

# **Fisica**

*Gabriele de Capoa*

24 gennaio 2014  
Versione 1.01



# Prefazione

Questo compendio nasce dalla sistemazione dei miei appunti cartacei presi durante l'anno accademico 2008 - 2009 seguendo le lezioni dei Professori Massimo Santarsiero e Enrico Silva, tenutesi per la laurea di Ingegneria Informatica dell'Università degli Studi Roma Tre.

A questi appunti sono state aggiunte altre nozioni, introduttive e relative ad altri argomenti, per rendere questo testo il più completo possibile.

Poichè non sono stati revisionati nè da alcun docente nè da altre persone competenti in quest'argomento, eventuali errori di concetto sono da ritenersi mie imprecisioni nella comprensione della materia.

# Indice

<b>Prefazione</b>	<b>i</b>
<b>Indice</b>	<b>ii</b>
<b>I Introduzione alla Fisica</b>	<b>1</b>
<b>1 Le grandezze fisiche e gli errori</b>	<b>3</b>
1.1 Le grandezze fondamentali . . . . .	4
1.2 Le grandezze derivate . . . . .	5
1.3 Gli errori di misura . . . . .	7
1.4 Le caratteristiche degli strumenti di misura . . . . .	8
<b>2 I vettori</b>	<b>11</b>
2.1 Lo spazio dei vettori geometrici . . . . .	11
2.2 L'espressione in coordinate dei vettori . . . . .	15
2.3 Prodotto triplo . . . . .	16
<b>II Meccanica</b>	<b>19</b>
<b>3 Cinematica</b>	<b>21</b>
3.1 Moti rettilinei . . . . .	21
3.2 Moto periodico . . . . .	26
3.3 Moti nel piano . . . . .	30
<b>4 Dinamica</b>	<b>39</b>
4.1 I principi della dinamica . . . . .	39
4.2 Forza gravitazionale e forza peso . . . . .	40
4.3 Reazione normale . . . . .	43
4.4 Forze di attrito . . . . .	43
4.5 Forza centripeta . . . . .	46
4.6 Forza elastica . . . . .	48
4.7 Pendolo semplice . . . . .	49
4.8 Grandezze dinamiche globali . . . . .	50
4.9 Centro di massa e corpo rigido . . . . .	58
4.10 Fenomeni d'urto . . . . .	60
<b>5 Dinamica del moto rotatorio</b>	<b>63</b>
5.1 Momento di un vettore . . . . .	63

5.2	Momento angolare e di una forza . . . . .	63
5.3	Momento assiale e momento di inerzia . . . . .	65
5.4	Esempi di moti rotatori . . . . .	66
5.5	Sistema continuo . . . . .	68
5.6	Grandezze dinamiche globali per i moti di rotazione . . . . .	70
5.7	Pendolo composto . . . . .	71
<b>6</b>	<b>Statica</b>	<b>73</b>
6.1	Equilibrio statico di un punto materiale . . . . .	73
6.2	Equilibrio statico di un corpo rigido . . . . .	74
6.3	Tipologie di equilibrio . . . . .	74
<b>7</b>	<b>Fluidostatica</b>	<b>75</b>
7.1	La pressione . . . . .	75
7.2	Legge di Pascal . . . . .	76
7.3	Legge di Stevino . . . . .	78
7.4	Principio di Archimede . . . . .	78
<b>8</b>	<b>Fluidodinamica</b>	<b>81</b>
8.1	L'attrito nei fluidi e la viscosità . . . . .	81
8.2	La portata di un liquido . . . . .	83
8.3	L'equazione di Bernoulli . . . . .	84
8.4	I vortici e il moto vorticoso . . . . .	86
8.5	Il moto laminare . . . . .	86
8.6	Il moto in un fluido . . . . .	87
8.7	La tensione superficiale . . . . .	88
<b>A</b>	<b>Riepilogo sul moto dei corpi</b>	<b>89</b>
A.1	Moto di traslazione . . . . .	89
A.2	Moto di rotazione . . . . .	90
<b>III</b>	<b>Elettromagnetismo</b>	<b>93</b>
<b>9</b>	<b>Elettrostatica</b>	<b>95</b>
9.1	L'elettricità . . . . .	95
9.2	La legge di Coulomb . . . . .	97
9.3	Campo elettrostatico . . . . .	99
9.4	Teorema di Gauss . . . . .	100
9.5	Lavoro elettrico e potenziale elettrostatico . . . . .	106
9.6	Conduttori e dielettrici . . . . .	109
9.7	Condensatori . . . . .	112
<b>10</b>	<b>Elettrodinamica</b>	<b>119</b>
10.1	Corrente elettrica . . . . .	119
10.2	La legge di Ohm . . . . .	121
10.3	Potenza elettrica e effetto Joule . . . . .	124
10.4	Forza elettromotrice . . . . .	124
10.5	Leggi di Kirchhoff . . . . .	125

<b>11 Magnetostatica e magnetodinamica</b>	<b>131</b>
11.1 Il campo magnetico . . . . .	131
11.2 Legge di Gauss per il campo magnetico . . . . .	135
11.3 Campo magnetico prodotto da una corrente: la legge di Ampère-Laplace .	135
11.4 Legge di Ampère . . . . .	137
11.5 Proprietà magnetiche della materia . . . . .	139
11.6 Legge di Faraday–Neumann–Lenz . . . . .	140
11.7 Autoinduzione e mutua induzione . . . . .	142
11.8 Teorema di Ampère-Maxwell . . . . .	147
<b>Bibliografia</b>	<b>149</b>
<b>Elenco delle figure</b>	<b>151</b>

# **Parte I**

## **Introduzione alla Fisica**





# Capitolo 1

## Le grandezze fisiche e gli errori

La **Fisica** si occupa di studiare i fenomeni che avvengono in natura. Per effettuare questi studi, occorre definire in modo *operativo* (che si può confrontare con grandezze note) o *intuitivo* alcune *grandezze fisiche* che ci permettano di misurarli. Ma che cos'è una grandezza fisica?

**Definizione 1.1** (Grandezza fisica). Si definisce **grandezza fisica** una entità misurabile mediante la quale si riesce a stabilire una correlazione con quanto si può osservare.

Esistono numerose grandezze da misurare, ognuna con una specifica *unità di misura*. Presto si è riconosciuta la necessità di collegare tra loro le diverse unità, in modo che da un piccolo numero di unità fondamentali si ricavino tutte le altre. Per questo, un comitato internazionale, denominato *Conférence générale des poids et mesures* (noto come *Conferenza generale dei pesi e delle misure*) ha stabilito un insieme di sette **grandezze fondamentali**, denominato **Sistema Internazionale (SI)**, (Tabella 1.1).

