq x + \sin x \leq x + 1$$

Teorema 9.6 (Limite del prodotto di funzioni)**.** *Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni regolari per $x \to \lambda$.*
Se $\lim_{x \to \lambda} f(x) = \Lambda_f$ e $\lim_{x \to \lambda} g(x) = \Lambda_g$, allora $\lim_{x \to \lambda}[f(x) \cdot g(x)] = \Lambda$, dove:

- $\Lambda = \Lambda_f + \cdot\Lambda_g$ *se* $\Lambda_f, \Lambda_g \in \mathbb{R}$
- $\Lambda = +\infty$ *se una delle due funzioni tende a* $+\infty$*, l'altra tende a un valore reale positivo, oppure se una delle due funzioni tende a* $-\infty$*, l'altra tende a un valore reale negativo, oppure se entrambi le funzioni tendono a* $+\infty$ *o a* $-\infty$
- $\Lambda = -\infty$ *se una delle due funzioni tende a* $-\infty$ *e l'altra tende a un valore reale positivo, oppure se una delle due funzioni tende a* $+\infty$ *e l'altra tende a un valore reale negativo, oppure se entrambi le funzioni tendono a* ∞ *ma con segno discorde*

Anche per il calcolo del limite del prodotto di funzioni possiamo identificare un caso particolare: se una delle due funzioni tende a 0 e l'altra tende a infinito, si ottiene la **forma indeterminata** $0 \cdot \infty$.

Esempio 9.12

$$\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x} x^2\right) = 0 \cdot \infty \Longrightarrow \lim_{x \to 0^+} x = 0$$

Esempio 9.13

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\sqrt{x}\right) = 0\cdot\infty \Rightarrow \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\sqrt{x}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = +\infty$$

Esercizio 9.3

Determinare il valore del seguente limite

$$\lim_{x\to+\infty}(x\sin x)$$

Sfrutto il teorema del confronto:

$$-x \le x\sin x \le x$$

Purtroppo non otteniamo alcun risultato, quindi analizziamo il grafico, ottenendo $-1 \le \sin x \le 1$.
Per x *che tende a* $+\infty$, $\sin x$ *è compreso tra le rette* $y = 1$ *e* $y = -1$, *toccandole periodicamente, quindi è una funzione irregolare. Moltipltico tutti i membri per* $x > 0$:

$$-x \le x\sin x \le x$$

Per x *che tende a* $+\infty$, $x\sin x$ *è compreso tra le rette* $y = -x$ *e* $y = x$, *toccandole periodicamente, quindi è una funzione irregolare.*

Esempio 9.14

$$\lim_{x\to 0^+}\sin\frac{1}{x} = \lim_{t\to+\infty}\sin t = \nexists$$

Esempio 9.15

$$\lim_{x\to 0^+} x\sin x \Rightarrow \textit{Teorema del confronto:} -x \le x\sin x \le x \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} x\sin x = 0$$

Esercizio 9.4

Siano f *e* g *due funzioni irregolari per* $x \to \lambda$. *Si può affermare che* $f + g$ *e* $f\cdot g$ *sono funzioni irregolari per* $x \to \lambda$*?*

$$\lim_{x\to+\infty}[\sin^2 x + 1cos^2 x] = 1$$

Se f *e* g *sono funzioni irregolari, la loro combinazione lineare può essere regolare.*

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\cos x\cdot\frac{1}{\cos x}\right] = 1$$

Se f *e* g *sono funzioni irregolari, il loro prodotto può essere regolare.*

Teorema 9.7 (Limite del rapporto di funzioni)**.** *Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni regolari per $x \to \lambda$, con $g(x) \neq 0$.*
Se $\lim_{x\to\lambda} f(x) = \Lambda_f$ e $\lim_{x\to\lambda} g(x) = \Lambda_g$, allora $\lim_{x\to\lambda}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \Lambda$, dove:

- *$\Lambda = \frac{\Lambda_f}{\Lambda_g}$ se $\Lambda_f, \Lambda_g \in \mathbb{R}$, con $\Lambda_g \neq 0$*
- *$\Lambda = +\infty$ se f tende a $+\infty$ e g tende a un valore reale positivo, oppure se f tende a $-\infty$ e g tende a un valore reale negativo, oppure se f tende a un valore reale positivo e g a 0^+, oppure se f tende a un valore reale negativo e g a 0^-*
- *$\Lambda = -\infty$ se f tende a $-\infty$ e g tende a un valore reale positivo, oppure se f tende a $+\infty$ e g tende a un valore reale negativo, oppure se f tende a un valore reale negativo e g a 0^+, oppure se f tende a un valore reale positivo e g a 0^-*
- *$\Lambda = 0^+$ se f tende a un valore reale positivo e g tende a $+\infty$, oppure se f tende a un valore reale negativo e g tende a $-\infty$*
- *$\Lambda = 0^-$ se f tende a un valore reale positivo e g tende a $-\infty$, oppure se f tende a un valore reale negativo e g tende a $+\infty$*

Anche per il calcolo del limite del rapporto di funzioni possiamo identificare casi particolari: se $\Lambda_f = \Lambda = g = 0$, ci troviamo alla presenza della **forma indeterminata** $\frac{0}{0}$; se $\Lambda_f = \Lambda = g = \infty$, ci troviamo alla presenza della **forma indeterminata** $\frac{\infty}{\infty}$.

Teorema 9.8 (Limite di una funzione elevata a una funzione)**.** *Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni regolari per $x \to \lambda$, con $f(x) > 0$.*
Il limite $\lim_{x\to\lambda} f(x)^{g(x)}$ è determinabile come $e^{\lim_{x\to\lambda}[g(x)\ln f(x)]}$, poichè:

$$\lim_{x\to\lambda} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to\lambda} e^{\ln[f(x)^{g(x)}]} = \lim_{x\to\lambda} e^{g(x)\ln f(x)} = e^{\lim_{x\to\lambda}[g(x)\ln f(x)]}$$

Anche per il calcolo del limite di una funzione elevata a una funzione esistono casi particolari:

- se $\lim_{x\to\lambda} g(x) = 0$ e $\lim_{x\to\lambda} f(x) = \infty$, si ha la **forma indeterminata** ∞^0;
- se $\lim_{x\to\lambda} g(x) = 0$ e $\lim_{x\to\lambda} f(x) = 0^+$, si ha la **forma indeterminata** 0^0;
- se $\lim_{x\to\lambda} g(x) = \infty$ e $\lim_{x\to\lambda} f(x) = 1$, si ha la **forma indeterminata** 1^∞.

Abbiamo così elencato tutte le possibili forme indeterminate nel calcolo dei limiti.
Ciascuna di essa è strettamente legata l'una all'altra, cioè si può passare, mediante alcuni semplici passaggi matematici si può ottenere da una forma indeterminata all'altra.

Per risolvere le forme indeterminate, si può compiere molte semplificazioni (somma per differenza, raccoglimenti a fattor comune, ecc..), come mostrato nella Tabella 9.1. In particolare:

- $\lim\limits_{x\to\infty}(a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n) = +\infty - \infty \Rightarrow$ raccolta a fattor comune $\Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} a_0x^n = \pm\infty$;

- $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b^m} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow$ raccolta a fattor comune $\Rightarrow$
$$\Rightarrow \begin{cases} \pm\infty, & \text{se } n > m \\ \frac{a_n}{b_m}, & \text{se } n = m. \\ 0, & \text{se } n < m \end{cases}$$

Forma indeterminata	*Possibili metodi di risoluzione*
$\frac{0}{0}$	Passaggi algebrici Confronto tra limiti Cambio di variabile Teorema di De L'Hôpital Infinitesimi
$\frac{\infty}{\infty}$	Passaggi algebrici Confronto tra limiti Cambio di variabile Teorema di De L'Hôpital Infiniti
$0 \cdot \infty$ o $\infty \cdot 0$	$y = f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \begin{cases} \frac{0}{0} \\ \frac{\infty}{\infty} \end{cases}$
$+\infty - \infty$	$y = f(x) - g(x) = \begin{cases} f(x)\left[1 - \frac{g(x)}{f(x)}\right] \\ g(x)\left[\frac{f(x)}{g(x)} - 1\right] \end{cases} = \frac{\infty}{\infty}$
∞^0, 0^0 o 1^∞	Teorema del calcolo del limite di una funzione elevata a una funzione

Tabella 9.1: Forme indeterminate

9.12 Gli asintoti

Vediamo ora una proprietà grafica delle funzioni.

Quando una funzione diverge nell'intorno di un punto del dominio, si può notare che il grafico tende a toccare (all'infinto) una particolare retta parallela all'asse delle ordinate. Anche quando una funzione converge a un valore reale negli estremi dell'intervallo possiamo notare che il grafico tende a toccare (all'infinito) una particolare retta parallela all'asse delle ascisse.
Queste due rette sono dette **asintoti** della funzione.

Definizione 9.15 (Asintoto verticale)**.** Data la funzione $f\colon D \to C\ x \mapsto y = f(x)$ e un punto $x_0 \in \mathcal{D}D$, se si verifica che $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$, allora si dice che la retta di equazione $x = x_0$ è un **asintoto verticale** per il grafico della funzione.

Definizione 9.16 (Asintoto orizzontale)**.** Data la funzione $f\colon D \to C\ x \mapsto y = f(x)$, con D illimitato, se si verifica che $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$, allora si dice che la retta di equazione $y = l$ è un **asintoto orizzontale** per il grafico della funzione.

Definizione 9.17 (Asintoto obliquo)**.** Data la funzione $f\colon D \to C\ x \mapsto y = f(x)$, con D illimitato, se si verifica che $\lim_{x \to \infty} [f(x) - (mx + q)] = 0$, allora si dice che la retta di equazione $y = mx + q$ è un **asintoto obliquo** per il grafico della funzione.

Teorema 9.9. *Se il grafico della funzione $y = f(x)$ ha un asintoto obliquo di equazione $y = mx + q$, con $m \neq 0$, allora m e q sono dati dai seguenti limiti:*

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$q = \lim_{x \to \infty} [f(x) - mx]$$

Dimostrazione: Se esiste un asintoto obliquo, è vero che

$$\lim_{x \to \infty} [f(x) - (mx + q)] = 0$$

e quindi, dividendo per $x \neq 0$ abbiamo

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x) - (mx + q)}{x} = 0 \to \lim_{x \to \infty} \left[\frac{f(x)}{x} - m - \frac{q}{x}\right] = 0$$

Poiché $\lim_{x \to \infty} m = m$ e $\lim_{x \to \infty} \frac{q}{x} = 0$ allora $m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$.
Se $m \neq 0$, per calcolare q consideriamo nuovamente:

$$\lim_{x \to \infty} [f(x) - (mx + q)] = 0 \to \lim_{x \to \infty} [(f(x) - mx) - q)] = 0 \to$$
$$\to \lim_{x \to \infty} [f(x) - mx] - q = 0 \to q = \lim_{x \to \infty} [f(x) - mx]$$

□

Capitolo 10

Continuità e discontinuità

Iniziamo ora a definire una proprietà "puntuale" di una funzione, ovvero valida per un punto specifico: la *continuità*.
Analizzeremo quindi questo concetto e il suo opposto, quello di *discontinuità*, descrivendo anche alcuni teoremi relativi.

10.1 Funzione continua

Definizione 10.1 (Funzione continua in un punto)**.** Data la funzione $f\colon D \to C$ $x \mapsto y = f(x)$ e un punto $x_0 \in \mathcal{D}D$ ($x_0 \in D$), si dice che una funzione è **continua nel punto** x_0 se $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ (Figura 10.1), cioè se esiste il limite per $x \to x_0$ e se questo limite coincide con il valore $f(x_0)$ della funzione f calcolato nel punto x_0.

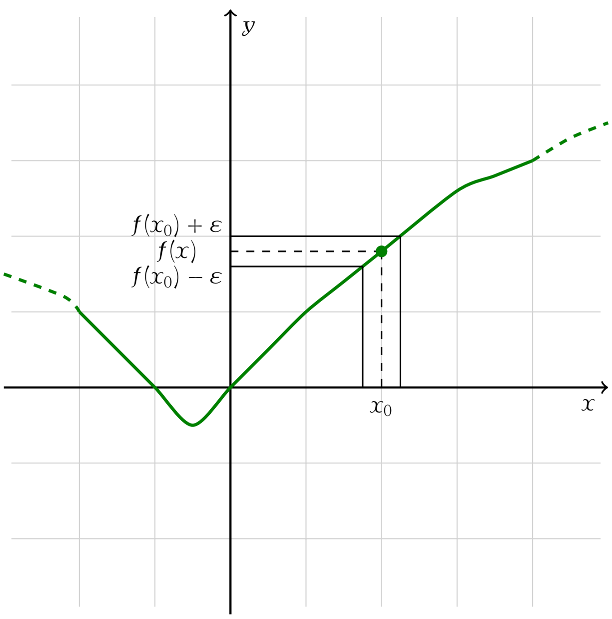


Figura 10.1: Funzione continua

Questo concetto si può estendere anche a un intervallo chiuso.
Una funzione, infatti, si dice **continua in un intervallo chiuso** se è continua in

ogni punto dell'intervallo.
Inoltre, si può definire una funzione continua nell'intervallo destro (o sinistro) di un punto.

Quasi tutte le funzioni elementari che abbiamo visto (la funzione costante, le funzioni polinomiali, le funzioni goniometriche, l'esponenziale e il logaritmo, ecc...) sono funzioni continue (non dimostriamo la loro continuità).
Allo stesso modo, le funzioni composte da funzioni continue sono funzioni composte a loro volta.

Esempio 10.1

La funzione $y = \sin(4x)$ *è la funzione composta da* $z = f(x) = 4x$*, continua in* $\mathbb{R}$*, e da* $y = g(z) = \sin z$*, continua in* $\mathbb{R}$*, e quindi continua in ogni punto dell'immagine di* f*. La funzione composta* $g \circ f$ *è* $g(f(x)) = \sin(4x)$*, continua in* $\mathbb{R}$*. Per esempio,* $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \sin(4x) = \sin 4 \cdot \frac{\pi}{4} = \sin \pi = 0$.

10.2 Teoremi sulla continuità

Vediamo ora alcuni teoremi sulle funzioni continue. Taluni sono ripetizioni di definizioni già date, mentre altri ci serviranno come base per altri teoremi.

Teorema 10.1. *Tutte le funzioni elementari sono continue nei rispettivi domini. Unica eccezione a ciò è data dalla successione, che, essendo definita nell'insieme dei numeri naturali, non è continua.*

Teorema 10.2. *Siano date due funzioni* $f(x)$ *e* $g(x)$*. Se queste due funzioni sono continue nel punto* x_0*, allora anche la loro combinazione lineare, il loro prodotto, il loro rapporto (se* $g(x)$ *non è nulla) e la loro elevazione a potenza è una funzione continua nel punto* x_0*.*

Teorema 10.3. *Sia* $y = f(x)$ *una funzione continua nel punto* x_0 *e sia* $x = g(y)$ *una funzione continua nel punto* $y_0 = f(x_0)$*. Si ha allora che* $F(x) = g[f(x)]$ *è una funzione continua nel punto* x_0*.*

Esercizio 10.1

Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x}}, & \text{se } x \neq 0 \\ \alpha, & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

determinare il valore $\alpha \in \mathbb{R}$ *affinchè la funzione sia continua in* $\mathbb{R}$*.*

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \Rightarrow f(x) \text{ è continua per } \mathbb{R} \setminus \{0\}$$
$$x = 0 \Rightarrow f(0) = \alpha$$
$$\text{Verifico quando } \lim_{x\to 0} f(x) = f(0):$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{\sqrt[3]{x}} \cdot \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^2}}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x} \cdot \sqrt[3]{x^2}\right) = 0$$
$$\text{Per } \alpha = 0,\ f \text{ è continua in } x = 0.$$

Esercizio 10.2

Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\log x}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}, & \text{se } x > 0 \wedge x \neq 1 \\ \alpha, & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

determinare il valore $\alpha \in \mathbb{R}$ *affinchè la funzione sia continua in* $x_0 = 1$.

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} \Rightarrow f(x) \text{ è continua per } \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$$
$$x = 1 \Rightarrow f(1) = \alpha$$
$$\text{Verifico quando } \lim_{x\to 1} f(x) = f(1):$$
$$\lim_{x\to 1} \frac{\log x}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} = \lim_{x\to 1}\left(\frac{\log x}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{(x-1)}}{\sqrt[3]{(x-1)}}\right) = \lim_{x\to 1}\left(\frac{\log x}{x-1} \cdot \sqrt[3]{(x-1)}\right) = 0$$
$$\text{Per } \alpha = 0,\ f \text{ è continua in } x_0 = 1.$$

Teorema 10.4 (Valori intermedi - primo enunciato)**.** *Sia data una funzione* $f\colon D \to C$ *e siano dati due valori* $a, b \in D$. *Se la funzione è continua nell'intervallo chiuso* $[a, b]$ *ed esiste un valore* $c \in \mathbb{R}$ *compreso tra* $f(a)$ *e* $f(b)$, *allora esiste un valore* $x_c \in [a, b]$ *tale che* $f(x_c) = c$ *(Figura 10.2).*

Teorema 10.5 (Valori intermedi - secondo enunciato)**.** *Sia* f *una funzione continua nell'intervallo aperto* $(\lambda_1, \lambda_2) \in D$. *Se esiste un valore* $c \in \mathbb{R}$ *compreso tra* $\lim_{x\to\lambda_1^+} f(x)$ *e* $\lim_{x\to\lambda_2^-} f(x)$, *allora esiste un valore* $x_c \in (\lambda_1, \lambda_2)$ *tale che* $f(x_c) = c$.

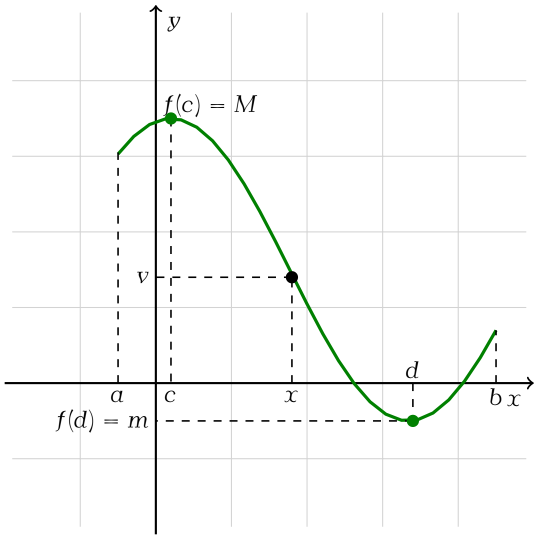


Figura 10.2: Teorema dei valori intermedi

Teorema 10.6 (Esistenza degli zeri - primo enunciato)**.** *Sia data una funzione $f\colon D \to C$ continua in un intervallo chiuso $[a, b]$. Se $f(a) \cdot f(b) < 0$, allora esiste un valore $c \in (a, b)$ tale che $f(c) = 0$ (Figura 10.3.*

Teorema 10.7 (Esistenza degli zeri - secondo enunciato)**.** *Sia data una funzione $f\colon D \to C$ continua in un intervallo aperto (λ_1, λ_2). Se $\left(\lim_{x\to\lambda_1^+} f(x)\right) \cdot \left(\lim_{x\to\lambda_2^-} f(x)\right) < 0$, allora esiste un valore $c \in (\lambda_1, \lambda_2)$ tale che $f(c) = 0$.*

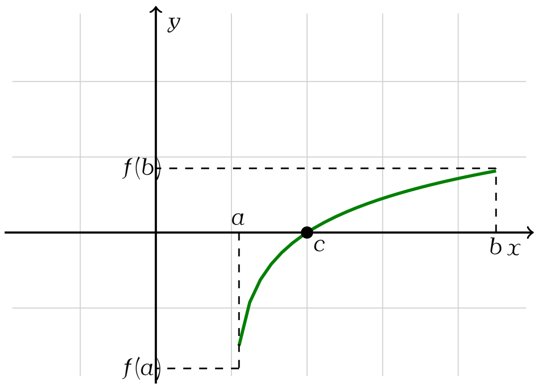


Figura 10.3: Teorema dell'esistenza degli zeri

Teorema 10.8 (Weierstrass)**.** *Se $f\colon D \to C$ è una funzione continua in un intervallo chiuso $[a, b]$, allora questa assume in tale intervallo il massimo assoluto e il minimo assoluto.*

Per concludere il nostro discorso sulla continuità delle funzioni, vediamo un altro esercizio in cui utilizziamo tutti i teoremi finora enunciati.

Esercizio 10.3

Data la funzione

$$\begin{cases} e^{\frac{a}{x}}, & \text{se } x > 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \\ \frac{1}{\log|x|\cdot\left(b+\sin\frac{1}{x}\right)}, & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

determinare il valore $a, b \in \mathbb{R}$ affinchè la funzione sia continua in $x_0 = 0$.

Per verificare la continuità nel punto $x_0 = 0$, devo studiare il limite destro e il limite sinistro della funzione.
Inizio imponendo che $\lim_{x\to 0^+} e^{\frac{a}{x}} = 0$; ciò è vero solamente se $a < 0$, poichè, in questo caso, $\lim_{x\to 0^+} \frac{a}{x} = .\infty$.
Impongo ora che $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{\log|x|\cdot\left(b+\sin\frac{1}{x}\right)} = 0$, cioè impongo che $\lim_{x\to 0^-} \log(-x)\cdot\left(b+\sin\frac{1}{x}\right) = \pm\infty$. Poichè il limite di questo prodotto non è determinabile, uso il teorema del confronto:

$$-1 \leq \sin\frac{1}{x} \leq 1$$
$$b - 1 \leq b + \sin\frac{1}{x} \leq b + 1$$
$$\log(-x)(b-1) \leq \log(-x)\left(b + \sin\frac{1}{x}\right) \leq \log(-x)(b+1)$$

Per far tendere $\log(-x)\left(b+\sin\frac{1}{x}\right)$ a $+\infty$, bisogna imporre che $b < -1$; per far tendere $\log(-x)\left(b+\sin\frac{1}{x}\right)$ a $-\infty$, bisogna imporre che $b > 1$. In entrambi i casi, la funzione diventa continua a sinistra.
Nei casi limite, la funzione non è continua; infatti:

$$b = 1 \Rightarrow 0 \leq \log(-x)\left(1 + \sin\frac{1}{x}\right) \leq 2\log(-x) \Rightarrow \nexists$$
$$b = -1 \Rightarrow -2\log(-x) \leq \log(-x)\left(-1 + \sin\frac{1}{x}\right) \leq 0 \Rightarrow \nexists$$

10.3 Funzione discontinua

Quando, nel punto x_0, la funzione non è continua, allora il punto x_0 è detto **punto di discontinuità della funzione**.
È possibile classificare i punti di discontinuità di una funzione in tre categorie, in base allo studio del limite per x_0.

Definizione 10.2 (Discontinuità di prima specie)**.** Un punto x_0 si dice **punto di discontinuità di prima specie** per $f(x)$ quando, per $x \to x_0$, il limite destro e il limite sinistro di x_0 sono entrambi finiti ma diversi tra loro (Figura 10.4). La differenza tra i valori dei limiti si definisce **salto della funzione** in x_0 e si calcola come $\left|\lim_{x\to x_0^+} f(x) - \lim_{x\to x_0^-} f(x)\right|$.

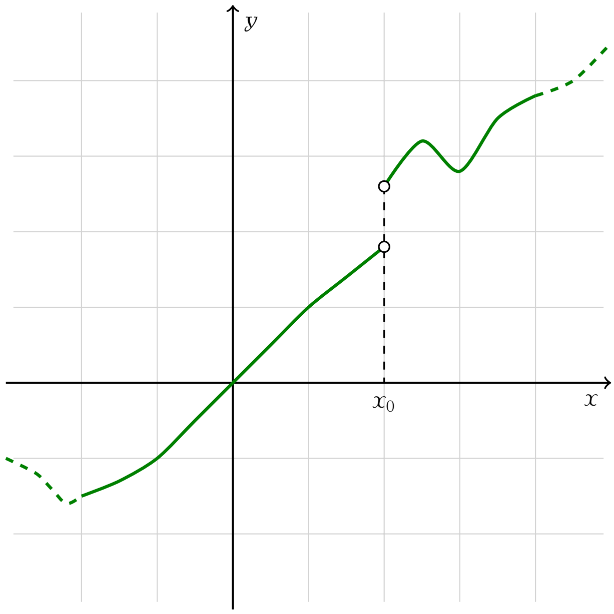


Figura 10.4: Punto di discontinuità di prima specie

Definizione 10.3 (Discontinuità di seconda specie)**.** Un punto x_0 si dice **punto di discontinuità di seconda specie** per $f(x)$ quando, per $x \to x_0$, almeno uno dei due limiti della funzione, quello destro o quello sinistro, è infinito oppure non esiste (Figura 10.5).

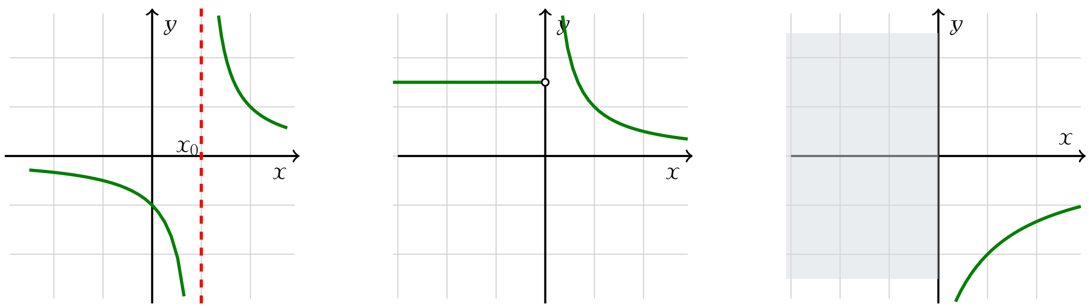
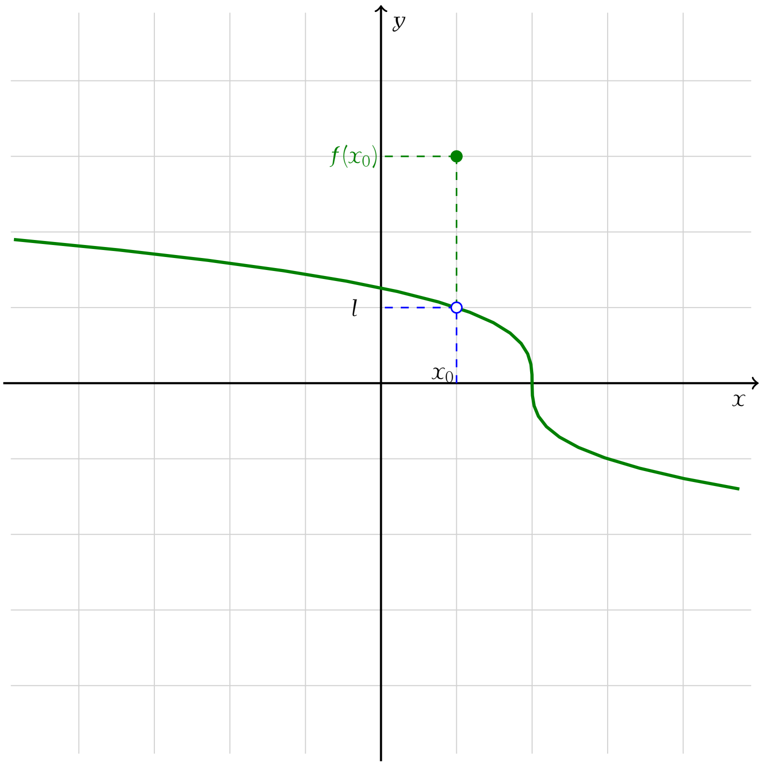


Figura 10.5: Punto di discontinuità di seconda specie

Definizione 10.4 (Discontinuità di terza specie)**.** Un punto x_0 si dice **punto di discontinuità di terza specie** per $f(x)$ quando esiste ed è finito della funzione per $x \to x_0$, la funzione non è definita in x_0 oppure, se lo è, risulta $f(x_0) \neq l$ (Figura 10.6).
Questo tipo di discontinuità viene detto *discontinuità eliminabile*, in quanto basta estendere il dominio della funzione f in modo che comprenda pure x_0.



f non è definita in x_0
oppure è definita in x_0 ma $f(x_0) \neq l$

Figura 10.6: Punto di discontinuità di terza specie

Capitolo 11

La derivabilità

Iniziamo ora a parlare di un nuovo argomento: la **derivabilità** di una funzione.

Il problema della determinazione della derivata di una funzione è collegato al problema della determinazione della retta tangente in un punto.
Dalla geometria, sappiamo che per le coniche[1] la tangente in un punto interseca la conica solamente in quel punto; per una generica funzione, però, non possiamo affermare con certezza che una retta tangente in un punto non intersechi la retta anche in altri. Per non incorrere in equivoci e richiamando il concetto di limite, possiamo definire la retta tangente a una funzione f in un punto P come la posizione limite, se esiste, della retta secante PQ al tendere, sia da destra che da sinistra, di Q a P. Definito ciò, possiamo ora iniziare a definire gli strumenti matematici per determinare questa retta tangente.

11.1 Rapporto incrementale

Consideriamo una funzione $f\colon D \to C$ e un punto $x_0 \in (\mathscr{D}D) \cap D$; effettuiamo, su questa funzione, uno spostamento nel dominio di distanza h tale che $x_0 + h \in D$.
Questo spostamento comporta che anche l'immagine subisca uno spostamento, la cui distanza è pari a $f(x_0 + h) - f(x_0)$.

Ciò che a noi interessa, però, è il rapporto tra l'incremento dell'immagine e l'incremento del dominio, che prende il nome di *rapporto incrementale*.

Definizione 11.1 (Rapporto incrementale)**.** Data una funzione $f\colon D \to C$ e due numeri reali x_0 e $x_0 + h$ appartenenti al dominio della funzione, si definisce **rapporto incrementale** della funzione relativo al punto x_0 (Figura 11.1) il valore

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{11.1}$$

[1]In matematica, e in particolare in geometria analitica e in geometria proiettiva, con *sezione conica*, o semplicemente *conica*, si intende genericamente una curva piana che sia luogo dei punti ottenibili intersecando la superficie di un cono circolare retto con un piano.
Sono coniche la circonferenza, la parabola, l'iperbole e l'ellissi.

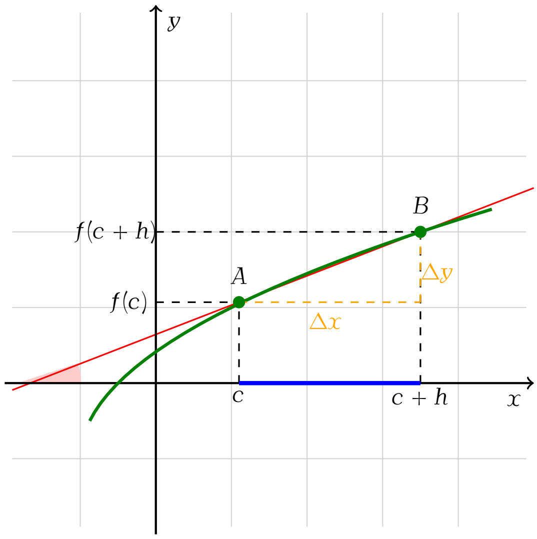


Figura 11.1: Rapporto incrementale

11.2 La derivata

Una volta determinato il rapporto incrementale di una funzione relativo ad un punto, diventa importante studiare il suo andamento nell'intorno di questo punto; occorre, quindi, calcolare il limite del rapporto incrementale.

Definizione 11.2 (Derivata)**.** Data una funzione $f\colon D \to C$, si definisce **derivata** della funzione f nel punto x_0 il limite, se esiste ed è finito, per h tendente a zero, del rapporto incrementale.

$$f'(x) = D[f(x)] = y' = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{11.2}$$

La derivata di una funzione in un punto rappresenta, quindi, il coefficiente angolare della retta tangente al grafico della funzione nel punto.

Come abbiamo visto, la derivabilità, come la continuità, è un concetto "puntuale", cioè relativo a un singolo punto.
È possibile, anche in questo caso, estendere il concetto anche a un intervallo del dominio, ma solamente nel caso in cui la funzione sia derivabile per ogni punto dell'intervallo.

Vediamo due esempi di calcolo della derivata mediante il limite del rapporto incrementale.

Esempio 11.1

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \{k\} \\ x &\mapsto y = k \end{aligned}$$

Considero $x \in \mathbb{R}$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$
$$\lim_{h \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{k-k}{h} = 0$$

Quindi, la derivata è:

$$f\colon \mathbb{R} \to \{0\}$$
$$x \mapsto y' = 0$$

Esempio 11.2

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto y = x$$

Considero $x \in \mathbb{R}$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$
$$\lim_{h \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{x+h-x}{h} = 1$$

Quindi, la derivata è:

$$f\colon \mathbb{R} \to \{1\}$$
$$x \mapsto y' = 1$$

Derivata destra e sinistra

Poiché la derivata è definita come un limite, si può definire una **derivata sinistra** e una **derivata destra**.
Un esempio di calcolo di derivata sinistra e destra è dato dalla derivata della funzione modulo.

Esempio 11.3

$$f\colon \mathbb{R} \to [0, +\infty)$$
$$x \mapsto y = |x|$$

Considero $x > 0$*:*

$$\lim_{h \to 0} \frac{|h+h| - |x|}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = 1$$

Considero $x < 0$*:*

$$\lim_{h \to 0} \frac{|h+h| - |x|}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-h}{h} = -1$$

Considero $x > 0$:

$$\lim_{h\to 0} \frac{|h+h| - |x|}{h} = \nexists$$

La derivata come coefficiente angolare

Come abbiamo detto, la derivata corrisponde alla retta tangente in un punto; più precisamente, possiamo affermare ora che se **la funzione f è derivabile nel punto x_0, allora esiste una retta tangente t nel punto di coordinate** $(x_0, f(x_0))$ **tale che** $f'(x_0) = m$.
La retta t tangente al grafico della funzione f nel suddetto punto si determina tramite la formula

$$t\colon y = f(x_0) + \frac{f(x_0+h) + f(x_0)}{h}(x - x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \tag{11.3}$$

Possiamo vedere un esempio di ciò nella Figura 11.2.

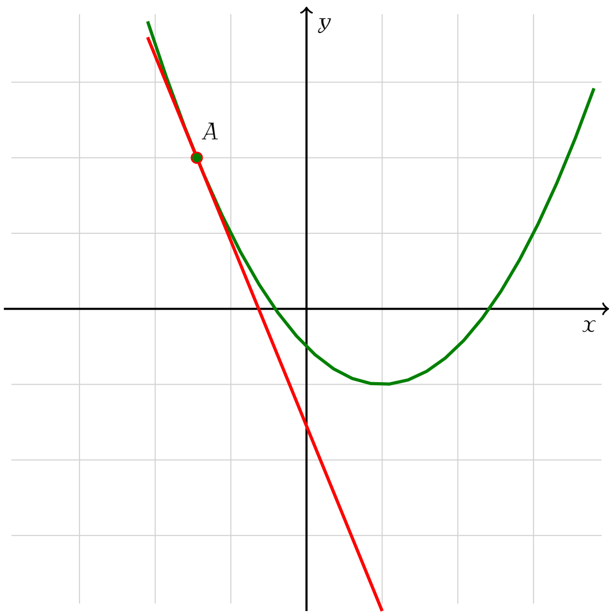


Figura 11.2: Esempio di retta tangente

Se il valore della derivata nel punto è molto grande, allora la curva cresce rapidamente nell'intorno del punto. Se $f'(x_0)$ è positivo ma vicino allo zero, allora la curva cresce lentamente nell'intorno di x_0.
Infine, se $f'(x_0) = 0$, la curva non cresce e x_0 rappresenta un punto di massimo, di minimo o di flesso.

Derivabilità e continuità

Possiamo dimostrare che se una funzione f è derivabile in un punto x_0, essa sarà anche continua nello stesso punto.

Teorema 11.1. *Se $f(x)$ è una funzione derivabile nel punto x_0, allora quella funzione è continua nel punto x_0.*

Dimostrazione: Ipotesi: $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0) \in \mathbb{R}$
Tesi: $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

Verifica

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$
$$\lim_{x\to x_0} \left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \cdot (x-x_0)\right] = 0 \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

□

Quando una funzione possiede tutte le derivate, di qualsiasi ordine, continue nel suo dominio (in genere $\mathbb{R}$), si dice che la funzione è *derivabile con continuità per qualsiasi ordine* (o si definisce *funzione "liscia"*) e si indica con il simbolo $f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$, indicando una particolare classe di funzioni.
Una funzione può appartenere anche a classi $C^n(\mathbb{R})$, dove n indica il massimo ordine di derivata continua nel dominio indicato.

Vediamo un altro teorema sulla continuità e la derivabilità.

Teorema 11.2. *Sia $f(x)$ una funzione continua in un intorno di x_0 e derivabile in un intorno bucato di x_0. Se $f(x)$ converge per $x \to x_0$, allora f è una funzione derivabile nel punto x_0 e $f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} f'(x)$.*

Derivate di ordine superiore

Quando la derivata della funzione in un punto è, a sua volta, derivabile, si ottiene la **derivata seconda**, indicata con la simbologia $f''(x)$ o y'' (indicando y' come *derivata prima*).
A sua volta, se la derivata seconda è derivabile nel punto x, si ottiene la **derivata terza** ($f'''(x)$ o y'''). Questo processo si può iterare all'infinito, ottenendo così le **derivate di ordine superiore della funzione** ($y^{(4)}$,$y^{(5)}$,...).

11.3 Derivate fondamentali

Elenchiamo ora le derivate delle funzioni elementari, fornendo anche, la dimostrazione tramite il calcolo del limite del rapporto incrementale.

Teorema 11.3. *La derivata di una funzione costante è* 0.

$$D[k] = 0$$

Dimostrazione: Ricordando che, se $f(x) = k$ anche $f(x+h) = k$, calcoliamo il rapporto incrementale.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{k-k}{h} = 0$$

□

Teorema 11.4. *La derivata della funzione $f(x) = x$ è $f'(x) = 1$.*

$$D[x] = 1$$

Dimostrazione: Se $f(x) = x$, risulta che $f(x+h) = x+h$. Calcoliamo il rapporto incrementale.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h} = 1$$

□

Teorema 11.5. *La derivata della funzione $f(x) = x^n$, con $n \in \mathbb{N}$, è $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$.*

$$D[x^n] = nx^{n-1}, \text{ con } n \in \mathbb{N}$$

Dimostrazione:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} =$$

Usiamo lo sviluppo della potenza di un binomio.

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\left[x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + h^n\right] - x^n}{h} =$$

Semplifichiamo x^n e raccogliamo h.