Grandezza	Nome dell'unità	Simbolo
Lunghezza ( $l$ )	metro	m
Massa ( $m$ )	kilogrammo	kg
Intervallo di tempo ( $t$ )	secondo	s
Intensità di corrente elettrica ( $I$ )	ampere	A
Temperatura ( $T$ )	kelvin	K
Intensità luminosa ( $I_V$ )	candela	cd
Quantità di sostanza ( $n$ )	mole	mol

Tabella 1.1: Grandezze fondamentali del SI

Diamo ora una breve definizione di ciascuna grandezza fondamentale, delle caratteristiche degli strumenti di misura usati per misurare le grandezze e delle primarie *grandezze derivate*; infine, descriveremo uno strumento usato dai fisici per verificare la correttezza delle grandezze derivate, noto come *analisi dimensionale*.

## 1.1 Le grandezze fondamentali

Tutte le grandezze fondamentali del SI, come le grandezze derivate da esse, possono avere *multipli* e *sottomultipli*. Questi sono rappresentabili tramite *notazione esponenziale* o tramite l'uso di prefissi come quelli indicati nella Tabella 1.2.

Vediamo ora come vengono definite le unità di misura delle grandezze fondamentali.

Prefisso	Simbolo	Fattore
yotta	Y	$10^{24}$
zetta	Z	$10^{21}$
exa	E	$10^{18}$
peta	P	$10^{15}$
tera	T	$10^{12}$
giga	G	$10^9$
mega	M	$10^6$
kilo	k	$10^3$
etto	h	$10^2$
deca	da	$10^1$
deci	d	$10^{-1}$
centi	c	$10^{-2}$
milli	m	$10^{-3}$
micro	$\mu$	$10^{-6}$
nano	n	$10^{-9}$
pico	p	$10^{-12}$
femto	f	$10^{-15}$
atto	a	$10^{-18}$
zepto	z	$10^{-21}$
yocto	y	$10^{-24}$

Tabella 1.2: Prefissi per multipli e sottomultipli

**Secondo** Il secondo è definito come l'intervallo di tempo durante il quale avvengono 9 192 631 770 oscillazioni di un orologio al cesio-133.

Il numero di oscillazioni scelto è a prima vista arbitrario e strano, ma deriva dal fatto che, prima del 1967, il secondo era definito come la 86 400-esima parte del giorno solare medio. Quando furono costruiti i precisissimi orologi al cesio-133, si trovò che, con questa definizione, il numero di oscillazioni in un secondo risultava essere proprio 9 192 631 770.

**Metro** Il metro è definito come la distanza percorsa dalla luce nel vuoto in un 299 792 458-esimo di secondo.

In origine, il *metro campione* era definito come la distanza tra due sottili incisioni effettuate su una barra di platino-iridio; nel 1983, però, si decise che questo campione non poteva essere riprodotto con accuratezza, quindi si decise di utilizzare un fenomeno più stabile e preciso, come la velocità della luce.

**Kilogrammo** Il kilogrammo si definisce come la massa inerziale di un cilindro di platino-iridio di diametro e altezza pari a 39 mm.

Il concetto di *massa inerziale* è stato definito in maniera ambigua da Isaac Newton; per il momento, possiamo indicare che due corpi hanno la stessa massa inerziale quando, dopo averli posti su un carrello, che scorre senza attrito su una rotaia e attaccato a una molla, uno dopo l'altro, si trova che questo oscilla con lo stesso periodo.

**Kelvin** Il kelvin è definito come  $\frac{1}{273,15}$  della temperatura termodinamica del punto triplo dell'acqua.

Per *temperatura termodinamica* si intende la differenza fra la temperatura indicata (quella del punto triplo dell'acqua, pari a 0,01 °C) e quella dello zero assoluto (−273,15 °C). Lo zero della scala kelvin è infatti lo *zero assoluto*.

**Mole** La mole è definita come la quantità di sostanza di un sistema che contiene un numero di particelle pari al numero degli atomi presenti in 12 grammi di carbonio-12. Tale numero è noto come *numero di Avogadro* ( $N_A$ ), dal matematico italiano Amedeo Avogadro, ed è pari a  $6,022 \cdot 10^{23}$ .

**Ampere** Un ampere è l'intensità di corrente elettrica che, se mantenuta in due conduttori lineari paralleli, di lunghezza infinita e sezione trasversale trascurabile, posti a un metro di distanza l'uno dall'altro nel vuoto, produce tra questi una forza pari a  $2 \cdot 10^{-7} \text{ N} \cdot \text{m}$  per metro di lunghezza.

**Candela** Una candela è pari all'intensità luminosa, in una data direzione, di una sorgente emettente radiazione monocromatica alla frequenza di  $540 \cdot 10^{12} \text{ Hz}$  con intensità radiante (in quella direzione) pari a  $1/683 \text{ W} \cdot \text{sr}$ .

## 1.2 Le grandezze derivate

Dalle sette grandezze fondamentali viste in precedenza possono essere ricavate quasi tutte le grandezze che vengono usate in Fisica.

Ad esempio, per misurare l'*area* di una superficie si è scelta come unità di misura il *metro quadrato* ( $\text{m}^2$ ), rappresentato dall'area di un quadrato avente il lato di 1 m. Allo stesso modo, per misurare il *volume* di un solido si è scelto come unità di misura il *metro cubo* ( $\text{m}^3$ ), rappresentato dal volume di un cubo di 1 m. Una rappresentazione grafica di queste unità di misura è data nella Figura 1.1.

Esistono altre due grandezze derivate, importanti per la Fisica e usate in Geometria, ma che non derivano dalle grandezze del SI: il *radiante* e il *steradiano*.

Il **radiante** (rad) rappresenta il rapporto tra la lunghezza di un arco di circonferenza spazzato dall'angolo, e la lunghezza del raggio di tale circonferenza (Figura 1.2).

Lo **steradiano** (sr) è definito come l'angolo solido, con vertice al centro di una sfera di raggio  $r$ , che sottende una calotta sferica di area uguale a  $r^2$  (Figura 1.3).

Un *angolo solido* è una possibile estensione allo spazio tridimensionale del concetto di angolo piano. Esso è definito come ciascuna delle due regioni in cui viene suddiviso lo spazio dalla superficie formata dalle semirette passanti per uno stesso punto (detto *vertice dell'angolo solido*) e per i punti di una curva chiusa semplice tracciata su di una superficie non contenente il vertice.

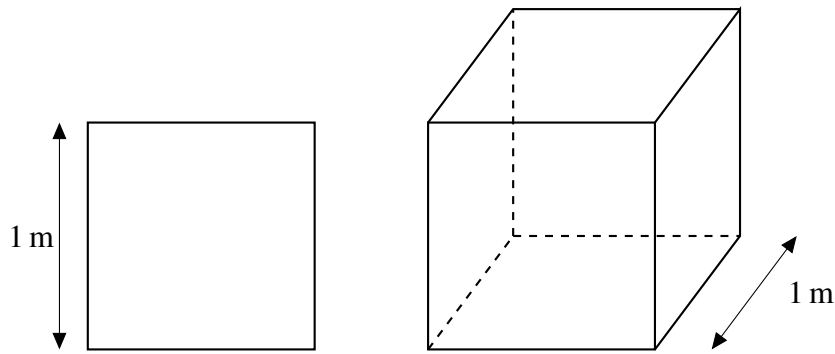


Figura 1.1: Metro quadrato e metro cubo

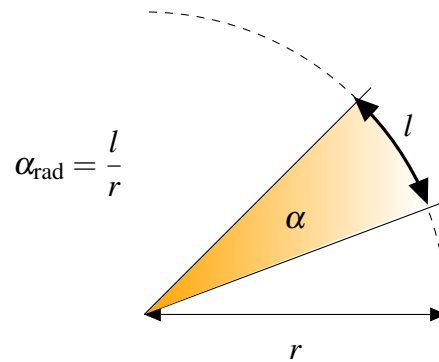


Figura 1.2: Un angolo misurato in radianti

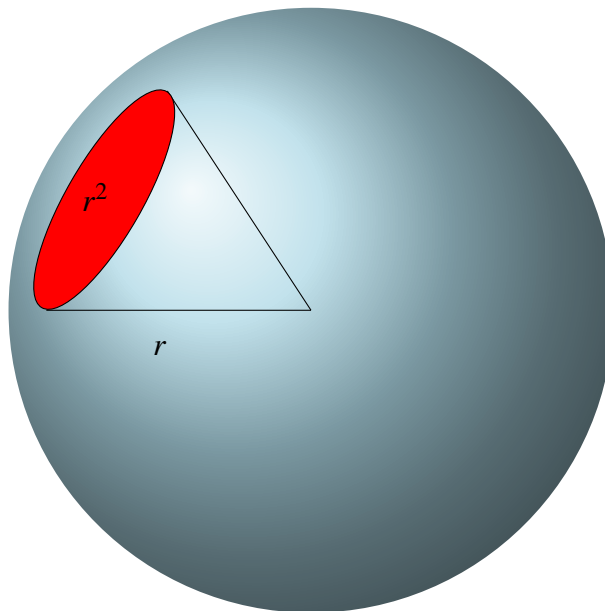


Figura 1.3: Rappresentazione grafica di un steradiano

Per essere sicuri che le grandezze derivate siano state derivate correttamente, è possibile effettuare una operazione nota come **analisi dimensionale** o *controllo dimensionale*. Il risultato dell'analisi dimensionale di una grandezza derivata deve essere composto dalle

grandezze fondamentali che formano l'unità di misura della grandezza.

Ad esempio, la dimensione di un'area  $A$  è quella di una lunghezza al quadrato, e l'analisi dimensionale di questa grandezza è così rappresentabile:

$$[A] = [l][l] = [l^2]$$

## 1.3 Gli errori di misura

Tutte queste grandezze, per essere misurate, necessitano di uno **strumento di misura**; per funzionare, gli strumenti di misura hanno bisogno di essere *tarati*, cioè di confrontarli con un campione.

Le misure possono essere *dirette*, cioè avvengono leggendo direttamente la grandezza di interesse, confrontandola con un'altra della stessa specie, scelta come campione e rappresentante l'unità di misura, oppure *indirette*, cioè avvengono leggendo una o più grandezze legate funzionalmente al valore del misurando, ma non omogenee alla grandezza d'interesse. Le misurazioni possono essere colpite, purtroppo, da *errori*, causati ad esempio dall'imprecisione degli strumenti o dall'uomo.

Possiamo distinguere due tipologie principali di errori: gli *errori sistematici* e gli *errori accidentali*.

**Definizione 1.2** (Errore sistematico). Gli **errori sistematici** sono errori che si ripresentano in tutte le ripetizioni di una data misurazione. Il più delle volte, ripetendo le osservazioni, influiscono nello stesso senso (in eccesso o in difetto).

Sono errori dovuti a cause ben determinate, che lo sperimentatore può, in linea di principio, individuare e ridurre.

**Definizione 1.3** (Errore accidentale). Gli **errori accidentali** sono errori che si presentano in ciascuna misurazione in modo imprevedibile e influiscono sul risultato della misura ora in un senso ora in un altro. Spesso sono dovuti all'imperfezione imprevedibile degli strumenti e dei sensi dello sperimentatore.

Come si può notare dalle definizioni, gli errori sistematici sono facilmente eliminabili, mentre gli errori accidentali sono ineliminabili ma possono essere ridotti, senza mai raggiungere una misurazione perfetta. Per poter ridurre l'effetto degli errori accidentali, è ragionevole pensare che, effettuando  $n$  misurazioni, i cui valori sono  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , ed effettuando la **media aritmetica**

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

si possa ottenere un valore abbastanza accettabile per la misurazione. Ma quanto è grande l'errore connesso a questa misura?

Un modo semplice, anche se grossolano, di valutare l'errore consiste nel calcolare l'**errore assoluto** (o *errore massimo*,  $e_m$ ), effettuando la differenza tra il valore più grande delle misurazioni  $x_{max}$  e quello più piccolo  $x_{min}$  e poi dividendo il risultato per due.

$$e_m = \frac{x_{max} - x_{min}}{2} \quad (1.1)$$

Supponiamo, per esempio, che, misurando cinque volte la durata  $t$  di dieci oscillazioni di un pendolo si ottengano come valori 24,56 s, 24,85 s, 24,45 s, 24,51 s e 24,63 s.

Assumeremo come risultato finale del nostro esperimento

$$\bar{t} = \frac{24,56 \text{ s} + 24,85 \text{ s} + 24,45 \text{ s} + 24,51 \text{ s} + 24,63 \text{ s}}{5} = 24,60 \text{ s}$$

L'errore assoluto per questo esempio è pari a

$$e_m = \frac{24,85 \text{ s} - 24,45 \text{ s}}{2} = 0,2 \text{ s}$$

e la misura si esprime come  $t = (24,6 \pm 0,2) \text{ s}$ .

Dividendo l'errore massimo per il valore medio, si ottiene l'**errore relativo**  $e_r$ , che dà informazioni su quanto l'errore assoluto incide in rapporto al valore della misura.

$$e_r = \frac{e_m}{\bar{x}} \quad (1.2)$$

Nel nostro esempio, si ha

$$e_r = \frac{0,2 \text{ s}}{24,6 \text{ s}} = 8 \cdot 10^{-3}$$

Come abbiamo visto, però, nella maggior parte degli esperimenti si usano grandezze derivate. Come calcolare gli errori delle misure derivate?

Supponiamo di avere due misure  $\bar{a}$  e  $\bar{b}$ , i cui errori assoluti sono pari a  $\delta a$  e  $\delta b$ .