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h\left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + \cdots + h^{n-1}\right]}{h} = nx^{n-1}$$

□

Esempio 11.4

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto y = x^2 \end{aligned}$$

Considero $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ \lim_{h\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{x^2 + 2hx + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(2x+h)}{h} = 2x \end{aligned}$$

Quindi, la derivata è:

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto y' = 2x \end{aligned}$$

Teorema 11.6. *La derivata della funzione $f(x) = x^\alpha$, con $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, è $f'(x) = n \cdot x^{\alpha-1}$.*

$$D[x^\alpha] = \alpha x^{\alpha-1}, \text{ con } 1\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

Esempio 11.5

$$\begin{aligned} f\colon [0,+\infty) &\to [0,+\infty) \\ x &\mapsto y = \sqrt{x} \end{aligned}$$

Considero $x \in (0,+\infty)$:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ \lim_{h\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0}\left(\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\cdot\frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}\right) = \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{h}{h\cdot(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

Considero ora $x = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ \lim_{h\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{h}}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0}\left(\frac{\sqrt{h}}{h}\cdot\frac{\sqrt{h}}{\sqrt{h}}\right) = \lim_{h\to 0}\frac{h}{h\sqrt{h}} = +\infty \end{aligned}$$

Quindi, la derivata è:

$$\begin{aligned} f\colon (0,+\infty) &\to (0,+\infty) \\ x &\mapsto y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

Esempio 11.6

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto y = \sqrt[3]{x} \end{aligned}$$

Considero $x \in \mathbb{R}$:

$$
\begin{aligned}
\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
\lim_{h\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0}\left(\frac{\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}}{h}\cdot\frac{\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{x^2}}\right) = \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{h}{h(\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{x^2})} = \frac{1}{2\sqrt[3]{x^2}}
\end{aligned}
$$

Poiché la funzione ottenuta non è definita per $x = 0$, la derivata è:

$$
\begin{aligned}
f\colon \mathbb{R}\setminus &\to \mathbb{R} \\
x \mapsto y' &= \frac{1}{2\sqrt[3]{x^2}}
\end{aligned}
$$

Teorema 11.7. *La derivata della funzione $f(x) = \sin x$, con x espresso in radianti, è $f'(x) = \cos x$.*

$$D[\sin x] = \cos x$$

Dimostrazione:

$$
\begin{aligned}
f\colon \mathbb{R} &\to [-1,1] \\
x \mapsto y &= \sin x
\end{aligned}
$$

Considero $x \in \mathbb{R}$:

$$
\begin{aligned}
\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
\lim_{h\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}
\end{aligned}
$$

Ricordando che $\sin p - \sin q = 2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$[a]:

$$
\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{2\cos\left(\frac{x+h+x}{2}\right)\sin\left(\frac{x+h-x}{2}\right)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\cos\left(\frac{2x+h}{2}\right)\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} = \\
&= \lim_{h\to 0}\left(\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}\right) = \cos x
\end{aligned}
$$

□

[a] Formula di prostaferesi

Teorema 11.8. *La derivata della funzione $f(x) = \cos x$, con x espresso in radianti, è $f'(x) = -\sin x$.*

$$D[\cos x] = -\sin x$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to [-1,1] \\ x &\mapsto y = \cos x \end{aligned}$$

Considero $x \in \mathbb{R}$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$
$$\lim_{h \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h}$$

Ricordando che $\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$[a]:

$$\begin{aligned} &\lim_{h \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{-2 \sin\left(\frac{x+h+x}{2}\right) \sin\left(\frac{x+h-x}{2}\right)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-\sin\left(\frac{2x+h}{2}\right) \sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} = \\ &= \lim_{h \to 0} \left(-\sin\left(x + \frac{h}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} \right) = -\sin x \end{aligned}$$

□

[a] Formula di prostaferesi

Teorema 11.9. *La derivata della funzione $f(x) = a^x$ è $f'(x) = a^x \ln a$.*

$$D[a^x] = a^x \ln a, \text{ con } a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto y = a^x \end{aligned}$$

Considero $x \in \mathbb{R}$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$
$$\lim_{h \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} =$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{a^x a^h - a^x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a^x (a^h - 1)}{h} = a^x \ln a$$

□

Teorema 11.10. *La derivata della funzione $f(x) = \mathrm{e}^x$ è $f'(x) = \mathrm{e}^x$.*

$$D[\mathrm{e}^x] = \mathrm{e}^x$$

Teorema 11.11. *La derivata della funzione $f(x) = \log_a x$ è $f'(x) = \frac{1}{x} \log_a \mathrm{e}$.*

$$D[\log_a x] = \frac{1}{x} \log_a \mathrm{e}$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^+ &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto y = \log_a x \qquad (a > 0 \wedge a \neq 1) \end{aligned}$$

Considero $x \in \mathbb{R}^+$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h\to 0} \frac{\log_a(x+h) - \log_a x}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\log_a(\frac{x+h}{x})}{h} = \lim_{h\to 0} \left(\frac{1}{h} \cdot \log_a \left(1 + \frac{h}{x}\right)\right) = \lim_{h\to 0} \left(\frac{\log_a \left(1 + \frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}} \cdot \frac{1}{h}\right) = \frac{1}{x} \log_a e$$

□

Teorema 11.12. *La derivata della funzione $f(x) = \sinh x$ è $f'(x) = \cosh x$.*

$$D[\sinh x] = \cosh x$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto y = \sinh x \end{aligned}$$

Considero $x \in \mathbb{R}$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$

Ricordando che $\sinh p - \sinh q = 2\cosh \frac{p+q}{2} \sinh \frac{p-q}{2}$[a]:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h\to 0} \frac{\sinh(x+h) - \sinh x}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2\cosh\left(\frac{x+h+x}{2}\right) \sinh\left(\frac{x+h-x}{2}\right)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cosh\left(\frac{2x+h}{2}\right) \sinh\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \left(\cosh\left(x + \frac{h}{2}\right) \frac{\sinh\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}\right) = \cosh x$$

□

[a]Formula di prostaferesi

Teorema 11.13. *La derivata della funzione $f(x) = \cosh x$ è $f'(x) = \sinh x$.*

$$D[\cosh x] = \sinh x$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto y = \cosh x \end{aligned}$$

Considero $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ \lim_{h\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{h\to 0} \frac{\cosh(x+h) - \cosh x}{h} \end{aligned}$$

Ricordando che $\cosh p - \cosh q = 2\sinh\frac{p+q}{2}\sinh\frac{p-q}{2}$[a]:

$$\begin{aligned} &\lim_{h\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h\to 0} \frac{\cosh(x+h) - \cosh x}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2\sinh\left(\frac{x+h+x}{2}\right)\sinh\left(\frac{x+h-x}{2}\right)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sinh\left(\frac{2x+h}{2}\right)\sinh\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} = \\ &= \lim_{h\to 0} \left(\sinh\left(x + \frac{h}{2}\right)\frac{\sinh\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}\right) = \sinh x \end{aligned}$$

□

[a] Formula di prostaferesi

11.4 Teoremi sul calcolo delle derivate

Vediamo ora i teoremi che determinano come calcolare le derivate delle funzioni non elementari.

Teorema 11.14 (Derivata di una combinazione lineare di funzioni). *Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni derivabili nel punto x_0 e siano $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ due valori costanti. La funzione $F(x) = c_1 f(x) + c_2 g(x)$ è derivabile nel punto x_0 e la sua derivata è $F'(x_0) = c_1 f'(x_0) + c_2 g'(x_0)$.*

Dimostrazione:

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{[c_1 \cdot f(x+h) + c_2 \cdot g(x+h)] - [c_1 \cdot f(x) + c_2 \cdot g(x)]}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{[c_1 \cdot f(x+h) - c_1 \cdot f(x)] + [c_2 \cdot g(x+h) - c_2 \cdot g(x)]}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{c_1 \cdot f(x+h) - c_1 \cdot f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{c_2 \cdot g(x+h) - c_2 \cdot g(x)}{h} = \\ &= c_1 \cdot \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + c_2 \cdot \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \\ &= c_1 \cdot f'(x) + c_2 \cdot g'(x) \end{aligned}$$

□

Esempio 11.7

$$\begin{aligned} F(x) &= 3\sin x - \cos x \\ F'(x) &= 3\cos x + \sin x \; \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Teorema 11.15 (Derivata del prodotto di funzioni)**.** *Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni derivabili nel punto x_0. La funzione $F(x) = f(x) \cdot g(x)$ è derivabile nel punto x_0 e la sua derivata è $F'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$.*

Dimostrazione:

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{[f(x+h) \cdot g(x+h)] - [f(x) \cdot g(x)]}{h}$$

Al primo termine del numeratore sottraiamo e sommiamo il prodotto $g(x+h) \cdot f(x)$.

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{[f(x+h) \cdot g(x+h) - g(x+h) \cdot f(x) + g(x+h) \cdot f(x)] - [f(x) \cdot g(x)]}{h} = \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) \cdot [f(x+h) - f(x)] + f(x) \cdot [g(x+h) - g(x)]}{h} = \\ &= \lim_{h \to 0} \left[g(x+h) \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right] + \lim_{h \to 0} \left[f(x) \frac{g(x+h) - g(x}{h} \right] \end{aligned}$$

Poiché per ipotesi $f(x)$ e $g(x)$ sono derivabili, e quindi anche continue, abbiamo:

$$F'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

□

Esempio 11.8

$$\begin{aligned} F(x) &= 3 \cos x \sin x \\ F'(x) &= -3 \sin^2 x + 3 \cos^2 x \ \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Teorema 11.16 (Derivata della potenza di funzioni)**.** *Sia $f(x)$ una funzione derivabile nel punto x_0. La funzione $F(x) = [f(x)]^n$, con $n \in \mathbb{N}$, è derivabile nel punto x_0 e la sua derivata è $F'(x_0) = n[f(x_0)]^{n-1} f'(x_0)$.*

Esempio 11.9

$$\begin{aligned} F(x) &= \cos^4 x \\ F'(x) &= -4 \cos^3 x \sin x \ \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Teorema 11.17 (Derivata del reciproco di una funzione)**.** *Sia $f(x)$ una funzione derivabile nel punto x_0, con $f(x) \neq 0$. La funzione $F(x) = \frac{1}{f(x)}$ è derivabile ne punto x_0 e la sua derivata è $F'(x_0) = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}$.*

Dimostrazione:

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{f(x+h)} - \frac{1}{f(x)}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{f(x) - f(x+h)}{f(x)f(x+h)}}{h} = \\ &= \lim_{x \to 0} \left[-\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot \frac{1}{f(x)f(x+h)} \right] \end{aligned}$$

Essendo $f(x)$ derivabile (e quindi anche continua), si ha $F'(x) = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}$. □

Teorema 11.18 (Derivata del quoziente di funzioni)**.** *Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni derivabili nel punto x_0, con $g(x_0) \neq 0$. La funzione $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ è derivabile nel punto x_0 e la sua derivata è $F'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$.*

Dimostrazione: Consideriamo la funzione quoziente come prodotto di due funzioni.

$$F(x) = f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}$$

Applichiamo la regola della derivata di un prodotto.

$$F'(x) = D\left[f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}\right] = f'(x) \cdot \frac{1}{g(x)} + f(x) \cdot D\left[\frac{1}{g(x)}\right] =$$

Applichiamo la regola della derivata del reciproco di una funzione.

$$= f'(x) \cdot \frac{1}{g(x)} + f(x) \cdot \frac{-g'(x)}{g^2(x)} =$$

Riduciamo allo stesso denominatore.

$$= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

□

Grazie a questo teorema, possiamo determinare come casi particolari la derivata della funzione tangente e la derivata della funzione cotangente.

Esempio 11.10

Calcoliamo la derivata della funzione $y = \tan x$.
Consideriamo la funzione $\tan x$ *secondo la sua definizione.*

$$F(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

Applichiamo il teorema della derivata del quoziente di funzioni.

$$F'(x) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x \ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\},\ k \in \mathbb{Z}$$

Esempio 11.11

Calcoliamo la derivata della funzione $y = \cot x$.
Consideriamo la funzione $\cot x$ *secondo la sua definizione.*

$$F(x) = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

Applichiamo il teorema della derivata del quoziente di funzioni.

$$F'(x) = \frac{-\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1+\cot^2 x) \ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\},\ k \in \mathbb{Z}$$

Esempio 11.12

Calcoliamo la derivata della funzione $y = \tanh x$.

Consideriamo la funzione $\tanh x$ *secondo la sua definizione.*

$$F(x) = \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

Applichiamo il teorema della derivata del quoziente di funzioni.

$$F'(x) = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x$$

Esempio 11.13

Calcoliamo la derivata della funzione $y = \coth x$.
Consideriamo la funzione $\cot x$ *secondo la sua definizione.*

$$F(x) = \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

Applichiamo il teorema della derivata del quoziente di funzioni.

$$F'(x) = \frac{\sin^2 x - \cosh^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x} = 1 - \coth^2 x$$

Teorema 11.19 (Derivata di una funzione composta)**.** *Sia* $y = f(x)$ *una funzione derivabile nel punto* x_0 *e sia* $z = g(y)$ *una funzione derivabile nel punto* $y_0 = f(x_0)$*. La funzione* $F(x) = g(f(x))$ *è derivabile nel punto* x_0 *e la sua derivata è* $F'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$*.*

Dimostrazione: Considero il rapporto incrementale della funzione composta.

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{h}$$

Poichè $y = f(x)$, allora $f(x+h) - f(x) = \Delta y$, da cui $f(x+h) = y + \Delta y$.
Sostituendo nel limite si ha:

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(y + \Delta y) - g(y)}{h}$$

Moltiplichiamo numeratore e denominatore per Δy:

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(y + \Delta y) - g(y)}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta y}{h}$$

Poiché $y = f(x)$ è derivabile e continua per ipotesi, si ha:

$$\lim_{h \to 0} \Delta y = \lim_{h \to 0} [f(x+h) - f(x)] = 0$$

Allora abbiamo che:

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(y + \Delta y) - g(y)}{\Delta y} \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

□

Esempio 11.14

$$F(x) = e^{\sin x}$$
$$F'(x) = e^{\sin x} \cos x \ \forall x \in \mathbb{R}$$

Teorema 11.20 (Derivata di una funzione inversa). *Sia $y = f(x)$ una funzione continua e invertibile in un intorno del punto x_0 e derivabile nel punto x_0, con $f'(x_0) \neq 0$. La funzione $x = f^{-1}(y)$ è derivabile nel punto $y_0 = f(x_0)$ e la sua derivata è $f'^{-1}(y) = \frac{1}{f'(x_0)}$.*

Corollario 11.1. *Se $f'(x_0) = 0$, la funzione $x = f^{-1}(y)$ non è derivabile nel punto $y_0 = f(x_0)$ e si ha un punto di flesso a tangente verticale.*

Teorema 11.21 (Derivata di una funzione inversa - variante). *Sia $y = f(x)$ una funzione continua e invertibile in un intorno del punto x_0. Se $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \pm\infty$, allora la funzione $x = f^{-1}(y)$ è derivabile nel punto $y_0 = f(x_0)$ e la sua derivata è nulla, avendo così un punto di flesso a tangente orizzontale.*

Esempio 11.15

$$y = \sin x$$
$$x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow x = \arcsin y$$
$$x' = \frac{1}{y'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \forall x \in [-1, 1]$$

Esempio 11.16

$$y = \cos x$$
$$x \in [0, \pi] \Rightarrow x = \arccos y$$
$$x' = \frac{1}{y'} = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \forall x \in [-1, 1]$$

Esempio 11.17

$$y = \tan x$$
$$x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow x = \arctan y$$
$$x' = \frac{1}{y'} = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Esempio 11.18

$$y = \cot x$$
$$x \in (0, \pi) \Rightarrow x = \operatorname{arccot} y$$
$$x' = \frac{1}{y'} = -\frac{1}{1+\cot^2 y} = -\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Esempio 11.19

$$y = \sinh x$$
$$x \in \mathbb{R} \Rightarrow x = \operatorname{settsinh} y$$
$$x' = \frac{1}{y'} = \frac{1}{\cosh y} = \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

Esempio 11.20

$$y = \cosh x$$
$$x \in \mathbb{R} \Rightarrow x = \operatorname{settcosh} y$$
$$x' = \frac{1}{y'} = \frac{1}{\sinh y} = \frac{1}{\sqrt{\cosh^2 y - 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

Esempio 11.21

$$y = \tanh x$$
$$x \in (-1,1) \Rightarrow x = \operatorname{setttanh} y$$
$$x' = \frac{1}{y'} = \frac{1}{1-\tanh^2 x} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

Esempio 11.22

$$y = \coth x$$
$$x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\} \Rightarrow x = \operatorname{settcoth} y$$
$$x' = \frac{1}{y'} = -\frac{1}{\frac{1}{\sinh^2 x}} = -\frac{1}{\coth^2 x - 1} = -\frac{1}{\sqrt{y^2-1}}$$

11.5 Teoremi sulle derivate

Enunciamo ora due teoremi riguardanti il **calcolo differenziale**, ovvero lo studio delle funzioni mediante l'uso della derivata: il *teorema di Lagrange* e il *teorema di De L'Hôpital*.
Questi teoremi forniranno strumenti importanti per lo studio delle funzioni a variabile reale.

Teorema 11.22 (Lagrange)**.** *Se $f(x)$ è una funzione continua nell'intervallo $[a,b]$ e derivabile nell'intervallo (a,b), allora esiste almeno un punto $c \in (a,b)$ per cui vale la relazione*

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

Diamo una interpretazione geometrica di questo teorema, come visibile in .Figura 11.3.
Essendo $y = f(x)$ derivabile nell'intervallo aperto $]a, b[$, in tutti i suoi punti la curva è dotata di retta tangente. Il teorema afferma che deve esserci almeno un punto c per il quale questa retta tangente è parallela ad AB.

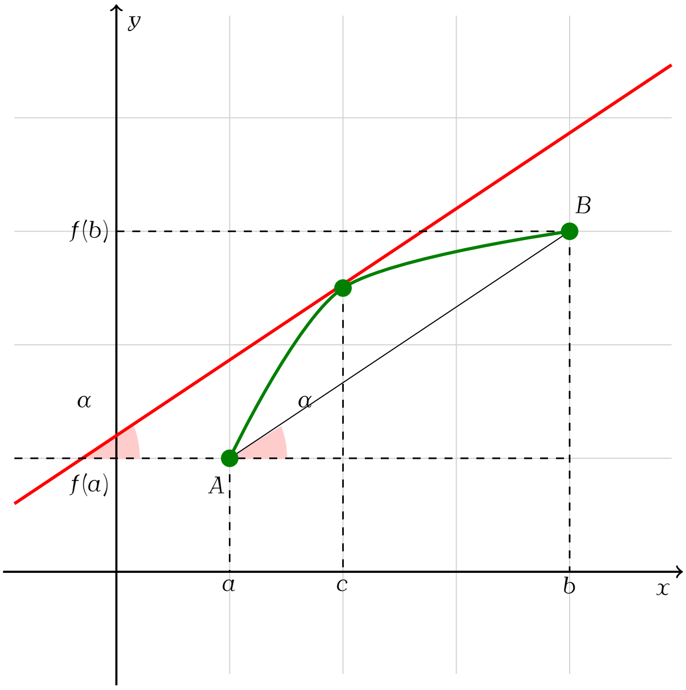


Figura 11.3: Teorema di Lagrange

Consideriamo infatti il triangolo rettangolo ABH; in esso $\tan\alpha = \frac{\overline{HB}}{\overline{AH}}$. Ma $\overline{HB} = f(b) - f(a)$ e $\overline{AH} = b - a$.
Inoltre, la retta tangente in c alla curva è parallela ad AB, quindi ha il medesimo coefficiente angolare, perciò $\tan\alpha = f'(c)$.
Sostituendo nella relazione precedente, otteniamo la tesi del teorema:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Esercizio 11.1

Dimostra che, per $x > 0$, si ha

$$\frac{1}{x+4} < \log\sqrt[3]{\frac{x+4}{x+1}} < \frac{1}{x+1}$$

Applico le proprietà dei logaritmi.

$$\frac{1}{x+4} < \frac{1}{3}\log\left(\frac{x+4}{x+1}\right) < \frac{1}{x+1}$$
$$\frac{3}{x+4} < \log\left(\frac{x+4}{x+1}\right) < \frac{3}{x+1}$$
$$\frac{3}{x+4} < \log(x+4) - \log(x+1) < \frac{3}{x+1}$$

Poniamo $\log(x+4) - \log(x-1) = \log t \in [x+1, x+4]$ *e sfruttiamo il teorema di Lagrange:*

$$\frac{\log(x+4) - \log(x+1)}{x+4-x-1} = \frac{1}{c}$$
$$\log(x+4) - \log(x+1) = \frac{3}{c} \quad (x+1 < c < x+4)$$
$$c = \frac{3}{\log(x+4) - \log(x+1)}$$

Teorema 11.23 (De L'Hôpital). *Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni derivabili in un intorno bucato di λ e siano degli infinitesimi o degli infiniti per $x \to \lambda$ (cioè $\lim_{x\to\lambda}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0} \vee \frac{\infty}{\infty}$). Se $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ è una funzione regolare per $x \to \lambda$ e se $g'(x) \neq 0$ nell'intorno bucato di λ, allora*

$$\lim_{x\to\lambda}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\lambda}\frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{11.4}$$

Esempio 11.23

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{\log(1+x)} = \frac{0}{0}$$

Provo ad applicare il teorema di De L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}}{\frac{1}{1+x}} = \nexists$$

Applico quindi il teorema del confronto:

$$-\frac{x^2}{\log(1+x)} < \frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\log(1+x)} < \frac{x^2}{\log(1+x)} \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\log(1+x)} = 0$$

In pratica, il teorema di De L'Hôpital è un metodo per risolvere i limiti che si presentano sotto la forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$.
Questa regola, però, può essere applicata anche per risolvere tutte le altre forme indeterminate, purche si riesca a trasformarle in una delle due richieste.

Esistono altri due teoremi utili per lo studio di funzioni.

Teorema 11.24 (Rolle). *Se, per una funzione $f(x)$ continua nell'intervallo $[a,b]$ e derivabile nei punti interni di questo intervallo, si ha la condizione $f(a) = f(b)$, allora esiste almeno un punto $c \in [a,b]$ per il quale risulta $f'(c) = 0$.*

Teorema 11.25 (Cauchy). *Se le funzioni $f(x)$ e $g(x)$ sono continue nell'intervallo $[a,b]$, derivabili in ogni punto interno a questo intervallo, e se nell'intervallo (a,b) è sempre vero che $g'(x) \neq 0$, allora esiste almeno un punto interno c interno all'intervallo $[a,b]$ in cui si ha*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

cioè il rapporto fra gli incremento delle funzioni $f(x)$ e $g(x)$ nell'intervallo $[a,b]$ è uguale al rapporto fra le rispettive derivate calcolate in un particolare punto $c \in [a,b]$.

Dimostrazione: Si consideri la funzione $h(t)$ di variabile reale definita nell'intervallo $[a,b]$ come

$$h(t) = [f(b) - f(a)]g(t) - [g(b) - g(a)]f(t)$$

Questa funzione è continua nell'intervallo $[a,b]$ e derivabile in (a,b), per cui si ha:

$$\begin{gathered} h(a) = [f(b) - f(a)]g(a) - [g(b) - g(a)]f(a) = \\ = f(b)g(a) - f(a)g(a) - f(a)g(b) + f(a)g(a) = f(b)g(a) - f(a)g(b) \\ h(b) = [f(b) - f(a)]g(b) - [g(b) - g(a)]f(b) = \\ = f(b)g(b) - f(a)g(b) - f(b)g(b) + f(b)g(a) = -f(a)g(b) + f(b)g(a) \end{gathered}$$

Da cui $h(a) = h(b)$.
La funzione $h(t)$ soddisfa quindi le ipotesi del teorema di Rolle, per cui esiste un punto $c \in (a,b)$ in cui $h'(c) = 0$, cioè

$$[f(b) - f(a)]g'(c) - [g(b) - g(a)]f'(c) = 0$$

□

11.6 Esercizi

Vediamo ora qualche esercizio simile a quelli d'esame.

Esercizio 11.2

Determina il valore di $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x^2-2x+3|+|\log(-x)|}{|x+1|}, & \text{per } x \in [(-3,-1) \cup (-1,0)] \\ \alpha, \ \text{per } x = -1 \end{cases}$$

sia una funzione continua e derivabile nell'intervallo $(-3,0)$.

Riscriviamo la funzione, eliminando i valori assoluti:

$$|x^2-2x+3| = \begin{cases} x^2-2x+3, & per\ x \in (-3,-1) \\ -x^2+2x-3, & per\ x \in (-1,0) \end{cases}$$

$$|\log(-x)| = \begin{cases} \log(-x), & per\ x \in (-3,-1) \\ -\log(-x), & per\ x \in (-1,0) \end{cases}$$

$$|x+1| = \begin{cases} x+1, & per\ x \in (-1,0) \\ -x-1, & per\ x \in (-3,-1) \end{cases}$$

Quindi la funzione è

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-2x+3+\log(-x)}{-x-1}, & per\ x \in (-3,-1) \\ \frac{-x^2+2x-3-\log(-x)}{x+1}, & per\ x \in (-1,0) \\ \alpha,\ per\ x = -1 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \frac{-x^2+2x-3-\log(-x)}{x+1}, & per\ x \in\in [(-3,-1) \cup (-1,0)] \\ \alpha,\ per\ x = -1 \end{cases}$$

Per determinare il valore di α per cui la funzione è continua, applico il teorema di De L'Hôpital:

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{-2x+2-\frac{1}{x}}{1} \Rightarrow \lim_{x\to-1} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 5$$

Quindi $f(x)$ è continua in $x_0 = -1$ se $\alpha = 5$.
Nell'intervallo $(-3,-1)\cup(-1,0)$, la funzione $\frac{-x^2+2x-3-\log(-x)}{x+1}$, in base ai teoremi sulla derivabilità, è derivabile; la sua derivata è:

$$f'(x) = \frac{\left(-2x+2-\frac{1}{x}\right)(x-1)-(-x^2+2x-3-\log(-x))}{(x+1)^2} =$$

$$= \frac{-2x^2-1-\frac{1}{x}+x^2-2x-x+\log(-x)}{(x+1)^2} =$$

$$= \frac{-x^2-2x-2-\frac{1}{x}+\log(-x)}{(x+1)^2}$$

Per verificare se è derivabile in $x = -1$ e il valore della derivata, applico il teorema di De L'Hôpital:

$$\lim_{x\to-1} \frac{-x^2-2x-2-\frac{1}{x}+\log(-x)}{(x+1)^2} = \frac{0}{0}$$

$$\frac{f'(x)}{g'(x)}:\ \lim_{x\to-1} \frac{-2x-2+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}}{2(x+1)} = \frac{0}{0}$$

$$\frac{f''(x)}{g''(x)}:\ \lim_{x\to-1} \frac{-2-\frac{2}{x^3}-\frac{1}{x^2}}{2} = -\frac{1}{2}$$

Quindi $f(x)$ è derivabile in $x = -1$ e $f'(-1) = -\frac{1}{2}$.

Esercizio 11.3

Studia la derivabilità, nel suo dominio, della funzione

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{per } x \geq 0 \\ x-1, & \text{per } x < 0 \end{cases}$$

$x > 0$: $f(x) = x + 1 \Rightarrow \exists f'(x) \in (0, +\infty) \Rightarrow f'(x) = 1 \ \forall x > 0$
$x < 0$: $f(x) = x - 1 \Rightarrow \exists f'(x) \in (-\infty, 0) \Rightarrow f'(x) = 1 \ \forall x < 0$
$x = 0$: $\nexists f'(x)$

Esercizio 11.4

Verifica se, nel punto di ascissa $x = 0$, è derivabile la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{per } x \neq 0 \\ 0, & \text{per } x = 0 \end{cases}$$

Inizio verificando la continuità:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \left(x^2 \sin \frac{1}{x} \right) = 0 = f(0)$$

La funzione, dunque, è continua anche per $x = 0$, ma è derivabile solamente in un intorno bucato di $x = 0$. Infatti, in questo intorno, la derivata è $f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}$.
Per verificare se è derivabile anche nel punto $x = 0$ non è possibile applicare il teorema di De L'Hôpital, in quanto è una funzione formata da funzioni irregolari; per determinare la derivabilità, sfrutto il limite del rapporto incrementale.

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 \sin \frac{1}{h}}{h} = 0$$

La funzione è derivabile anche in $x = 0$ e $f'(0) = 0$.

11.7 Infiniti e infinitesimi

Per completezza, diamo la funzione di funzione *infinitesimo* e *infinito*.

Definizione 11.3 (Infinitesimo)**.** Una funzione $f(x)$ si dice **infinitesimo** per $x \to \lambda$ quando $\lim_{x \to \lambda} f(x) = 0$.

Definizione 11.4 (Infinito)**.** Una funzione $f(x)$ si dice **infinito** per $x \to \lambda$ quando $\lim_{x \to \lambda} f(x) = \pm\infty$.

Capitolo 12

Lo studio di funzione

Completiamo il discorso sullo studio del grafico di una funzione definendo particolari punti e particolari condizioni per la funzione.
Si parla, infatti, di **studio di funzione** per indicare una serie di analisi che permettono, partendo dal dominio e arrivando allo studio della derivata seconda, a tracciare in maniera qualitativa il grafico della funzione a variabile reale. Queste analisi consistono nei seguenti punti.

1. Valutare il **dominio** della funzione.

2. Identificare **simmetrie** e **periodicità** della funzione.

3. Calcolare le coordinate degli eventuali **punti di intersezione** del grafico con gli assi cartesiani.

4. Valutare il **segno della funzione**, cioè gli intervalli in cui la funzione è positiva ($f(x) > 0$).

5. Analizzare il **comportamento** della funzione **agli estremi del dominio**, tramite limiti, asintoti e punti di discontinuità.

6. Determinare la **derivata prima** della funzione e studiarla per trovare le zone in cui è crescente/decrescente, i punti di massimo/minimo relativo, eventuali flessi orizzontali e punti di non derivabilità.

7. Determinare la **derivata seconda** della funzione e studiare il suo segno, per individuare la concavità/convessità ed eventuale punti di flesso a tantente obliqua.

12.1 Punti di non derivabilità

Teorema 12.1. *Sia $f(x)$ una funzione continua in un intorno del punto x_0 e derivabile in un intorno bucato dello stesso punto. Se $\lim_{x \to x_0^+} f'(x) = l$ e $\lim_{x \to x_0^-} f'(x) = \Lambda$ (con $\Lambda = \{\pm\infty, m \neq l\}$), allora la funzione non è derivabile nel punto, e x_0 si dice **punto angoloso** della funzione (Figura 12.1).*

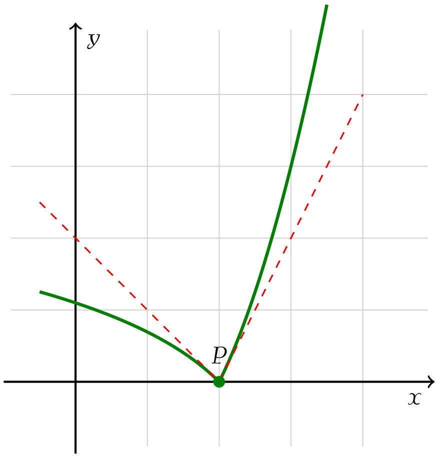
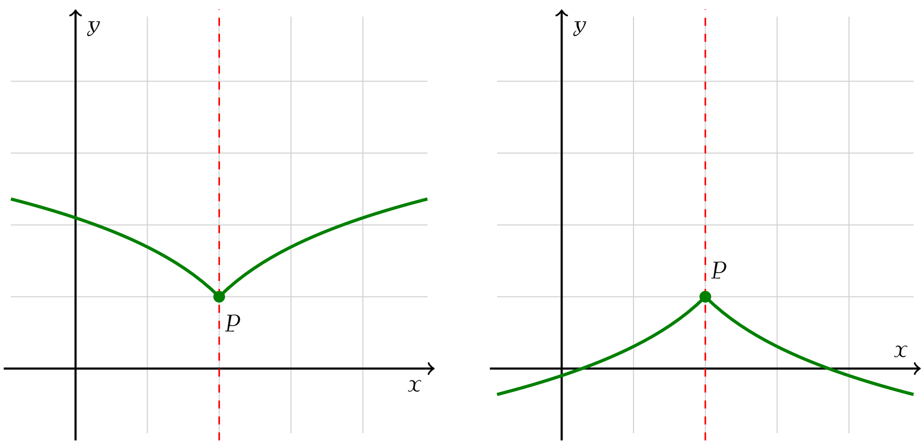


Figura 12.1: Punto angoloso

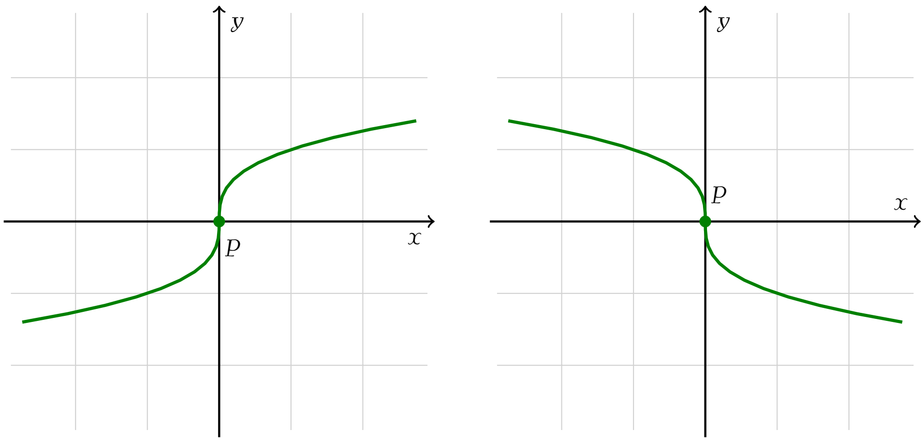
Teorema 12.2. *Sia $f(x)$ una funzione continua in un intorno del punto x_0 e derivabile in un intorno bucato dello stesso punto. Se $\lim_{x \to x_0^+} f'(x) = \pm\infty$ e $\lim_{x \to x_0^-} f'(x) = \mp\infty$, allora la funzione non è derivabile nel punto, e x_0 si dice* ***cuspide*** *della funzione (Figura 12.2).*
In particolare, se $\lim_{x \to x_0^+} f'(x) = -\infty$ e $\lim_{x \to x_0^-} f'(x) = +\infty$ abbiamo una ***cuspide rivolta verso il basso****, mentre se $\lim_{x \to x_0^+} f'(x) = +\infty$ e $\lim_{x \to x_0^-} f'(x) = -\infty$ abbiamo una* ***cuspide rivolta verso l'alto****.*



(a) Cuspide verso il basso (b) Cuspide verso l'alto

Figura 12.2: Punto di cuspide

Teorema 12.3. *Sia $f(x)$ una funzione continua in un intorno del punto x_0 e derivabile in un intorno bucato dello stesso punto. Se $\lim_{x \to x_0} f'(x) = \pm\infty$, allora la funzione non è derivabile nel punto, e x_0 si dice* ***punto di flesso a tangente verticale*** *della funzione (Figura 12.3).*
In particolare, se $\lim_{x \to x_0} f'(x) = +\infty$ abbiamo un ***punto di flesso ascendente****, mentre se $\lim_{x \to x_0} f'(x) = -\infty$ abbiamo un* ***punto di flesso discendente****.*



(a) Flesso verticale ascendente (b) Flesso verticale discendente

Figura 12.3: Punto di flesso a tangente verticale

Come abbiamo già notato, se una funzione è costante nel suo dominio, allora la sua derivata è nulla in tutto il dominio, ma non possiamo affermare con certezza il contrario. Ciò è affermato da un teorema, che non enunciamo.

12.2 Punti di massimo e di minimo

Vediamo ora la definizione di altri particolari punti del grafico, determinabili tramite lo studio della derivata: i punti di *massimo* e di *minimo*.

Definizione 12.1 (Massimo relativo)**.** Data una funzione $f(x)$ definita in un dominio $D \in \mathbb{R}$, il punto $x_0 \in D$ si definisce **punto di massimo relativo** se esiste un intorno del punto x_0 tale che $f(x_0) \geq f(x)$ per ogni intorno possibile di x_0 (Figura 12.4).

Definizione 12.2 (Minimo relativo)**.** Data una funzione $f(x)$ definita in un dominio $D \in \mathbb{R}$, il punto x_0 si definisce **punto di minimo relativo** se esiste un intorno del punto x_0 tale che $f(x_0) \leq f(x)$ per ogni intorno possibile di x_0 (Figura 12.5).

Per completezza, forniamo anche la definizione di *massimo assoluto* e *minimo assoluto*.

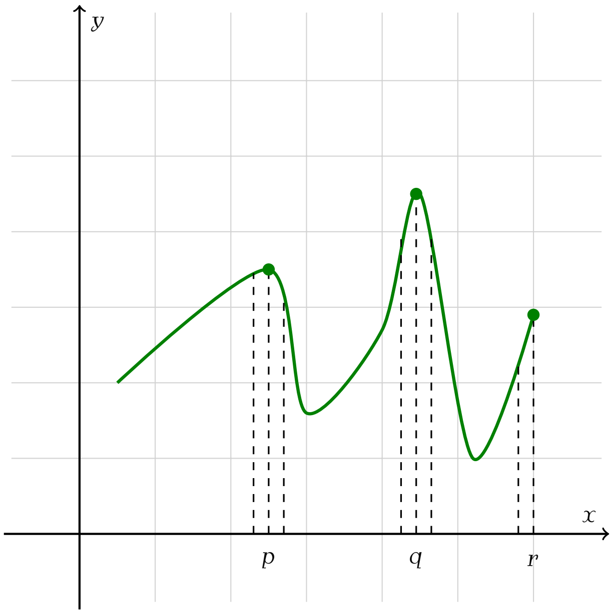


Figura 12.4: Punti di massimo relativo

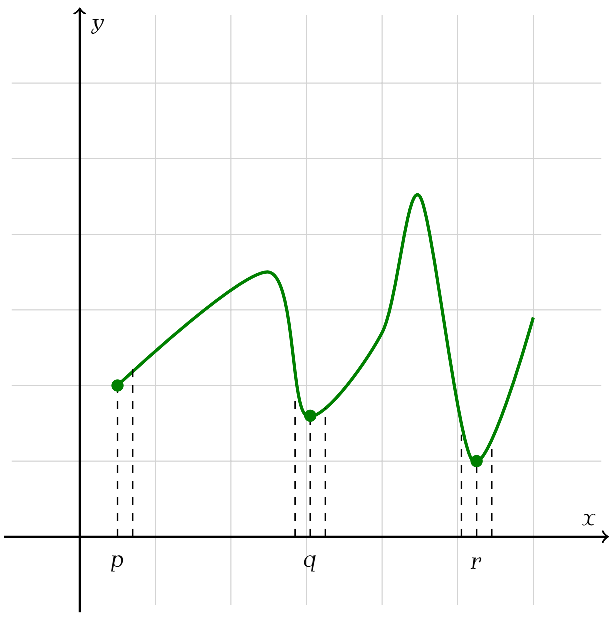


Figura 12.5: Punti di minimo relativo

Definizione 12.3 (Massimo assoluto)**.** Data una funzione $f(x)$ definita in un intervallo $I \in D \subset \mathbb{R}$, il punto $x_0 \in D$ si definisce **punto di massimo assoluto** se è il massimo dei valori assunti dalla funzione nell'intervallo, cioè è il massimo tra i punti di massimo relativo.