Se la grandezza derivata è data dalla somma algebrica delle due grandezze misurate, il valor medio di questa grandezza è pari a  $\bar{a} \pm \bar{b}$ , mentre l'errore assoluto è pari a  $\delta a + \delta b$  e l'errore relativo è  $\frac{\delta a + \delta b}{\bar{a} \pm \bar{b}}$ . Se la grandezza derivata è data dal prodotto delle grandezze misurate, il valor medio di questa grandezza è pari a  $\bar{a}\bar{b}$ , l'errore assoluto è pari a  $\bar{b}\delta a + \bar{a}\delta b$  e l'errore relativo è dato da  $e_r(a) + e_r(b)$ . Se la grandezza derivata è data dal rapporto delle grandezze misurate, il valor medio di questa grandezza è pari a  $\frac{\bar{a}}{\bar{b}}$ , l'errore assoluto è pari a  $\frac{\bar{a}}{\bar{b}} \left( \frac{\delta a}{\bar{a}} + \frac{\delta b}{\bar{b}} \right)$  e l'errore relativo è dato da  $e_r(a) + e_r(b)$ .

## 1.4 Le caratteristiche degli strumenti di misura

Dopo aver analizzato gli errori di misura, possiamo capire quanto sia importante, per poter progettare un esperimento in maniera corretta, conoscere le proprietà degli strumenti che vogliamo utilizzare. Queste proprietà sono la *sensibilità*, la *portata*, la *precisione* e la *prontezza*.

**Definizione 1.4** (Sensibilità). Si definisce **sensibilità** la più piccola variazione della grandezza che può essere misurata dallo strumento in esame.

La sensibilità dello strumento non deve essere confusa con la precisione della misura.

**Definizione 1.5** (Portata). Si definisce **portata** il massimo valore della grandezza in esame che può essere misurato dallo strumento, senza che questo venga danneggiato.

**Definizione 1.6** (Precisione). Si definisce **precisione** un indice della qualità dello strumento utilizzato.

**Definizione 1.7** (Prontezza). Si definisce **prontezza** la velocità con cui lo strumento risponde alle variazioni della quantità da misurare.





# Capitolo 2

## I vettori

In questo capitolo analizziamo uno strumento fondamentale per lo studio dei fenomeni fisici: i *vettori*. Poiché questo strumento origina dalla Geometria, molti termini saranno tipici di quegli studi.

### 2.1 Lo spazio dei vettori geometrici

Iniziamo definendo cosa sia un vettore.

**Definizione 2.1** (Vettore). Un segmento  $AB$  in cui sia stato stabilito un ordinamento fra i vertici, ovvero un verso di percorrenza, si dice **vettore** o *segmento orientato* (Figura 2.1) e si denota con  $\overrightarrow{AB}$ , con  $\vec{v}$  o con  $\mathbf{v}$ .

Un vettore è caratterizzato da **lunghezza** (spesso indicata con  $|\mathbf{v}|$ ), **direzione** (la retta su cui giace) e **verso**.

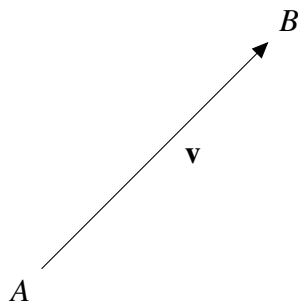


Figura 2.1: Un vettore

Fissato un punto  $O$  dello spazio, definiamo con  $V_O$  l'insieme dei vettori  $\overrightarrow{OA}$  al variare di  $A$ .

Con i vettori dell'insieme  $V_O$  è possibile eseguire una serie di operazioni, quali la somma, la differenza e la moltiplicazione. Vediamo di definire queste operazioni.

#### Somma di vettori

Siano  $\vec{a}, \vec{b} \in V_O$  due vettori non allineati. È possibile sommare questi due vettori insieme ( $\vec{a} + \vec{b}$ ) facendo partire il vettore  $\vec{a}$  da un qualsiasi punto  $O$  e facendo coincidere la

coda del vettore  $\vec{b}$  con la punta del vettore  $\vec{a}$ . Il metodo così spiegato prende il nome di **metodo “punta-coda”** (Figura 2.2).

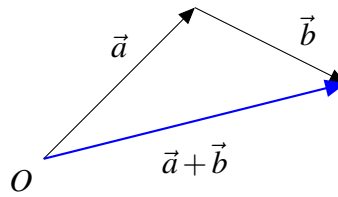


Figura 2.2: Metodo “punta-coda”

Un altro metodo usato per effettuare la somma tra vettori, equivalente a quello precedente, corrisponde al **metodo del parallelogramma**: invece di riportare i vettori uno di seguito all’altro, si fanno partire entrambi da un punto  $O$  scelto arbitrariamente e si disegna il parallelogramma che ha per lati i due vettori. Il vettore somma risultante coincide con la diagonale del parallelogramma (Figura 2.3).

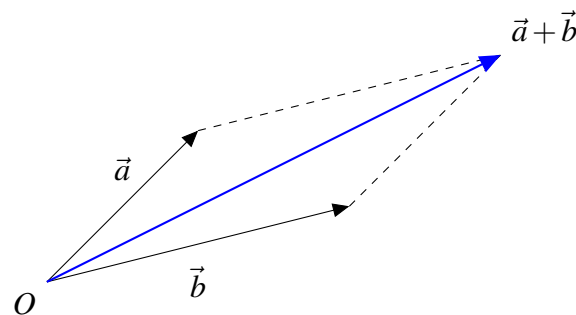


Figura 2.3: Metodo del parallelogramma

Esistono particolari situazioni per la somma tra vettori:

- se i vettori sono *paralleli* e *concordi* (hanno lo stesso verso), il vettore somma avrà stessa direzione, stesso verso e come lunghezza la somma delle singole lunghezze;
- se i vettori sono *paralleli* e *discordi* (hanno verso opposto), il vettore somma avrà stessa direzione, il verso uguale a quello del vettore più lungo e come lunghezza la differenza delle singole lunghezze.

Si può dimostrare che la somma tra vettori gode della proprietà commutativa e di quella associativa.

## Differenza tra vettori

È possibile definire anche la differenza tra vettori, purché essi abbiano diversa direzione.

In tal caso, è possibile definire un vettore  $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$  tale che  $\vec{d} + \vec{b} = \vec{a}$ . Questo vettore avrà come direzione la retta che unisce la punta dei due vettori, la freccia che punta verso il primo vettore indicato e lunghezza ignota (Figura 2.4).

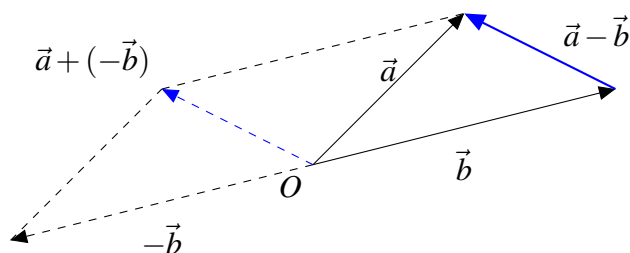


Figura 2.4: Differenza tra vettori

## Grandezze scalari e vettoriali

Esistono grandezze che possono facilmente essere rappresentate da vettori, come lo spostamento di un corpo, la forza, il campo elettrico, ecc. . . . Queste grandezze prendono il nome di *grandezze vettoriali*.

Esistono, però, grandezze che non possono essere rappresentate tramite una lunghezza, una direzione e un verso, come il tempo o la lunghezza. Queste grandezze vengono dette *grandezze scalari*, o *scalari* e possono essere caratterizzate solamente da valori numerici, i quali si compongono sommandosi come numeri.

## Moltiplicazione di un vettore per uno scalare

Sia  $\vec{a} \in V_O$  un vettore e sia  $k \in \mathbb{R}$  uno scalare. È possibile moltiplicare il vettore per uno scalare ottenendo un vettore  $\vec{b} = k \cdot \vec{a}$  (Figura 2.5) tale che abbia stessa direzione del vettore  $\vec{a}$ , lunghezza pari al prodotto della lunghezza di  $\vec{a}$  per  $k$ , verso concorde se  $k > 0$  o discorde se  $k < 0$ . Grazie alla definizione dell'operazione di somma e di prodotto tra

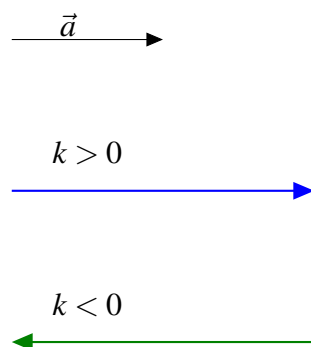


Figura 2.5: Moltiplicazione di un vettore per uno scalare

scalare e vettore è possibile affermare che l'insieme  $V_O$  è uno **spazio vettoriale** su  $\mathbb{R}$ .

Se, invece di considerare i segmenti orientati applicati in  $O$ , considerassimo l'insieme  $S$  di tutti i segmenti orientati dello spazio, possiamo definire in  $S$  la relazione  $\rho$ . Presi a

caso due segmenti  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{CD}$  appartenenti a  $S$ ,  $\overrightarrow{AB} \rho \overrightarrow{CD}$  se e solo se le rette su cui giacciono i due vettori sono parallele, i versi di percorrenza sono gli stessi e le lunghezze sono uguali, a condizione che i due vettori non siano degeneri.

Questa relazione, nota come *relazione di equipollenza fra vettori* è una relazione di equivalenza. Denotiamo allora con  $V$  l'insieme quoziente  $S/\rho$ , i cui elementi vengono denominati *vettori geometrici* dello spazio.

## Prodotto scalare

Oltre alla moltiplicazione di un vettore per un numero, esistono due tipologie di moltiplicazione tra vettori.

La prima si chiama **prodotto scalare**, perché il risultato è una grandezza scalare.

**Definizione 2.2** (Prodotto scalare). Si definisce **prodotto scalare** l'applicazione

$$\begin{aligned} \cdot : V_O \times V_O &\rightarrow \mathbb{R} \\ \vec{v} \cdot \vec{w} &= |\vec{v}| |\vec{w}| \cos \varphi \end{aligned}$$

dove  $|\vec{v}|$  e  $|\vec{w}|$  corrisponde alla lunghezza dei vettori  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  e  $\varphi$  denota l'angolo convesso individuato dai vettori  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  (Figura 2.6).

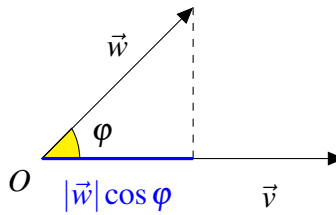


Figura 2.6: Prodotto scalare

Il prodotto scalare gode della *proprietà commutativa* e della *proprietà distributiva rispetto alla somma vettoriale*.

## Prodotto vettoriale

La seconda operazione di moltiplicazione tra vettori si chiama *prodotto vettoriale*, perché il risultato è ancora un vettore.

**Definizione 2.3** (Prodotto vettoriale). Si definisce **prodotto vettoriale** l'applicazione

$$\begin{aligned}\times : V_O \times V_O &\rightarrow V_O \\ \vec{v} \times \vec{w} &= \vec{p}\end{aligned}$$

dove  $\vec{p}$ , per convenzione, ha direzione perpendicolare al piano che contiene  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$ , verso dato dalla *regola della mano destra* (secondo cui, disponendo il pollice della mano destra nel verso di  $\vec{v}$  e le altre dita in quello di  $\vec{w}$ , il verso di  $\vec{p}$  è uscente dal palmo della mano) e modulo pari a  $|\vec{v}||\vec{w}|\sin\varphi$  (Figura 2.7).

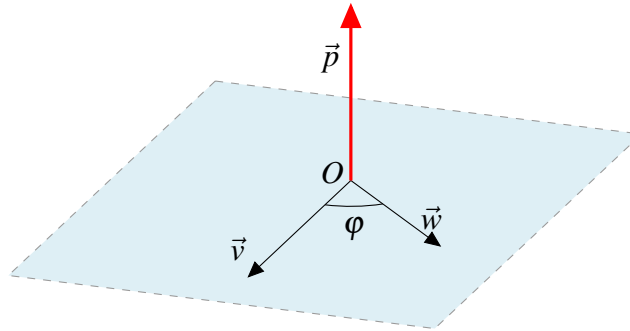


Figura 2.7: Prodotto vettoriale

## 2.2 L'espressione in coordinate dei vettori

Finora abbiamo visto come indicare un vettore in maniera simbolica (usando il simbolo  $\vec{a}$ ) o in modo grafico (tramite un segmento orientato). Il primo metodo di rappresentazione è troppo generico e il secondo è troppo impreciso.

Per questo, introduciamo una nuova rappresentazione di un vettore, in cui si usa un sistema di coordinate cartesiane. Per fare ciò, occorre introdurre un'ultima operazione sui vettori.

### Scomposizione di un vettore

Consideriamo un vettore  $\vec{a}$  e due rette  $r$  e  $s$ , passanti per la coda del vettore.

La **scomposizione** del vettore lungo queste due direzioni consiste nel trovare due vettori,  $\vec{a}_r$  e  $\vec{a}_s$ , la cui somma è pari al vettore  $\vec{a}$  di partenza. Per individuare i *vettori componenti*, si proietta il vettore che si vuole scomporre parallelamente alle rette che rappresentano le direzioni scelte (Figura 2.8).

### I versori

Consideriamo un sistema di riferimento ortogonale di origine  $O$  e un vettore  $\vec{a}$  applicato in  $O$ . Scomponiamo il vettore  $\vec{a}$  lungo le direzioni ortogonali  $x, y$  e  $z$ , ottenendo i **vettori componenti**  $\vec{a}_x$ ,  $\vec{a}_y$  e  $\vec{a}_z$ , tali che  $\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y + \vec{a}_z$ .