Definizione 12.4 (Minimo assoluto)**.** Data una funzione $f(x)$ definita in un intervallo $I \in D \subset \mathbb{R}$, il punto x_0 si definisce **punto di minimo assoluto** se è il minimo dei valori assunti dalla funzione nell'intervallo, cioè se è il minimo tra i punti di minimo relativo.

É possibile determinare i punti di massimo e di minimo relativo in un grafico usando lo studio delle derivate della funzione.

Teorema 12.4 (di Fermat (condizione necessaria per i punti di estremo relativo))**.** *Sia $f\colon D \to C$ una funzione definita nel dominio $D \in \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in D^\circ$ un punto di estremo relativo per la funzione. Se la funzione è derivabile nel punto x_0, allora $f'(x_0) = 0$.*

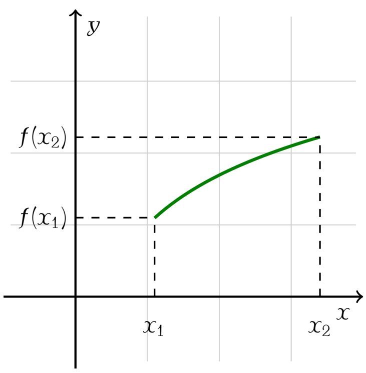
I punti identificati tramite il teorema di Fermat vengono denominati **punti stazionari**.

Teorema 12.5 ((condizione sufficiente per i punti di estremo relativo))**.** *Sia $f(x)$ una funzione continua in un intorno completo del punto x_0 e derivabile in un intorno bucato di x_0.*
Se, per ogni x appartenente all'intorno, si ha $f'(x) > 0$ quando $x < x_0$ e $f'(x) < 0$ quando $x > x_0$, allora il punto x_0 è di massimo relativo.
Se, per ogni x appartenente all'intorno, si ha $f'(x) < 0$ quando $x < x_0$ e $f'(x) > 0$ quando $x > x_0$, allora il punto x_0 è di minimo relativo.

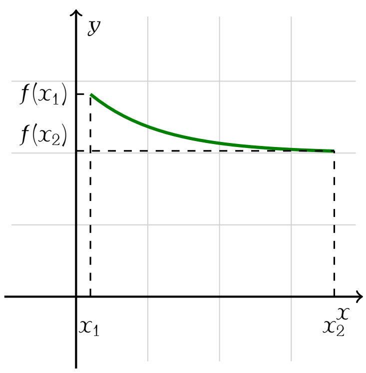
Funzione crescente e descrescente

Collegato ai concetti di minimo e di massimo relativo ci sono i concetti di funzione *crescente* e *decrescente*.

Corollario 12.1 (del Teorema di Lagrange (condizione sufficiente per la crescenza di una funzione))**.** *Sia $f(x)$ una funzione continua in un intervallo I e derivabile in I°. Se $f'(x) > 0$ in tutto l'intervallo, allora la funzione si dice **strettamente crescente** nell'intervallo; se $f'(x) < 0$ in tutto l'intervallo, allora la funzione si dice **strettamente decrescente** nell'intervallo. (vedi Figura 12.6)*



(a) Funzione crescente



(b) Funzione decrescente

Figura 12.6: Funzione crescente e decrescente

Vediamo ora qualche esempio su come applicare i teoremi visti sui massimi e sui minimi.

Esempio 12.1

Determina l'estremo inferiore e superiore della funzione

$$f(x) = e^{3-2x}(|x^2 - 2| + x)$$

Inizio riscrivendo la funzione.

$$f(x) = \begin{cases} e^{3-2x}(x^2 + x - 2), & \text{se } x \in (-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, +\infty) \\ e^{3-2x}(-x^2 + x + 2), & \text{se } x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \end{cases}$$

La funzione, per i teoremi sulla derivabilità, è derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$ ed è continua in $\mathbb{R}$.
La derivata prima della funzione, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$, è:

$$f'(x) =$$

$$\begin{cases} -2e^{3-2x}(x^2 + x - 2) + e^{3-2x}(2x + 1), & \text{se } x \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty) \\ -2e^{3-2x}(-x^2 + x + 2) + e^{3-2x}(1 - 2x), & \text{se } x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} e^{3-2x}(5 - 2x^2), & \text{se } x \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty) \\ e^{3-2x}(2x^2 - 4x - 3), & \text{se } x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \end{cases}$$

Verifico ora che $-\sqrt{2}$ e $\sqrt{2}$ non sono punti di derivabilità.

$$\lim_{x \to -\sqrt{2}^-} f'(x) = \lim_{x \to -\sqrt{2}^-} [e^{3-2x}(5 - 2x^2)] = e^{3+2\sqrt{2}}$$
$$\lim_{x \to -\sqrt{2}^+} f'(x) = \lim_{x \to -\sqrt{2}^+} [e^{3-2x}(2x^2 - 4x - 3)] = (1 + 4\sqrt{2})e^{3+2\sqrt{2}}$$
$$\lim_{x \to \sqrt{2}^-} f'(x) = \lim_{x \to \sqrt{2}^-} [e^{3-2x}(5 - 2x^2)] = e^{3-2\sqrt{2}}$$
$$\lim_{x \to \sqrt{2}^+} f'(x) = \lim_{x \to \sqrt{2}^+} [e^{3-2x}(2x^2 - 4x - 3)] = (1 - 4\sqrt{2})e^{3-2\sqrt{2}}$$

Poichè i limiti destro e sinistro per i due punti indicati non coincidono, non sono punti di derivabilità.

Applico ora il teorema di Fermat nell'intervallo $I_1 = (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$:

$$\forall x \in I_1 \; f'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x^2 + 5 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{5}{2}} \in I_1$$

Effettuando lo studio del segno nell'intervallo I_1

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{5}{2}}$		$\sqrt{\frac{5}{2}}$		$+\infty$
I_1		$+$	0	$-$	0	$+$	
		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

possiamo affermare che $x = -\sqrt{\frac{5}{2}}$ *è un punto di minimo relativo per la funzione, mentre* $x = \sqrt{\frac{5}{2}}$ *è un punto di massimo relativo.*
Applico ora il teorema di Fermat nell'intervallo $I_2 = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$*:*

$$\forall x \in I_2 \; f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 4x - 3 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = 1 \pm \frac{\sqrt{10}}{2} \in I_2$$
$$1 - \frac{\sqrt{10}}{2} \in I_2, 1 + \frac{\sqrt{10}}{2} \notin I_2$$

Effettuando lo studio del segno nell'intervallo I_2

x	$-\infty$		$1-\frac{\sqrt{10}}{2}$		$1+\frac{\sqrt{10}}{2}$		$+\infty$
I_2		$+$	0	$-$		$+$	
		$\nearrow$		$\searrow$	$\nexists$	$\nearrow$	

Possiamo affermare che $x = 1 - \frac{\sqrt{10}}{2}$ *è un punto di massimo relativo per la funzione.*
Verifico ora se $-\sqrt{2}$ *e* $\sqrt{2}$ *sono punti estremanti per la funzione, studiando il segno della derivata.*

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{5}{2}}$		$-\sqrt{2}$		$1-\frac{\sqrt{10}}{2}$		$\sqrt{2}$		$\sqrt{\frac{5}{2}}$		$1+\frac{\sqrt{10}}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	$\nexists$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Nel punto $x = -\sqrt{2}$ *la funzione è localmente crescente, quindi non è un estremo.*
Nel punto $x = \sqrt{2}$*, invece, la funzione localmente cambia segno, quindi è un punto di minimo relativo.*

Esempio 12.2

Tracciare il grafico della funzione

$$f(x)\frac{3 + |5 - x|}{|x| + 2}$$

Inizio riscrivendo la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{8-x}{x+2}, & \text{se } x \leq 5 \wedge x \geq 0 \\ \frac{x-2}{x+2}, & \text{se } x > 5 \wedge x \geq 0 \\ \frac{8-x}{2-x}, & \text{se } x \leq 5 \wedge x < 0 \\ \frac{x-2}{2-x}, & \text{se } x > 5 \wedge x < 0 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \frac{8-x}{x+2}, & \text{se } x \in [0,5] \\ \frac{x-8}{x-2}, & \text{se } x \in (-\infty,0) \\ \frac{x-2}{x+2}, & \text{se } x(5,+\infty) \end{cases}$$

La funzione è positiva $\forall x \in \mathbb{R}$*; inoltre, non possiede alcuna simmetria.*

Vediamo ora l'andamento della funzione agli estremi del dominio.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x-2}{x+2} = 1$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x-8}{x-2} = 1$$

Otteniamo quindi che la funzione $y = 1$ *è asintoto orizzontale per la funzione* $f(x)$*, la quale non ha asintoti verticali.*

Studio ora la derivata prima, poichè $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0,5\}$ *la funzione è derivabile.*

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{10}{(x+2)^2}, & \text{se } x \in (0,5) \\ \frac{6}{(x-2)^2}, & \text{se } x \in (-\infty,0) \\ \frac{4}{(x+2)^2}, & \text{se } x \in (5,\infty) \end{cases}$$

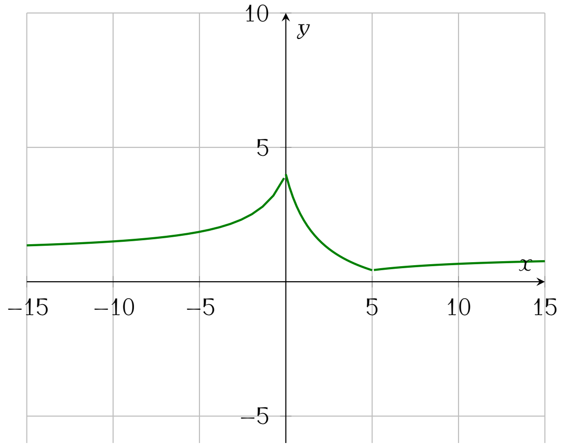
Verifico ora se $x = 0$ *e* $x = 5$ *sono punti di derivabilità.*

$$\lim_{x\to0^-} f'(x) = \lim_{x\to0^-} \frac{6}{(x-2)^2} = \frac{3}{2}$$
$$\lim_{x\to0^+} f'(x) = \lim_{x\to0^+} \left[-\frac{10}{(x+2)^2}\right] = -\frac{5}{2}$$
$$\lim_{x\to5^-} = \lim_{x\to5^-} \left[-\frac{10}{(x+2)^2}\right] = -\frac{10}{49}$$
$$\lim_{x\to5^+} = \lim_{x\to5^+} \frac{4}{(x+2)^2} = \frac{4}{49}$$

Poichè i limiti destro e sinistro per i due punti non coincidono, non sono punti di derivabilità ma punti angolosi.
Abbiamo quindi che

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{10}{(x+2)^2} < 0, & \text{se } x \in (0,5) \\ \frac{6}{(x-2)^2} > 0, & \text{se } x \in (-\infty,0) \\ \frac{4}{(x+2)^2} > 0, & \text{se } x \in (5,\infty) \end{cases}$$

Il grafico è il seguente:



12.3 Funzione concava e convessa

Vediamo un altra caratteristica del grafico di una funzione: la *concavità*.

Definizione 12.5 (Funzione convessa)**.** Sia $f(x)$ una funzione derivabile in un intervallo I. Si dice che il grafico della funzione è **convesso** (*ha la concavità rivolta verso l'alto*) se $\forall x, x_0 \in I$ si ha che la funzione si trovi sopra o coincida con la tangente alla funzione nel punto x_0 ($f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, Figura 12.7).

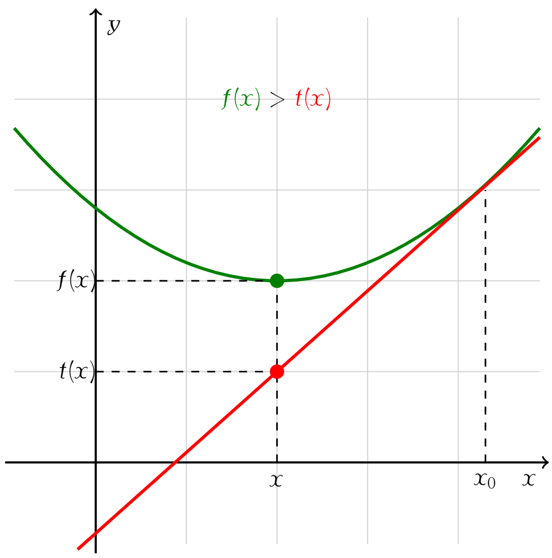


Figura 12.7: Funzione convessa

Definizione 12.6 (Funzione concava)**.** Sia $f(x)$ una funzione derivabile in un intervallo I. Si dice che il grafico della funzione è **concavo** (*ha la concavità rivolta verso il basso*) se $\forall x, x_0 \in I$ si ha che la funzione si trovi sotto o coincida con la tangente alla funzione nel punto x_0 ($f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, Figura 12.8).

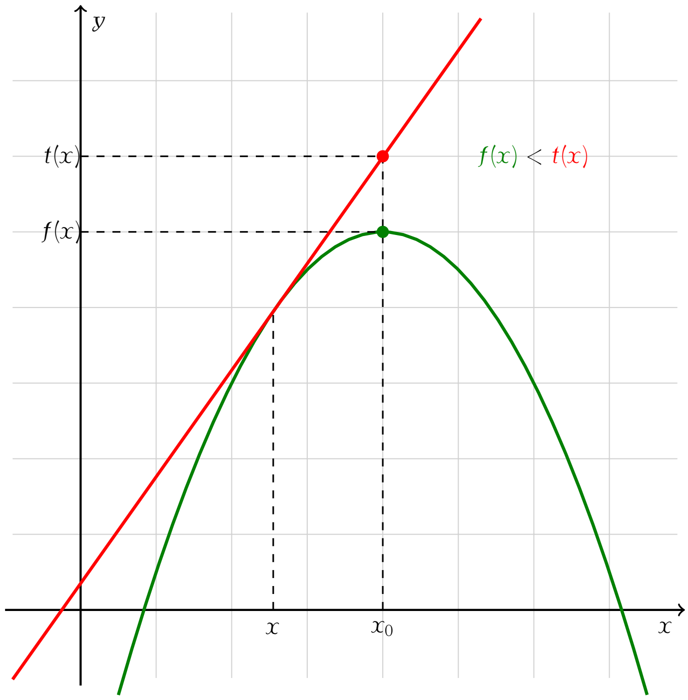


Figura 12.8: Funzione concava

Punti di flesso

Correlata al concetto di concavità c'è la nozione di *punto di flesso*.

Definizione 12.7 (Punto di flesso)**.** Sia $f(x)$ una funzione continua e derivabile in un intorno circolare del punto x_0. Si dice che x_0 è un **punto di flesso** per la funzione f se il grafico della funzione, in questo punto, cambia la sua concavità (Figura 12.9).

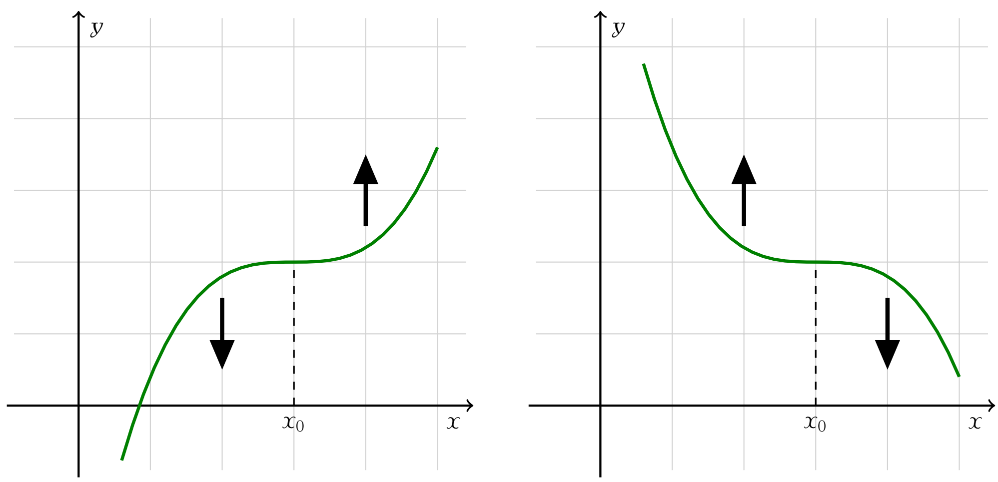


Figura 12.9: Punto di flesso

Vediamo ora come determinare i punti di flesso e la concavità di una funzione.

Teorema 12.6 (condizione necessaria per i punti di flesso). *Sia $f(x)$ una funzione continua e derivabile (almeno) fino al secondo ordine in un intorno completo del punto x_0. Se x_0 è un punto di flesso per la funzione, si ha che:*

- *il segno della derivata prima non cambia nell'intorno bucato di x_0;*
- *la derivata seconda si annulla nel punto ($f''(x_0) = 0$).*

Teorema 12.7. *Sia $f(x)$ una funzione continua e derivabile (almeno) fino al secondo ordine in un intorno completo del punto x_0.*
Se, per ogni x appartenente all'intorno, si ha che $f''(x_0) > 0$, allora la funzione è convessa nell'intorno.
Se, per ogni x appartenente all'intorno, si ha che $f''(x_0) < 0$, allora la funzione è concava nell'intorno.

Teorema 12.8. *Sia $f(x)$ una funzione continua in un intorno completo del punto x_0 e derivabile (almeno) fino al secondo ordine in un intorno bucato del punto x_0.*
Se, per ogni x appartenente all'intorno bucato, si ha che $f''(x_0) > 0$ per $x < x_0$ e $f''(x_0) < 0$ per $x > x_0$, oppure $f''(x_0) < 0$ per $x < x_0$ e $f''(x_0) > 0$ per $x > x_0$, allora il punto x_0 è un punto di flesso per la funzione f.

Appendice C

Logaritmi e goniometria

Per completezza, ricapitoliamo le proprietà della funzione logaritmica e delle funzioni goniometriche, con le relative proprietà trigonometriche.

C.1 Proprietà dei logaritmi

Definizione C.1 (Logaritmo in base a di b)**.** Dati due numeri $a, b \in \mathbb{R}^+$, con $a \neq 1$, si definisce come **logaritmo in base a di b** (detto **argomento**) l'esponente x da assegnare alla base a per ottenere il numero b.

$$x = \log_a b \Leftrightarrow a^x = b$$

Dalla definizione possiamo determinare che:

- $\log_a 1 = 0$, perché $a^0 = 1$;
- $\log_a a = 1$, perché $a^1 = a$;
- $a^{\log_a b} = b$, perché $\log_a b$ è l'esponente a cui elevare a per ottenere b.

Teorema C.1 (Logaritmo di un prodotto)**.** *Il logaritmo del prodotto di due numeri positivi è uguale alla* somma *dei logaritmi dei singoli fattori.*

$$\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$$

Dimostrazione: Siano $x = \log_a b$ e $y = \log_a c$, per cui $a^x = b$ e $a^y = c$.
Con queste assunzioni, abbiamo:

$$\begin{aligned} a^x \cdot a^y &= b \cdot c \\ a^{x+y} &= b \cdot c \\ x + y &= \log_a(b \cdot c) \\ \log_a b + \log_a c &= \log_a(b \cdot c) \end{aligned}$$

□

Teorema C.2 (Logaritmo di un quoziente)**.** *Il logaritmo del quoziente di due numeri positivi è uguale alla* differenza *fra il logaritmo del dividendo e il logaritmo del divisore.*

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$$

Dimostrazione: Siano $x = \log_a b$ e $y = \log_a c$, per cui $a^x = b$ e $a^y = c$.
Con queste assunzioni, abbiamo:

$$\begin{aligned} \frac{a^x}{a^y} &= \frac{b}{c} \\ a^{x-y} &= \frac{b}{c} \\ x - y &= \log_a \frac{b}{c} \\ \log_a b - \log_a c &= \log_a \frac{b}{c} \end{aligned}$$

□

Teorema C.3 (Logaritmo di una potenza)**.** *Il logaritmo della potenza di un numero positivo elevato ad un esponente reale è uguale al* prodotto *di tale esponente per il logaritmo di quel numero positivo.*

$$\log_a b^n = n \cdot \log_a b$$

Dimostrazione: Sia $x = \log_a b$, per cui $a^x = b$.
Con queste assunzioni, abbiamo:

$$\begin{aligned} (a^x)^n &= b^n \\ a^{nx} &= b^n \\ nx &= \log_a b^n \\ n \log_a b &= \log_a b^n \end{aligned}$$

□

Definizione C.2 (Cambiamento di base nei logaritmi)**.**

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \qquad (a, b, c \in \mathbb{R}^+, a, c \neq 1)$$

C.2 Goniometria

La **goniometria** è la branca della matematica che si occupa della misura degli angoli e delle relative funzioni. Gli angoli possono essere misurati in **gradi sessagesimali** (ovvero $\frac{1}{360}$ di un angolo giro) o in **radianti**.
Per definirlo, consideriamo due circonferenze di raggi r e r' e i due archi l e l', sottesi da angoli al centro della stessa ampiezza a, sulle due circonferenze (Figura C.1).

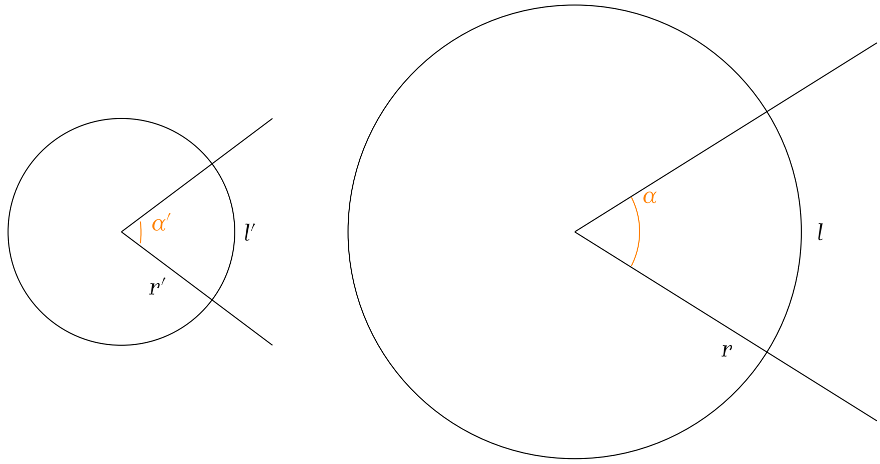


Figura C.1: Radiante

Definizione C.3 (Radiante)**.** Data una circonferenza, si chiama **radiante** l'angolo al centro che sottende un arco di lunghezza uguale al raggio.

Conoscendo la misura di un angolo α in gradi sessagesimali o in radianti, si può conoscere la misura nell'altra unità di misura.

$$\alpha^\circ = \alpha_{\text{rad}} \cdot \frac{180^\circ}{\pi}$$
$$\alpha_{\text{rad}} = \alpha^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}$$

Al concetto di angolo viene associato anche il concetto di *rotazione*, cioè il movimento, in senso orario o antoriario, che porta uno dei lati dell'angolo a sovrapposi all'altro; in questo modo si riesce a definire l'**angolo orientato**, che può essere maggiore anche di un angolo giro.

Relazioni fondamentali

Assioma C.1 (*Prima relazione fondamentale della goniometria*)

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

Assioma C.2 (*Seconda relazione fondamentale della goniometria*)

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

Gli angoli associati

Dato un angolo α, si definisce **angolo associato ad** α uno dei seguenti angoli:

- $-\alpha$

- $\frac{\pi}{2} - \alpha$
- $\frac{\pi}{2} + \alpha$
- $\pi - \alpha$
- $\pi + \alpha$
- $\frac{3}{2}\pi - \alpha$
- $\frac{3}{2}\pi + \alpha$
- $2\pi - \alpha$

Assioma C.3 (***Angoli opposti***)

$$\begin{aligned} \sin(-\alpha) &= -\sin\alpha \\ \cos(-\alpha) &= \cos\alpha \\ \tan(-\alpha) &= -\tan\alpha \\ \cot(-\alpha) &= -\cot\alpha \end{aligned}$$

Assioma C.4 (***Angoli esplementari***)

$$\begin{aligned} \sin(2\pi - \alpha) &= -\sin\alpha \\ \cos(2\pi - \alpha) &= \cos\alpha \\ \tan(2\pi - \alpha) &= -\tan\alpha \\ \cot(2\pi - \alpha) &= -\cot\alpha \end{aligned}$$

Assioma C.5 (***Angoli supplementari***)

$$\begin{aligned} \sin(\pi - \alpha) &= \sin\alpha \\ \cos(\pi - \alpha) &= -\cos\alpha \\ \tan(\pi - \alpha) &= -\tan\alpha \\ \cot(\pi - \alpha) &= -\cot\alpha \end{aligned}$$

Assioma C.6 (*Angoli complementari*)

$$\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos\alpha$$
$$\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin\alpha$$
$$\tan(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cot\alpha$$
$$\cot(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \tan\alpha$$

Assioma C.7 (*Angoli che differiscono di un angolo piatto*)

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$$
$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$$
$$\tan(\pi + \alpha) = \tan\alpha$$
$$\cot(\pi + \alpha) = \cot\alpha$$

Assioma C.8 (*Angoli che differiscono di un angolo retto*)

$$\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \cos\alpha$$
$$\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\sin\alpha$$
$$\tan(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\cot\alpha$$
$$\cot(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\tan\alpha$$

Assioma C.9 (*Angoli la cui somma è* $\frac{3}{2}\pi$)

$$\sin(\frac{3}{2}\pi - \alpha) = -\cos\alpha$$
$$\cos(\frac{3}{2}\pi - \alpha) = -\sin\alpha$$
$$\tan(\frac{3}{2}\pi - \alpha) = \cot\alpha$$
$$\cot(\frac{3}{2}\pi - \alpha) = \tan\alpha$$

Assioma C.10 (*Angoli la cui differenza è $\frac{3}{2}\pi$*)

$$\sin(\frac{3}{2}\pi + \alpha) = -\cos\alpha$$
$$\cos(\frac{3}{2}\pi + \alpha) = \sin\alpha$$
$$\tan(\frac{3}{2}\pi + \alpha) = -\cot\alpha$$

Le formule di addizione e sottrazione

Assioma C.11 (*Formule di addizione e sottrazione*)

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha + \beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \\
\sin(\alpha - \beta) &= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \\
\cos(\alpha + \beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\
\cos(\alpha - \beta) &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \\
\tan(\alpha + \beta) &= \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} \\
\tan(\alpha - \beta) &= \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}
\end{aligned}$$

Le formule di duplicazione

Assioma C.12 (*Formule di duplicazione*)

$$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$
$$\tan(2\alpha) = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$$

Le formule di bisezione

Assioma C.13 (*Formule di bisezione*)

$$\sin(\frac{\alpha}{2}) \pm \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}}$$
$$\cos(\frac{\alpha}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}}$$
$$\tan(\frac{\alpha}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}}$$

Le formule parametriche

Queste formule dette **parametriche** perché esprimono il seno e il coseno di un angolo in funzione dello stesso parametro t. Vengono anche dette *formule razionali*.

Assioma C.14 (*Formule parametriche*)

$$\sin\alpha = \frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$$
$$\cos\alpha = \frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\alpha\frac{\alpha}{2}}$$

Le formule di prostaferesi e di Werner

Le **formule di prostaferesi** permettono di trasformare la somma o la differenza di due funzioni goniometriche in un prodotto di funzioni goniometriche.

Assioma C.15 (*Funzioni di prostaferesi*)

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Le **formule di Werner** permettono di trasformare i prodotti delle funzioni goniometriche seno e coseno in somme o differenze di funzioni seno e coseno.

Assioma C.16 (*Funzioni di Werner*)

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\Big[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\Big]$$
$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\Big[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\Big]$$
$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\Big[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\Big]$$

C.3 Relazioni tra funzioni goniometriche e iperboliche

Esistono molte relazioni tra le funzioni goniometriche e le funzioni iperboliche.
Le funzioni goniometriche vengono definite sulla base della circonferenza goniometrica, mentre quelle iperboliche sulla base dell'iperbole equilatera: seno e coseno di un angolo sono ordinata e ascissa di un punto sulla circonferenza, mentre seno iperbolico e coseno iperbolico sono ordinata e ascissa di un punto sull'iperbole.
Al contrario delle funzioni goniometriche, la periodicità di quelle iperboliche è visibile nel campo dei numeri complessi se l'argomento è immaginario.

Molte delle relazioni valide per le funzioni iperboliche sono simili a quelle valide per le funzioni trigonometriche.

Assioma C.17 (***Prima relazione fondamentale delle funzioni iperboliche***)

$$\cosh^2\alpha - \sinh^2\alpha = 1$$

Assioma C.18 (***Seconda relazione fondamentale delle funzioni iperboliche***)

$$\tanh\alpha = \frac{\sinh\alpha}{\cosh\alpha}$$

Assioma C.19 (***Formule di addizione e sottrazione***)

$$\cosh(\alpha \pm \beta) = \cosh\alpha\cosh\beta \pm \sinh\alpha\sinh\beta$$
$$\sinh(\alpha \pm \beta) = \sinh\alpha\cosh\beta \pm \cosh\alpha\sinh\beta$$

Assioma C.20 (***Formule di duplicazione***)

$$\sinh(2\alpha) = 2\sinh\alpha\cosh\alpha$$
$$\cosh(2\alpha) = \cosh^2\alpha + \sinh^2\alpha = 2\cosh^2\alpha - 1 = 1 + \sinh^2\alpha$$

Assioma C.21 (***Formule di bisezione***)

$$\sinh\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{\cosh\alpha - 1}{2}}$$
$$\cosh\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 + \cosh\alpha}{2}}$$

Assioma C.22 (***Funzioni di prostaferesi***)

$$\sinh\alpha + \sinh\beta = 2\sinh\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cosh\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$
$$\sinh\alpha - \sinh\beta = 2\cosh\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sinh\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$
$$\cosh\alpha + \cosh\beta = 2\cosh\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cosh\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$
$$\cosh\alpha - \cosh\beta = 2\sinh\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sinh\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

Assioma C.23 (***Funzioni di Werner***)

$$\sinh\alpha\cosh\beta = \frac{1}{2}\Big[\sinh(\alpha+\beta) + \sinh(\alpha-\beta)\Big]$$
$$\cosh\alpha\cosh\beta = \frac{1}{2}\Big[\cosh(\alpha+\beta) - \cosh(\alpha-\beta)\Big]$$
$$\sinh\alpha\sinh\beta = \frac{1}{2}\Big[\cosh(\alpha-\beta) - \cosh(\alpha+\beta)\Big]$$

Appendice D

Equazioni e disequazioni trascendenti

Si parla di **equazione trascendente** (o **disequazione trascendente**) quando l'incognita è contenuta in una funzione trascendente, come la funzione esponenziale, quella logaritmica o quelle goniometriche.

D.1 Equazioni e disequazioni esponenziali

Definizione D.1 (Equazione esponenziale)**.** Un'equazione si dice esponenziale quando contiene almeno una potenza con l'incognita nell'esponente.

$$a^x = b, \text{ con } a > 0$$

L'equazione si dice *impossibile* se $b < 0$, oppure se $a = 1$ e $b \neq 1$. Viceversa, l'equazione si dice *indeterminata* (quindi ha infinite soluzioni) se $a = b = 1$.

Per risolvere una equazione esponenziale, si cerca di scrivere membro sinistro e membro destro dell'equazione con la stessa base, per poi confrontare gli esponenti.

Esercizio D.1

$$\begin{aligned} 25^x &= 125 \\ 5^2x &= 5^3 \\ 2x &= 3 \to x = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Esercizio D.2

$$\begin{aligned} 2^{x^2-5x+6} &= 1 \\ 2^{x^2-5x+6} &= 2^0 \\ x^2 - 5x + 6 = 0 &\to x_1 = 2, x_2 = 3 \end{aligned}$$

Quando non è possible scrivere membro sinistro e destro con la stessa base, allora si usa l'operazione di logaritmo per poter abbassare l'esponente.

Esercizio D.3

$$\begin{aligned} 2^x &= 10 \\ \log 2^x &= \log 10 \\ x \log 2 &= \log 10 \\ x &= \frac{\log 10}{\log 2} \end{aligned}$$

Definizione D.2 (Disequazione esponenziale)**.** Una disequazione si dice esponenziale quando contiene almeno una potenza con l'incognita nell'esponente.

Per risolvere una disequazione esponenziale valgono considerazioni analoghe alle equazioni esponenziali, purché si ricordi che:

- se $a > 1$, allora $t > z \Leftrightarrow a^t > a^z$;
- se $0 < a < 1$, allora $t > z \Leftrightarrow a^t < a^z$.

D.2 Equazioni e disequazioni logaritmiche

Definizione D.3 (Equazione logaritmica)**.** Un'equazione si dice logaritmica quando l'incognita compare nell'argomento di almeno un logaritmo.

$$\log_a A(x) = \log_a B(x)$$

Per risolvere una equazione logaritmica, è sufficiente cercare le soluzioni dell'equazione $A(x) = B(x)$ e controllare successivamente le condizioni di esistenza della funzione logaritmica.

Esercizio D.4

$$\begin{aligned} \log x + \log(x+3) &= \log 2 + \log(2x+3) \qquad\qquad (C.E.\!: x > 0) \\ \log x \cdot (x+3) &= \log 2 \cdot (2x+3) \\ \log(x^2+3x) &= \log(4x+6) \\ x^2+3x &= 4x+6 \\ x^2-x-6 &= 0 \to x_1 = -2, x_2 = 3 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Definizione D.4 (Disequazione logaritmica)**.** Una disequazione si dice logaritmica quando l'incognita compare nell'argomento di almeno un logaritmo.

$$\log_a A(x) < \log_a B(x)$$

Esercizio D.5

$$\log_5(x-1) < 2$$
$$\log_5(x-1) < 2 \cdot \log_5 5$$
$$\log_5(x-1) < \log_5 25$$

$$\begin{cases} x-1>0 \\ x-1<25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>1 \\ x<26 \end{cases}$$

D.3 Equazioni e disequazioni goniometriche

Definizione D.5 (Equazione goniometrica)**.** Un'equazione si dice goniometrica se contiene almeno una funzione goniometrica dell'incognita.

Si distinguono:

- equazioni **elementari** ($\sin x = a$, $\cos x = b$ o $\tan x = c$), in cui la risoluzione avviene con metodo grafico;
- equazioni **lineari in seno e coseno** ($a \sin x + b \cos x + c = 0$), risolvibili:
  - riconducendole ad equazioni in tangente se $c = 0$ ($a \tan x + b = 0$),
  - usando le formule parametriche se $c \neq 0$;
- equazioni **omogene di secondo gradi in seno e coseno** ($a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0$).

Esercizio D.6

$$\begin{aligned} \sin x - \sqrt{3}\cos x &= 0 \\ \frac{\sin x}{\cos x} - \sqrt{3}\frac{\cos x}{\cos x} &= 0 \\ \tan x - \sqrt{3} &= 0 \\ \tan x &= \sqrt{3} \\ x &= \frac{\pi}{3} + k\pi, \text{ con } k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Esercizio D.7

$$\begin{aligned} \sin^2 x - (1+\sqrt{3})\sin x \cos x + \sqrt{3}\cos^2 x &= 0 \\ \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - (1+\sqrt{3}\frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x} + \sqrt{3}\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} &= 0 \\ \tan^2 x - (1+\sqrt{3})\tan x + \sqrt{3} &= 0 \end{aligned}$$

$$
\tan x = 1 \to x_1 = \frac{\pi}{4} + k\pi
$$
$$
\tan x = \sqrt{3} \to x_2 = \frac{\pi}{3} + k\pi
$$

Definizione D.6 (Disequazione goniometrica)**.** Una disequazione si dice goniometrica se contiene almeno una funzione goniometrica dell'incognita.

Parte III

Calcolo integrale di funzioni reali a variabile reale

Capitolo 13

Gli integrali

Come abbiamo visto, l'operazione di derivazione, quando è possibie, associa a una funzione una sola altra funzione, la *derivata*, che è unica.
Vogliamo ora affrontare il problema inverso, ovvero data una funzione, vogliamo trovare una funzione tale che la sua derivata sia uguale alla funzione data.

L'operazione che ci permette di risolvere questo problema prende il nome di *integrale*.

13.1 Le primitive

Definizione 13.1 (Primitiva di una funzione)**.** Una funzione $F(x)$ si dice **primitiva** della funzione $f(x)$ definita nell'intervallo $[a; b]$ se $F(x)$ è derivabile in tutto l'intervallo e la sua derivata corrisponde proprio a $f(x)$.

In base a questa definizione, il problema di trovare la funzione tale che la sua derivata sia pari alla funzione data in ingresso corrisponde a trovare la primitiva di una funzione.

La primitiva di una funzione, se esiste, non è unica. Siccome sono diverse le funzioni la cui derivata corrisponde allo stesso risultato, si dice che le primitive di una funzione sono una famiglia che differisce per una costante c.

13.2 L'integrale indefinito

Definiamo ora l'operazione per individuare l'insieme di primitive di una funzione: l'integrale.

Definizione 13.2 (Integrale indefinito)**.** Si definisce **integrale indefinito della funzione** $f(x)$ l'insieme di tutte le primitive della funzione f nel suo dominio.

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c$$

La funzione $f(x)$ è detta **funzione integranda** mentre x è detta **variabile di integrazione**.

Una funzione che ammette una primitiva si dice *integrabile*, e possono essere individuate tramite il seguente teorema.

Teorema 13.1 (Condizione sufficiente di integrabilità)**.** *Se una funzione è continua nell'intervallo* $[a; b]$, *allora ammette primitive nello stesso intervallo.*

L'operazione che abbiamo iniziato a definire si chiama *integrale indefinito* perché implica che l'intervallo $[a; b]$ corrisponde a tutto il dominio della funzione. Se l'intervallo $[a; b]$ è più piccolo del dominio, si parla di *integrale definito* e ne parleremo in seguito.

L'operazione di integrazione gode della seguente proprietà.

Teorema 13.2 (Integrazione di combinazioni lineari o della linearità)**.** *Siano* $f(x)$ *e* $g(x)$ *due funzioni continue in un intervallo* $[a, b]$ *e siano* $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ *due valori reali.*
Se il limite per $n \to +\infty$ *delle successioni* $\{\sigma_n\}$ *e* $\{\Omega_n\}$ *esistono e sono finiti e coincidenti, allora*

$$\int [c_1 f(x) + c_2 g(x)] \,\mathrm{d}x = c_1 \int f(x) \,\mathrm{d}x + c_2 \int g(x) \,\mathrm{d}x$$

13.3 Integrali indefiniti immediati

Indichiamo ora una serie di integrali indefiniti immediati.

- $\int x^n \,\mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, & \text{per } x > 0 \\ \frac{x^{n+1}}{n+1} + h, & \text{per } x < 0 \end{cases} = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad \forall c, x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
- $\int \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x = \begin{cases} \ln x + c, & \text{per } x > 0 \\ \ln(-x) + h, & \text{per } x < 0 \end{cases} = \ln|x| + c \quad \forall c \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- $\int a^x \,\mathrm{d}x = \dfrac{a^x}{\ln a} + x \quad \forall c, x \in \mathbb{R}, a > 0$
- $\int \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + c \quad \forall c, x \in \mathbb{R}$
- $\int \sin x \,\mathrm{d}x = -\cos x + c \quad \forall c, x \in \mathbb{R}$
- $\int \cos x \,\mathrm{d}x = \sin x + c \quad \forall c, x \in \mathbb{R}$
- $\int \frac{1}{\cos^2 x} \,\mathrm{d}x = \tan x + c \quad \forall c, x \in \mathbb{R}$
- $\int \frac{1}{\sin^2 x} \,\mathrm{d}x = -\cot x + c \quad \forall c, x \in \mathbb{R}$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \,\mathrm{d}x = \arcsin x + c = -\arccos x + c \quad \forall c \in \mathbb{R}, \forall x \in [-1, 1]$
- $\int \frac{1}{1+x^2} \,\mathrm{d}x = \arctan x + c = -\operatorname{arccot} x + c \quad \forall c, x \in \mathbb{R}$
- $\int \cosh x \,\mathrm{d}x = \sinh x + c \quad \forall c, x \in \mathbb{R}$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \,\mathrm{d}x = \operatorname{settsinh} x + c \quad \forall c, x \in \mathbb{R}$

- $\int \sinh x \, \mathrm{d}x = \cosh x + c \quad \forall c, x \in \mathbb{R}$
- $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \, \mathrm{d}x = \operatorname{settcosh} x + c \quad \forall x \in (1, +\infty), \forall x \in \mathbb{R}$
- $\int \frac{1}{\cosh^2 x} \, \mathrm{d}x = \int (1 + \tanh^2 x) \, \mathrm{d}x = \tanh x + c \quad \forall c, x \in \mathbb{R}$
- $\frac{1}{1+x^2} \, \mathrm{d}x = \operatorname{setttanh} x + c \quad \forall x \in (-1, +1), \forall c \in \mathbb{R}$
- $\int -\frac{1}{\sinh^2 x} \, \mathrm{d}x = \int (1 - \coth^2 x) \, dx = \coth x + c \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- $\int \frac{1}{1-x^2} \, \mathrm{d}x = \operatorname{settcoth} x + c \quad \forall x \in [(-\infty, -1) \cup (+1, +\infty)], \forall c \in \mathbb{R}$

Ora elenchiamo una serie di formule per gli integrali indefiniti generici, con eventuali integrali immediati che possiamo ricavare da queste.

- $\int [f(x)]^\alpha \cdot f'(x) \, \mathrm{d}x = \dfrac{[f(x)]^{\alpha+1}}{\alpha + 1} + c \quad \forall c, x \in \mathbb{R}, \forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
- $\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, \mathrm{d}x = \ln|f(x)| + c \quad \forall c \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
  - $\int \tan x \, \mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{\cos x} \, \mathrm{d}x = \frac{-D[\cos x]}{\cos x} \, \mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + c \quad \forall c \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
  - $\int \cot x \, \mathrm{d}x = \int \frac{\cos x}{\sin x} \, \mathrm{d}x = \frac{D[\sin x]}{\sin x} \, \mathrm{d}x = -\ln|\sin x| + c \quad \forall c \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
- $\int f'(x) e^{f(x)} \, \mathrm{d}x = e^{f(x)} + c \quad \forall c, x \in \mathbb{R}$
- $\int f'(x) a^{f(x)} \, \mathrm{d}x = a^{f(x)} \log_a e + c \quad \forall c, x \in \mathbb{R}, a > 0$
- $\int f'(x) \sin[f(x)] \, \mathrm{d}x = -\cos[f(x)] + c \quad \forall c, x \in \mathbb{R}$
- $\int f'(x) \cos[f(x)] \, \mathrm{d}x = \sin[f(x)] + c \quad \forall c, x \in \mathbb{R}$
- $\frac{f'(x)}{\cos^2[f(x)]} \, \mathrm{d}x = \tan[f(x)] + c \quad \forall c, x \in \mathbb{R}$
- $\frac{f'(x)}{\sin^2[f(x)]} \, \mathrm{d}x = \cot[f(x)] + c \quad \forall c, x \in \mathbb{R}$
- $\frac{f'(x)}{\sqrt{a^2-[f(x)]^2}} \, \mathrm{d}x = \arcsin \frac{f(x)}{|a|} + c = -\arccos \frac{f(x)}{|a|} + c \quad \forall c \in \mathbb{R}, \forall x \in [-1, 1], a \neq 0$
- $\frac{f'(x)}{a^2+[f(x)]^2} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{a} \arctan \frac{f(x)}{a} + c = -\frac{1}{a} \operatorname{arccot} \frac{f(x)}{a} + c \quad \forall c, x \in \mathbb{R}, a \neq 0$

13.4 Metodi di integrazione

Ora che abbiamo elencato tutti (o quasi) i possibili integrali immediati, iniziamo a vedere i metodi di risoluzioni degli integrali la cui funzione integranda ($f(x)$) è una funzione particolare.

Naturalmente, per semplicità nella spiegazione, enuncieremo questi metodi per gli integrali indefiniti.

Integrazione per sostituzione

Il primo metodo che vediamo è utile nel caso in cui si abbiano funzioni composte e viene detto metodo dell'*integrazione per sostituzione*.

Teorema 13.3 (Integrazione per sostituzione)**.** *Sia $f(x)$ una funzione continua in un intervallo I e sia $t = \varphi(x)$ (oppure $x = \varphi(t)$) una funzione derivabile e invertibile nello stesso intervallo; allora $x = \varphi^{-1}(t)$ (oppure $t = \varphi(x)$) e*

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \{f[\varphi^{-1}(t)] \cdot \varphi'^{-1}(t)\}\,\mathrm{d}t \tag{13.1}$$

(oppure)

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \{f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t)\}\,\mathrm{d}t \tag{13.2}$$

Nel caso di un integrale definito, si ha

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} \{f[\varphi^{-1}(t)] \cdot \varphi'^{-1}(t)\}\,\mathrm{d}t \tag{13.3}$$

(oppure)

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} \{f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t)\}\,\mathrm{d}t \tag{13.4}$$

Esempio 13.1

Risolvi il seguente integrale:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 - x^2}\,\mathrm{d}x$$

Pongo $x = \varphi(t) = \sin t$, quindi $t = \varphi^{-1}(x) = \arcsin x$, perchè nell'intervallo $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ la funzione $\varphi(t)$ è invertibile e derivabile.

Si ha dunque che $\varphi^{-1}(0) = 0$ e $\varphi^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$.

Quindi:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2}\,dx \overset{sostituzione}{=} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{1-\sin^2 t}\cdot\cos t\,dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos(2t)+1}{2}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} 1\,dt + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos(2t)\,dt = \frac{x}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} + \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos(2t)}{2}\,dt =$$

$$= \frac{\pi}{12} + \frac{1}{4}\left(\sin(2t)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}\right) = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8}$$

Grazie all'integrazione per sostituzione, possiamo definire altri integrali immediati, di cui forniremo anche la dimostrazione.

- $\int \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = -\sqrt{a^2-x^2} + c \quad a > 0, \forall c, x \in \mathbb{R}$

Dimostrazione:

$$\int \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{-2x}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = -\frac{1}{2}\int (-2x)(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx$$

Sostituisco $a^2 - x^2 = t$ $(x > 0) \to x = \sqrt{a^2-t}$ e noto che $dt = (-2x)dx$:

$$-\frac{1}{2}\int (-2x)(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx \to -\frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}\,dt =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot 2t^{\frac{1}{2}} + c = -t^{\frac{1}{2}} + c \to -\sqrt{a^2-x^2} + c$$

□

- $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \frac{a}{|a|}\arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + c \quad |a| > |x|, \forall c \in \mathbb{R}$

Dimostrazione:

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{a^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}}\,dx = \frac{1}{|a|}\int \frac{1}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{x}{a}\right)^2\right)}}\,dx$$

Sostituisco $t = \dfrac{x}{a} \to x = at$:

$$\frac{1}{|a|}\int \frac{1}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{x}{a}\right)^2\right)}}\,dx \to \frac{1}{|a|}\int \frac{1}{\sqrt{(1-t^2)}}a\,dt =$$

$$= \frac{a}{|a|}\arcsin t + c \to \frac{a}{|a|}\arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

□

- $\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + c \quad \forall c, x \in \mathbb{R}$

Dimostrazione:

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} \,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{a^2\left(1 + \frac{x^2}{a^2}\right)} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{a^2} \int \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2\right)} \,\mathrm{d}x$$

Sostituisco $t = \frac{x}{a} \longrightarrow x = at$:

$$\frac{1}{a^2} \int \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2\right)} \,\mathrm{d}x \longrightarrow \frac{1}{a^2} \int \frac{1}{(1 + t^2)} a \,\mathrm{d}t =$$
$$= \frac{1}{a} \arctan t + c \longrightarrow \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

□

- $\int \cos(ax) \,\mathrm{d}x = \frac{1}{a} \sin(ax) + c \quad \forall c, x \in \mathbb{R}$

Dimostrazione:

$$\int \cos(ax) \,\mathrm{d}x$$

Sostituisco $t = ax \longrightarrow x = \frac{t}{a}$:

$$\int \cos(ax) \,\mathrm{d}x \longrightarrow \int \frac{\cos t}{a} \,\mathrm{d}t = \frac{1}{a} \sin t + c \longrightarrow \frac{1}{a} \sin(at) + c$$

□

- $\int \sin(ax) \,\mathrm{d}x = -\frac{1}{a} \cos(ax) + c \quad \forall c, x \in \mathbb{R}$

Dimostrazione:

$$\int \sin(ax) \,\mathrm{d}x$$

Sostituisco $t = ax \longrightarrow x = \frac{t}{a}$:

$$\int \sin(ax) \,\mathrm{d}x \longrightarrow \int \frac{\sin t}{a} \,\mathrm{d}t = -\frac{1}{a} \cos t + c \longrightarrow -\frac{1}{a} \cos(at) + c$$

□

Integrazione per parti

Il secondo metodo di risoluzione degli integrali che vediamo è noto come **integrazione per parti**.

Teorema 13.4. *Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni continue e derivabili in un intervallo I; allora*

$$\int [f(x) \cdot g'(x)] \,\mathrm{d}x = f(x) \cdot g(x) - \int [f'(x) \cdot g(x)] \,\mathrm{d}x \tag{13.5}$$

Dimostrazione: Date due funzioni $f(x)$ e $g(x)$, consideriamo la derivata del loro prodotto:

$$D[f(x) \cdot g(x)] = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Integriamo entrambi i membri:

$$\int D[f(x) \cdot g(x)] \, \mathrm{d}x = \int [f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)] \, \mathrm{d}x$$
$$f(x) \cdot g(x) = \int [f'(x) \cdot g(x)] \, \mathrm{d}x + \int [f(x) \cdot g'(x)] \, \mathrm{d}x$$
$$\int [f'(x) \cdot g(x)] \, \mathrm{d}x = f(x) \cdot g(x) - \int [f(x) \cdot g'(x)] \, \mathrm{d}x$$

□

Il metodo dell'integrazione per parti, quindi, è utile nel caso in cui si abbia il prodotto tra funzioni, in cui $f(x)$ viene detto *fattore finito* e $g'(x)$ viene detto *fattore differenziale*.

Possiamo dare delle regole di base per l'integrazione per parti: se l'integrale è del tipo $\int x^n \sin x \, \mathrm{d}x$, $\int x^n \cos x \, \mathrm{d}x$ o $\int x^n \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x$, allora x^n si considera come fattore finito, mentre se l'integrale è del tipo $\int x^n \ln x \, \mathrm{d}x$, $\int x^n \arctan x \, \mathrm{d}x$ o $\int x^n \arcsin x \, \mathrm{d}x$, allora $x^n \, \mathrm{d}x$ si considera come fattore differenziale.

Esempio 13.2

$$\int \ln x \, \mathrm{d}x = \int x^0 \ln x \, \mathrm{d}x =$$
$$= x \ln n - \int \frac{1}{x} x \, \mathrm{d}x = x \ln x - x + c \quad \forall c, x \in \mathbb{R}$$

Esempio 13.3

$$\int \mathrm{e}^x \cos x \; dx = \mathrm{e}^x \sin x - \int \mathrm{e}^x \sin x \, \mathrm{d}x =$$
$$= \mathrm{e}^x \sin x - (\mathrm{e}^x \cos x - \int \mathrm{e}^x \cos x \, \mathrm{d}x) = \mathrm{e}^x \sin x - \mathrm{e}^x \cos x + \int \mathrm{e}^x \cos x \, \mathrm{d}x \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \int \mathrm{e}^x \cos x \; dx = \frac{\mathrm{e}^x(\sin x + \cos x)}{2}$$

Integrazioni delle funzioni razionali fratte

Il terzo e ultimo metodo per la risoluzione degli integrali riguarda l'integrazione delle **funzioni razionali fratte** $\int \frac{N(x)}{D(x)} \, \mathrm{d}x$, dove $N(x)$ e $D(x)$ sono funzioni qualsiasi.
Possiamo analizzare vari casi.

Il numeratore come derivata del denominatore

Se il numeratore è la derivata del denominatore, o ci si può ricondurre ad essa, allora possiamo sfruttare la formula

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + c \quad \forall c \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

Il grado del numeratore è maggiore di quello del denominatore

Se il numeratore e il denominatore sono polinomi e il grado del numeratore è maggiore del grado del denominatore, si può sempre effettuare la divisione tra polinomi e ridurre il grado del numeratore.

Il numeratore è di grado zero e il denominatore è di secondo grado

Se il denominatore è un polinomio di secondo grado, il numeratore di grado zero e il discriminante è negativo, ci si può ricondurre a uno dei seguenti gradi (con l'ipotesi che $a \neq 0$):

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{a^2 - [f(x)]^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin\frac{f(x)}{|a|} + c = -\arccos\frac{f(x)}{|a|} + c \quad \forall c \in \mathbb{R}, \forall x \in [-1, 1]$$

$$\int \frac{f'(x)}{a^2 + [f(x)]^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\arctan\frac{f(x)}{a} + c = -\frac{1}{a}\operatorname{arccot}\frac{f(x)}{a} + c \quad \forall c, x \in \mathbb{R}$$

Esempio 13.4

$$\int \frac{1}{x^2 + x + 2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}}\,\mathrm{d}x$$

$$f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right),\; f'(x) = 1,\; a = \sqrt{\frac{7}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

$$\int \frac{1}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{7}}\arctan\left(\frac{x + \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{7}}{2}}\right) + c =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{7}}\arctan\left[\frac{2}{\sqrt{7}}\left(x + \frac{1}{2}\right)\right] + c$$

Esempio 13.5

$$\int \frac{1}{\sqrt{1 - x + x^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sqrt{\frac{7}{4} - \left(x + \frac{1}{2}\right)^2}}\,\mathrm{d}x$$

$$f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right),\; f'(x) = 1,\; a = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{\frac{7}{4} - \left(x + \frac{1}{2}\right)^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin\left(\frac{x + \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}}\right) + c = \arcsin\left[\frac{2}{\sqrt{5}}\left(x + \frac{1}{2}\right)\right] + c$$

Denominatore con radici reali e distinte

Se il denominatore è un polinomio di grado m, con m radici reali e distinte, e il numeratore è un polinomio di grado $n < m$, si usa la cosiddetta **tecnica dei fratti semplici**, in cui si pensa la funzione fratta come somma di m frazioni che hanno per denominatore gli m fattori del denominatore e per numeratore delle costanti da determinare, ottenendo $\sum_i k_i \log|x - x_i|$.

Esempio 13.6

$$\int \frac{2x+1}{(x-3)(x-4)}\,\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned}\frac{2x+1}{(x-3)(x-4)} &= \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-4} = \frac{A(x-4)+B(x-3)}{(x-3)(x-4)} = \\ &= \frac{(A+B)x-4A-3B}{(x-3)(x-4)} \Longrightarrow \begin{cases} A+B=2 \\ -4A-3B=1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A=-7 \\ B=9 \end{cases}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{2x+1}{(x-3)(x-4)}\,dx &= \int \frac{-7}{x-3}\,\mathrm{d}x + \int \frac{9}{x-4}\,\mathrm{d}x = \\ &= -7\log|x-3| + 9\log|x-4| + c\end{aligned}$$

Denominatore con radici reali a molteplicità diversa da uno

Se il denominatore è un polinomio di grado m, con m radici reali, alcune delle quali con molteplicità algebrica maggiore di uno, e il numeratore è un polinomio di grado $n < m$, si usa la *tecnica dei fratti semplici*, in cui il fattore con molteplicità maggiore di uno viene ripetuto tante volte quante indicate dalla molteplicità con grado crescente.

Esempio 13.7

$$\int \frac{2x+5}{(x+1)(x+3)^2}\,\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned}\frac{2x+5}{(x+1)(x+3)^2} &= \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{(x+3)^2} = \\ &= \frac{A(x+3)^2 + B(x+1)(x+3) + C(x+1)}{(x+1)(x+3)^2} = \\ &= \frac{(A+B)x^2 - (6A+4B+C)x + 9A+3B+C}{(x+1)(x+3)^2} \Longrightarrow \\ &\Longrightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ 6A+4B+C=1 \\ 9A+3B+C=5 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A=\frac{3}{4} \\ B=-\frac{3}{4} \\ C=\frac{1}{4} \end{cases}\end{aligned}$$

$$\int \frac{2x+5}{(x+1)(x+3)^2}\,dx = \int \frac{\frac{3}{4}}{x+1}\,dx + \int \frac{-\frac{3}{4}}{x+3}\,dx + \int \frac{\frac{1}{4}}{(x+3)^2}\,dx =$$
$$= \frac{3}{4}\log|x+1| - \frac{3}{4}\log|x+3| - \frac{1}{4(x+3)} + c$$

Denominatore con radici complesse semplici

Se il denominatore è un polinomio di grado m, il quale ammette radici complesse con molteplicità algebrica singola, e il numeratore è un polinomio di grado $n < m$, si usa la *tecnica dei fratti semplici*, in cui, in corrispondenza dei fattori che ammettono le radici complesse, si mette al numeratore un polinomio di primo grado.

Esempio 13.8

$$\int \frac{x^2}{(x^4-1)}\,dx = \int \frac{x^2}{(x+1)(x-1)(x^2+1)}\,dx$$

$$\frac{x^2}{(x+1)(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)} =$$
$$= \frac{A(x+1)(x^2+1) + B(x-1)(x^2+1) + (Cx+D)(x^2-1)}{(x+1)(x-1)(x^2+1)} =$$
$$= \frac{(A+B+C)x^3 + (A+B-D)x^2 + (A+B-C)x + A-B-D}{(x+1)(x-1)(x^2+1)} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} A+B+C=0 \\ A+B-D=1 \\ A+B-C=0 \\ A-B-D=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-\frac{1}{2} \\ B=-\frac{1}{2} \\ C=0 \\ D=-1 \end{cases}$$

$$\int \frac{x^2}{(x+1)(x-1)(x^2+1)}\,dx = \int \frac{-\frac{1}{2}}{x-1}\,dx + \int \frac{\frac{1}{2}}{x+1}\,dx + \int \frac{-1}{(x^2+1)}\,dx =$$
$$= -\frac{1}{2}\log|x-1| + \frac{1}{2}\log|x+1| - \arctan x + c$$

Denominatore con radici complesse a molteplicità maggiore di uno

Se il denominatore è un polinomio di grado m, il quale ammette radici complesse con molteplicità algebrica maggiore di uno, e il numeratore è polinomio di grado $n < m$, si usa la *tecnica dei fratti semplici*.
Questo caso, però, non verrà visionato, poiché non fa parte del corso.

13.5 Esercizi sugli integrali

Esercizio 13.1

Risolvi il seguente integrale:

$$\int \frac{1}{x(x^2+x+1)}\,\mathrm{d}x$$

Uso il metodo dei fratti semplici:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x(x^2+x+1)} &= \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1} = \\
&= \frac{A(x^2+x+1)+(Bx+C)x}{x(x^2+x+1)} = \\
&\frac{(A+B)x^2+(A+C)x+A}{x(x^2+x+1)} \Rightarrow \\
&\Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ A+C=0 \\ A=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \\ C=-1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x(x^2+x+1)}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x - \int \frac{x+1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x = \\
&= \log|x| - \frac{1}{2}\int \frac{2x+1-1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x = \\
&= \log|x| - \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x + \int \frac{1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x = \\
&= \log|x| - \frac{1}{2}\log|x^2+x+1| + \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}x = \\
&= \log|x| - \frac{1}{2}\log|x^2+x+1| + \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]
\end{aligned}$$

Esercizio 13.2

Determina il valore del seguente integrale

$$\int_{-1}^{2} |t|\,\mathrm{d}t$$

$$\int_{-1}^{2} |t|\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{0} -\,\mathrm{d}t + \int_0^2 t\,\mathrm{d}t = -\frac{t^2}{2}\bigg|_{-1}^{0} + \frac{t^2}{2}\bigg|_0^2 = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$$

Esercizio 13.3

Determina la funzione $F(x) = \int_{-1}^{x} |t| \, \mathrm{d}t$*, considerando come dominio di integrazione il più grande intervallo di continuità della funzione integranda contenente l'estremo inferiore di integrazione.*

Il dominio di integrazione per questa funzione corrisopnde all'insieme dei numeri reali.
Per l'integrazione dobbiamo considerare tre casi:

1. $x < -1$:

$$\int_{-1}^{x} |t| \, \mathrm{d}t = -\int_{x}^{-1} |t| \, \mathrm{d}t = -\int_{x}^{-1} (-t) \, \mathrm{d}t = \int_{x}^{-1} t \, \mathrm{d}t = \left.\frac{t^2}{2}\right|_{x}^{-1} = \frac{1}{2} - \frac{x^2}{2}$$

2. $-1 \leq x < 0$

$$\int_{-1}^{x} |t| \, \mathrm{d}t = \int_{-1}^{x} (-t) \, \mathrm{d}t = -\left.\frac{t^2}{2}\right|_{-1}^{x} = -\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}$$

3. $x \geq 0$

$$\int_{-1}^{x} |t| \, \mathrm{d}t = \int_{-1}^{0} (-t) \, dt + \int_{0}^{x} t \, \mathrm{d}t = -\left.\frac{t^2}{2}\right|_{-1}^{0} + \left.\frac{t^2}{2}\right|_{0}^{x} = \frac{1}{2} + \frac{x^2}{2}$$

Quindi la funzione cercata è:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{x^2}{2}, & \textit{se } x < 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{x^2}{2}, & \textit{se } x \geq 0 \end{cases}$$

Esercizio 13.4

Dimostrare che $f(x) = \int_{-2}^{x} (t^2 + t - 2)\mathrm{e}^{t^2} \, \mathrm{d}t$ *ammette solo due zeri reali.*

Per determinare quanti zeri ha una funzione, calcoliamo la sua derivata prima e la imponiamo uguale a zero.

$$f'(x) = (x^2 + x - 2)\mathrm{e}^{x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$
$$f'(x) = 0 \Longrightarrow (x^2 + x - 2)\mathrm{e}^{x^2} = 0$$
$$\mathrm{e}^{x^2} > 0 \textit{ sempre}, x^2 + x - 2 = 0 \longrightarrow x1,2 = \frac{-1 \pm 3}{2} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow f(x) > 0 \textit{ per } x < -2 \wedge x > 1, f(x) < 0 \textit{ per } -2 < x < 1$$
$$x = -2 \textit{ punto di massimo e } x = 1 \textit{ punto di minimo}$$

Poichè $x = 1$ *è un punto di minimo relativo, probabilmente la funzione, nell'intervallo* $[-2, 1]$*, avrà un altro zero. Per verificare ciò, effettuo una* *minorazione della funzione.*

$$(t^2+t-2)e^{t^2} > (t^2+t-2) \quad \forall t > 1$$

$$f(x) > \int_{-2}^{x} (t^2+t-2)\,dt \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \int_{-2}^{x} (t^2+t-2)\,dt =$$

$$= \lim x \to +\infty \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x - \frac{10}{3}\right] = +\infty$$

Poichè il limite tende a $+\infty$, abbiamo dimostrato che non vi sono altri zeri nell'intervallo, quindi ci sono solamente due zeri.

Esercizio 13.5

Date due funzioni

$$f(x) = \int_{\sqrt{10}-1}^{x} \log(t^2+2t-8)\,dt$$

e

$$g(x) = \int_{\sqrt{10}-1}^{x} \log(t^2+2t-8)\,dt$$

determinare i domini delle due funzioni. Verifica, inoltre, se sono invertibili e giustifica la seguente affermazione:

$$f(x) > g(x) \qquad \forall x \in (D_f \cap D_g)$$

Determino i domini delle due funzioni, studiando il dominio della funzione integranda:

$$h(t) = \log(t^2+2t-8)$$

$$D_h = t^2+2t-8 > 0 \Rightarrow D_h = (-\infty,-4) \cup (2,+\infty)$$

Poichè $\sqrt{10}-1 \in (2,+\infty)$, allora $D_f = (2,+\infty)$; allo stesso modo, poichè $\sqrt{10}+1 \in (2,+\infty)$, allora $D_g = (2,+\infty)$.

Verifico ora l'invertibilità delle due funzioni, sfruttando la loro derivata:

$$f'(x) = g'(x) = \log(x^2+2x-8) \quad \forall x \in (2+\infty)$$

$$\log(x^2+2x-8) > 0 \quad \forall x \in (2+\infty)$$

$$x^2+2x-8 > 1$$

$$x^2+2x-9 > 0 \rightarrow x < -1-\sqrt{10} \text{ (da escludere) } \wedge x > \sqrt{10}-1$$

Poichè la derivata cambia di segno nell'intorno dell'unico punto valido, per il teorema della derivabilità delle funzioni inverse le due funzioni non sono *invertibili.*

Giustifico ora la relazione richiesta:

$$\forall x \in (2, +\infty) \quad f'(x) = g'(x) \Rightarrow f(x) = g(x) + k$$

Poichè $g(\sqrt{10}+1) = 0$ *e* $\sqrt{10}+1 > \sqrt{10}-1$, *dove* $f(\sqrt{10}-1) = 0$, *allora* $f(x) > g(x)$.

Capitolo 14

Integrali definiti

Abbiamo visto precedentemente il perché dell'introduzione dell'operazione di integrale e come usarla.
Restringiamo ora l'intervallo di integrazione, vedendo anche perché introdurre questa restrizione.

14.1 L'integrale definito

. L'introduzione del calcolo degli integrali definiti nasce dalla necessità di determinare le aree di figure piane aventi *contorno curvilineo*. Mentre per i poligoni il calcolo dell'area si riconduce a quella di un quadrato, per le figure il cui contorno è una curva qualsiasi il problema è più complesso.
L'esempio più semplice è il cerchio, la cui area è stata determinata da Archimededi Siracusa (287-212 a.C.) mediante il **metodo di esaustione**. Se si considerano due successioni di poligoni regolari di n lati inscritti e circoscritti al cerchio, si può dimostrare che l'area del cerchio coincide con il limite comune delle due successioni costituite rispettivamente dalle aree dei poligoni regolari inscritti e circoscritti al cerchio.

Allo stesso modo, scomponiamo l'intervallo $[a, b]$ di una funzione in n parti uguali di ampiezza $\frac{b-a}{n}$ e consideriamo i rettangoli aventi per base uno di questi segmenti e per altezza il valore massimo che la funzione assume in quell'intervallo; ciò è possibile perché la funzione, essendo continua in tutto l'intervallo $[a, b]$, è continua anche in ogni sottointervallo.
Per semplicità nei calcoli, poniamo inoltre che la funzione sia positiva nell'intervallo. Abbiamo così che l'area del rettangolo considerato è sicuramente positivo.

Se consideriamo tutti i rettangoli ottenuti dai vari sottointervalli e si sommano insieme, otteniamo una particolare figura, detta *rettangoloide*, la cui area è

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{b-a}{n} \cdot f(x_i) \right) \in \mathbb{R}, \text{ con } n \in \mathbb{N} \text{ fissato}$$

σ_n viene detta **somma integrale della funzione f relativo all'intervallo** $[a, b]$.
Se n non fosse fissato, la somma integrale diverrebbe una successione numerica e verrebbe chiamata *successione delle somme integrali* $(\{\sigma_n\})$.

In base alla costruzione effettuata, σ_n corrisponde a una stima *per eccesso* della curva.
É possibile, però, definire anche una stima *per difetto* della curva, considerando come altezza di ogni rettangolo il valore minimo che la funzione assume in ogni intervallo. Questa seconda stima, che indichiamo con

$$\Omega_n = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{b-a}{n} \cdot f(x_{i-1}) \right) \in \mathbb{R}, \text{ con } n \in \mathbb{N} \text{ fissato}$$

prende il nome di **somma difettiva della funzione** f. Anche in questo caso, se n non fosse fissato, Ω_n diventerebbe una successione numerica ($\{\Omega_n\}$). Le due successioni approssimano l'area sottesa alla funzione f nell'intervallo $[a, b]$, come possiamo vedere nella Figura 14.1.

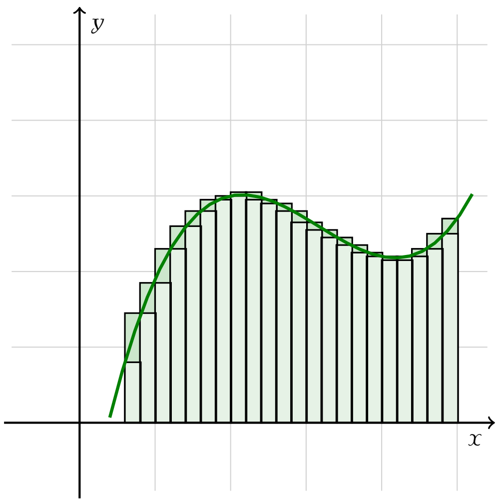


Figura 14.1: Somma integrale e somma difettiva della funzione

Vogliamo studiare il comportamento di queste successioni quando n è molto grande.

Teorema 14.1. *Se $f(x)$ è una funzione continua e positiva (o nulla) in un intervallo $[a, b]$, allora i limiti per $n \to +\infty$ delle successioni $\{\sigma_n\}$ e $\{\Omega_n\}$ esistono e sono coincidenti, ovvero le due successioni convergono e $\lim_{n\to+\infty} \sigma_n = \lim_{n\to+\infty} \Omega_n$.*

Grazie a questo teorema, di cui omettiamo la dimostrazione, possiamo ora definire in modo più sistematico l'operazione di integrale definito.

Definizione 14.1 (Integrale definito)**.** Data una funzione $f(x)$ continua e positiva (o nulla) in un intervallo $[a, b]$, si definisce **integrale definito** da a a b il valore comune del limite per $n \to +\infty$ delle successioni $\{\sigma_n\}$ e $\{\Omega_n\}$; tale valore viene indicato tramite il simbolo

$$\int_a^b f(x)\, dx \tag{14.1}$$

Dal punto di vista geometrico, l'operazione di integrale definito corrisponde a determinare la parte di piano sottesa alla funzione f nell'intervallo $[a, b]$, ovvero l'area della figura delimitata dall'asse delle ascisse, dalla funzione e dalle rette parallele all'asse delle ordinate che delimitano l'intervallo.

La definizione di integrale definito che abbiamo dato, però, ha come ipotesi una funzione positiva o nulla nell'intevallo di integrazione.
Se, nell'intervallo considerato, la funzione fosse negativa, per poter determinare l'area sottesa alla funzione basta determinare l'opposto del valore dei limiti delle successioni.

Esempio 14.1

$$f(x) = c$$

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{b-a}{n} \cdot f(x_i) \right) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} c = \frac{b-a}{n} \cdot nc = (b-a) \cdot c$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b c\,\mathrm{d}x = \lim_{n \to +\infty} \sigma_n = (b-a) \cdot c$$

Esempio 14.2

$$f(x) = x$$

$$\begin{aligned}
\sigma_n &= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{b-a}{n} \cdot f(x_i) \right) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i = \\
&= \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(a + i \cdot \frac{b-a}{n} \right) = \frac{b-a}{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a + \sum_{i=0}^{n} i \cdot \frac{b-a}{n} \right) = \\
&= \frac{b-a}{n} \cdot na + \left(\frac{b-a}{n} \right)^2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} = (b-a) \cdot a + \frac{(b-a)^2(n+1)}{2n}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b x\,\mathrm{d}x &= \\
&= \lim_{n \to +\infty} \sigma_n = (b-a) \cdot a + \frac{(b-a)^2}{2} = \\
&= \frac{2ab - 2a^2 + b^2 - 2ab + a^2}{2} = \frac{b^2 - a^2}{2}
\end{aligned}$$

14.2 Teoremi sull'integrale definito

Vediamo ora alcuni teoremi che forniscono proprietà importanti per l'operazione di integrale definito.

Teorema 14.2 (Integrazione di combinazioni lineari o della linearità). *Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni continue in un intervallo $[a,b]$ e siano $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ due valori reali.*
Se il limite per $n \to +\infty$ delle successioni $\{\sigma_n\}$ e $\{\Omega_n\}$ esistono e sono finiti e coincidenti, allora

$$\int_a^b [c_1 f(x) + c_2 g(x)]\, dx = c_1 \int_a^b f(x)\, dx + c_2 \int_a^b g(x)\, dx \tag{14.2}$$

Teorema 14.3 (Additività). *Sia $f(x)$ una funzione continua in un intervallo $[a,b]$ e sia $c \in [a,b]$ un punto dell'intervallo. In queste condizioni,*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx \tag{14.3}$$

Teorema 14.4 (Confronto tra integrali). *Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni continue in uno stesso intervallo $[a,b]$ e sia $f(x) \leq g(x)\ \forall x \in [a,b]$. Sotto queste condizioni, si ha*

$$\int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx \tag{14.4}$$

Corollario 14.1 (Teorema dell'integrale del valore assoluto). *Sia $f(x)$ una funzione continua in un intervallo $[a,b]$ e sia $f(x) \leq |f(x)|,\ f(x) \geq -|f(x)|$. Sotto queste condizioni, si ha che*

$$\int_a^b -|f(x)|\, dx \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b |f(x)|\, dx$$

cioè

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx \tag{14.5}$$

Inoltre, in base alla definizione di integrale definito, possiamo fornire le seguenti nozioni:

- $\int_a^a f(x)\, dx = 0$
- se $a > b$, $\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx$

Grazie al teorema dell'additività, possiamo ora spiegare come determinare l'integrale di una funzione completamente o solo in parte negativa (Figura 14.2):

$$A = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x =$$
$$= \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x - \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x \text{ (con } \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x < 0)$$

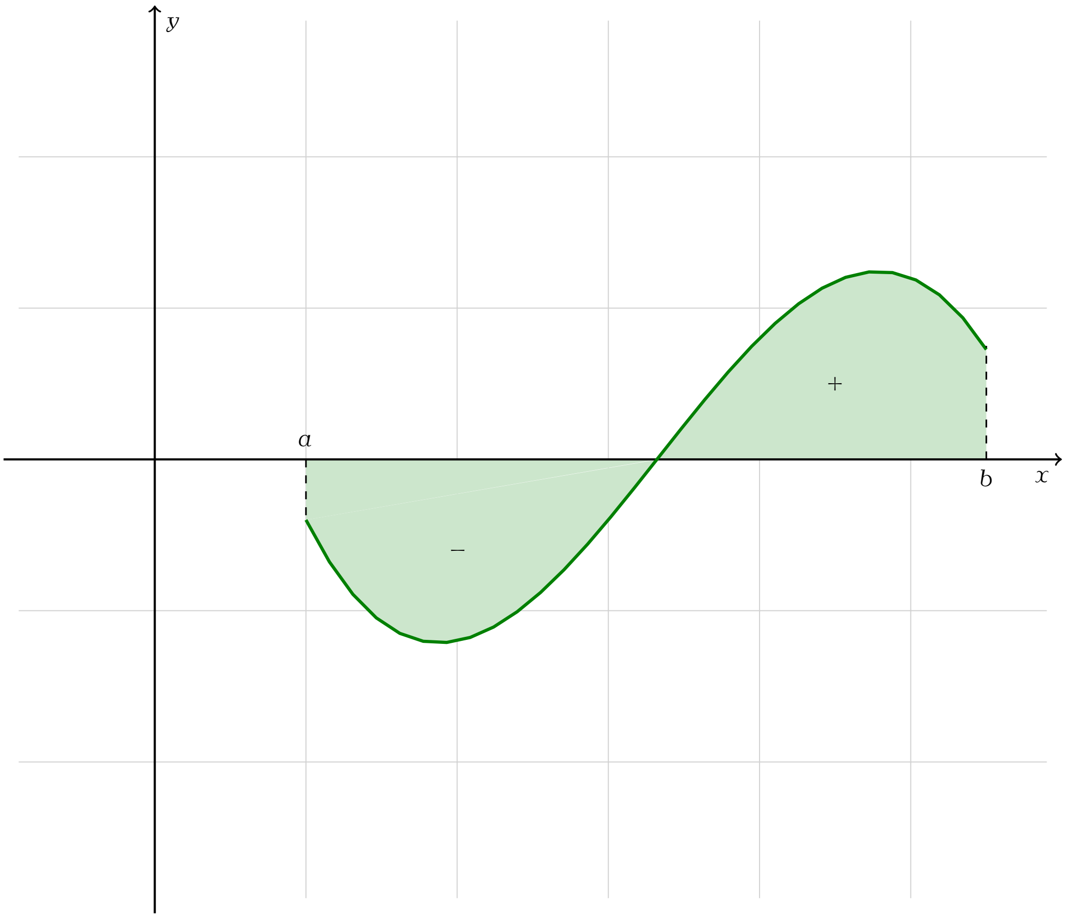


Figura 14.2: Integrale di funzione a parte negativa

14.3 Calcolo dell'integrale definito

Iniziamo ora a vedere i teoremi fondamentali per il calcolo di un integrale definito.

Teorema 14.5 (della media). *Se $f(x)$ è una funzione continua in un intervallo $[a, b]$, allora esiste almeno un punto $x \in [a, b]$ tale che* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(c) \cdot (b - a)$.

Dimostrazione: Poiché la funzione $f(x)$ è continua nell'intervallo $[a, b]$, per il teorema di Weierstrass la funzione assume nel suo intervallo il suo valore massimo $M = \max_{x \in [a,b]} f(x)$ e il suo valore minimo $m = \min_{x \in [a,b]} f(x)$.
Quindi, per ogni x appartenente all'intervallo deve valere la disuguaglianza $m \leq f(x) \leq M$.

Per la proprietà degli integrali, vale la disuguaglianza:

$$\int_a^b m \, dx \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b M \, dx$$

Determiniamo gli integrali delle funzioni costanti:

$$(b - a) \cdot m \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq (b - a) \cdot M$$

Divido per $(b - a)$:

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x) \, dx}{(b - a)} \leq M$$

Per il teorema dei valori intermedi, la funzione deve assumere almeno una volta tutti i valori compresi tra il suo massimo e il suo minimo, quindi deve esistere un punto $c \in [a, b]$ tale che:

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x) \, dx}{(b - a)}$$

$\square$

Teorema 14.6 (della media pesata)**.** *Se $f(x)$ e $g(x)$ sono funzioni continue in un intervallo $[a, b]$ e se $g(x) \geq 0$ (oppure $g(x) \leq 0$) nell'intervallo, allora*

$$\int_a^b [f(x) \cdot g(x)] \, dx = f(c) \cdot \int_a^b g(x) \, dx \tag{14.6}$$

Questi teoremi ci servono per enunciare il *primo teorema fondamentale del calcolo integrale*, detto anche *teorema di Torricelli–Barrow*.