È utile, a questo punto, introdurre delle “unità di misura” per i vettori componenti. Queste unità prendono il nome di **versori** e sono vettori di lunghezza pari a 1.

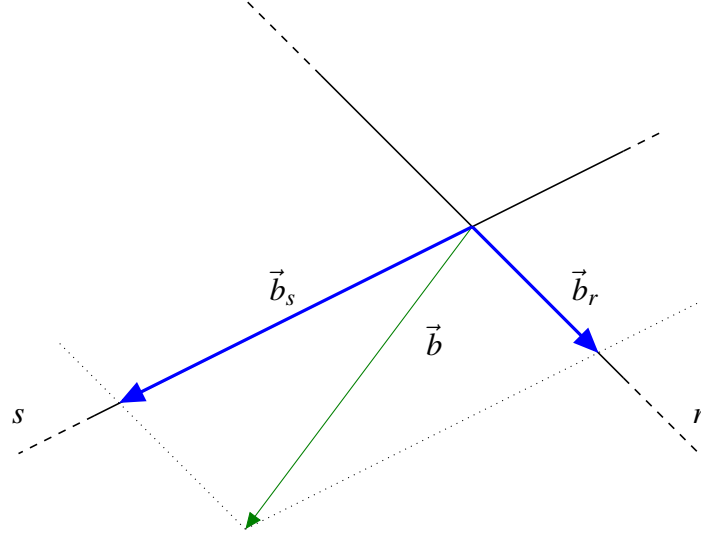


Figura 2.8: Scomposizione di un vettore

Possiamo identificare, quindi i versori  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$  e  $\hat{k}$  rispettivamente per gli assi  $x$ ,  $y$  e  $z$  e hanno verso concorde con il rispettivo asse cartesiano.

Grazie all'introduzione delle coordinate cartesiane per la rappresentazione dei vettori, è possibile determinare analiticamente il vettore risultante dalle operazioni viste in precedenza, come indicato nella Tabella 2.1, ove si usano i vettori  $\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y + \vec{a}_z$  e  $\vec{b} = \vec{b}_x + \vec{b}_y + \vec{b}_z$ .

Operazione	Risultato		
$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$	$c_x = a_x + b_x$	$c_y = a_y + b_y$	$c_z = a_z + b_z$
$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$	$d_x = a_x - b_x$	$d_y = a_y - b_y$	$d_z = a_z - b_z$
$\vec{w} = k\vec{a}$	$w_x = ka_x$	$w_y = ka_y$	$w_z = ka_z$
$z = \vec{a} \cdot \vec{b}$	$z = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$		
$\vec{p} = \vec{a} \times \vec{b}$	$p_x = a_y b_z - a_z b_y$	$p_y = a_z b_x - a_x b_z$	$p_z = a_x b_y - a_y b_x$

Tabella 2.1: Espressioni in coordinate delle operazioni sui vettori

Le componenti del vettore risultante dal prodotto vettoriale  $\vec{a} \times \vec{b}$  sono rintracciabili anche tramite la risoluzione del determinante

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

## 2.3 Prodotto triplo

Un'operazione particolare che è permessa dall'algebra vettoriale è il *prodotto misto*. Un prodotto misto è un'espressione in cui compaiono contemporaneamente prodotti sca-

lari e vettoriali di vettori dello spazio tridimensionale.

Il prodotto misto più noto è il **prodotto triplo scalare**  $(\vec{v} \cdot (\vec{u} \times \vec{w}))$ , il cui risultato è uno scalare il cui valore assoluto non dipende né dall'ordine dei tre vettori né dall'ordine delle due operazioni. Il valore assoluto è pari al volume del parallelepipedo costruito sui tre vettori:

$$\vec{v} \cdot (\vec{u} \times \vec{w}) = \begin{vmatrix} v_x & v_y & v_z \\ u_x & u_y & u_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} \quad (2.1)$$

Un altro tipo di prodotto misto usato frequentemente è il **prodotto triplo vettoriale**  $(\vec{v} \times (\vec{u} \times \vec{w}))$ , sul quale non ci soffermeremo molto.





# **Parte II**

## **Meccanica**



# Capitolo 3

## Cinematica

Iniziamo ora lo studio della **meccanica**, ovvero lo studio del movimento dei corpi, che possono essere solidi, liquidi o gassosi.

La meccanica si divide in tre branche:

- la *cinematica*, nella quale si studia il moto, indipendentemente dalle cause che lo hanno generato;
- la *dinamica*, che studia il moto dipendentemente dalle cause che lo hanno generato;
- la *statica*, che studia le condizioni di equilibrio.

In questo capitolo ci occuperemo della cinematica, mentre nei prossimi analizzeremo le altre branche.

Scopo della **cinematica** è l'osservazione del movimento di un corpo, spesso approssimato tramite un **punto materiale**, per un intervallo di tempo sufficiente a permette di stabilire una relazione funzionale fra i parametri che lo caratterizzano e il tempo in cui l'osservazione viene effettuata.

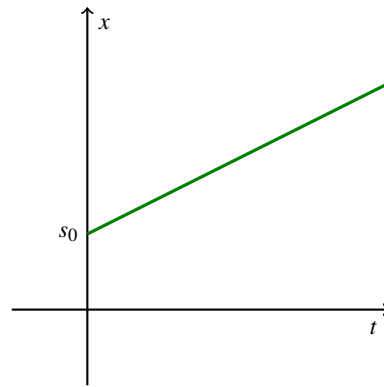
### 3.1 Moti rettilinei

Il moto più semplice da considerare è quello che avviene lungo una *retta*, ovvero quello che abbia come traiettoria (come insieme dei punti occupati dal corpo in movimento) una retta. Su questa retta vengono fissati arbitrariamente un'*origine* e un *verso di percorrenza* e la legge matematica che descrive la variazione della posizione del corpo può essere descritta tramite la funzione lineare  $x(t)$ .

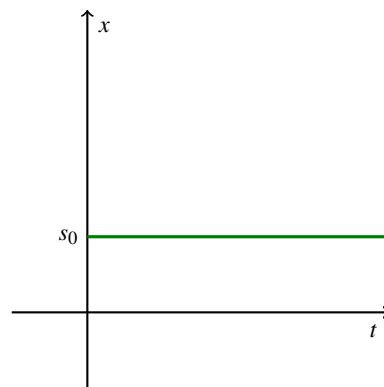
La funzione  $x(t)$  è *lineare* solamente se la *traiettoria* descritta è una retta; in caso contrario la funzione rappresenta altre curve oppure non è facilmente determinabile.

I principali moti rettilinei sono:

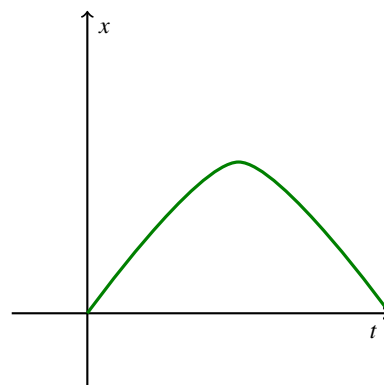
- il **moto rettilineo uniforme**, la cui traiettoria può essere descritta dall'espressione  $x(t) = at + b$  e in cui il corpo procede nel verso determinato se  $a$  è positivo, altrimenti procede nel verso opposto;



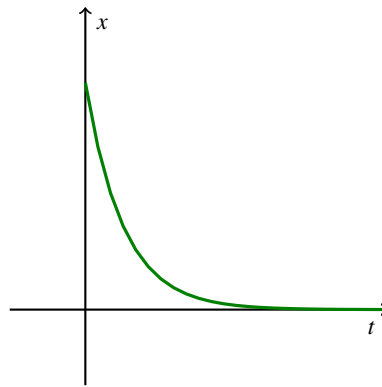
- il **moto rettilineo costante**, la cui traiettoria può essere descritta dall'espressione  $x(t) = a$  e in cui il corpo rimane fermo in un punto;



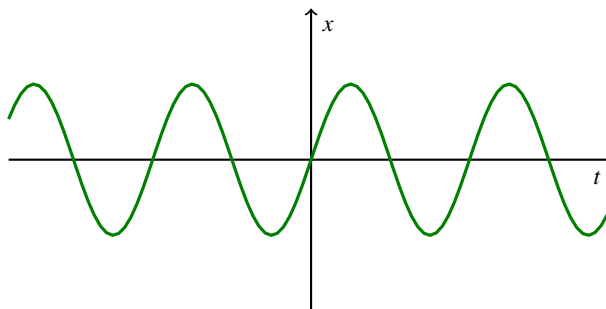
- il **moto parabolico**, la cui traiettoria può essere descritta dall'espressione  $x(t) = at^2 + bt + c$  e in cui il corpo si muove fino a raggiungere una certa posizione per poi tornare indietro;



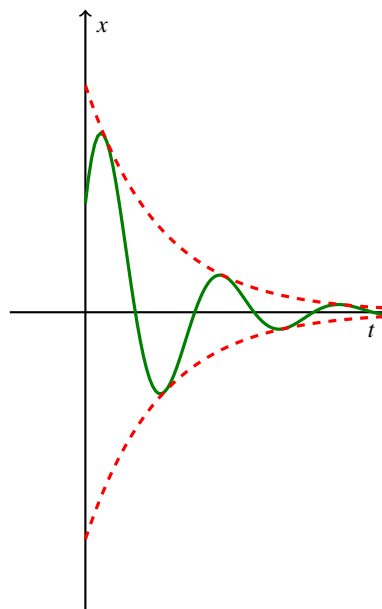
- il **moto decrescente**, la cui traiettoria può essere descritta dall'espressione  $x(t) = ae^{-bt}$  e in cui il corpo parte da punto e tende all'origine senza mai arrivarci;



- il **moto armonico**, la cui traiettoria può essere descritta dall'espressione  $x(t) = A \sin(bt)$  e in cui il corpo continua a muoversi ripetutamente tra due punti;



- il **moto armonico smorzato**, la cui traiettoria può essere descritta dall'espressione  $x(t) = Ae^{-\frac{b}{2m}t} \sin(\omega t + \phi)$  e in cui il corpo si muove tra due punti, diminuendo piano piano la distanza rispetto all'origine.



## La velocità

Introduciamo ora una grandezza che determini in maniera quantitativa la rapidità con cui si muove un punto lungo la sua traiettoria.

Definiamo l'intervallo temporale  $\Delta t$  come la differenza tra il tempo  $t_2$  e il tempo  $t_1$ , e lo spostamento  $\Delta x$  come la differenza tra la posizione  $x_2$  ( $x(t_2)$ ) e la posizione  $x_1$  ( $x(t_1)$ ).

**Definizione 3.1** (Velocità media). Si definisce **velocità media** del punto materiale in un dato intervallo di tempo il rapporto tra lo spostamento e l'intervallo temporale.

$$\bar{v}_{12} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \quad (3.1)$$

La velocità media fornisce indicazioni globali sulla rapidità con cui si sposta il punto materiale lungo la traiettoria. Per avere informazioni più precise riguardo alla velocità del punto in ogni singolo intervallo di traiettoria, si dovrà far tendere  $t_2$  a  $t_1$ , ovvero bisognerà far tendere l'intervallo temporale a zero.

Quello che si otterrà, ovvero la derivata della legge matematica che rappresenta la posizione in funzione del tempo, detta *legge oraria*, corrisponde alla *velocità istantanea* del punto materiale.

**Definizione 3.2** (Velocità istantanea). Si definisce **velocità istantanea** del punto materiale in un dato intervallo di tempo il limite, per  $\Delta t \rightarrow 0$  del rapporto tra lo spostamento e l'intervallo temporale.

$$v = \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} \quad (3.2)$$

L'unità di misura della velocità, nel Sistema Internazionale, essendo definita come il rapporto tra una lunghezza e un tempo, è il **metro al secondo** (m/s). Un suo multiplo è il *chilometro all'ora* (km/h) corrispondente a  $\frac{1}{3,6}$  m/s.

Per quanto riguarda il *grafico spazio-tempo*, la velocità istantanea corrisponde al coefficiente angolare della tangente geometrica al grafico della traiettoria nel punto di coordinate  $(t_2, x_2)$ .

Quando il moto è vario, ovvero non è un moto rettilineo, si può approssimare la traiettoria, per intervalli di tempo infinitesimi, ad una retta mediante la serie di Taylor.

**Definizione 3.3** (Moto rettilineo uniforme). Se la velocità del punto materiale rimane la stessa nell'intervallo di tempo in cui si muove, il moto si può definire come **moto rettilineo uniforme** e la sua legge oraria è

$$x(t) = x_0 + vt = x(t_0) + vt \quad (3.3)$$

*Dimostrazione.* L'Equazione (3.3) si ricava considerando il moto di un corpo a velocità non costante.

$$\begin{aligned} v &= \frac{dx}{dt} \Rightarrow v \cdot dt = dx \\ \int_{x_0=x(t_0)}^{x_1=x(t_1)} dx &= \int_{t_0}^{t_1} v(t) dt \Rightarrow \\ \Rightarrow x(t_1) - x(t_0) &= \int_{t_0}^{t_1} v dt \Rightarrow x(t_1) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} v(t) dt \end{aligned}$$

□

Ricordando la definizione data in precedenza di velocità media, riusciamo a determinare una relazione tra velocità media e velocità istantanea.