Teorema 14.7 (Torricelli-Barrow)**.** *Sia $f(x)$ una funzione continua in un intervallo $[a, b]$ e sia $x_0 \in [a, b]$. Se $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t) \, dt \quad \forall x \in [a, b]$, allora F è derivabile nell'intervallo e $F'(x) = f(x)$ $\forall x \in [a, b]$.*

Nella definizione del teorema di Torricelli–Barrow appare una particolare funzione continua nello stesso intervallo di definizione dell'integrale definito; questa funzione prende il nome di *funzione integrale*.

Definizione 14.2 (Funzione integrale)**.** Sia $f(x)$ una funzione continua in un intervallo $[a, b]$ e sia $x_0 \in [a, b]$. Si definisce **funzione integrale di f nell'intervallo** $[a, b]$ la funzione

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t) \, dt \tag{14.7}$$

Possiamo definire un metodo di calcolo per gli integrali definiti.

Teorema 14.8 (2° teorema fondamentale (corollario del teorema di Torricelli–Barrow)). *Se $f(x)$ fosse una funzione continua in un intervallo $[a,b]$ e se $G(x)$ fosse una primitiva della funzione $f(x)$ nello stesso intervallo, allora*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = G(b) - G(a) \tag{14.8}$$

14.4 Calcolo delle aree

Come abbiamo visto finora, l'integrale definito tra a e b rappresenta l'area della regione di piano delimitata dal grafico della funzione $f(x)$, dall'asse x e dalle rette $x = a$ e $x = b$.
L'integrale definito può essere usato anche per calcolare l'area compresa tra due funzioni e le rette $x = a$ e $x = b$.

Teorema 14.9. *Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni continue nello stesso intervallo $[a;b]$, con $f(x) \geq g(x)$ $\forall x \in [a;b]$, i cui grafici racchiudano una superficie S. L'area della superficie S è data da*

$$s = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x$$

14.5 Gli integrali impropri

Tutto quello che abbiamo visto è valido se l'intervallo di integrazione è chiuso. Cosa succede se l'intervallo di integrazione è aperto da uno dei due lati? Cosa se l'intervallo di integrazione contiene punti di discontinuità?
Questi scenari sono frequenti in applicazioni geometriche, fisiche, statistiche, etc. e portano alla definizione dello strumento dell'**integrale improprio** (Figura 14.3).

Esistono due tipi di integrali impropri.

Definizione 14.3 (Integrale improprio all'infinito)**.** Sia $f(x)$ una funzione continua nell'intervallo $[a; +\infty)$. Se esiste il limite

$$\lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

allora prende il nome di **integrale improprio in** $[a; +\infty)$.
Si indica con il simbolo

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Viceversa, se $f(x)$ è continua nell'intervallo $(-\infty; b]$ ed esiste il limite

$$\lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

allora questo limite prende il nome di **integrale improprio in** $(-\infty; b]$ e si indica con il simbolo

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Definizione 14.4 (Integrale improprio al finito)**.** Sia $f(x)$ una funzione continua nell'intervallo $(a; b]$. Se esiste il limite

$$\lim_{c \to a^+} \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

allora prende il nome di **integrale improprio in** $(a; b]$.
Si indica con il simbolo

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Viceversa, se $f(x)$ è continua nell'intervallo $[a; b)$ ed esiste il limite

$$\lim_{c \to b^-} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

allora questo limite prende il nome di **integrale improprio in** $(-\infty; b]$ e si indica con il simbolo

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Un integrale improprio può essere

- **convergente** se il limite che lo definisce è finito;
- **divergente** se il limite diverge positivamente o negativamente;
- **indeterminato** (o *oscillante*) se il limite non esiste.

Gli integrali impropri godono delle seguenti proprietà.

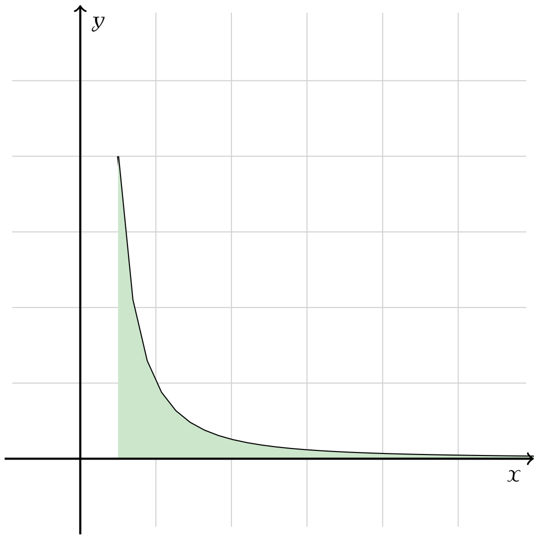


Figura 14.3: Integrale improprio

Teorema 14.10 (Omogeneità e additività rispetto al dominio)**.** *Se $f(x)$ è continua nell'intervallo $[a; +\infty)$, allora:*

$$\forall k \neq 0 \qquad \int_a^{+\infty} k \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = k \cdot \int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\forall b > a \qquad \int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^{b} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Analogamente per gli altri intervalli.

Teorema 14.11 (Funzioni positive)**.** *L'integrale improprio di una funzione positiva ($f(x) \geq 0$) può solo convergere o divergere positivamente.*

14.6 Calcolo dei volumi dei solidi di rotazione

Consideriamo la funzione $f(x)$, continua nell'intervallo $[a; b]$ e non negativa, e il trapezoide esteso all'intervallo $[a; b]$. Se facciamo ruotare il trapezoide attorno all'asse x di un giro completo), otteniamo un solido di rotazione.
Per calcolare il volume di tale solido, dividiamo l'intervallo in n parti uguali, ognuna di lunghezza $h = \frac{b-a}{n}$. In ogni intervallo consideriamo il valore minimo m_i e il valore massimo M_i della funzione e disegniamo i rettangoli inscritti e circoscritti all'area sottesa, rispettivamente di altezze m_i e M_i. Nella rotazione completa intorno all'asse delle x ogni rettangolo descrive un cilindro circolare retto di altezza h e raggio di base m_i o M_i.
La somma dei volumi degli n cilindri con base il cerchio di raggio m_i approssima per difetto il volume del solido di rotazione iniziale, e la somma dei volumi degli n cilindri con base il cerchio di raggio M_i approssima per eccesso il volume dello stesso solido. Si può dimostrare che, quando $n \to +\infty$, le due successioni tendono allo stesso limite e tale limite è uguale al prodotto di π per l'integrale definito da a a b del quadrato di $f(x)$.

Definizione 14.5. Dato il trapezoide esteso all'intervallo $[a; b]$, delimitato dal grafico della funzione $f(x)$ (positiva o nulla), dall'asse x e dalle rette $x = a$ e $x = b$, si chiama **volume del solido** che si ottiene ruotando il trapezoide intorno all'asse x di un giro completo il valore calcolato come

$$V = \pi \cdot \int_a^b f^2(x)\, \mathrm{d}x$$

Parte IV

Serie

Capitolo 15

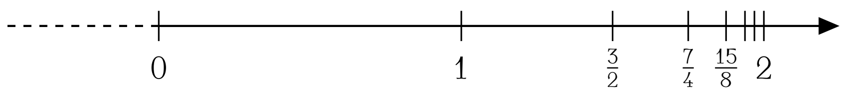
Serie numeriche

Finora abbiamo parlato di operazioni con un numero di elementi finito nel campo dei numeri reali e complessi. Possiamo però estendere il concetto dell'operazione di addizione ad elementi infiniti.

I matematici del seicento e del settecento si dedicarono con passione ai calcoli con processi infiniti. Tuttavia, poiché ancora non era stato elaborato con precisione il concetto di limite, spesso ottennero risultati discutibili, con giustificazioni fantasiose e spesso poco convincenti. Solo con l'avvento del calcolo infinitesimale il concetto di *serie* è stato definito.

15.1 Definizione

Iniziamo ora a definire il concetto di serie, ponendoci in una condizione geometrica particolare.



Consideriamo un segmento di lunghezza 2 e dividiamolo a metà, ottenendo due segmenti di lunghezza unitaria.
Lasciando fissa la lunghezza di uno dei due segmenti, possiamo continuare a dividere l'altro, fino a dire che la lunghezza del segmento complessivo è

$$2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

Possiamo generalizzare il concetto descritto finora.

Definizione 15.1 (Serie)**.** Data una successione $\{a_k\}$, si definisce **serie associata alla successione** la somma degli elementi della successione.

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

Per ogni indice n della successione, si costruisce la successione $\{S_n\}$ (detta **successione delle somme parziali**) nel seguente modo:

$$\begin{aligned} S_0 &= a_0 \\ S_1 &= a_1 + a_0 \\ S_2 &= a_2 + a_1 + a_0 \\ &\vdots \\ S_n &= \sum_{k=0}^{n} a_k \end{aligned}$$

Una volta costruita, si studia il suo comportamento limite:

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

Poichè, per costruzione, una serie numerica è un limite, possiamo determinare il **carattere della serie**, ovvero il comportamento del limite.

Definizione 15.2. Data la successione $\{a_k\}$ e posto $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, si consideri il limite $\lim_{n\to+\infty} S_n$.

- Se il limite esiste ed è finito, si dice che la serie numerica $\sum_{k=0}^{n} a_k$ **converge** e il suo valore è detto **somma della serie**.
- Se il limite esiste ed è infinito, si dice che la serie numerica $\sum_{k=0}^{n} a_k$ **diverge**.
- Se il limite non esiste, si dice che la serie numerica $\sum_{k=0}^{n} a_k$ è **indeterminata**.

Se i termini della serie sono numeri, reali o complessi, che dipendono solo da n e non da altre variabili, la serie prende il nome di **serie numerica**.

15.2 La serie telescopica

Una **serie telescopica** $\sum_{k=0}^{n} a_k$ è una particolare serie numerica, il cui carattere è facilmente determinabile.
Per questo tipo di serie, il termine generale è possibile definirlo come $a_k = b_k + b_{k-1}$, per una opportuna successione $\{b_k\}$. In queste condizioni, i termini intermedi dello sviluppo della serie si annullano a coppie, in modo che per studiare il carattere della serie $\{a_k\}$ occorre studiare il carattere della serie $\{b_k\}$.

Una particolare serie telescopica è la cosiddetta **serie di Mengoli**

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} \tag{15.1}$$

che risulta essere convergente al valore 1.

Teorema 15.1.
$$\lim_{k\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}=1$$

Dimostrazione:
$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=$$
$$\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=1-\frac{1}{k-1}$$
$$\lim_{k\to+\infty}\left(1-\frac{1}{k-1}\right)=1$$
□

15.3 La serie geometrica

Un'altra serie numerica di cui è facilmente determinabile il carattere è la serie geometrica.

Una **serie geometrica** è definibile tramite il simbolo

$$\sum_{k=0}^{\infty}q^k \quad (q\in\mathbb{R})$$

Per questa serie, l'ennesimo termine è definito come somma dello stesso valore, ma con esponente crescente ($s_n=1+q+q^2+\cdots+q^n$).
Il valore q è detto **ragione della serie** (o *ragione della progressione*).

Possiamo distinguere due principali casi:

- $q=1$, la somma parziale, quindi la serie, diverge positivamente;
- $q\neq 1$, la somma parziale è riscrivibile come $s_n\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$, e la serie avrà carattere differente a seconda del valore della ragione.

$$\sum_{k=0}^{\infty}q^k=\begin{cases}+\infty, & \text{se } q\geq 1\\ \frac{1}{1-q}, & \text{se } |1|<1\\ \nexists, & \text{se } q\leq -1\end{cases} \tag{15.2}$$

15.4 Teoremi sulle serie numeriche

Oltre ai teoremi già visti sulle successioni, esiste anche il seguente, che ci tornerà utile nella nostra discussione sulle serie numeriche.

Teorema 15.2. *Se $\{a_k\}$ è una successione numerica strettamente monòtona, allora la successione è regolare.*

Possiamo ora effettuare una serie di considerazioni.

Se la successione è strettamente crescente e illimitata superiormente, allora la serie divergerà positivamente.
Se è la successione limitata superiormente, allora la serie convergerà al valore del limite superiore.

Allo stesso modo, se la successione è strettamente descrescente e illimitata inferiormente, allora la serie divergerà inferiormente.
Se la successione è limitata inferiormente, la serie convergerà al valore del limite inferiore.

Grazie a queste considerazioni, possiamo definire una condizione sufficiente per la regolarità di una serie numerica.

Teorema 15.3 (Condizione sufficiente per la regolarità di una serie numerica)**.** *Se* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *è una serie a termini di segno positivo (o negativo), cioè se* $a_k > 0$ *(o* $a_k < 0$*)* $\forall k \in \mathbb{N}$*, allora la serie è regolare.*

Dimostrazione: Consideriamo due somme parziali $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ e $S_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} a_k$.
Se le serie sono a termini di segno positivo, abbiamo che $S_n < S_{n+1}$, quindi la successione è strettamente crescente, cioè è regolare.
Se le serie sono a termini di segno negativo, abbiamo che $S_n > S_{n+1}$, quindi la successione è strettamente decrescente, cioè è regolare. □

Teorema 15.4 (Criterio di convergenza di Cauchy per le successioni - condizione necessaria e sufficiente)**.** *Sia* $\{a_k\}$ *una successione numerica. La successione converge* <u>*se e solo se*</u>

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 | \forall k > \delta_\varepsilon \text{ e } \forall p \in \mathbb{N} \text{ si ha } |a_{k+p} - a_k| < \varepsilon \tag{15.3}$$

Teorema 15.5 (Criterio di convergenza di Cauchy per le serie numeriche - condizione necessaria e sufficiente)**.** *Sia* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *una serie numerica. La serie converge* <u>*se e solo se*</u>

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 | \forall n > \delta_\varepsilon \text{ e } \forall p \in \mathbb{N} \text{ si ha } |S_{k+p} - S_k| < \varepsilon \tag{15.4}$$

ovvero

$$|\sum_{k=1}^{n+p} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_k| < \varepsilon \Rightarrow |\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k| < \varepsilon \tag{15.5}$$

Dal criterio sulle successioni possiamo notare che se $p = 1$, allora $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 | \forall k > \delta_\varepsilon, |a_{k+1}| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{k \to +\infty} a_{k+1} = \lim_{k \to +\infty} a_k = 0$.
Grazie a questa osservazione, possiamo tranquillamente dimostrare una condizione necessaria per la convergenza di una serie.

Teorema 15.6 (Condizione necessaria per la convergenza di una serie numerica)**.** *Sia* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *è una serie numerica convergente. Necessariamente si ha che* $\lim_{k \to +\infty} a_k = 0$.

Esempio 15.1

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{3k^2+1}{k^2+3}\right)$$

La serie in questione non converge, poichè $\lim_{k\to+\infty}\left(\frac{3k^2+1}{k^2+3}\right)=3\neq 0$.
Poichè la serie è a termini di segno positivo, la serie diverge.

Tutti questi criteri sono validi se lavoriamo con una sola serie. Ma cosa succede se lavoriamo con una combinazione lineare di due successioni?

Teorema 15.7. *Siano* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *e* $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ *due serie numeriche convergenti e siano* $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.
Allora anche $\sum_{k=0}^{\infty}(\alpha\cdot a_k+\beta\cdot b_k)$ *converge e si ha che*

$$\sum_{k=0}^{\infty}(\alpha\cdot a_k+\beta\cdot b_k)=\alpha\sum_{k=0}^{\infty}a_k+\beta\sum_{k=0}^{\infty}b_k \tag{15.6}$$

Se una delle due serie diverge, si ha che

$$\sum_{k=0}^{\infty}(\alpha\cdot a_k+\beta\cdot b_k)=\begin{cases}+\infty, & \text{se } \beta>0\\ -\infty, & \text{se } \beta<0\\ \alpha\sum_{k=0}^{\infty}a_k, & \text{se } \beta=0\end{cases} \tag{15.7}$$

Se entrambi le serie divergono (tranne che nel caso in cui, tenendo conto anche dei segni di α *e* β*, si ottenga la forma indeterminata* $+\infty-\infty$*) si ha che*

$$\sum_{k=0}^{\infty}(\alpha\cdot a_k+\beta\cdot b_k=\begin{cases}+\infty, & \text{se } \alpha,\beta>0\\ -\infty, & \text{se } \alpha,\beta<0\end{cases} \tag{15.8}$$

Se una delle serie è irregolare, non possiamo affermare niente.

15.5 Serie armonica

Possiamo sfruttare i criteri appena definiti per parlare dell'ultimo tipo di serie che analizziamo: le *serie armoniche*.

Una **serie armonica** viene indicata tramite il simbolo

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k} \tag{15.9}$$

e rappresenta la sommatoria infinita dei reciproci dei numeri naturali.
Il suo nome deriva dal fatto che le armoniche prodotte da un corpo in vibrazione sono definite come rapporto tra la loro frequenza e la frequenza dell'armonica fondamentale e si possono esprimere come addendi di una serie armonica.

La serie armoniche sono regolari, in quanto sono a termini di segno positivo; inoltre, $\lim\limits_{k \to +\infty} \frac{1}{k} = 0$, quindi, per uno dei teoremi visti nella sezione precedente, la serie potrebbe essere convergente.
Sfruttando quindi il criterio di convergenza di Cauchy, otteniamo il seguente risultato.

Teorema 15.8. *Una serie armonica* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ *diverge positivamente.*

Dimostrazione (per assurdo)**:** Ipotizziamo che la serie armonica converga.
In base alla definizione di serie convergente, allora $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 | \forall n > \delta_\varepsilon$ e $p = n$ si ha $\left| \sum\limits_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \right| < \varepsilon$, il che implica:

$$\left| \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} \right| < \varepsilon$$

Poiché $n+1 \leq 2n, n+2 \leq 2n, \ldots$, cioè

$$\left| \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} \geq \underbrace{\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n}}_{n \text{ volte}} \right| < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left| \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2} \right| < \varepsilon$$

Tutto ciò è assurdo, quindi la serie è divergente. □

15.6 Criteri per l'analisi del carattere di una serie

Non potendo quasi mai determinare una forma chiusa della somma parziale di una serie (escluse alcune eccezioni già note), diventa impossibile determinare il carattere della serie stessa mediante il limite della successione delle sue somme parziali, come abbiamo visto finora con il criterio di Cauchy.
Esistono tuttavia alcuni criteri utili per determinare il carattere di una serie numerica $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ se questa ha tutti termini di segno costante (per esempio $a_k \geq 0$ oppure $a_k \leq 0$).
Senza perdere di generalità nella nostra trattazione, possiamo supporre $a_k > 0$ ($a_k < 0$), poichè se uno dei termini è nullo, è possibile sostituire la serie data $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ con una equivalente $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ dove $b_k > 0$ ($b_k < 0$).

Sfruttando questa condizione (segno costante della serie), possiamo stabilire dei semplici **criteri di convergenza**.

Criterio del confronto

Il primo criterio di convergenza che analizziamo è noto come criterio del confronto.

Definizione 15.3 (Criterio del confronto). Siano $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ e $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ due serie numeriche, con $a_k > 0$ e $b_k > 0$ e sia $a_k \leq b_k \forall k \in \mathbb{N}_0$.
Se $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ è una serie convergente, allora $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ converge.
Se $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ è una serie divergente, allora $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ diverge.

Si dice che la serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ (**serie dominante**) maggiora quella a termini a_k, mentre $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ (**serie dominata**) minora quella a termini b_k.
Il criterio continua a sussistere anche quando la relazione d'ordine $a_k \leq b_k$ non è verificata $\forall k \in \mathbb{N}_0$ purché lo sia almeno da un certo punto in poi, cioè $\forall k > k_0$.

Esempio 15.2

Determina il carattere della serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\sin k|}{2^k}$$

usando il criterio del confronto.

$$\frac{|\sin k|}{2^k} > 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$$
$$\frac{|\sin k|}{2^k} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

Poiché $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k$ *converge, allora la serie converge.*

Esempio 15.3

Determina il carattere della serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\sin k|}{k}$$

usando il criterio del confronto.

$$\frac{|\sin k|}{k} > 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$$
$$0 \leq \frac{|\sin k|}{k} \leq \frac{1}{k}$$

Poiché $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ *diverge, allora non possiamo affermare nulla sul carattere della serie.*

Criterio della radice

Un altro criterio di convergenza applicabile è il criterio della radice.

Definizione 15.4 (Criterio della radice)**.** Sia $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ una serie numerica, con $a_k > 0\ \forall k \leq k_0$. Supponiamo che $\lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{a_k} = \Lambda$.

Se $0 \leq \Lambda < 1$, allora $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge.

Se $\Lambda > 1$ oppure $\Lambda = +\infty$, allora $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverge.

Se $\Lambda = 1$, allora non possiamo affermare nulla sul carattere della serie.

Esempio 15.4

Determina il carattere della serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2k-1}{3k^2+2}\right)^k$$

usando il criterio della radice.

$$\lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{\left(\frac{2k-1}{3k^2+2}\right)^k} = \lim_{k\to+\infty} \frac{2k-1}{3k^2+2} = 0$$

La serie converge.

Criterio del rapporto

Definizione 15.5 (Criterio del rapporto)**.** Sia $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ una serie numerica, con $a_k > 0\ \forall k \geq k_0$. Supponiamo che $\lim_{k\to+\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \Lambda$.

Se $0 \leq \Lambda < 1$, allora $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge.

Se $\Lambda > 1$ oppure $\Lambda = +\infty$, allora $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ diverge.

Se $\Lambda = 1$, allora non possiamo affermare nulla sul carattere della serie.

Esempio 15.5

Determina il carattere della serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

usando il criterio del rapporto.

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to+\infty} \frac{\frac{1}{k+1}}{\frac{1}{k}} = \lim_{k\to+\infty} \frac{k}{k+1} = 1$$

Non si può stabilire il carattere della serie.

Esempio 15.6

Determina il carattere della serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{2^k}$$

usando il criterio del rapporto.

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to+\infty} \frac{\frac{(k+1)!}{2^{k+1}}}{\frac{k}{2^k}} = \lim_{k\to+\infty} \frac{k+1}{2} = +\infty$$

La serie diverge.

Esempio 15.7

Determina il carattere della serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k!}$$

usando il criterio del rapporto.

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to+\infty} \frac{\frac{2^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{2^k}{k!}} = \lim_{k\to+\infty} \frac{2}{k+1} = 0$$

La serie converge.

Criterio dell'integrale

Definizione 15.6 (Criterio dell'integrale)**.** Sia $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ una serie numerica, con $a_k > 0\ \forall k \geq k_0$. Sia $\{a_k\}$ una successione decrescente $\forall k \geq k_0$ e sia $\lim_{k\to+\infty} a_k = 0$. Sia $y = f(x)$, con $x \geq x_0$, la funzione associata alla successione $\{a_k\}$ e sia $\{t_k\}$ la successione numerica definita come

$$\{t_k\} = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx > 0$$

Se $\{t_k\}$ converge, allora $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge.

Se $\{t_k\}$ diverge, allora $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ diverge.

Esempio 15.8

Determina il carattere della serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}, \quad \alpha > 0$$

usando il criterio dell'integrale.

La serie qui proposta è nota come ***serie armonica generalizzata****.*
Consideriamo solo il caso $\alpha \neq 1$:

$$f(x) = \frac{1}{x^\alpha} \text{ è decrescente in } [1, +\infty)$$

$$\{t_k\} = \int_1^k \frac{1}{x^\alpha}\, dx = \left.\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right|_1^k = \frac{1}{1-\alpha}(k^{1-\alpha} - 1)$$

$$\lim_{k\to+\infty} \left[\frac{1}{1-\alpha}(k^{1-\alpha} - 1)\right] = \begin{cases} +\infty, & \text{se } 0 < \alpha \leq 1 \\ \frac{1}{\alpha-1}, & \text{se } \alpha > 1 \end{cases}$$

La serie diverge per $0 < \alpha \leq 1$ e converge per $\alpha > 1$.

Criterio del confronto asintotico

Definizione 15.7 (Criterio del confronto asintotico)**.** Sia $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ una serie numerica, con a_k $\forall k \geq k_0$. Sia $\lim_{k\to+\infty} k^\alpha a_k = \lim_{k\to+\infty} \frac{a_k}{\frac{1}{k^\alpha}}$, con $\alpha > 0, \Lambda \geq 0 o \Lambda = +\infty$.
Se $\alpha > 1$ e $\Lambda = 0 \vee l > 0$, allora $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge.
Se $0 < \alpha \leq 1$ e $\Lambda = +\infty \vee l > 0$, allora $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ diverge.

Esempio 15.9

Determina il carattere della serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \log\left(\frac{k^2 + 5k - 2}{k^2 + 3}\right), \; k \geq 2$$

usando il criterio del confronto asintotico.

$$\lim_{k\to+\infty} \log\left(\frac{k^2 + 5k - 2}{k^2 + 3}\right) = 0^+$$

$$\lim_{k\to+\infty} \left[k^\alpha \log\left(\frac{k^2 + 5k - 2}{k^2 + 3}\right)\right] = ?$$

Per determinare questo limite, sfrutto il teorema di De L'Hôpital.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log\left(\frac{x^2+5x-2}{x^2+3}\right)}{\frac{1}{x^\alpha}} \overset{\text{Hôpital}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^2+3}{x^2+5x-2}\cdot\frac{(2x+5)(x^2+3)-(x^2+5x-2)2x}{(x^2+3)^2}}{-\alpha\frac{1}{x^{\alpha+1}}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{2x^2+6x+5x^2+15-2x^3-10x^2+4x}{(x^2+5x-2)(x^2+3)}}{-\alpha\cdot x^{-\alpha-1}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-5x^2+10x+15}{-\alpha\cdot x^{-\alpha-1}\cdot(x^4+5x^3+x^2+15x-6)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-5x^{\alpha+3}+10x^{\alpha+2}+15^{\alpha+1}}{-\alpha\cdot(x^4+5x^3+x^2+15x-6)}$$

Se $\alpha = 1$, *allora* $\Lambda = 5$ *e la serie diverge.*
Se $\alpha < 1$, *allora* $\Lambda \to +\infty$ *e la serie diverge.*
Se $\alpha > 1$, *allora* $\Lambda = 0$ *e la serie converge.*

15.7 Serie a termini di segno alternato

Finora abbiamo considerato solamente serie a termini di segno costante (positivo o negativo).
Eliminiamo ora questa restrizione, considerando **serie numeriche a termini di segno alternato**, ovvero serie numeriche nella forma

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k \quad (a_k > 0)$$

o nella forma più generica

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k |a_k| \tag{15.10}$$

Per questo tipo di serie numerica non possiamo usare i criteri visti in precedenza per stabilire il suo carattere, ma possiamo utilizzarne uno particolare, detto *criterio di Leibniz.*

Teorema 15.9 (Criterio di Leibniz). *Sia* $\{a_k\}$ *una successione numerica decrescente e infinitesima* $\forall k \geq k_0$. *Sia inoltre* $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k \quad (a_k > 0)$ *una serie numerica di segno alterno.*
Con queste condizioni, la serie converge.

Esempio 15.10

Determina il carattere della serie

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}$$

usando il criterio di Leibniz.

> *Impongo che il termine generale della serie sia positivo.*
>
> $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^k}{k} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$
>
> *Poiché $\{\frac{1}{k}\}$ decresce e tende a zero, la serie converge.*

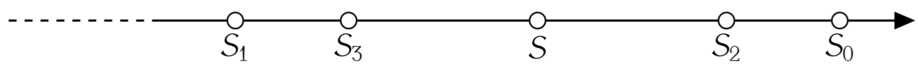
Il criterio di Leibniz fornisce una ulteriore informazione. Poiché suppone che la serie converga, possiamo parlare della sua somma $(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k = S)$.
Essendo, inoltre, una serie numerica, possiamo parlare delle seguenti somme parziali

$$\begin{aligned} S_0 &= a_0 \\ S_1 &= S_0 - a_1 \\ S_2 &= S_1 + a_2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

per cui valgono le seguenti relazioni d'ordine:

$$S_0 - S > S - S_1 > S_2 - S > S - S_3 > \ldots$$

Dal punto di vista geometrico, quindi, le distanze tra la somma S e le somme parziali tendono a diminuire di valore fino a convergere a zero.



In conclusione, il criterio di Leibniz afferma anche che

$$|S - S_n| > |S - S_{n+1}| \quad \forall n \in \mathbb{R} \tag{15.11}$$

Inoltre, poichè $S_{n+1} = S_n + (-1)^{n+1} a_{n+1}$, abbiamo che

$$|S - S_{n+1}| < a_{n+1} \Rightarrow |S - (-1^{n+1}) a_{n+1}| < a_{n+1} \tag{15.12}$$

15.8 Serie a termini generici

Eliminiamo ora anche l'ultima restrizione sul segno del termine della serie e consideriamo le **serie a termini generici**, cioè non costanti e non alterni.

Per studiare il carattere di queste serie, è utile riportarsi ad una serie a termini positivi e studiare il carattere di questa serie; si parla, in questo caso, di **convergenza assoluta**.

Teorema 15.10. *Se la serie numerica $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ converge, allora la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ **converge assolutamente**.*

15.9 Operazioni tra serie numeriche

Definiamo ora le operazioni di somma tra due serie, di prodotto di una serie per uno scalare e di prodotto tra due serie.

Teorema 15.11 (Linearità delle serie). *Siano* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ e $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ *due serie. La somma tra due serie è definita come*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) \tag{15.13}$$

Se entrambi le serie convergono, la serie somma converge alla somma delle due serie. Se entrambi le serie divergono positivamente o negativamente, la serie somma diverge. Se una serie è indeterminata o diverge di segno opposto all'altra, la serie somma è indeterminata.

Teorema 15.12 (Prodotto di una serie per uno scalare). *Sia* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ *una serie numerica e sia* $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. *La serie* $\alpha \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *è definita come la serie in cui il termine generale è* $\alpha \cdot a_k$. *Il comportamento di questa serie coincide con il comportamento della serie* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$.

Teorema 15.13 (Prodotto di Cauchy). *Siano* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ e $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ *due serie. Il prodotto tra due serie è definita come*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \times \sum_{k=0}^{\infty} b_k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \tag{15.14}$$

dove $c_k = \sum_{i=0}^{\infty} a_k b_{k-i}$.
Se le due serie sono convergenti (assolutamente convergenti nel caso di serie a termini generici) allora il prodotto è convergente e la sua somma vale il prodotto delle somme delle serie date.

15.10 Esercizi su serie numeriche

Per completare il discorso sulle serie numeriche, vediamo qualche esercizio simile a quelli proposti agli esami.

Esercizio 15.1

Studia il carattere della serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt[5]{k}}{k\sqrt[3]{k} + \log k^2}$$

Sfrutto il criterio del confronto asintotico, con $\alpha > 0$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\frac{1}{5}+\alpha}}{x^{\frac{4}{3}} + 2\log x} \overset{\text{Hôpital}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\frac{1}{5}+\alpha\right) x^{\alpha-\frac{4}{5}}}{\frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} + \frac{2}{x}} \overset{\text{moltiplico per } x}{=}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\frac{1}{5}+\alpha\right) x^{\frac{1}{5}+\alpha}}{\frac{4}{3}x^{\frac{4}{3}} + 2} = \frac{\frac{1}{5}+\alpha}{\frac{4}{3}} \text{ se } \frac{1}{5}+\alpha = \frac{4}{3} \Rightarrow \alpha = \frac{17}{15}$$

Poichè $\alpha > 1$ e $\Lambda = 1$, la serie converge.

Esercizio 15.2

Sia $\{s_k\} = \{\sqrt[k]{a_k}.1\}$ una successione numerica tale che $-1 < \sup s_k < 0$ $a_k > 0$.
Dimostrare che

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

converge.

Pongo $\Lambda = \sup s_k$; in questo modo:

$$s_k \le \Lambda \Rightarrow \sqrt[k]{a_k} - 1 \le \Lambda \Rightarrow \sqrt[k]{a_k} \le \Lambda + 1 \Rightarrow a_k \le (\Lambda+1)^k$$

Studio ora la serie geometrica $\sum_{k=1}^{\infty}(\Lambda+1)^k$. Poiché $-1 < \Lambda < 0$, allora $0 < \Lambda + 1 < 1$, quindi la serie converge; in base al criterio del confronto, in conclusione, la serie richiesta converge.

Esercizio 15.3

Determina il carattere della serie

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\arcsin \frac{1}{k}}{k\sqrt{k^2-1}}$$

Uso il criterio dell'integrale.

$$f(x) = \frac{\arcsin \frac{1}{x}}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$\{t_k\} = \int_2^k \frac{\arcsin \frac{1}{x}}{x\sqrt{x^2-1}}\, dx$$

Sostituisco $t = \frac{1}{x} \longrightarrow dx = -\frac{1}{t^2}dt$:

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{k}} \frac{\arcsin t}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1}{t^2}-1}} \left(-\frac{1}{t^2}\right) \mathrm{d}t = -\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{k}} \frac{\arcsin t}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1-t^2}{t^2}}} \left(\frac{1}{t^2}\right) \mathrm{d}t = -\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{k}} \frac{\arcsin t}{\frac{1}{t^2}\sqrt{1-t^2}} \left(\frac{1}{t^2}\right) \mathrm{d}t =$$

$$= -\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{k}} \frac{\arcsin t}{\sqrt{1-t^2}} \mathrm{d}t = -\frac{\arcsin^2 t}{2}\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{k}} = -\frac{\left(\arcsin \frac{1}{k}\right)^2}{2} + \frac{\pi^2}{72}$$

$$\lim_{k\to+\infty} \left[\frac{\left(\arcsin \frac{1}{k}\right)^2}{2} + \frac{\pi^2}{72}\right] = \frac{\pi^2}{72}$$

La serie converge.

Capitolo 16

Serie di Taylor

Pur essendo un argomento legato maggiormente al calcolo differenziale, iniziamo ora la discussione di un nuovo tipo di serie: le *serie di Taylor*.

Le **serie di Taylor**, note anche come *formula di Taylor*, si propongono di trasformare una funzione continua e derivabile in una *serie di funzioni polinomiali*.
L'applicazione di questa formula va dall'approssimazione dei numeri irrazionali al calcolo dei limiti con forma indeterminata.

16.1 Serie di funzioni

Partiamo dal concetto più generale di *serie di funzioni*, prima di vedere il caso particolare della serie di Taylor.

Definizione 16.1 (Serie di funzioni)**.** Sia definita la successione di funzioni $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, in cui ogni elemento è una funzione $f_n(x)\colon D \mapsto \mathbb{R}$. La serie associata è detta **serie di funzioni**.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$$

Le serie di funzioni sono usate per generalizzare lo studio della somma di funzioni e analizzarne la convergenza, in modo tale da poter definire una qualsiasi funzione come una somma infinita di altre funzioni, generalmente più semplici da analizzare.
Come si può notare dalla definizione, le varie funzioni devono avere lo stesso dominio D, ma non si presuppone alcuna caratteristica particolare sul dominio stesso.

Una serie di funzioni può essere convergente o divergente, in base al comportamento della successione di funzioni associata.

Definizione 16.2 (Successione di funzioni convergente e uniforme)**.** Sia d un sottoinsieme di numeri reali e sia $f_n\colon D \mapsto \mathbb{R}$ una successione di funzioni reali definite in D. Si dice che f_n **converge puntualmente in** D verso la funzione $f\colon D \mapsto \mathbb{R}$ se

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x) \qquad \forall x \in D$$

16.2 Definizione di una serie di Taylor

Consideriamo una funzione $y = f(x)$, continua in $I_\delta(x_0)$ (un intorno circolare di raggio δ del punto x_0) e derivabile in x_0 (si veda, ad esempio, la Figura 11.2). Possiamo affermare che esiste un unico polinomio di primo grado che riesce ad approssimare, nel miglior modo possibile, la funzione nel punto x_0.
Questo polinomio prende il nome di **polinomio di Taylor di primo grado** e si esprime come

$$P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Allo stesso modo, data una funzione $y = f(x)$, continua in $I_\delta(x_0)$ e derivabile due volte in x_0, possiamo determinare un unico polinomio di secondo grado che riesca a approssimare, nel miglior modo possibile, $f(x)$ in x_0.
questo polinomio prende il nome di **polinomio di Taylor di secondo grado** e si esprime come

$$P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(x_0)\frac{(x - x_0)^2}{2}$$

Andando avanti con il discorso e generalizzandolo, possiamo considerare una generica funzione $y = f(x)$ continua in $I_\delta(x_0)$ e derivabile n volte in x_0.

Definizione 16.3 (Serie di Taylor)**.** Sia $y = f(x)$ una generica funzione continua in $I_\delta(x_0)$ e derivabile n volte in x_0.
Esiste un unico polinomio di grado n che approssima, nel miglior modo possibile, la funzione nel punto x_0 e prende il nome di **polinomio di Taylor di grado** n.
Questo polinomio può essere rappresentato concisamente tramite una **serie di Taylor** espressa come

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)(x_0)}}{k!} \cdot (x - x_0)^k \tag{16.1}$$

Definizione 16.4 (Sviluppo in serie di Maclaurin)**.** Sia

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)(x_0)}}{k!} \cdot (x - x_0)^k$$

una serie di Taylor che approssima una generica funzione $f(x)$ in un generico punto x_0. Se $x_0 = 0$, il polinomio relativo prende il nome di **polinomio di Maclaurin**.

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)(0)}}{k!} \cdot x^k \tag{16.2}$$

16.3 Formula di Taylor

Abbiamo detto che il polinomio di Taylor di ordine n approssima la funzione $f(x)$ nel punto x_0 nel miglior modo possibile.
Infatti, nel punto, funzione e polinomio coincidono, mentre v'è una certa distanza tra funzione e polinomio.

Per esprimere questa distanza usiamo la cosiddetta **formula di Taylor di ordine** n.

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x) \tag{16.3}$$

dove $P_n(x)$ rappresenta il polinomio di Taylor di ordine n relativo al punto x_0, mentre $R_n(x)$ rappresenta il relativo errore commesso, cioè il **resto della formula di Taylor di ordine** n.

Esistono vari modi per esprimere analiticamente il resto della formula di Taylor.

Rappresentazione di Lagrange del resto

Un primo modo viene indicato dal seguente teorema.

Teorema 16.1. *Se $f(x)$ è una funzione derivabile $(n+1)$ volte con continuità in $I_\delta(x_0)$, allora si ha che*

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{(x+1)}(t)\, dt$$

Corollario 16.1. *Se $f(x) \in C^{(n+1)}(I_\delta(x_0))$, allora esiste un punto c, compreso tra x e x_0, tale che*

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \cdot (x-x_0)^{(n+1)} \tag{16.4}$$

L'Equazione 16.4 prende il nome di **rappresentazione di Lagrange del resto della formula di Taylor**, poichè è una diretta conseguenza del teorema di Lagrange.

Nonostante abbiamo già dato una definizione per il simbolo $C^n(A)$, ne diamo ora una seconda definizione più esaustiva.
Sia dato un intervallo I. Possiamo definire $\forall n \in \mathbb{N}$ l'insieme $C^n(I)$ come l'insieme delle funzioni derivabili n volte nell'intervallo I tali che la derivata n-esima sia continua nell'intervallo.
L'insieme $C^\infty(I) = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} C^n(I)$ indica invece lo spazio delle funzioni la cui derivata n-esima esiste ed è continua $\forall n \in \mathbb{N}$.

Possiamo affermare, quindi, che se $f(x) \in C^{(n+1)}(I_\delta(x_0))$ allora possiamo esprimerla come

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \left[\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \right] + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \cdot (x-x_0)^{(n+1)}$$

Elenco di formule di Taylor

Elenchiamo ora le formule di Taylor di alcune funzioni usando il polinomio di Maclaurin e la rappresentazione di Lagrange del resto.

- $f(x) = e^x \Rightarrow \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}$
- $f(x) = e^{-x} \Rightarrow \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^k}{k!} + \frac{e^{-c}}{(n+1)!}x^{n+1}$
- $f(x) = \cos x \Rightarrow \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \frac{(-1)^{n+1} \sin c}{(2n+1)!}x^{2n+1}$
- $f(x) = \sin x \Rightarrow \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \frac{(-1)^{n+1} \sin c}{(2n+2)!}x^{2n+2}$
- $f(x) = \cosh x \Rightarrow \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \frac{\sinh c}{(2n+1)!}x^{2n+1}$
- $f(x) = \sinh x \Rightarrow \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \frac{\sinh c}{(2n+2)!}x^{2n+2}$
- $f(x) = \frac{1}{1-x} \Rightarrow \sum\limits_{k=0}^{n} x^k + \frac{x^{n+1}}{1-x} \quad |x| < 1$
- $f(x) = \frac{1}{1+x} \Rightarrow \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{1+x} \quad |x| < 1$
- $f(x) = \frac{1}{1-x^2} \Rightarrow \sum\limits_{k=0}^{n} x^{2k} + \frac{x^{2n+2}}{1x^2} \quad |x| < 1$
- $f(x) = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{1+x^2} \quad |x| < 1$
- $f(x) = -\ln(1-x) \Rightarrow \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k} + \int\limits_0^x \frac{t^{n+1}}{1-t} \quad -1 \leq x < 1$
- $f(x) = \ln(1+x) \Rightarrow \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + (-1)^{n+1} \int\limits_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t} \quad -1 < x \leq 1$
- $f(x) = \arctan x \Rightarrow \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + (-1)^{n+1} \int\limits_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} \quad |x| < 1$

Vediamo un esempio su come sfruttare la formula di Taylor con la rappresentazione di Lagrange del resto per il calcolo approssimato dei numeri irrazionali.

Esempio 16.1

Dare una stima di $e^{0.2}$ *con un errore che, in valore assoluto, non superi* 10^{-6}.

Uso la formula di Maclaurin, sostituendo $x = 0.2$*:*

$$e^{0.2} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(0.2)^k}{k!} + \frac{e^c}{(n+1)!}(0.2)^{n+1} \quad c \in (0, 0.2)$$

$$e^{0.2} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(0.2)^k}{k!} = \frac{e^c}{(n+1)!}(0.2)^{n+1}$$

Impongo che $\frac{e^c}{(n+1)!}(0.2)^{n+1} < 10^{-6}$ *e cerco il parametro c:*

$$e^c < e^1 < 3 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{e^c}{(n+1)!}(0.2)^{n+1} < \frac{3}{(n+1)!}(0.2)^{n+1} < 10^{-6}$$

A questo punto, si cerca n per tentativi. Per $n = 5$ *abbiamo:*

$$\frac{3}{6!}(0.2)^6 < 10^{-6} \Rightarrow 2.\bar{6} \cdot 10^{-7} < 10^{-6}$$

La stima, quindi, è

$$\sum_{k=0}^{5} \frac{(0.2)^k}{k!} = 1.221402\bar{6}$$

Come abbiamo visto dall'elenco, alcune rappresentazioni del resto $R_n(x)$, nelle formule di alcune funzioni, si ottengono a partire dall'espressione in forma chiusa della somma parziale della serie geometrica $\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \Rightarrow \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + \frac{x^{n+1}}{1-x}$; questa espressione è utile per le funzioni $\frac{1}{1-x}$, $\frac{1}{1+x}$, $\frac{1}{1-x^2}$, $\frac{1}{1+x^2}$ e, per integrazione, $-\ln(1-x)$, $\ln(1+x)$ e $\arctan x$.

Rappresentazione di Peano del resto

È possibile definire un'altra rappresentazione del resto della formula di Taylor, recuperando il concetto di infinitesimo e definendo un nuovo simbolo.

Infinitesimi

Iniziamo ripetendo la definizione di infinitesimo, ricordando che una funzione $f(x)$ si dice *infinitesimo* per $x \to \lambda$ quando $\lim_{x\to\lambda} f(x) = 0$.

Consideriamo ora un punto di accumulazione x_0 per i domini delle funzioni $f(x)$ e $g(x)$; ipotizziamo, inoltre, che le due funzioni siano degli infinitesimi per $x \to x_0$ e che non siano identicamente nulle per $I_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$.
In queste condizioni, possiamo affermare che $f(x)$ e $g(x)$ sono **infinitesimi simultanei** e, pertanto, possiamo confrontarli per capire chi delle due funzioni tende a zero "più rapidamente".

Definizione 16.5 (Ordine degli infinitesimi)**.** Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni infinitesime per $x \to x_0$ (con x_0 punto di accumulazione dei domini) non identicamente nulle per $I_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$.
Se $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l \neq 0$, si dice che $f(x)$ e $g(x)$ siano **inifinitesimi dello stesso ordine** (tendono a zero con la stessa rapidità).
Se $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, si dice che $f(x)$ è un **inifinitesimo di ordine superiore** a $g(x)$ e si indica con il simbolo $f(x) = o[g(x)]$ (f tende a zero più rapidamente di g).
Se $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$, si dice che $f(x)$ è un **inifinitesimo di ordine inferiore** a $g(x)$ e si indica con il simbolo $g(x) = o[f(x)]$ (f tende a zero meno rapidamente di g).
Se $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ non esiste, si dice che $f(x)$ e $g(x)$ **non sono confrontabili**.

Il simbolo $o[\bullet]$ (leggi "*o piccolo di*") viene denominato **simbolo di Landau** e gode di proprietà particolari, come vedremo in seguito.
Sfruttando questa nuova notazione, possiamo dire che una funzione $f(x)$ si dice infinitesimo per $x \to x_0$ quando $f(x) = o[1]$ per $x \to x_0$.

Abbiamo definito questa nuova notazione per confrontare due infinitesimi tra loro. È possibile però determinare l'ordine di un infinitesimo confrontandolo con una funzione imposta, detta **infinitesimo campione**; questa funzione corrisponde a $g(x) = (x - x_0)$. Possiamo così affermare che se $f(x) = o[(x - x_0)^h]$ per $x \to x_0$, allora la funzione f è un *infinitesimo di ordine superiore a h per $x \to x_0$*.

Proprietà algebriche del simbolo di Landau Vediamo ora le proprietà algebriche del simbolo di Landau, fornendo pure la loro dimostrazione.

1. $o[(x - x_0)^h] \pm o[(x - x_0)^k] = o[(x - x_0)^j]$ per $x \to x_0$, con $j = \min\{h, k\}$ e $h, k \in \mathbb{N}$

   Dimostrazione: Sia $f(x) = o[(x - x_0)^h]$ e $g(x) = o[(x - x_0)^k]$ per $x \to x_0$ e supponiamo $h < k$.
   Abbiamo:
   $$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) \pm g(x)}{(x - x_0)^h} = \lim_{x\to x_0} \left[\frac{f(x)}{(x - x_0)^h} \pm \frac{g(x)}{(x - x_0)^h}(x - x_0)^{k-h}\right] = 0$$
   □

2. $o[c \cdot (x - x_0)^k] = o[(x - x_0)^k]$ per $x \to x_0$, con $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $k \in \mathbb{N}$

   Dimostrazione: Sia $f(x) = o[(x - x_0)^h]$ per $x \to x_0$.
   Abbiamo:
   $$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{(x - x_0)^h} = c \cdot \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{(x - x_0)^h} = 0$$
   □

3. $o[(x - x_0)^h] \cdot o[(x - x_0)]^k = o[(x - x_0)^{h+k}]$ per $x \to x_0$, con $h, k \in \mathbb{N}$

   Dimostrazione: Sia $f(x) = o[(x - x_0)^h]$ e $g(x) = o[(x - x_0)^k]$ per $x \to x_0$.
   Abbiamo:
   $$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) \cdot g(x)}{(x - x_0)^{h+k}} = \lim_{x\to x_0} \left[\frac{f(x)}{(x - x_0)^h} \cdot \frac{g(x)}{(x - x_0)^k}\right] = 0$$
   □

4. $(x-x_0)^h \cdot o[(x-x_0)^k] = o[(x-x_0)^{h+k}]$ per $x \to x_0$, con $h, k \in \mathbb{R}$

Dimostrazione: Sia $f(x) = o[(x-x_0)^h]$ per $x \to x_0$.
Abbiamo:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{(x-x_0)^h f(x)}{(x-x_0)^{h+k}} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{(x-x_0)^h} = 0$$

□

5. $o[o[(x-x_o)^h]] = o[(x-x_0)^h]$ per $x \to x_0$, con $h \in \mathbb{N}$

Dimostrazione: Sia $f(x) = o[o[(x-x_0)^h]]$ e $g(x) = o[(x-x_0)^h]$ per $x \to x_0$.
Abbiamo:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{(x-x_0)^h} = \lim_{x\to x_0} \left[\frac{f(x)}{(x-x_0)^h} \cdot \frac{g(x)}{g(x)}\right] = \lim_{x\to x_0} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{g(x)}{(x-x_0)^h}\right] = 0$$

□

6. $o[(x-x_0)^h + o[(x-x_0)^k]] = o[(x-x_0)^h]$ per $x \to x_0$, con $h, k \in \mathbb{N}$ e $h \leq k$

Dimostrazione: Sia $f(x) = o[(x-x_0)^h + o[(x-x_0)^k]]$ e $g(x) = o[(x-x_0)^k]$ per $x \to x_0$.
Abbiamo:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{(x-x_0)^h} &= \lim_{x\to x_0} \left[\frac{f(x)}{(x-x_0)^h} \cdot \frac{(x-x_0)^h + g(x)}{(x-x_0)^h + g(x)}\right] = \\ &= \lim_{x\to x_0} \left[\frac{f(x)}{(x-x_0)^h + g(x)} \cdot \frac{(x-x_0)^h + g(x)}{(x-x_0)^h}\right] = 0\end{aligned}$$

□

7. $o\left[\sum_{i=0}^{h-1}(x-x_0)^i + o[(x-x_0)^h]\right] = o[(x-x_0)]$ per $x \to x_0$, con $h \in \mathbb{N}$

Dimostrazione: Sia $f(x) = o[\sum_{i=0}^{h-1}(x-x_0)^i + o[(x-x_0)^h]]$ e $g(x) = o[(x-x_0)^h]$ per $x \to x_0$.
Abbiamo:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{(x-x_0)^h} &= \lim_{x\to x_0} \left\{\frac{f(x)}{(x-x_0)} \cdot \frac{\sum_{i=0}^{h-1}(x-x_0)^i + o[(x-x_0)^h]}{\sum_{i=0}^{h-1}(x-x_0)^i + o[(x-x_0)^h]}\right\} = \\ &= \lim_{x\to x_0} \left\{\frac{f(x)}{\sum_{i=0}^{h-1}(x-x_0)^i + o[(x-x_0)^h]} \cdot \frac{\sum_{i=0}^{h-1}(x-x_0)^i + o[(x-x_0)^h]}{(x-x_0)}\right\} = \\ &= \lim_{x\to x_0} \left\{\frac{f(x)}{\sum_{i=0}^{h-1}(x-x_0)^i + o[(x-x_0)^h]} \left[\sum_{i=0}^{h-2}(x-x_0)^i + \frac{g(x)}{(x-x_0)^h}(x-x_0)^{h-i}\right]\right\} = 0\end{aligned}$$

□

8. $\frac{1}{1+f(x)} = 1 - f(x) + o[f(x)]$, con $f(x) = o[1]$

Dimostrazione: Si ha $\frac{1}{1+f(x)} = 1 - f(x) + \frac{f^2(x)}{1+f(x)}$, dove $\frac{f^2(x)}{1+f(x)} = o[f(x)]$.
Infatti:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\frac{f^2(x)}{1+f(x)}}{f(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{1+f(x)} = 0$$

□

9. $\frac{1}{1+f(x)} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k f^k(x) + o[f^k(x)]$, con $f(x) = o[1]$ (si dimostra per induzione)

Vediamo ora un esercizio teorico sulle proprietà algebriche del simbolo di Landau.

Esercizio 16.1

Sia $f(x) = o[g(x)]$ e $g(x) = o[h(x)]$ per $x \to x_0$. Stabilire, dimostrandolo, se sono vere o false le seguenti affermazioni:

i. $f(x) = o[h(x)]$ *per* $x \to x_0$

ii. $f(x) = o[g(x) \cdot h(x)]$ *per* $x \to x_0$

Dimostro ora la prima affermazione.

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{h(x)} = \lim_{x\to x_0} \left[\frac{f(x)}{h(x)} \cdot \frac{g(x)}{g(x)}\right] = \lim_{x\to x_0} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{g(x)}{h(x)}\right] = 0 \Rightarrow \mathit{VERA}$$

Dimostro ora la seconda affermazione.

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)h(x)} = 0 \Rightarrow \mathit{FALSA}$$

Infatti, scelto $f(x) = (x - x_0)^3$, $g(x) = (x - x_0)^2$ e $h(x) = (x - x_0)$, si ha $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)h(x)} = 1$

Espressione del resto di Taylor secondo Peano

Ritorniamo ora al nostro discorso sulla formula di Taylor, utilizzando ora nei nostri ragionamenti il simbolo di Landau.
Enunciamo e dimostramo ora un teorema che ci fornirà una nuova rappresentazione del resto di Taylor.

Teorema 16.2. *Sia $f(x)$ una funzione derivabile n volte con continuità $I_\delta(x_0)$, allora si ha che $R_n(x) = o[(x - x_0)^n]$ per $x \to x_0$.*

Dimostrazione: Dalle ipotesi si ha che

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} + \frac{f^(n)(c)}{n!}(x - x_0)^n \quad (x \leq c \leq x_0)$$

Dalla continuità in x_0 di $f^{(n)}(x)$, si ha che $\lim_{x \to x_0} f^{(n)}(c) = \lim_{c \to x_0} f^{(n)}(c) = f^{(n)}(x_0)$, cioè $f^{(n)}(c) = f^{(n)}(x_0) + o[1]$ per $x \to x_0$.
Abbiamo quindi

$$\frac{f^(n)(c)}{n!}(x - x_0)^n = \frac{f^(n)(x)}{n!} + o[(x - x_0)^n] \text{ per } x \to x_0$$

□

Grazie a questo teorema, otteniamo la seguente rappresentazione della formula di Taylor

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \left[\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \right] + o[(x - x_0)^n] \text{ per } x \to x_0$$

che sfrutta la **rappresentazione del resto della formula di Taylor secondo Peano**.

16.4 Esercizi

Vediamo alcuni esercizi sull'uso della formula di Taylor con la rappresentazione del resto di Peano per la risoluzione delle forme indeterminate dei limiti.

Esercizio 16.2

Risolvere il limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$$

Uso la formula di Taylor, fermandomi a $n = 2$:

$$\sin x = \sum_{k=0}^{2} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o[x^{2k+1}] = x - \frac{x^3}{3!} + o[x^3]$$

Quindi:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \overset{Taylor}{=} \lim_{x \to 0} \frac{x - \frac{x^3}{3!} + o[x^3]}{x} = \lim_{x \to 0} \left(1 - \frac{x^2}{3!} + o[x^2]\right) = 1$$

Esercizio 16.3

Risolvere il limite

$$\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{2}{\cos x - 1} + \frac{4}{x \tan x} \right)$$

Uso la formula di Taylor, fermandomi per entrambi le funzioni trigonome-

triche a $n = 2$:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + o[x^2]$$
$$\tan x = x - \frac{x^3}{3} + o[x^3]$$

Quindi:

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2}{\cos x - 1} + \frac{4}{x\tan x}\right) \overset{Taylor}{=}$$
$$= \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2}{1-\frac{x^2}{2!}+o[x^2]-1} + \frac{4}{x\left(x-\frac{x^3}{3}+o[x^3]\right)}\right) =$$
$$= \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2}{-\frac{x^2}{2!}+o[x^2]} + \frac{4}{x^2-\frac{x^4}{3}+o[x^4]}\right) =$$
$$= \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{-4}{x^2+o[x^2]} + \frac{4}{x^2\left(1-\frac{x^2}{3}+o[x^2]\right)}\right) =$$
$$= 4\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{1}{x^2}\left(\frac{-1}{1+o[1]} + \frac{1}{\left(1+\frac{x^2}{3}+o[x^2]\right)}\right)\right] \overset{\text{Proprietà 8 e 9}}{=}$$
$$= 4\lim_{x\to 0^+}\left\{\frac{1}{x^2}\left[-1+o[1]-o[o[1]] + \left(1-\frac{x^2}{3}+o[x^2]+o\left[\frac{x^2}{3}+o[x^2]\right]\right)\right]\right\} =$$
$$= 4\lim_{x\to 0^+}\left\{\frac{1}{x^2}\left[o[1]-\frac{x^2}{3}+o[x^2]+o\left[\frac{x^2}{3}+o[x^2]\right]\right]\right\} =$$
$$= 4\lim_{x\to 0^+}\left\{\frac{1}{x^2}\left(o[1]-\frac{x^2}{3}\right)\right\} = 4\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{o[1]}{x^2}\right] = \frac{0}{0}$$

Considero allora $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o[x^4]$ *e ricalcolo il limite:*

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2}{\cos x - 1} + \frac{4}{x\tan x}\right) \overset{Taylor}{=}$$
$$= \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2}{1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o[x^4]-1} + \frac{4}{x\left(x-\frac{x^3}{3}+o[x^3]\right)}\right) =$$
$$= \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2}{\frac{x^4}{4!}-\frac{x^2}{2!}+o[x^4]} + \frac{4}{x^2-\frac{x^4}{3}+o[x^4]}\right) =$$
$$= \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{-4}{-\frac{x^4}{12}+x^2+o[x^2]} + \frac{4}{x^2\left(1-\frac{x^2}{3}+o[x^2]\right)}\right) =$$
$$= 4\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{1}{x^2}\left(\frac{-1}{1-\frac{x^2}{12}+o[x^2]} + \frac{1}{\left(1+\frac{x^2}{3}+o[x^2]\right)}\right)\right] \overset{\text{Proprietà 8 e 9}}{=}$$
$$= 4\lim_{x\to 0^+}\left\{\frac{1}{x^2}\left[-\left(1+\frac{x^2}{12}+o[x^2]+o\left[-\frac{x^2}{12}+o[x^2]\right] + \left(1-\frac{x^2}{3}+o[x^2]+o\left[\frac{x^2}{3}+o[x^2]\right]\right)\right)\right]\right\} =$$
$$= 4\lim_{x\to 0^+}\left\{\frac{1}{x^2}\left[-\frac{x^2}{12}-\frac{x^2}{3}+o[x^2]\right]\right\} =$$
$$= 4\lim_{x\to 0^+}\left\{\frac{1}{x^2}\left[o[x^2]-\frac{5}{12}x^2\right]\right\} = 4\lim_{x\to 0^+}\left[-\frac{5}{12}+o[1]\right] = -\frac{5}{3}$$

Esercizio 16.4

Risolvere il limite

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\sin \frac{x}{4}}{\frac{e^{x^2}}{x} + \ln(1-x) - \frac{1}{x}}$$

Uso la formula di Taylor:

$$\sin\frac{x}{4} = \frac{x}{4} - \frac{\left(\frac{x}{4}\right)^3}{3!} + o[x^3]$$
$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o[x^3]$$
$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + o[x^4]$$

Quindi:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\sin \frac{x}{4}}{\frac{e^{x^2}}{x} - x - \frac{x^2}{2} + \ln(1-x) - \frac{1}{x}} =$$
$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{\frac{x}{4} - \frac{x^3}{3!\cdot 64} + o[x^3]}{\frac{1+x^2+\frac{x^4}{2}+o[x^4]}{x} - \frac{x^3}{3} + o[x^3] - \frac{1}{x}} =$$
$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{\frac{x}{4} - \frac{x^3}{6\cdot 64} + o[x^3]}{\frac{1}{x} + x + \frac{x^3}{2} + o[x^3] - x + -\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o[x^3] - \frac{1}{x}} =$$
$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{\frac{x}{4} - \frac{x^3}{6\cdot 64} + o[x^3]}{\frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + o[x^3]} =$$
$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{x\left(\frac{1}{4} - \frac{x^2}{6\cdot 64} + o[x^2]\right)}{x\left(\frac{x^2}{6} - \frac{x}{2} + o[x^2]\right)} =$$
$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{\frac{1}{4} - \frac{x^2}{6\cdot 64} + o[x^2]}{\frac{x^2}{6} - \frac{x}{2} + o[x^2]} = -\infty$$

Parte V

Funzioni reali a variabili reali

Capitolo 17

Il campo vettoriale $\mathbb{R}^n$ e la sua topologia

Finora abbiamo analizzato operazioni e funzioni all'interno del campo dei numeri reali, rappresentandole su piani bidimensionali. Come sappiamo, però, la realtà non è bidimensionale e non tutto si può ricondurre a funzioni a singola variabile.
Aumentiamo le dimensioni del campo di partenza, iniziando a definire lo spazio $\mathbb{R}^n$.

17.1 Costruzione

Definizione 17.1 (Campo vettoriale $\mathbb{R}^n$)**.** Dato un numero $n \in \mathbb{N}$. Il prodotto cartesiano di $\mathbb{R}$ con se stesso n volte definisce l'insieme $\mathbb{R}^n$.

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n \text{ volte}} = \{(x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n) \mid x_i \in \mathbb{R} \forall i \in [1, n]\}$$

Questo insieme è un **campo vettoriale** perché $\mathbb{R}^n$ è un insieme chiuso rispetto alle operazioni di somma tra elementi e di prodotto di un elemento per un numero.

I vari elementi dell'insieme $\mathbb{R}^n$ sono detti **punti** o **vettori** ($P = (x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n)$).

Come abbiamo detto, è possibile definire due operazioni.

Definizione 17.2 (Somma tra vettori)**.** Siano $x = (x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n)$ e $y = (y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_n)$ due elementi dell'insieme $\mathbb{R}^n$.
Si definisce come **somma fra vettori** l'operazione, interna a $\mathbb{R}^n$ che somma i vari componenti dei due vettori.

$$+ \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$$
$$x + y = (x_1 + y_1 \quad x_2 + y_2 \quad \cdots \quad x_n + y_n)$$

Definizione 17.3 (Prodotto con un scalare)**.** Sia $x = (x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n) in \mathbb{R}^n$ e sia $\alpha \in \mathbb{R}$.
Si definisce come **prodotto di un vettore con un scalare** l'operazione, esterna a $\mathbb{R}^n$ che moltiplica il valore α (detto **scalare**) ai vari componenti del vettore.

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$$
$$\alpha \cdot x = (\alpha \cdot x_1 \quad \alpha \cdot x_2 \quad \cdots \quad \alpha \cdot x_n)$$

17.2 Topologia

Analizziamo ora alcuni concetti importanti per l'analisi della topologia di $\mathbb{R}^n$.

Definizione 17.4 (Distanza tra due punti in $\mathbb{R}^n$)**.** Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e siano $P_0, P_1 \in A$ due punti del dominio.
Si definisce **distanza tra due punti** il valore reale

$$d(P_0, P_1) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_{i_1} - x_{i_0})^2} \tag{17.1}$$

Definizione 17.5 (Intervallo in $\mathbb{R}^n$)**.** Siano $x = (x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n)$ e $y = (y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_n)$ due punti di $\mathbb{R}^n$.
Si definisce **intervallo** tra x e y l'insieme di punti di $\mathbb{R}^n$ tali che le varie componenti dei singoli punti siano comprese tra le componenti di x e y.

$$I_{x,y} = \{P = (p_1 \quad p_2 \quad \cdots \quad p_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i \leq p_i \leq y_i \qquad \forall i \in [1, n]\}$$

Definizione 17.6 (Intorno di un punto $P_0 \in \mathbb{R}^n$ di raggio δ)**.** Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e sia $P_0 \in A$ un punto del dominio.
Si definisce **intorno di** P_0 **di raggio** δ l'insieme di tutti i punti distanti meno di δ da P_0.

$$I_\delta(P_0) = \{x \in \mathbb{R}^n | d(P, P_0) < \delta\} \tag{17.2}$$

Se l'insieme è formato anche da tutti i punti avente distanza pari a δ da P_0, allora si definisce **intorno chiuso**.

Geometricamente, questo corrisponde a definire una sfera di centro P_0, aperta o chiusa a seconda dei punti che ne fanno parte.

Grazie al concetto di intorno, è possibile definire il concetto di *sottoinsieme* a partire da un punto, ma anche alcune proprietà particolari dei punti di $\mathbb{R}^n$.

Definizione 17.7 (Punti distinti di $\mathbb{R}^n$)**.** Siano $x = (x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n)$ e $y = (y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_n)$ due punti di $\mathbb{R}^n$.
x e y si dicono **distinti** se $I_\delta(x) \cap I_\delta(y) = \emptyset$.

Definizione 17.8 (Sottoinsieme limitato e illimitato in $\mathbb{R}^n$)**.** Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$. Si dice che A è un **sottoinsieme limitato** se

$$\exists \delta > 0 \mid I_\delta(\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}) \supset A \tag{17.3}$$

Se questa condizione non viene verificata, allora si dice che A è un **sottoinsieme illimitato**.

Una volta data la definizione di sottoinsiemi limitati e illimitati, verrebbe naturale pensare agli estremi superiori e inferiori di questi sottoinsiemi.
Poiché, però, non ha senso definire relazioni di ordine in $\mathbb{R}^n$, allora possiamo affermare che non esistono estremi superiori e inferiori per i sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$.

Definizione 17.9 (Insieme aperto e chiuso in $\mathbb{R}^n$)**.** Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$.
Si dice che A è un **insieme aperto** se

$$\forall P \in A \exists \delta > 0 \mid I_\delta(P) \subset A \tag{17.4}$$

Si dice che A è un **insieme chiuso** se $\complement_A$ è un insieme aperto.

Definizione 17.10 (Insieme compatto in $\mathbb{R}^n$)**.** Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Se A è un insieme chiuso e limitato, allora si dice che è un **insieme compatto**.

Definizione 17.11 (Insieme connesso per archi e sconnesso in $\mathbb{R}^n$)**.** Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$.
Si dice che A è un **insieme connesso per archi**se $\forall P_1, P_2 \in A$ esiste una linea spezzata che li unisce tutta contenuta in A (Figura 17.1).
Si dice che A è un **insieme sconnesso** se $\forall P_1, P_2 \in A$ ogni linea spezzata che li unisce esce da A.

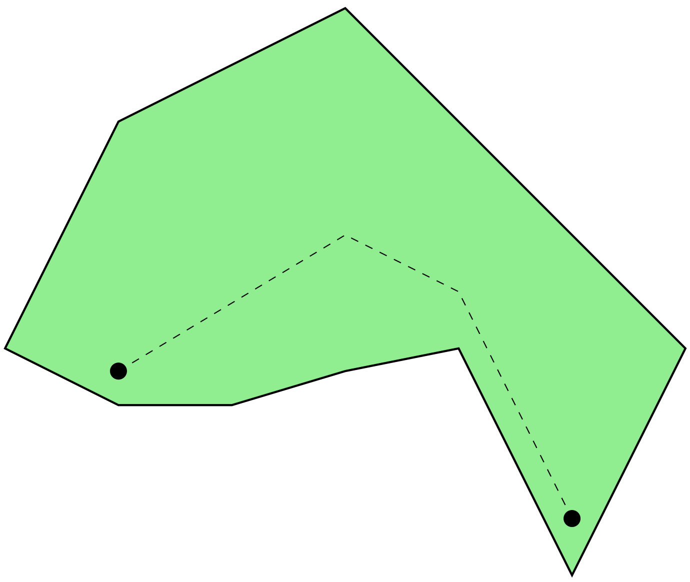


Figura 17.1: Insieme connesso per archi

Definizione 17.12 (Punto interno a A)**.** Sia $P \in A \subseteq \mathbb{R}^2$.
Si dice che P è un **punto interno a** A ($P \in \mathring{A}$) se

$$\exists \delta > 0 | I_\delta(P) \subset A \tag{17.5}$$

Definizione 17.13 (Punto esterno a A)**.** Sia $P \in \complement_A$, con $A \subseteq \mathbb{R}^2$.
Si dice che P è un **punto esterno ad** A ($P \in \mathring{\complement}_A$) se è punto interno di $\complement_A$.

Definizione 17.14 (Punto di frontiera di A)**.** Sia dato un punto P e un insieme $A \in \mathbb{R}^n$.
Si dice che P è un **punto di frontiera di** A ($P \in \partial A$) se non è né interno né esterno.

Definizione 17.15 (Punto di accumulazione in A)**.** Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ e sia $P \in A$.
Si dice che P è un **punto di accumulazione** ($P \in \mathscr{D}A$) se

$$\forall \delta > 0 \; \{I_\delta(P) \cap A\} \smallsetminus \{P\} \neq \emptyset \tag{17.6}$$

Capitolo 18

Le funzioni reali a variabili reali

Così come abbiamo parlato di funzioni a singola variabile, come relazione tra valori su $\mathbb{R}$, è possiamo identificare relazioni tra punti di $\mathbb{R}^n$ e un singolo valore, definendo *funzioni reali di più variabili reali*.

Definizione 18.1 (Funzione reale a più variabili reali)**.** Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e sia $C \subseteq \mathbb{R}$. Si definisce **funzione reale a più variabili reali** la funzione

$$f \colon A \to C \qquad P = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix} \mapsto f(P)$$

che associa una n-upla del dominio (un vettore di $\mathbb{R}^n$) a un preciso valore reale.

Come per le funzioni a variabile reale, anche per le funzioni a più variabili reali possiamo definire l'**estremo inferiore** e l'**estremo superiore** di una funzione come l'estremo inferiore o superiore del codominio della funzione.

18.1 Analisi del dominio e della topologia

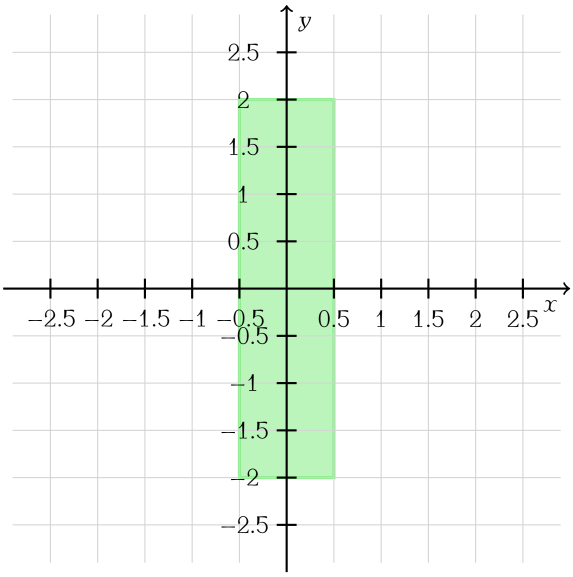
Come nel caso delle funzioni a singola variable, anche per le funzioni a più variabili reali lo studio del dominio è importante.
Vediamo ora tre esercizi sullo studio del dominio di funzioni su $\mathbb{R}^2$.

Esercizio 18.1

Sia dato il seguente dominio di funzione

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; |x| \leq \frac{1}{2} \wedge |y| \leq 2 \right\}$$

Determinare gli eventuali punti interni, punti di frontiera e punti di accumulazione; inoltre, determinare se l'insieme è compatto e connesso per archi.



La figura qui sopra rappresenta il dominio in questione.

$$\mathring{D} = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; |x| < \frac{1}{2} \wedge |y| < 2 \right\}$$

$$\mathring{\complement}_D = \mathbb{R}^2 \setminus D = \complement_D$$

$$\partial D = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x = \pm\frac{1}{2} \wedge |y| \leq 2, |x| \leq \frac{1}{2} \wedge y = \pm 2 \right\} = \mathbb{R}^2 \setminus (\mathring{D} \smallsetminus \mathring{\complement}_D)$$

$$\mathscr{D}D = D$$

D è un insieme compatto, poiché è chiuso e limitato; inoltre è connesso per archi.

Esercizio 18.2

Sia dato il seguente dominio di funzione

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x, y \in \mathbb{Q}, |x| \leq \frac{1}{2} \wedge |y| \leq 2 \right\}$$

Determinare gli eventuali punti interni, punti di frontiera e punti di accumulazione; inoltre, determinare se l'insieme è compatto e connesso per archi.

$\mathring{D} = \emptyset$, in base all'assioma della densità, perchè il dominio contiene anche numeri irrazionali.

$$\mathring{\complement}_D = \mathbb{R}^2$$

$$\partial D = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; |x| \leq \frac{1}{2} \wedge |y| \leq 2 \right\}$$

$$\mathscr{D}D = D$$

D non è un insieme compatto, poichè non è chiuso ma è limitato; inoltre, per l'assioma della densità, non è connesso per archi.

Esercizio 18.3

Determinare il domino della seguente funzione.

$$f\colon D \subset \mathbb{R}^2 \to C \subset \mathbb{R}$$
$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \mapsto z = f(\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}) = \frac{\sqrt{\ln(x^2+y^2)}}{(x+y)}$$

$$C.E.: \begin{cases} x+y \neq 0 \\ \ln(x^2+y^2) \geq 0 \\ x^2+y^2 > 0 \end{cases} \to \begin{cases} x \neq -y \\ x^2+y^2 \geq 1 \\ \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow D = \{\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 | x^2+y^2 \geq 1 \wedge y \neq -x\}$$

18.2 Funzioni e superfici elementari a più variabili

Proseguiamo con l'estensione della nostra analisi sulle funzioni a più variabili reali basandoci su quella effettuata fatta precedentemente sulle funzioni a singola variabile.

Analizziamo, dunque, alcune funzioni elementari a più variabili reali.
Per semplicità, analizziamo solamente le funzioni all'interno di $\mathbb{R}^3$, poiché sono quelle più note, e la loro rappresentazione nello spazio cartesiano, cioè il *grafico della funzione* definito come sottoinsieme dello spazio vettoriale.

$$G_f = \{\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 | \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \in D \wedge z = f\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \in C\}$$

Piano

La funzione più semplice che abbiamo analizzato avente singola variabile è la retta.
Allo stesso modo di come abbiamo definito la retta come combinazione lineare della variabile, allo stesso modo è possibile definire il *piano* come combinazione lineare delle variabili.

Definizione 18.2 (Piano)**.**

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$z \mapsto ax + by + c$$

Il piano è dunque una superficie bidimensionale definita all'interno del campo vettoriale $\mathbb{R}^3$.

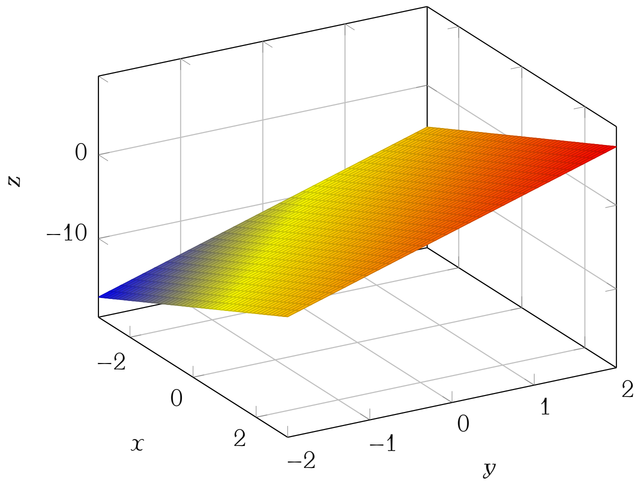


Figura 18.1: Piano

Paraboloide

Un'altra funzione elementare che abbiamo visto in precedenza è la parabola. Nel campo vettoriale $\mathbb{R}^3$ possiamo definire una superficie nota come *paraboloide* la cui rappresentazione grafica ricorda la parabola in $\mathbb{R}^2$.

Si possono identificare due tipologie di paraboloidi:

- il *paraboloide ellittico*, denominato così perché la sezione perpendicolare all'asse z è una ellisse;
- il *paraboloide iperbolico*, la cui sezione parallela all'asse z è una parabola.

Definizione 18.3 (Paraboloide ellittico)**.**

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$z \mapsto \frac{x^2}{2a^2} + \frac{y^2}{2b^2}$$

Definizione 18.4 (Paraboloide iperbolico)**.**

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$z \mapsto \frac{x^2}{2a^2} - \frac{y^2}{2b^2}$$

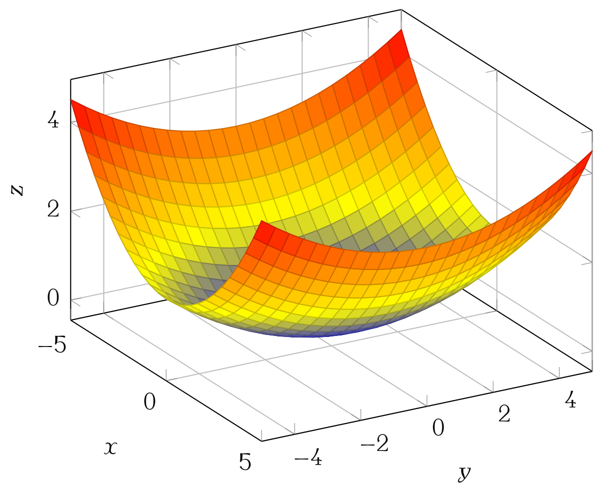


Figura 18.2: Paraboloide ellittico

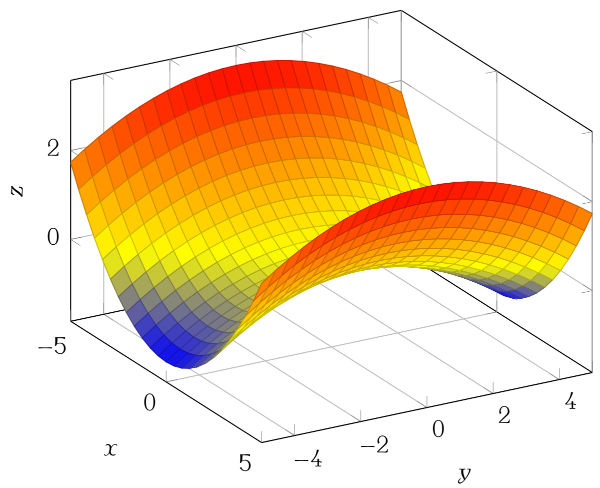


Figura 18.3: Paraboloide iperbolico

Iperboloide

Un'altra funzione elementare che abbiamo studiato in precedenza è l'iperbole. Nel campo vettoriale $\mathbb{R}^3$ possiamo definire una superficie nota come *iperboloide* la cui rappresentazione grafica ricorda l'iperbole (o un suo ramo) in $\mathbb{R}^2$.

Si possono identificare due tipologie di iperboloidi:

- il *iperboloide a una falda*, corrispondente a un ramo di iperbole;
- il *iperboloide a due falde*.

Definizione 18.5 (Iperboloide a una falda)**.**

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$z \mapsto \pm\sqrt{c^2 \cdot \frac{x^2}{a^2} + c^2 \cdot \frac{y^2}{b^2} - c^2}$$

Definizione 18.6 (Iperboloide a due falde).

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$z \mapsto \pm\sqrt{c^2 \cdot \frac{x^2}{a^2} - c^2 \cdot \frac{y^2}{b^2} - c^2}$$

18.3 Limiti di funzioni a variabili reali

Consideriamo ora una funzione $f\colon D \subseteq \mathbb{R}^n \to C \subseteq \mathbb{R} \quad \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \mapsto z = f(\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix})$ e un numero reale $x_0 \in D$ e sfruttiamo lo stesso strumento matematico che abbiamo usato per permetterci di descrivere con precisione l'andamento della funzione per valori di x e y che si trovano nell'intorno bucato di un punto ben specifico: i limiti.

Definizione 18.7 (Funzione convergente nell'intorno di un punto). Sia $P_0 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \in D \subseteq \mathbb{R}^n$.
Si dice che la funzione $f(P)$ ha per limite il numero reale l per un generico punto $P \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{pmatrix} \in D$ che tende a P_0 ($\lim\limits_{P \to P_0} f(P) = l$) quando, comunque si scelga un numero reale positivo ε piccolo a piacere, si può determinare un intorno bucato di P_0 tale che risulti $|f(P) - l| < \varepsilon$.
In linguaggio matematico, possiamo dire che:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 \mid \forall P \in D, \text{con } I_{\delta_\varepsilon}(P) \setminus \{P_0\}, |f(P) - l| < \varepsilon$$

Definizione 18.8 (Funzione divergente nell'intorno di un punto). Sia $P_0 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \in D \subseteq \mathbb{R}^n$.
Si dice che la funzione $f(P)$ ha per limite il valore ∞ per un generico punto $P = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{pmatrix} \in D$ che tende a P_0 ($\lim\limits_{P \to P_0} f(P) = \infty$) quando, comunque si scelga un numero reale positivo k grande a piacere, si può determinare un intorno bucato di P_0 tale che risulti $|f(P)| > k$.
In linguaggio matematico, possiamo dire che:

$$\forall k > 0 \exists \delta_k > 0 | \forall P \in D, \text{con } I_{\delta_k}(P) \setminus \{P_0\}, |f(P)| > k$$

Definizione 18.9 (Funzione convergente agli estremi del dominio). Sia $P_0 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \in D \subseteq \mathbb{R}^n$.
Si dice che la funzione $f(P)$ ha per limite il numero reale l per un generico punto $P = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{pmatrix} \in D$ che tende a ∞ ($\lim\limits_{P \to \infty} f(\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}) = l$) quando, comunque si scelga un numero reale positivo ε piccolo a piacere, si può determinare un intorno sferico di P_0 tale che risulti $|f(P) - l| < \varepsilon$.
In linguaggio matematico, possiamo dire che:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 | \forall P \in D, \text{con } I_{\delta_\varepsilon}(P), |f(P) - l| < \varepsilon$$

Definizione 18.10 (Funzione divergente agli estremi del dominio)**.** Sia $P_0 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \in D \subseteq \mathbb{R}^n$.
Si dice che la funzione $f(P)$ ha per limite il valore ∞ per un generico punto $P = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{pmatrix} \in D$ che tende a ∞ ($\lim_{P \to \infty} f(P) = l$) quando, comunque si scelga un numero reale positivo k grande a piacere, si può determinare un intorno sferico di P_0 tale che risulti $|f(P)| > k$.
In linguaggio matematico, possiamo dire che:

$$\forall k > 0 \exists \delta_k > 0 | \forall P \in D, \text{ con } I_{\delta_\varepsilon}(P), |f(P)| > k$$

Anche per i limiti di funzioni reali di variabili reali valgono le considerazioni effettuate sui limiti di funzioni reali di variabile reale (teorema dell'unicità, della permanenza, del confronto, teoremi sul calcolo dei limiti e sulla continuità).

Continuità

Vediamo in dettaglio come la definizione di continuità data per le funzioni a singola variabile si estenderanno alle funzioni a più variabili.

Definizione 18.11 (Funzione continua)**.** Sia $f(P)\colon D \subseteq \mathbb{R}^n \to C \subseteq \mathbb{R}$ una funzione a più variabili reali e sia $P_0 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \in D \subseteq \mathbb{R}^n$.

1. Se P è un punto di accumulazione per D, allora la funzione $f(P)$ è **continua in** P_0 se
$$\lim_{P \to P_0} f(P) = f(P_0)$$
2. Se P è un punto isolato di D, allora la funzione $f(P)$ è continua nel punto P_0 per definizione. Inoltre, $f(P)$ è **continua in** D se lo è in ogni punto di D.

18.4 Derivazione

Grazie all'estensione del concetto di limite per le funzioni a più variabili, possiamo estendere il concetto di derivazione anche alle funzioni a più variabili.

In una funzione di una variabile sola, la derivazione avviene sempre secondo la direzione stabilita dall'asse delle ascisse; in una funzione di variabili reali, invece, la derivazione avviene lungo una direzione scelta da noi.

Definizione 18.12 (Rapporto incrementale di una funzione a più variabili)**.** Siano $f\colon D \subseteq \mathbb{R}^n \to C \subseteq \mathbb{R}$ una funzione a più variabili, un punto $P_0 \in \mathcal{D}D$ e un vettore $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_m \end{pmatrix}$ applicato al punto P_0.
Si definisce **rapporto incrementale della funzione relativo al punto** P_0 **rispetto al vettore** $\vec{v}$ il valore

$$\frac{f(\begin{pmatrix} x_1 + h \cdot v_1 & x_2 + h \cdot v_2 & \cdots & x_n + h \cdot v_n \end{pmatrix}) - f(\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix})}{h}$$

In questo caso, il vettore $\vec{v}$ fissa una direzione e un verso di derivazione.

Definizione 18.13 (Derivata direzionale)**.** Data una funzione $f\colon D \to C$, se il limite del rapporto incrementale esiste ed è finito, per h tendente a zero, allora la funzione f ammette derivata in P_0 secondo il vettore $\vec{v}$.
Se il vettore scelto corrisponde a un versore, la derivata prende il nome di **derivata direzionale** e si indica con il simbolo $\frac{\partial}{\partial \hat{v}} f\left(\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}\right) \in \mathbb{R}$.

Definizione 18.14 (Derivata parziale)**.** Sia $\frac{\partial}{\partial \hat{v}} f\left(\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}\right) \in \mathbb{R}$ la derivata direzionale della funzione $f\colon D \to C$ secondo il versore $\hat{v}$.
Se $\hat{v} = x_i$ (una delle componenti del vettore), allora la derivata prende il nome di **derivata parziale rispetto alla variabile** x_i.

$$\frac{f\left(\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_i + h & \cdots & x_n \end{pmatrix}\right) - f\left(\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}\right)}{h} = \\ = \frac{\partial}{\partial x_i} f\left(\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}\right)$$

La derivabilità nelle funzioni di variabili reali di variabili reali, come per la derivabilità nelle funzioni di variabile reale, è un concetto puntuale, ma è possibile estenderlo anche a un intervallo.

Esiste però una eccezione nell'estensione del concetto di derivabilità nel caso di funzioni a più variabili reali.
Se una funzione a singola variabile è derivabile in un punto, allora la funzione è sicuramente continua in quel punto. Quando si estende il dominio al campo $\mathbb{R}^n$, questo teorema non è più valido, infatti essere derivabile in una direzione non implica per la funzione l'essere continua in quella funzione. Ciò dipende dal fatto che la derivata direzionale (e quindi parziale) analizza il comportamento della funzione lungo una specifica retta (il vettore di derivazione), mentre per analizzare la continuità occorre analizzare il comportamento globale della funzione in un intorno del punto.

Esercizi

Vediamo ora due esercizi riguardanti le derivate parziali.

Esercizio 18.4

Studiare, nel rispettivo dominio, la derivabilità parziale della seguente funzione e calcolarne le rispettive derivate parziali.

$$f\left(\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\right) = 2xy^3 - \sqrt{x} + \sqrt[3]{y}$$

$$D = \left\{\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 | x \geq 0\right\}$$

$$\exists \frac{\partial}{\partial x} f\left(\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\right) \colon \forall P \in D \setminus \left\{\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \in D | x = 0\right\} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} f\left(\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\right) = 2y^3 - \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\exists \frac{\partial}{\partial y} f\left(\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\right) \colon \forall P \in D \setminus \left\{\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \in D | y = 0\right\} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y} f\left(\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\right) = 6xy^2 - \frac{1}{3\sqrt{y^2}}$$

Esercizio 18.5

Studiare il dominio e la derivabilità direzionale della seguente funzione in $(0, y_0)$ e calcolarne le rispettive derivate direzionali secondo $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}$.

$$f\left(\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\right) = \begin{cases} x \log\left(1 + \sqrt{\frac{y}{x}}\right), & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Notiamo che $\vec{u} = \hat{\jmath}$, quindi:

$$\frac{\partial}{\partial \vec{u}} f\left(\begin{pmatrix} 0 & y_0 \end{pmatrix}\right) = \lim_{h \to 0} \frac{f\left(\begin{pmatrix} x_0 & y_0 + h \end{pmatrix}\right) - f\left(\begin{pmatrix} x_0 & y_0 \end{pmatrix}\right)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f\left(\begin{pmatrix} 0 & y_0 + h \end{pmatrix}\right) - f\left(\begin{pmatrix} 0 & y_0 \end{pmatrix}\right)}{h} = 0 \ \forall y_0 \geq 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \vec{v}} f\left(\begin{pmatrix} 0 & y_0 \end{pmatrix}\right) = \lim_{h \to 0} \frac{f\left(\begin{pmatrix} x_0 + 2h & y_0 + h \end{pmatrix}\right) - f\left(\begin{pmatrix} x_0 & y_0 \end{pmatrix}\right)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f\left(\begin{pmatrix} 2h & y_0 + h \end{pmatrix}\right) - f\left(\begin{pmatrix} x_0 & y_0 \end{pmatrix}\right)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2h \log\left(1 + \sqrt{\frac{y_0 + h}{2h}}\right)}{h} =$$

$$= 2 \lim_{h \to 0} \log\left(1 + \sqrt{\frac{y_0 + h}{2h}}\right) = 2 \lim_{h \to 0} \left(1 + \sqrt{\frac{y_0}{2h} + \frac{1}{2}}\right) =$$

$$= \begin{cases} +\infty \Rightarrow \nexists, & \text{per } y_0 > 0 \\ 2 \log\left(1 + \sqrt{\frac{1}{2}}\right), & \text{per } y_0 = 0 \end{cases}$$

Derivate parziali di ordine superiore

Esattamente come nel caso di funzioni a singola variabile, anche per le funzioni a più variabili reali si possono definire derivate parziali di secondo ordine, di terzo ordine, etc.

Iniziamo con la definizione della *derivata parziale di secondo ordine*.

Definizione 18.15 (Derivata parziale di secondo ordine)**.** Sia $f \colon D \subseteq \mathbb{R}^n \to C \subseteq \mathbb{R}$. Supponiamo che in ogni punto $P = \left(\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}\right) \in D$ esista la sua derivata parziale di primo ordine rispetto alla variabile x_i, e che questa derivata sia a sua volta derivabile rispetto alla variabile x_j.
Questa seconda derivata si definisce come **derivata parziale di secondo grado rispetto a** x_i **e** x_j (dove x_i può essere uguale o diversa da x_j).

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

Ovviamente, questa definizione si può estendere, fino ad ottenere le derivate parziali di ordine superiore.

Definizione 18.16 (Derivata parziale di ordine n)**.** Sia $f\colon D \subseteq \mathbb{R}^n \mapsto C \subseteq \mathbb{R}$. Supponiamo che in ogni punto $P = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \in D$ esista la sua derivata parziale di ordine $n-1$ rispetto alle variabili $x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_{n-1}}$, e che questa derivata sia a sua volta derivabile rispetto alla variabile x_{i_n}.
Questa nuova derivata si definisce come **derivata parziale di grado n rispetto alle variabili** $x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_{n-1}}, x_{i_n}$ (dove le variabili possono anche essere diverse tra oro).

$$\frac{\partial^n f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_{n-1}} \partial x_{i_n}}$$

18.5 Gradiente

Se una funzione a più variabili f è derivabile in un punto P appartemente ad un intorno di $\mathbb{R}^n$ per tutte le sue dimensioni, allora è possibile un vettore particolare che parte da quel punto: il *gradiente*.

Definizione 18.17 (Gradiente)**.** Sia $f\colon D \subseteq \mathbb{R}^n \to C \subseteq \mathbb{R}$ una funzione a variabili reali e sia $P = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \in D$ un punto per cui la funzione f è derivabile per tutte le componenti.
Si definisce **gradiente** il vettore che ha come componenti le derivate parziali di primo ordine di f.

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Il gradiente rappresenta la direzione e il verso di massima pendenza del grafico della funzione nel punto P.

Capitolo 19

Integrazione di funzioni a più variabili

Per completare l'analisi delle funzioni a più variabili reali, analizziamo ora il concetto di integrazione di queste funzioni.

È possibile, infatti, estendere il concetto di calcolo integrale a funzioni con più variabili. Vedremo inoltre alcune tipologie di integrali particolari, valide per funzioni a due o tre variabili.

19.1 Integrale di Riemann

Come abbiamo visto con la definizione degli integrali definiti per singola variabile, l'integrazione a singola variabile è definita come limite di somme approssimanti. Questa metodologia di integrazione è nota come **integrale di Riemann**.

L'integrale di Riemann permette di calcolare in maniera proficua funzioni primitive, per cui è possibile estendere il concetto di somme approssimanti anche per integrali a più variabili. Questa estensione è laboriosa a causa della varietà di insiemi su cui è eseguita l'integrazione.
Le funzioni semplici con cui approssimare le funzioni sono infatti definite su un'unione finita di rettangoli nella forma:

$$R = [a_1, b_1) \times [a_2, b_2) \times \cdots \times [a_n, b_n)$$

dove $R \subset \mathbb{R}^n$. La dimensione di ognuno di questi rettangoli è

$$m(R) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \cdots (b_n - a_n)$$

Inoltre, definiamo come funzione semplice ϕ: $R \to \mathbb{R}$ la funzione

$$\phi \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{k} c_i \chi_{R_i} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}$$

dove i coefficienti c_i sono costanti reali, R_i è la successione di rettangoli in R e χ_{R_i} è la funzione caratteristica[1] della successione di rettangoli.

[1] La funzione caratteristica rappresenta l'appartenenza di un elemento a un insieme

Se i rettangoli sono tutti disgiunti, e detta T la loro unione, si definisce l'integrale della funzione semplice ϕ su T nel seguente modo:

$$\int_T \phi\left(x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n\right) \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_n = \sum_{i=0}^{k} c_i m(R_i)$$

In questo contesto, una funzione f è detta *integrabile* se può essere approssimata con precisione arbitraria da funzioni semplici maggioranti e minoranti.

L'integrale di Riemann così esteso condivide le proprietà che caratterizzano l'integrale per funzioni ad una variabile: è lineare, additivo (ovvero è possibile spezzare il dominio d'integrazione), monotono. Valgono inoltre il teorema della media integrale e il teorema della media pesata.

19.2 Integrali doppi

Analizziamo ora il concetto di integrazione per funzioni con due variabili reali.

Cominciamo a vedere il caso più semplice delle funzioni definite su un rettangolo $R = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$.
Consideriamo una partizione σ di R di $m \times n$ rettangoli del tipo $R_{i,j} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$, dove

$$\begin{aligned} a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{m-1} < x_m = b \\ c = y_0 < y_1 < \ldots < y_{n-1} < y_n = d \end{aligned}$$

Consideriamo ora una funzione $f\colon R \to \mathbb{R}$ una funzione limitata, cioè $m \leq f\left(x \quad y\right) \leq M \quad \forall \left(x \quad y\right) \in R$, e poniamo

$$\begin{aligned} m_{i,j} &= \inf\{f\left(x \quad y\right) \mid \left(x \quad y\right) \in R_{i,j}\} \\ M_{i,j} &= \sup\{f\left(x \quad y\right) \mid \left(x \quad y\right) \in R_{i,j}\} \end{aligned}$$

Si definiscono **somma integrale inferiore** e **somma integrale superiore** di f relativa alla partizione σ, rispettivamente, le somme

$$\begin{aligned} s(f, \sigma) &= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} m_{i,j}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) \\ S(f, \sigma) &= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} M_{i,j}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) \end{aligned}$$

In base a questa definizione, è possibile dire che

$$m(b-a)(d-c) \leq s(f, \sigma) \leq S(f, \sigma) \leq M(b-a)(d-c)$$

Pertanto l'estremo superiore delle somme inferiori e l'estremo inferiore delle somme superiori sono quantità limitate e soddisfano le disequazioni

$$\begin{aligned} m(b-a)(d-c) \leq \inf s(f, \sigma) \\ \sup s(f, \sigma) \leq M(b-a)(d-c) \end{aligned}$$

Definizione 19.1 (Integrale doppio)**.** Sia $f\colon R \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione limitata. Si dice che f è *integrabile* su R se

$$\inf s(f,\sigma) = \sup s(f,\sigma)$$

Il valore di questa uguaglianza si chiama **integrale doppio** su R e si indica con $\iint\limits_R f\left(x \quad y\right)\, dxdy$ (se l'integrale è indefinito) o con $\int_{x=a}^{b}\int_{y=c}^{d} f\left(x \quad y\right)\, dxdy$ (se l'integrale è definito).

Si può osservare che se $f\left(x \quad y\right) \geq 0$, allora l'integrale doppio definito fatto sul rettangolo R si può interpretare come il volume della regione tridimensionale limitata dal basso dal rettangolo R e dall'alto dal grafico della funzione f. Ciò è una naturale estensione del concetto di integrale definito per funzioni di variabile singola.

Una volta definito il concetto di integrale doppio, occorre stabilire l'integrabilità di una funzione a due variabili, cioè caratterizzare la classe delle funzioni integrabili, e successivamente di calcolare l'integrale. Un criterio necessario e sufficiente di integrabilità è dato dal seguente teorema, analogo a quello per le funzioni a singola variabile.

Teorema 19.1. *Sia $f\colon R \to \mathbb{R}$ una funzione limitata.*
Allora f risulta integrabile se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una partizione σ_ε di R tale che

$$S(\sigma_\varepsilon, f) - s(\sigma_\varepsilon, f) < \varepsilon$$

Domini semplici e formule di riduzione

Se $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ è una funzione continua, allora il trapezoide A individuato da dal grafico di f sull'intervallo $[a,b]$ è misurabile. Inoltre se $f(x) \geq 0$, allora la misura del trapezoide è l'integrale della funzione f sull'intervallo $[a,b]$.
Più in generale, se $\phi_1, \phi_2\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ sono due funzioni continue tali che $\phi_2 \geq \phi_1$, possiamo definire il dominio misurabile

$$D = \{\left(x \quad y\right) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a,b], y \in [\phi_1(x), \phi_2(x)]\}$$

che chiameremo **dominio semplice rispetto all'asse** y.
Allo stesso modo, se $\phi_1, \phi_2\colon [c,d] \to \mathbb{R}$ sono due funzioni continue tali che $\phi_2 \geq \phi_1$, possiamo definire il dominio misurabile

$$D = \{\left(x \quad y\right) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in [c,d], x \in [\phi_1(y), \phi_2(y)]\}$$

che chiameremo **dominio semplice rispetto all'asse** x.

Grazie alle definizioni appena enunciate, è possibile individuare un metodo per il calcolo di integrali doppi.

Teorema 19.2 (Formule di riduzione)**.** *Sia D un dominio semplice di $\mathbb{R}^2$ e sia f una funzione continua in D.*
Allora:

1. *se D è semplice rispetto all'asse y, allora vale la formula*

$$\iint\limits_D f\left(x \quad y\right)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{x=a}^{b} \left(\int_{y=\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f\left(x \quad y\right)\, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

2. *se D è semplice rispetto all'asse x, allora vale la formula*

$$\iint\limits_D f\left(x \quad y\right)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{y=c}^{d} \left(\int_{x=\phi_1(y)}^{\phi_2(y)} f\left(x \quad y\right)\, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$$

Esempio 19.1

Calcolare il seguente integrale.

$$\iint\limits_D xy\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y, \text{ dove } D = \left\{ \left(x \quad y\right) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq x, 0 \leq x \leq 1, y \geq 0 \right\}$$

Prima di tutto, si può notare che la funzione f è definita e continua in tutto $\mathbb{R}^2$, pertanto lo è anche in D e quindi risulta integrabile. L'insieme D è compatto, cioè chiuso e limitato, pertanto l'integrale è ben definito.
Per il calcolo, si può osservare che D è semplice rispetto ad entrambi gli assi.

Consideriamo solo D semplice rispetto all'asse y.

$$\begin{aligned}\int_{x=0}^{1} \left(\int_{y=0}^{y=x} xy\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y \right) &= \int_{x=0}^{1} x \left(\int_{y=0}^{y=x} y\, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \\ &= \int_{x=0}^{1} \left[\frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=x} \mathrm{d}x = \\ &= \int_{x=0}^{1} x \frac{x^2}{2}\, \mathrm{d}x = \left[\frac{x^4}{8} \right]_{x=0}^{1} = \frac{1}{8}\end{aligned}$$

Esempio 19.2

Calcolare il seguente integrale.

$$\iint\limits_D \mathrm{e}^{y^3}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y, \text{ dove } D = \left\{ \left(x \quad y\right) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, \sqrt{x} \leq y \leq 1 \right\}$$

La funzione f è continua in D e quindi risulta integrabile. L'insieme D è compatto, pertanto l'integrale è ben definito.
Per il calcolo, si può osservare che D è semplice rispetto ad entrambi gli assi.

Consideriamo solo D semplice rispetto all'asse x.

$$\int_{y=0}^{1}\left(\int_{x=0}^{x=y^2} e^{y^3}\,dx\right)dy = \int_{y=0}^{1} e^{y^3}\left(\int_{x=0}^{x=y^2} 1\,dx\right)dy =$$
$$= \int_{y=0}^{y=1} e^{y^3} y^2\,dy$$

Applichiamo la risoluzione per sostituzione, sostituendo $u = y^3$, quindi $\frac{du}{dy} = 3y^2 \Rightarrow dy = \frac{1}{3y^2}du$.

$$\int_{y=0}^{y=1} e^{y^3} y^2\,dy \Rightarrow \frac{1}{3}\int_{u=0}^{u=1} e^{u}\,du = \left[\frac{e^u}{3}\right]_0^1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left[\frac{e^{y^3}}{3}\right]_0^1 = \frac{e-1}{3}$$

Cambio di variabili

Può capitare che le variabili originali per un integrale doppio rendano la risoluzione difficile. In questi casi, può essere necessario applicare una trasformazione geometrica al dominio D della funzione integranda.

Sia Ω un insieme aperto di $\mathbb{R}^2$ e indichiamo con $\Phi\colon \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una funzione che realizza il cambiamento di coordinate.

$$\begin{aligned} &\Phi\colon \Omega \to \mathbb{R}^2 \\ &(u \quad v) \mapsto (x\,(u \quad v) \quad y\,(u \quad v)) \qquad u, v \in \Omega \end{aligned}$$

Supponiamo che Φ sia una funzione biunivoca e che le sue componenti siano funzioni continue con derivate parziali continue in Ω.
Con queste condizioni, introduciamo la *matrice jacobiana*[2] di Φ.

$$J_\Phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$$

Supponiamo che il determinante della matrice jacobiana sia non nullo per ogni componente di Ω, allora è possibile enunciare il seguente teorema, che identifica un secondo metodo di risoluzione degli integrali doppi.

Teorema 19.3 (Cambiamento di variabili)**.** *Se D è un dominio misurabile e f è una funzione integrabile su D, allora*

$$\iint_D f\,(x \quad y)\,dxdy = \iint_{\Phi^{-1}(D)} f\,(x\,(u \quad v) \quad y\,(u \quad v))\,\left|\det J_\Phi\right|\,dudv$$

[2]In analisi matematica, in particolare nel calcolo vettoriale e nel calcolo infinitesimale, la matrice jacobiana di una funzione che ha dominio e codominio in uno spazio euclideo è la matrice i cui elementi sono le derivate parziali prime della funzione. Lo *Jacobiano* è il determinante della matrice jacobiana, quando questa è quadrata.

Il cambiamento di variabili corrisponde all'integrazione per sostituzione delle funzioni a variabile singola.

Coordinate polari

In $\mathbb{R}^2$, se il dominio sul quale si deve integrare presenta una simmetria radiale o delle caratteristiche circolari, un cambio di variabile molto usato è il passaggio in **coordinate polari**.
La relazione fondamentale per effettuare la trasformazione della funzione è

$$\Phi\left(\rho \quad \theta\right) = \begin{cases} x\left(\rho \quad \theta\right) = x_0 + \rho\cos\theta \\ y\left(\rho \quad \theta\right) = y_0 + \rho\sin\theta \end{cases}$$

Esempio 19.3

Calcolare il seguente integrale.

$$\iint\limits_D \frac{xy^2}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\ con\ D = \{\left(x \quad y\right) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 < 4, x > 0, y > 0\}$$

Prima di tutto osserviamo che la funzione integranda è definita e prolungabile per continuità nell'origine, quindi è integrabile sul dominio limitato D. Passiamo in coordinate polari, ottenendo la funzione $\rho\cos\theta\sin^2\theta$, definita sull'insieme $D' = \Phi^{-1}(D) = \{\left(\rho \quad \theta\right) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < \rho < 2, 0 < \theta < \frac{\pi}{2}\}$.
L'integrale diventa:

$$\iint\limits_{D'} \rho^2\cos\theta\sin^2\theta\,\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta$$

Iniziamo a risolverlo nel suo nuovo dominio.

$$\begin{aligned}\iint\limits_{D'} \rho^2\cos\theta\sin^2\theta\,\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta &= \int_{\rho=0}^{2}\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \rho^2\cos\theta\sin^2\theta\,\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta = \\ &= \int_{\rho=0}^{2}\rho^2\,\mathrm{d}\rho \cdot \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta\end{aligned}$$

Per il secondo integrale usiamo il metodo di risoluzione per sostituzione, sostituendo $u = \sin\theta$, quindi $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta} = \cos\theta \Longrightarrow \mathrm{d}\theta = \frac{1}{\cos\theta}\mathrm{d}u$.

$$\begin{aligned}\int_{\rho=0}^{2}\rho^2\,\mathrm{d}\rho \cdot \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta &= \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^2 \cdot \int_{u=0}^{\frac{\pi}{2}} u^2\,\mathrm{d}u = \\ &= \frac{8}{3}\cdot\left[\frac{u^3}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \\ &= \frac{8}{3}\cdot\left[\frac{\sin^3\theta}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{8}{3}\cdot -\frac{1}{3} = -\frac{8}{9}\end{aligned}$$

19.3 Integrali tripli

Allo stesso modo in cui abbiamo definito l'integrazione per funzioni con due variabili reali, passiamo ora a definire l'integrazione per funzioni con tre variabili reali.

Consideriamo un parallelepipedo $P = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] \subset \mathbb{R}^3$ e una partizione σ, ottenuta come prodotto cartesiano di partizioni degli intervalli mediante i punti, rispettivamente, $\{x_1, \dots, x_i\}$, $\{y_1, \dots, y_j\}$ e $\{z_1, \dots, z_k\}$. Tramite questa partizione, è possibile definire P come unione dei parallelepipedi $P_{i,j,k} = [a_{i-1}, b_i] \times [a_{j-1}, b_j] \times [a_{k-1}, b_k]$.
Consideriamo ora una funzione $f\colon P \to \mathbb{R}$ una funzione limitata, cioè $m \leq f\left(x \quad y\right) \leq M \quad \forall \left(x \quad y\right) \in R$, e poniamo

$$
\begin{aligned}
m_{i,j,k} &= \inf\{f\left(x \quad y \quad z\right) \mid \left(x \quad y \quad z\right) \in P_{i,j,k}\} \\
M_{i,j,k} &= \sup\{f\left(x \quad y \quad z\right) \mid \left(x \quad y \quad z\right) \in P_{i,j,k}\}
\end{aligned}
$$

Si definiscono **somma integrale inferiore** e **somma integrale superiore** di f relativa alla partizione σ, rispettivamente, le somme

$$
\begin{aligned}
s(f, \sigma) &= \sum_{h=1}^{i} \sum_{l=1}^{j} \sum_{r=1}^{k} m_{h,m,l}(x_h - x_{h-1})(y_l - y_{l-1}) \times [z_{r-1}, z_r] \\
S(f, \sigma) &= \sum_{h=1}^{i} \sum_{l=1}^{j} \sum_{r=1}^{k} M_{h,m,l}(x_h - x_{h-1})(y_l - y_{l-1}) \times [z_{r-1}, z_r]
\end{aligned}
$$

Definizione 19.2 (Integrale triplo)**.** Sia $f\colon P \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una funzione limitata.
Si dice che f è *integrabile* su P se

$$\inf s(f, \sigma) = \sup s(f, \sigma)$$

Il valore di questa uguaglianza si chiama **integrale triplo** su P e si indica con $\iiint\limits_P f\left(x \quad y \quad z\right) \quad dxdydz$ (se l'integrale è indefinito) o con $\int_{x=a_1}^{b_1} \int_{y=a_2}^{b_2} \int_{z=a_3}^{b_3} f\left(x \quad y \quad z\right) \; dxdydz$ (se l'integrale è definito).

Integrazione per fili e per sezioni

Consideriamo ora regioni particolari dello spazio per le quali il calcolo dell'integrale triplo può essere ridotto a integrali mono e bidimensionali. Tali sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$ generalizzano gli insiemi semplici rispetto agli assi del piano, e ci permettono di ottenere formule esplicite di riduzione per un integrale triplo. Precisamente si presentano due situazioni tipiche, che portano a due metodi di risuzione degli integrali tripli: l'*integrazione per fili* e l'*integrazione per sezioni*.

Un insieme $\Omega \subset \mathbb{R}^3$£ si dice *semplice* (o normale) rispetto all'asse z se è della forma

$$\Omega = \{\left(x \quad y \quad z\right) \in \mathbb{R}^3 \mid \left(x \quad y\right) \in D, g_1\left(x \quad y\right) \leq z \leq g_2\left(x \quad y\right)\}$$

dove a sua volta, D è un insieme misurabile e chiuso del piano e le funzioni g_1, g_2 sono definite continue in $D \subset \mathbb{R}^2$. Geometricamente, la formula significa che prima (nell'integrale più interno) si integra lungo il "filo" $z \in (g_1(x \quad y) \quad g_2(x \quad y))$; da qui la necessità dell'ipotesi di continuità delle funzioni g_1 e g_2 per garantirne l'integrabilità, e poi si fa variare i valori $(x \quad y) \in D$.

Definizione 19.3 (Integrazione per fili)**.** Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un insieme misurabile e chiuso del piano e sia $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione continua e integrabile su Ω. L'integrale triplo della funzione è facilmente riconducibile a un integrale doppio isolando il "filo" z.

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x \quad y \quad z)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint\limits_{D} \Big(\int_{g_1(x \quad y)}^{g_2(x \quad y)} f(x \quad y \quad z)\, \mathrm{d}z \Big)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Esempio 19.4

Calcolare il seguente integrale triplo.

$$\iiint\limits_{\Omega} x^2 z\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z, \textit{ con } \Omega = \{(x \quad y \quad z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\}$$

L'insieme Ω rappresenta la semisfera superiore di centro l'origine degli assi e raggio R, che è un insieme compatto e misurabile. La funzione f è continua sull'insieme Ω, quindi è integrabile. Per il calcolo procediamo per fili.

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_{\Omega} x^2 z\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \iint\limits_{D} \Big(\int_{z=0}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} x^2 z\, \mathrm{d}z \Big)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \\
&= \iint\limits_{D} \Big[x^2 \frac{z^2}{2} \Big]_{z=0}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \\
&= \frac{1}{2} \iint\limits_{D} x^2(R^2 - x^2 - y^2)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

Risolviamo ora l'integrale doppio passando alle coordinate polari.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \iint\limits_{D} x^2(R^2 - x^2 - y^2)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \frac{1}{2} \iint\limits_{Phi^{-1}(D)} \rho^3 \cos^2\theta (R^2 - \rho^2)\, \mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta = \\
&= \frac{1}{2} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\rho=0}^{R} \rho^3 \cos^2\theta (R^2 - \rho^2)\, \mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta = \\
&= \frac{1}{2} \int_{\theta=0}^{2\pi} \cos^2\theta\, \mathrm{d}\theta \cdot \int_{\rho=0}^{R} \rho^3 R^2 - \rho^5\, \mathrm{d}\rho = \\
&= \frac{1}{2} \Big[\frac{1}{2}(\theta + \cos\theta \sin\theta \Big]_0^{2\pi} \Big[\frac{\rho^4 R^2}{4} - \rho^6 6 \Big]_0^R = \frac{\pi R^6}{24}
\end{aligned}$$

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ misurabile tale che la coordinata z dei suoi punti vari in un intervallo $[\alpha,\beta] \in \mathbb{R}$.
Per ogni z_0 in tale intervallo, poniamo $S(z_0) = \{(x \quad y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x \quad y \quad z_0) \in \Omega\}$. Questo insieme non è altro che la proiezione sul piano xy della sezione Ω_{z_0}, ottenuta come intersezione del dominio Ω con il piano $z = z_0$. Possiamo dunque descrivere l'insieme Ω come $\Omega = \{(x \quad y \quad z) \mid (x \quad y) \in S(z), \alpha \leq z \leq \beta\}$.

Definizione 19.4 (Integrazione per sezioni)**.** Sia $\Omega \in \mathbb{R}^3$ un insieme misurabile e chiuso del piano, $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione continua e integrabile su Ω e $\Omega(z)$ (per ogni $z \in [\alpha,\beta]$) un dominio regolare del piano.
L'integrale triplo della funzione è facilmente riconducibile ad un integrale singolo isolando la sezione $\Omega(z)$.

$$\iiint\limits_{\Omega} f\left(x \quad y \quad z\right)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_{z=z_1}^{z_2} \left(\iint\limits_{S(z)} f\left(x \quad y \quad z\right)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}z$$

Esempio 19.5

Calcolare il seguente integrale triplo.

$$\iint\limits_{\Omega} |x|z\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z, \text{ con } \Omega = \{(x \quad y \quad z) \mid x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}$$

Ω è un insieme compatto e misurabile; inoltre, la funzione è continua su Ω, quindi è integrabile.
Risolviamo l'integrale per sezioni, facendo variare z tra $z_1 = 0$ e $z_2 = 1$ e considerando le sezioni $S(z)$ che si ottengono con piano paralleli al piano $z = 1$.

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\Omega} |x|z\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \int_{z=0}^{1} \left(\iint\limits_{S(z)} |x|z\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}z = \\ &= \int_{z=0}^{1} z \left(\iint\limits_{x^2+y^2 \leq z} |x|\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}z\end{aligned}$$

Risolviamo l'integrale doppio con il cambiamento alle coordinate polari.

$$\begin{aligned}\int_{z=0}^{1} z \left(\iint\limits_{x^2+y^2 \leq z} |x|\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}z \int_{z=0}^{1} z \left(\iint\limits_{\Phi^{-1}(S(z))} \rho^2 |\cos\theta|\, \mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta \right) \mathrm{d}z &= \\ = \int_{z=0}^{1} z \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\rho=0}^{\sqrt{z}} \rho^2 |\cos\theta|\, \mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z &= \\ = \int_{z=0}^{1} z \left(\int_{\theta=0}^{2\pi} |\cos\theta|\, \mathrm{d}\theta \cdot \int_{\rho=0}^{\sqrt{z}} \rho^2\, \mathrm{d}\rho \right) \mathrm{d}z &= \\ = \int_{z=0}^{1} z \left(4 \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\, \mathrm{d}\theta \cdot \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_0^{\sqrt{z}} \right) \mathrm{d}z &= \\ = \frac{4}{3} \int_{z=0}^{1} -z^{\frac{5}{2}}\, \mathrm{d}z = \frac{8}{21}\end{aligned}$$

Cambio di variabili

Anche per il calcolo degli integrali tripli, può essere utile eseguire particolari trasformazioni di coordinate.
Due sistemi di coordinate molto usati per funzioni con tre variabili reali sono le *coordinate cilindriche* e le *coordinate sferiche*.

Coordinate cilindriche

Nel caso in cui il dominio della funzione ha una qualche simmetria rispetto all'asse z, è possibile trasformare le coordinate originali in **coordinate cilindriche** tramite la trasformazione

$$\Phi\left(\rho \quad \theta \quad z\right) = \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

in cui $\rho \geq 0$, $\theta \in [0, 2\pi)$ e $z \in \mathbb{R}$. Per questa trasformazione, il modulo del determinante della matrice jacobiana è ρ.

Esempio 19.6

Risolvi il seguente integrale triplo.

$$\iiint_D (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z, \textit{ con } D = \{\left(x \quad y \quad z\right) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \leq 1, 1-x^2-y^2 \leq z \leq 3\}$$

Risolviamo passando alle coordinate cilindriche.

$$\begin{aligned}\iiint_D (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \iiint_{\Phi^{-1}(D)} \rho^3\,\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z = \\ &= \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\rho=0}^{1}\int_{z=1-\rho^2}^{3} \rho^3\,\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z = \\ &= \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\rho=0}^{1} \rho^3\cdot[z]_{1-\rho^2}^{3}\,\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta = \\ &= \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\rho=0}^{1} \rho^3(2+\rho^2)\,\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta = \\ &= \int_{\theta=0}^{2\pi}\left[\frac{\rho^4}{2}+\frac{\rho^6}{6}\right]_0^1\mathrm{d}\theta = \\ &= \frac{2}{3}\int_{\theta=0}^{2\pi}\mathrm{d}\theta = \frac{4}{3}\pi\end{aligned}$$

Coordinate sferiche

Nel caso in cui il dominio della funzione ha una qualche simmetria rispetto all'origine degli assi, è possibile trasformare le coordinate originali in **coordinate**

sferiche tramite la trasformazione

$$\Phi\left(\rho \quad \theta \quad \phi\right) = \begin{cases} x = \rho\cos\theta\sin\phi \\ y = \rho\sin\theta\sin\phi \\ z = \rho\cos\phi \end{cases}$$

in cui $\rho \geq 0$, $\theta \in [0, 2\pi)$ e $\phi \in [0, \pi)$. Per questa trasformazione, il modulo del determinante della matrice jacobiana è $\rho^2 \sin\phi$.

Parte VI

Equazioni differenziali

Capitolo 20

Le equazioni differenziali

Cambiamo ora prospettiva sul calcolo integrale delle funzioni.

Determinare le funzioni primitive di una funzione $f(x)$ significa risolvere una equazione del tipo

$$y'(x) = f(x)$$

dove l'incognita è la funzione $y(x)$.
Come sappiamo dal calcolo integrale, determinando una funzione primitiva si determina in realtà un insieme di funzioni, che si distinguono per una costante tra loro. Imponendo ulteriori condizioni all'equazione, però, è possibile determinare anche il valore della costante c, ottenendo la specifica funzione che ci interessa.

Questo specifico tipo di equazioni prende il nome di *equazione differenziale*, e viene usato in vari settori della matematica, della fisica, dell'ingegneria e delle scienze, in quanto fungono da *modello matematico* per molti fenomeni.

Prima di definire i metodi di risoluzione, vediamo alcuni termini che incontreremo nello studio di queste equazioni.

20.1 Terminologia

Definizione 20.1 (Equazione differenziale)**.** Si definisce **equazione differenziale** una particolare equazione in cui l'incognita è una funzione.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)$$

Il termine *differenziale* indica la presenza delle derivate della funzione incognita nell'equazione.

Risolvere una equazione differenziale consiste nel determinare tutte le possibili soluzioni (ovvero le possibili funzioni) che soddisfano l'equazione.

Definizione 20.2 (Ordine di una equazione differenziale)**.** Si definisce **ordine** di una equazione differenziale il più alto ordine di derivazione della funzione incognita.

Definizione 20.3 (Grado di una equazione differenziale)**.** Si definisce **grado** di una equazione differenziale il più alto esponente con cui compaiono potenze della funzione incognita o delle sue derivate.

Esempio 20.1

$$f'(x) + xf(x) = 2\cos x + e^x \ \textit{(primo ordine)}$$
$$f''(x) + e^x f(x) = \sin x \ \textit{(secondo ordine)}$$

Definizione 20.4 (Integrale di un'equazione differenziale)**.** Una delle soluzioni di una equazione differenziale prende il nome di **integrale**; il suo grafico prende il nome di **curva integrale**.

Una volta date tutte queste definizioni, possiamo affermare che risolvere una equazione differenziale consiste, quindi, nel determinare l'insieme di tutti gli integrali dell'equazione, detto **integrale generale**.

Definizione 20.5 (Equazione differenziale ordinaria)**.** Si definisce **equazione differenziale ordinaria** (abbreviata in **EDO**) una equazione differenziale in cui compare la funzione incognita e le sue derivate fino all'ordine n.

20.2 Equazioni differenziali lineari

Una tipologia particolare di equazioni differenziali è quella delle **equazioni differenziali lineari**. chiamate così perché risulta essere una combinazione lineare della variabile incognita.

Definizione 20.6 (Equazione differenziale lineare)**.** Si definisce **equazione differenziale lineare** una equazione lineare descrivibile come combinazione lineare della funzione incognita.

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = b(x)$$

dove $b(x)$ viene detta **funzione asssegnata**.

Se $b(x) = 0$, l'equazione differenziale lineare viene detta **omogenea**, altrimenti viene detta **non omogenea**.

Equazioni differenziali lineari del primo ordine

Iniziamo a vedere come determinare l'integrale generale delle equazioni differenziali lineari del primo ordine.

Definizione 20.7 (Equazione differenziale lineare del primo ordine)**.** Si definisce **equazione differenziale lineare del primo ordine** una equazione differenziale lineare in cui compare la funzione incognita e solo la sua derivata fino al primo ordine.

$$y' + a(x)y = b(x)$$

Le funzioni $a(x)$ e $b(x)$ sono continue in un intervallo (o nell'unione di più intervalli).

Nel caso in $b(x) = 0$, l'equazione differenziale lineare si può risolvere come una semplice equazione differenziale a variabili separabili; se, invece, l'equazione non è omogenea, bisogna determinare una particolare funzione $I(x)$, detta **funzione integrante**, che goda della seguente proprietà:

$$\begin{gathered}
y'I(x) + a(x)yI(x) = \frac{d}{dx}[yI(x)] \\
y'I(x) + a(x)yI(x) = y'I(x) + yI'(x) \\
a(x)yI(x) = yI'(x)
\end{gathered}$$

Ponendo la condizione $I(x) \neq 0$, abbiamo

$$\begin{gathered}
a(x) = \frac{I'(x)}{I(x)} \\
\int \frac{I'(x)}{I(x)} 1; dx = \int a(x)\, dx \\
\log|I(x)| + c = \int a(x)\, dx \\
|I(x)| = \mathrm{e}^{\int a(x)\, dx} + c
\end{gathered}$$

Poiché a noi serve una sola funzione e non l'insiende delle funzioni primitive, poniamo $I(x) > 0$ e $c = 0$, quindi

$$I(x) = \mathrm{e}^{\int a(x)\, dx}$$

Una volta ottenuta la funzione integrante, riconsidero l'equazione differenziale iniziale e la moltiplico per la funzione integrante

$$\begin{gathered}
y' + a(x)y = b(x) \\
y'I(x) + a(x)yI(x) = b(x)I(x) \\
\frac{d}{dx}[yI(x)] = b(x)I(x) \\
\int \frac{d}{dx}[yI(x)]\, dx = \int b(x)I(x)\, dx \\
yI(x) = \int b(x)I(x)\, dx + c \\
y = \frac{1}{I(x)} = \int b(x)I(x)\, dx + c
\end{gathered}$$

Abbiamo così dimostrato il seguente teorema.

Teorema 20.1. *L'integrale generale di una equazione differenziale lineare del primo ordine è dato da*

$$y = e^{-\int a(x)\,dx}\left[\int \left(b(x)e^{\int a(x)\,dx}\right)\,dx\right] + c$$

Esempio 20.2

Risolvi l'equazione differenziale $y'\frac{1}{x}y - (x^2+1) = 0$.

$$y'\frac{1}{x}y - (x^2+1) = 0$$
$$y' + \frac{1}{x}y = x^2 + 1$$

$$a(x) = \frac{1}{x}, b(x) = x^2 + 1$$
$$I(x) = e^{\int \frac{1}{x}\,dx} = e^{\log|x|} = |x|$$

$$y = \frac{1}{|x|}\left\{\int |x|(x^2+1)\,dx + x\right\} = \begin{cases} \frac{1}{x}\left\{\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + c\right\}, & \textit{per } x > 0 \\ -\frac{1}{x}\left\{-\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + c\right\}, & \textit{per } x < 0 \end{cases} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y = \begin{cases} \frac{x^3}{4} + \frac{x}{2} + \frac{c}{x}, & \textit{per } x > 0 \\ \frac{x^3}{4} + \frac{x}{2} - \frac{c}{x}, & \textit{per } x < 0 \end{cases}$$

Equazioni differenziali lineari del secondo ordine

Definizione 20.8 (Equazione differenziale lineare del primo ordine)**.** Si definisce **equazione differenziale lineare del primo ordine** una equazione differenziale lineare in cui compare la funzione incognita e solo la sua derivata fino al secondo ordine.

$$ay'' + by'(x) + cy(x) = f(x)$$

I coefficienti di queste equazioni sono costanti.

La risoluzione di questa tipologia di equazioni consiste nel passare all'*equazione omogenea* corrispondente e poi considerare l'*equazione algebrica* associata all'equazione omogenea.

In base al discriminante dell'equazione di secondo grado, otterremo:

- due soluzioni reali e distinte (ottenendo come integrale generale $y_{om} = c_1e^{\alpha_1 x} + c_2e^{\alpha_2 x} \qquad (c_1, c_2, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R})$)
- due soluzioni reali e coincidenti (ottenendo come integrale generale $y_{om} = c_1e^{\alpha x} + c_2xe^{\alpha x} \qquad (c_1, c_2, \alpha \in \mathbb{R})$)
- due soluzioni complesse e coniugate (ottenendo come integrale generale $y_{om} = e^{\mathrm{Re}[\alpha]x}[c_1\sin(\mathrm{Im}[\alpha]x) + c_2\cos(\mathrm{Im}[\alpha]x)] \qquad (c_1, c_2, \alpha \in \mathbb{C})$)

Esercizio 20.1

Risolvi la seguente equazione differenziale: $y'' - 5y' + 6y = 0$.

$$y'' - 5y' + 6y = 0$$
$$\alpha^2 - 5\alpha + 6 = 0$$
$$\alpha_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \begin{cases} \alpha_1 = 3 \\ \alpha_2 = 2 \end{cases}$$
$$y_{om} = c_1 e^{3x} + c_2 e^{2x} \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$$

Esercizio 20.2

Risolvi la seguente equazione differenziale: $y'' + 4y' = 0$.

$$y'' + 4y' = 0$$
$$\alpha^2 + 4\alpha = 0$$
$$\begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = -4 \end{cases}$$
$$y_{om} = c_1 + c_2 e^{-4x} \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$$

Esercizio 20.3

Risolvi la seguente equazione differenziale: $y'' - 2y' + y = 0$.

$$y'' - 2y' + y = 0$$
$$\alpha^2 - 2\alpha + 1 = 0$$
$$(\alpha - 1)^2 = 0 \Rightarrow \alpha_{1,2} = 1$$
$$y_{om} = e^x (c_1 + c_2 x) \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$$

Esercizio 20.4

Risolvi la seguente equazione differenziale: $y'' + 4y = 0$.

$$y'' + 4y = 0$$
$$\alpha^2 + 4 = 0$$
$$\begin{cases} \alpha_1 = 2i \\ \alpha_2 = -2i \end{cases}$$

$$\begin{aligned} y_{om} &= c_1 \sin(2x) + c_2 \cos(2x) \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{C}) \\ &= K_1 e^{2ix} + K_2 e^{-2ix} \qquad (K_1, K_2 \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

Esercizio 20.5

Risolvi la seguente equazione differenziale: $y'' - 4y' + 13y = 0$.

$$y'' - 4y' + 13y = 0$$
$$\alpha^2 - 4\alpha + 13 = 0$$
$$\alpha_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-13} = \begin{cases} \alpha_1 = 2 - 3i \\ \alpha_2 = 2 + 3i \end{cases}$$

$$\begin{aligned} y_{om} &= e^{2x}[c_1 \sin(3x) + c_2 \cos(3x)] \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{C}) \\ &= e^{2x}[K_1 e^{-3ix} + K_2 e^{3ix}] \qquad (K_1, K_2 \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

Finora abbiamo considerato solo equazioni omogenee. Sapendo la soluzione dell'equazione omogenea, è possibile determinare la soluzione dell'equazione differenziale non omogenea.
Infatti, abbiamo che $ay'' + by' + cy = f(x) \Rightarrow y = y_{om} + y_{part}$.
In generale, si può determinare la soluzione particolare dell'equazione differenziale usando metodi particolari, come il *metodo della variazione delle costanti*; esistono però dei casi particolari per cui esistono metodi risolutivi particolari.

- Se $f(x) = P_n(x)$ (un polinomio di grado n), la soluzione particolare che si ottiene è $y_{part} = Q_r(x)$ (con $r = n + m$, dove m è il più piccolo ordine di derivazione dell'incognita e n corrisponde all'ordine di derivazione dell'equazione differenziale).

  Esempio 20.3

  Risolvere la seguente equazione differenziale.

  $$y'' - 5y' + 6y = x^2 + 1$$

  Determino prima l'integrale generale dell'equazione omogenea.

  $$\alpha^2 - 5\alpha + 6 = 0$$
  $$\alpha_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \begin{cases} \alpha_1 = 2 \\ \alpha_2 = 3 \end{cases}$$
  $$y_{om} = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$$

  Poiché $r = n + m = 2$, dobbiamo determinare per l'integrale particolare un polinomio di secondo grado.
  Si procede in questo modo:

  $$y_{part} = Ax^2 + Bx + C$$
  $$y'_{part} = 2Ax + B$$
  $$y''_{part} = 2A$$

Si sostituiscono i valori appena trovati nell'equazione differenziale lineare

$$2A - 5(2Ax + B) + 6(Ax^2 + Bx + C) = x^2 + 1$$
$$2A - 10Ax - 5B + 6Ax^2 + 6Bx + 6C = x^2 + 1$$
$$\begin{cases} 6A = 1 \\ -10A + 6B = 0 \\ 2A - 3B + 6C = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{6} \\ B = \frac{5}{18} \\ C = \frac{37}{108} \end{cases}$$
$$y_{part} = \frac{x^2}{6} + \frac{5}{18}x + \frac{37}{108}$$

La soluzione quindi è:

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} + \frac{x^2}{6} + \frac{5}{18}x + \frac{37}{108} \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$$

Esempio 20.4

Risolvi la seguente equazione differenziale.

$$y'' + 4y' = x^2 + 1$$

Determino prima l'integrale generale dell'equazione omogenea.

$$\alpha^2 + 4\alpha = 0$$
$$\begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = -4 \end{cases}$$
$$y_{om} = c_1 + c_2 e^{-4x} \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$$

Poiché $r = n + m = 3$, dobbiamo determinare per l'integrale particolare un polinomio di terzo grado.
Si procede in questo modo:

$$y_{part} = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$$
$$y'_{part} = 3Ax^2 + 2Bx + C$$
$$y''_{part} = 6Ax + 2B$$

Non occorre determinare anche la derivata terza, poiché non è presente nell'equazione.
Si sostituiscono i valori appena trovati nell'equazione differenziale lineare

$$(6Ax + 2B) + 4(3Ax^2 + 2Bx + C) = x^2 + 1$$
$$6Ax + 2B + 12Ax^2 + 8Bx + 4C = x^2 + 1$$
$$\begin{cases} 12A = 1 \\ 6A + 8B = 0 \\ 2B + 4C = 1 \\ D = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{12} \\ B = -\frac{1}{16} \\ C = \frac{9}{32} \\ D = 0 \end{cases}$$
$$y_{part} = \frac{x^3}{12} - \frac{x^2}{16}x + \frac{9}{32}x$$

La soluzione quindi è:

$$y = c_1 + c_2e^{-4x} + \frac{x^3}{12} - \frac{x^2}{16}x + \frac{9}{32}x \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$$

- Se $f(x) = Ke^{\beta x}$ (con $K, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$), la soluzione particolare che si ottiene è $Ax^m e^{\beta x}$ (dove m corrisponde alla molteplicità di β nel caso in cui quest'ultima variabile sia una soluzione dell'equazione algebrica associata, altrimenti $m = 0$).

Esempio 20.5

Risolvi la seguente equazione differenziale.

$$y'' + 4y' = e^x$$

Determino prima l'integrale generale dell'equazione omogenea.

$$\alpha^2 + 4\alpha = 0$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = -4 \end{cases}$$

$$y_{om} = c_1 + c_2e^{-4x} \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$$

Poiché $\beta = 1$ non è soluzone dell'equazione algebrica associata, abbiamo che $m = 0$. Quindi:

$$y_{part} = Ae^x$$
$$y'_{part} = Ae^x$$
$$y''_{part} = Ae^x$$

Si sostituiscono i valori trovati nell'equazione differenziale lineare

$$Ae^x + 4Ae^x = e^x$$
$$5Ae^x = e^x \Rightarrow A = \frac{1}{5}$$
$$y_{part} = \frac{1}{5}e^x$$

La soluzione è quindi:

$$y = c_1 + c_2e^{-4x} + \frac{1}{5}e^x \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$$

Esempio 20.6

Risolvi la seguente equazione differenziale.

$$y'' + 4y' = 2e^{-4x}$$

Determino prima l'integrale generale dell'equazione omogenea.

$$\alpha^2 + 4\alpha = 0$$
$$\begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = -4 \end{cases}$$
$$y_{om} = c_1 + c_2 e^{-4x} \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$$

Poiché $\beta = -4$ *è soluzone dell'equazione algebrica associata, abbiamo che* $m = 1$. *Quindi:*

$$y_{part} = Axe^{-4x}$$
$$y'_{part} = -4Axe^{-4x} + Ae^{-4x}$$
$$y''_{part} = -8Ae^{-4x} + 16Axe^{-4x}$$

Si sostituiscono i valori trovati nell'equazione differenziale lineare

$$-8Ae^{-4x} + 16Axe^{-4x} + 4(-4xAe^{-4x} + Ae^{-4x}) = 2e^{-4x}$$
$$-4Ae^{-4x} = 2e^{-4x} \Rightarrow A = -\frac{1}{2}$$
$$y_{part} = -\frac{1}{2}e^{-4x}$$

La soluzione è quindi:

$$y = c_1 + c_2 e^{-4x} - \frac{1}{2}e^{-4x} \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$$

Esempio 20.7

Risolvi la seguente equazione differenziale.

$$y'' - 2y' + y = 2e^x$$

Determino prima l'integrale generale dell'equazione omogenea.

$$\alpha^2 - 2\alpha + 1 = 0$$
$$\alpha_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-1} = 1$$
$$y_{om} = (c_1 + c_2 x)e^x \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$$

Poichè $\beta = 1$ *è soluzione con molteplicità 2 dell'equazione algebrica associata, abbiamo che* $m = 2$. *Quindi:*

$$y_{part} = Ax^2e^x$$
$$y'_{part} = 2Axe^x + Ax^2e^x$$
$$y''_{part} = 2Ae^x + 4Axe^x + Ax^2e^x$$

Si sostituiscono i valori trovati nell'equazione differenziale lineare

$$2Ae^x + 4Axe^x + Ax^2e^x - 2(2Axe^x + Ax^2e^x) + Ax^2e^x = 2e^x$$
$$2A + 4Ax + Ax^2 - 4Ax - 2Ax^2 + Ax^2 = 2$$
$$2A = 2 \rightarrow A = 1 \Rightarrow y_{part} = e^x$$

La soluzione è quindi:

$$y = (c_1 + c_2x + 1)e^x \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$$

Equazioni differenziali lineari di ordine superiore

Esistono, infine, equazioni differenziali lineari di ordine superiore al secondo. Anche in questo caso, la risoluzione di queste equazioni sfrutta l'equazione algebrica associata e la sua risoluzione, per poi trovare le soluzioni.

20.3 Problema di Cauchy

Finora abbiamo visto come determinare tutte le possibili soluzioni di una equazione differenziale. Ma se volessimo determinare una sola tra le soluzioni dell'equazione in base a certe condizioni, cosa dobbiamo fare?

Bisogna risolvere il cosiddetto **problema di Cauchy**, ovvero determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale e poi sostituire ad esso le condizioni iniziali date.

Teorema 20.2 (di Cauchy per le equazioni differenziali lineari del primo ordine)**.** *Sia x_0 un punto di un intervallo dove le funzioni $a(x)$ e $b(x)$ sono continue. Per ogni numero reale y_0 esiste ed è unica la soluzione del problema di Cauchy.*

$$\begin{cases} y' = a(x)y + b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Dimostrazione: In base alla sua definizione, una equazione differenziale ha infinite soluzioni, ma il teorema dice che ne esiste una ed una sola per cui la proprietà $y(x_0) = y_0$ è valida.
Sia $A(x)$ una primitiva di $a(x)$ per cui $A(x_0) = 0$, cioè

$$A(x) = \int_{x_0}^{x} a(t)\,dt$$

Riscrivendo la formula di risoluzione delle equazioni differenziali lineari del primo ordine in modo da mettere in risalto la costante additiva abbiamo:

$$y(x) = e^{A(x)}\left(c + \int_{x_0}^{x} e^{-A(t)} b(t)\,dt\right)$$

Dato che $A(x_0) = 0$, allora $y(x_0) = e^0(c+0) = c$, per cui esiste una sola costante per cui è verificata la condizione $y(x_0) = y_0$. □

Esempio 20.8

Risolvi il seguente problema di Cauchy.

$$\begin{cases} y' = \frac{\sqrt{1-y^2}}{x} \\ y(1) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Determino l'integrale generale.

$$\frac{y'}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{1}{x}$$
$$\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \int \frac{1}{x}\,dx$$
$$\arcsin y = \log|x| + c$$
$$y = \sin(\log|x| + c) \quad \forall c \in \mathbb{R}$$

Sostituisco ora le condizioni iniziali date.

$$\frac{1}{2} = \sin(\log|1| + c)$$
$$\frac{1}{2} = \sin c$$
$$c = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee \frac{5}{6}\pi + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Quindi gli integrali cercati sono:

$$y_1 = \sin(\log|x| + \frac{\pi}{6} + 2k\pi)$$
$$y_2 = \sin(\log|x| + \frac{5}{6}\pi + 2k\pi)$$

Volendo dare una interpretazione geometrica del problema di Cauchy, supponiamo che $a(x)$ e $b(x)$ siano continue nell'insieme dei numeri reali e fissiamo un sistema di assi cartesiani. Le varie soluzioni dell'equazione differenziali possono essere disegnate tenendo conto che, per ogni punto (x_0, y_0) il cofficiente angolare $y'(x_0)$ della retta tangente a tali curve è deteminato dall'equazione differenziale stessa.
Infatti abbiamo che

$$y'(x_0) = a(x_0)y(x_0) + b(x_0) = a(x_0)y_0 + b(x_0)$$

20.4 Equazione differenziale a variabili separabili

Vediamo ora un particolare tipo di equazione differenziale, che trova numerose applicazioni reali. Questo tipo è noto come *equazioni differenziali a variabili separabili.*

Definizione 20.9 (Equazione differenziale a variabili separabili)**.** Una **equazione differenziale a variabili separabili** è una equazione differenziale del primo ordine scritta nella forma

$$y' = u(x)v(y)$$

oppure

$$f'(x) = u(x)v[f(x)]$$

in cui $u(x)$ è una funzione continua su $\mathbb{R}$ e $v(y)$ è una funzione continua su $\mathbb{R}$ in cui anche la sua derivata è continua.

Per risolvere questo tipo di equazioni differenziali, considero $v(y) \neq 0$, in modo da porter dividere i membri dell'equazione per $v(y)$.

$$\frac{y'}{v(y)} = u(x) \Rightarrow \frac{f'(x)}{v[f(x)]} = u(x)$$

Integro successivamente entrambi i membri.

$$\int \frac{f'(x)}{v[f(x)]}\,dx = \int u(x)\,dx$$

Sostituisco $f'(x)\,dx = dy$ e $f(x) = y$ e ottengo

$$\int \frac{dy}{v(y)} = \int u(x)\,dx$$

Da qui si calcolano i due integrali, determinando l'integrale generale.
Alla fine, occorre verificare se, per $v(y) = 0$, si ottiene una soluzione valida dell'equazione; in questo caso si ottiene una funzione denominata **integrale particolare**.
Gli integrali particolari si determinano anche assegnando particolari valori al parametro c dell'integrale generale.

Vediamo ora alcuni esempi sulla risoluzione di equazioni differenziali a variabili separabili per poter determinare altre caratteristiche delle equazioni differenziali.

Esempio 20.9

Risolvi la seguente equazione differenziale.

$$y' = (1 + y^2)x$$

Questa è una equazione differenziale a variabili separabili, in cui $u(x) = x$ *e* $v(y) = 1 + y^2$.

Analizzando i casi in cui la funzione $v(y)$ *non è nulla, abbiamo che* $v(y) > 0\ \forall y \in \mathbb{R}$, *per cui possiamo affermare che non esistono integrali particolari.*
Applichiamo ora il procedimento risolutivo visto in precedenza per trovare

la soluzione dell'equazione.

$$\frac{y'}{1+y^2} = x$$
$$\int \frac{dy}{1+y^2} = \int x\, dx$$
$$\arctan y + c_1 = \frac{x^2}{2} + c_2$$

$$\arctan y = \frac{x^2}{2} + c \quad \forall c \in \mathbb{R}$$ (***integrale generale in forma implicita***)

$$y = \tan\left(\frac{x^2}{2} + c\right) \quad \forall c \in \mathbb{R}$$ (***integrale generale in forma esplicita***)

Da questo esempio possiamo dimostrare che i grafici dell'integrale generale non si intersecano mai, poiché differiscono tutti per una costante c.

Esempio 20.10

Risolvi la seguente equazione differenziale.

$$y' = x\sqrt{y-1}$$

Questa è una equazione differenziale a variabili separabili, in cui $u(x) = x$ *e* $v(y) = \sqrt{y-1}$.
Analizzo $v(y)$ *per identificare l'eventuale integrale particolare.*

$$\begin{cases} y - 1 \geq 0 \\ \sqrt{y-1} \neq 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} y \geq 1 \\ y \neq 1 \end{cases}$$

Si ricava dunque che l'equazione ha come integrale particolare $y = 1$.

Applichiamo ora il procedimento risolutivo per trovare l'integrale generale.

$$\frac{y'}{\sqrt{y-1}} = x$$
$$\int \frac{dy}{\sqrt{y-1}} = \int x\, dx$$
$$2\sqrt{y-1} = \frac{x^2}{2} + c\sqrt{y-1} = \frac{x^2}{4} + c$$
$$y - 1 = \left(\frac{x^2}{4} + c\right)^2$$
$$y = 1 + \left(\frac{x^2}{4} + c\right)^2 \quad \forall c \in \mathbb{R}$$

Quando un integrale particolare non è ottenibile da quello generale assegnando un qualsiasi valore reale al parametro c o facendolo tendere all'infinito, si dice che è un **integrale singolare**.
Si può notare che gli integrali singolari possono intersecare almeno una volta l'integrale generale al variare del parametro c.

Esempio 20.11

Risolvi la seguente equazione differenziale.

$$y' = x(y-1)$$

Questa è una equazione differenziale a variabili separabili, in cui $u(x) = x$ *e* $v(y) = y - 1$.
Verifichiamo se esiste un integrale particolare, analizzando $v(y) = 0$.

$$y - 1 \neq 0 y \neq 1$$

L'ntegrale particolare è dunque $y = 1$.

Applichiamo ora il procedimento risolutivo per trovare l'integrale generale.

$$\frac{y'}{y-1} = x$$

$$\int \frac{dy}{y-1} = \int x\, dx$$

$$\log|y-1| = \frac{x^2}{2} + c$$

Dobbiamo distinguere due casi.
Se $y > 1$*:*

$$y - 1 = \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}+c}$$

$$y = 1 + \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}+c}$$

$$y = 1 + \mathrm{e}^{c}\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}$$

Poiche e^c *è un valore costante, lo posso includere in una costante* c'.

$$y = 1 + c'\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}} \quad \forall c' \in \mathbb{R}^+$$

Se $y < 1$*:*

$$1 - y = \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}+c}$$

$$y = 1 - \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}+c}$$

$$y = 1 - \mathrm{e}^{c}\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}$$

Poiche e^c *è un valore costante, lo posso includere in una costante* c''.

$$y = 1 - c''\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}} \quad \forall c'' \in \mathbb{R}^+$$

Possiamo quindi unire questi due casi, ottenendo come integrale generale

$$y = 1 + \bar{c}e^{\frac{x^2}{2}} \quad \forall \bar{c} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Se $\bar{c} \to 0$, otteniamo l'integrale particolare; possiamo quindi affermare che l'integrale generale è valido $\forall \bar{c} \in \mathbb{R}$.

20.5 Equazione di Bernoulli

Un particolare tipo di equazione differenziale lineare del primo ordine è l'**equazione di Bernoulli**, rappresentata come

$$y' + a(x)y = b(x)y^n \qquad \text{con } n > 1, n \in \mathbb{N}$$

Per risolvere una equazione di Bernoulli, imponiamo che $y \neq 0$ e dividiamo l'equazione per y^n

$$y' + a(x)y = b(x)y^n$$
$$y'y^{-n} + a(x)y^{1-n} = b(x)$$

Effettuo ora le sostituzioni $v = v(y) = y^{1-n}$, $v'(1-n)y^{-n}y'$ e $\frac{v'}{1-n} = y^{-n}y'$, ottenendo

$$\frac{v'}{1-n} + a(x)v = b(x)$$
$$v' + a(x)v(1-n) = (1-n)b(x)$$

Vediamo ora un esempio di risoluzione di una equazione di Bernoulli, a cui applichiamo anche un problema di Cauchy.

Esempio 20.12

Risolvi il seguente problema di Cauchy.

$$\begin{cases} y' - xy = xy^3 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Integrale particolare: $y = 0$.

Per $y \neq 0$:

$$y'y^{-3} - xy^{-2} = x$$

$$v = y^{-2} \Rightarrow v' = -2y^{-3}y'$$

$$-\frac{1}{2}v' - xv = x$$
$$v' + 2xv = -2x$$

Poiché una equazione lineare non omogenea, abbiamo:

$$I(x) = e^{\int 2x\, dx} = e^{x^2}$$

$$v = e^{-x^2}\left\{\left[\int e^{x^2}(-2x)\, dx\right] + c\right\} = -1 + ce^{-x^2}$$

Effettuo ora la sostituzione inversa,

$$v = \frac{1}{y^2} \Rightarrow y^2 = \frac{1}{v} \Rightarrow y = \pm\sqrt{\frac{1}{v}}$$

quindi:

$$y = \pm\sqrt{\frac{1}{-1 + ce^{-x^2}}}$$

Risolvo ora il problema di Cauchy.

$$1 = \sqrt{\frac{1}{-1 + c}} \Rightarrow 1 = \frac{1}{c - 1} \Rightarrow c - 1 = 1 \Rightarrow c = 2$$

$$y = \sqrt{\frac{1}{2e^{-x^2} - 1}}$$

20.6 Sistemi di equazioni differenziali

Come tutte le equazioni, anche per le equazioni differenziali è possibile studiare la loro intersezione, tramite sistemi lineari.
Per semplicità, considereremo solo i sistemi di due equazioni del primo ordine.

Definizione 20.10. Sistema lineare di equazioni differenziale del primo ordine Date due equazioni differenziali lineari del primo ordine a coefficienti costanti $u'(x) = au(x) + bv(x) + f(x)$ e $v'(x) = cu(x) + dv(x) + g(x)$, con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e f e g funzioni continue in tutto R la cui derivata prima e a sua volta continua, il **sistema lineare** di queste equazioni consiste nel trovare una soluzione $(u(x), v(x))$ tale che le funzioni u e v siano continue e derivabili e la loro derivata prima e seconda è a loro volta continua.

$$\begin{cases} u'(x) = au(x) + bv(x) + f(x) \\ v'(x) = cu(x) + dv(x) + g(x) \end{cases}$$

Capitolo 21

Applicazioni delle equazioni differenziali

Come abbiamo detto precedentemente, le equazioni differenziali trovano molte applicazioni reali nel campo dell'ingegneria, della fisica o della biologia, definendo il *modello matematico*[1] di alcuni fenomeni.
Vediamo qui alcune di queste applicazioni.

21.1 Perdita di calore di un corpo

Un oggetto caldo, esposto ad una temperatura esterna inferiore alla propria, è soggetto ad una *perdita di calore*. Il fenomeno varia da corpo a corpo e dipende anche dal metabolismo interno del corpo stesso. Inoltre, alcune parti del corpo possono disperdere calore più rapidamente di altre parti. Infine, la temperatura può non essere costante in tutto il corpo.

Per definire il modello matematico di questo fenomeno, semplifichiamo il sistema, ipotizzando che il raffreddamento del corpo sia regolato dalla *legge di Newton*, la quale afferma che ad ogni istante la velocità di diminuzione della temperatura è proporzionale alla differenza tra la temperatura del corpo e quella del mezzo circostante.
Indichiamo dunque con k la costante di proporzionalitù, con $T(t)$ la temperatura del corpo in funzione del tempo e con E la temperatura esterna, che supponiamo costante e minore di $T(t)$. Possiamo dunque formulare la legge di Newton come

$$T'(t) = k(E - T(t))$$

Conoscendo la temperatura T_0 del corpo all'istante iniziale $t = 0$ e supponendo che $T_0 > E$, otteniamo

$$\begin{cases} T'(t) = k(E - T(t)) \\ T(0) = T_0 \end{cases}$$

[1] Un modello matematico è una rappresentazione quantitativa di un fenomeno naturale.

Il sistema qui ottenuto rappresenta un problema di Cauchy, la cui soluzione è

$$\begin{aligned} T(t) &= e^{-kt}\left(T_0 + \int_0^t e^{ks} kE \, ds\right) = \\ &= e^{-kt}(T_0 + E(e^{kt} - 1)) = \\ &= (T_0 - E)e^{-kt} + E \end{aligned}$$

Dato che $T_0 - E > 0$, risulta che $T(t) > E$ in ogni istante di tempo. Si può inoltre notare che $T(t) \to E$ per $t \to +\infty$, per cui il modello descrive una situazione in cui il corpo perde la temperatura in modo da adeguarsi alla temperatura esterna.

21.2 Debito di ossigeno

Durante uno sforzo fisico, un individuo consuma una quantità di ossigeno maggiore che in condizioni di riposo. Se lo sforzo fisico è intenso, come durante una corsa veloce, il corpo umano consuma una quantità di ossigeno superiore alla quantità immessa dall'esterno attraverso i polmoni.
In questo modo si accumula il cosiddetto *debito di ossigeno*: il corpo consuma per un certo periodo di tempo più ossigeno di quello che riceve dall'esterno, per poi entrare una *fase di recupero* in cui, per riequilibrare la sitauzione, il corpo immette più ossigeno di quello che normalmente consuma in condizioni di riposo.

Sia $y(t)$ la funzione che rappresenta il debito di ossigeno di un corpo umano in funzione del tempo. La sua derivata prima $y'(t)$, cioè la velocità con cui varia $y(t)$, dipende principalmente da due variabili: in modo crescente dalla velocità con cui si consuma energia con lo sforzo ed in modo decrescente dalla velocità con cui si immette ossigeno attraverso i polmoni.
La velocità dell'energia consumata, cioè la derivata del lavoro rispetto al tempo, è in genere nota e prende il nome di *potenza*, per cui la indicheremo con $p(t)$.

Consideriamo il caso più semplice, in cui $y'(t)$ dipende linearmente da $y(t)$ e da $p(t)$.

$$y'(t) = -ay(t) + bp(t) \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

Possiamo considerare tre differenti valori.

- Sia $p(t)$ una costante positiva e risolviamo il seguente problema di Cauchy.

$$\begin{cases} y'(t) = -ay(t) + bp \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Con il metodo della separazione delle variabili, si trova la soluzione

$$y(t) = \frac{b}{a}p(1 - e^{-at}$$

- Sia $p(t) = 0$ e $y(0) > 0$ e risolviamo il seguente problema di Cauchy.

$$\begin{cases} y'(t) = -ay(t) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

In questo caso la soluzione è $y(t) = y_0 e^{-at}$.

- Sia $y(0) = 0$ e
$$p(t) = \begin{cases} p & \text{se } t \in [0, t_0] \\ 0 & \text{se } t \in (t_0, +\infty) \end{cases}$$
Con queste condizioni, abbiamo il seguente problema di Cauchy.
$$\begin{cases} y'(t) = -ay(t) + bp(t) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$
La soluzione si ottiene combinando le funzioni ottenute nei precedenti casi.

21.3 Passaggo di una sostanza attraverso una membrana

Consideriamo un cilindro, come un vaso sanguigno, e introduciamo sul suo asse un sistema di ascisse. Il cilindro è costituito da una membreana permeabile.

Supponiamo che venga introdotta all'interno del cilindro una sostanza chimica, durante l'arco di tempo di osservazione, la quale si muova nella direzione dell'asse delle ascisse con velocità costante.
Sia $y(x)$ la concentrazione dela sostanza nella sezione di cilindro di ascissa x. Questa concentrazione diminuirà al crescere di x, data la permeabilità della membrana del cilindro.

Per individuare la variazione della concentrazione, consideriamo due sezioni del cilindro di ascisse x e $x + h$ (con $h \neq 0$ e $x + h > x$). Per queste sezioni, è naturale supporre che $y(x + h) < y(x)$, cioè $y(x + h) - y(x) < 0$.
Tale variazione di concentrazione, in modulo, è proporzionale alla concentrazione e alla distanza h tra le due sezioni.
$$y(x + h) - y(x) = -ay(x)h$$
Il fattore a, costante rispetto ad x e h, è direttamente proporzionale al raggio del cilindro e inversamente proporzionale alla velocità della sostanza.
Dividendo entrambi i membri per h e calcolandone il limite per $h \to 0$ otteniamo
$$y'(x) = -ay(x)$$
Aggiungendo la consizione $y(x_0) = y_0$, la soluzione del relativo problema di Cauchy è
$$y(x) = y_0 e^{-a(x-x_0)}$$

21.4 Diffusione di una infezione

Il processo di diffusione delle infezioni è stato molto studiato dal punto di vista matematico.

Indichiamo con P il numero totale di individui che sono sensibili al contagio, e con $p(t)$ il numero di individui contagiati. Il numero di persone che possono essere contagiate è $P - p(t)$.
Si può ipotizzare che il contagio si diffonda tanto più rapidamente quanto più è alto il numero degli individui contagiati e anche quanto più è alto il numero di individui sani. Con questa ipotesi, il tasso di accrescimento $p'(t)$ è proporzionale, secondo una costante k, sia a $p(t)$ sia a $P - p(t)$, cioè

$$p'(t) = kp(t)[P - p(t)] = kP \cdot p(t) - kp^2(t)$$

Questa è una equazione differenziale di Bernoulli, la cui risoluzione porta alla funzione

$$p(t) = \frac{P \cdot p_0}{p_0 + (P - p_0} \mathrm{e}^{-kPt}$$

nota anche come *funzione logistica*.
Questa funzione è crescente e ha un punto di flesso, ove la velocità di diffusine è massima.

Bibliografia

[1] Bergamini, Massimo, Anna Trifone e Gabriella Barozzi: *Manuale blu di Matematica — Moduli U+V+W*. Zanichelli, 2012.

[2] Bergamini, Massimo, Anna Trifone e Gabriella Barozzi: *Matematica.azzurro - Esponenziali e logaritmi, Trigonometria, Successioni — Moduli N+O*. Zanichelli, 2012.

[3] Bergamini, Massimo, Anna Trifone e Alessandro Zagnoli: *Matematica per moduli, seconda edizione — Volume 1*. Zanichelli, 2003.

[4] Bergamini, Massimo, Anna Trifone e Alessandro Zagnoli: *Matematica per moduli, seconda edizione — Volume 2*. Zanichelli, 2003.

[5] Marcellini, Pietro e Carlo Sbordone: *Elementi di Analisi Matematica 2*. Liguori Editore, 2003.

[6] Marcellini, Pietro e Carlo Sbordone: *Elementi di Calcolo*. Liguori Editore, 2004.

[7] Wikipedia: *Numero — Wikipedia, L'enciclopedia libera*, 2019. Online; in data 26 Gennaio 2020.

[8] Wikipedia: *Integrale multiplo — Wikipedia, L'enciclopedia libera*, 2020. Online; in data 18 Agosto 2020.

[9] Wikipedia: *Serie — Wikipedia, L'enciclopedia libera*, 2020. Online; in data 05 Luglio 2020.

[10] Wikipedia: *Storia dei numeri — Wikipedia, L'enciclopedia libera*, 2020. Online; in data 26 Gennaio 2020.

Elenco delle figure

Indice analitico