Sapendo che

$$x(t_1) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} v(t) \, dt$$

$$x(t_2) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t_2} v(t) \, dt$$

possiamo dedurre la velocità media come

$$\bar{v}_{12} = \frac{1}{t_2 - t_1} \left[ x(t_0) + \int_{t_0}^{t_2} v(t) \, dt - x(t_0) - \int_{t_0}^{t_1} v(t) \, dt \right] = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} v(t) \, dt \quad (3.4)$$

che corrisponde al *valor medio* della funzione  $v(t)$  nell'intervallo  $(t_1, t_2)$ .

## L'accelerazione

Come esiste una misura della rapidità della variazione di posizione nella traiettoria, rappresentata dalla velocità, esiste anche una misura della variazione della velocità lungo la traiettoria, se la velocità non è costante. Questa misurazione prende il nome di *accelerazione*.

**Definizione 3.4** (Accelerazione media). Si definisce **accelerazione media** del punto materiale in un dato intervallo di tempo il rapporto tra la velocità e l'intervallo temporale.

$$\bar{a}_{12} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} \quad (3.5)$$

L'accelerazione media fornisce indicazioni globali sulla rapidità con cui varia la velocità del punto materiale lungo la traiettoria.

Per avere informazioni più precise riguardo all'accelerazione del punto in ogni singolo intervallo di traiettoria, si dovrà far tendere  $t_2$  a  $t_1$ , ovvero bisognerà far tendere l'intervallo temporale a zero. Quello che si otterrà, ovvero la derivata seconda della legge matematica che rappresenta la posizione in funzione del tempo, corrisponde all'*accelerazione istantanea* del punto materiale.

**Definizione 3.5** (Accelerazione istantanea). Si definisce **accelerazione istantanea** del punto materiale in un dato intervallo di tempo il limite, per  $\Delta t \rightarrow 0$  del rapporto tra la velocità e l'intervallo temporale.

$$a = \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \quad (3.6)$$

L'unità di misura dell'accelerazione, nel Sistema Internazionale, essendo definita come il rapporto tra la velocità e il tempo, è il **metro al secondo quadrato** ( $\text{m/s}^2$ ).

Il valore di accelerazione più utilizzato nella cinematica è il valore dell'*accelerazione di gravità* ( $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ ).

Per calcolare la velocità di un corpo conoscendo la sua accelerazione si può usare la formula

$$v(t) = v(t_0) + \int_{t_0}^t a(t) dt \quad (3.7)$$

Questa legge è valida sia se l'accelerazione è nulla (velocità costante) che se l'accelerazione è costante (moto uniformemente accelerato,  $v(t) = v(t_0) + a(t - t_0)$ ).

**Definizione 3.6** (Moto rettilineo uniformemente accelerato). Se la velocità del punto materiale cresce uniformemente nell'intervallo di tempo in cui si muove, il moto si può definire come **moto rettilineo uniformemente accelerato** e la sua legge oraria è

$$\begin{aligned} x(t) &= x(t_0) + \int_{t_0}^t [v(t_0) + a(t - t_0)] dt = \\ &= x(t_0) + \int_{t_0}^t v(t_0) dt + \int_{t_0}^t a(t - t_0) dt = \\ &= x(t_0) + v(t_0) \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2} a(t - t_0)^2 \end{aligned} \quad (3.8)$$

Un caso particolare di moto uniformemente accelerato è il *moto verticale* di un punto; trascurando la resistenza dell'aria, un corpo lasciato libero di cadere sulla superficie terrestre si muove verso il basso con un'accelerazione costante pari all'accelerazione di gravità.

La legge oraria e la legge della velocità, nel caso più generale, sono

$$x(t) = h + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \quad (3.9)$$

$$v(t) = v_0 - g t \quad (3.10)$$

Nel caso in cui il corpo non abbia velocità iniziale, il *tempo di caduta* e la *velocità di schianto* sono

$$t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad (3.11)$$

$$v_c = \sqrt{2gh} \quad (3.12)$$

Nel caso in cui il corpo sia lanciato verso il basso, il tempo di caduta e la velocità di schianto sono

$$t_c = -\frac{v_0}{g} + \sqrt{\frac{v_0^2}{g^2} + \frac{2h}{g}} \quad (3.13)$$

$$v_c = \sqrt{v_0^2 + 2gh} \quad (3.14)$$

## 3.2 Moto periodico

Cambiamo ora prospettiva e consideriamo corpi che si muovono avanti e indietro da un punto a un altro.



**Definizione 3.7** (Moto periodico). Si parla di moto periodico quando il grafico della legge oraria del moto si presenta uguale per ogni intervallo di tempo  $T$ .

$$x(t) = x(t + T) \quad (3.15)$$

Quando l'intervallo di tempo in cui si ripete il moto, detto *periodo*, è molto piccolo, si può usare come grandezza la *frequenza* del moto, indicata come  $f$  o  $\nu$ , che rappresenta il tratto di traiettoria percorsa nell'unità di tempo.

$$\nu = f = \frac{1}{T} \quad (3.16)$$

L'unità di misura della frequenza nel SI, poiché è l'inverso del periodo, il quale viene misurato in secondi, è l'inverso del secondo, denominato **hertz** (Hz).

**Definizione 3.8** (Moto armonico semplice). Un particolare moto periodico è denominato **moto armonico semplice**, la cui legge oraria è

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi) \quad (3.17)$$

dove  $A$  rappresenta l'**ampiezza del moto**, cioè la variazione massima della posizione,  $\varphi$  rappresenta la **fase iniziale**, ovvero la posizione iniziale del grafico per  $t = 0$ , e  $\omega$  rappresenta la **pulsazione**, cioè la quantità di radianti percorsi in un secondo.

Il valore della pulsazione si ricava tramite la definizione di moto periodico (Equazione (3.15)).

$$\begin{aligned} A \sin(\omega t + \varphi) &= A \sin((\omega t + \varphi) + \omega T) \\ \omega T &= 2\pi \text{ in base al periodo della funzione seno} \Rightarrow \\ \Rightarrow \omega &= \frac{2\pi}{T} \end{aligned} \quad (3.18)$$

La pulsazione nel SI ha come unità di misura il **radiante al secondo** (rad/s).

Come abbiamo visto, la legge oraria del moto armonico semplice è legata ai valori forniti dalla funzione seno. Per questa funzione, come per tutte le funzioni trigonometriche usate in fisica, non si può usare come argomento della funzione la sola variabile tempo, perché l'argomento deve essere adimensionale; per questo, in fisica, si usa sempre un valore costante che renda l'argomento un numero puro.

Un altro modo equivalente per descrivere la legge oraria del moto armonico è usando la funzione coseno, avendo l'accortezza di ricordarsi che la fase iniziale deve essere di  $90^\circ$ . Come ogni moto periodico, anche per il moto armonico esiste una frequenza, definita come il numero di oscillazioni percorse dal corpo nell'unità di tempo.

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

Ragionando in maniera simile ai moti rettilinei, possiamo definire la velocità e l'accelerazione del moto armonico nel seguente modo:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \omega A \cos(\omega t + \varphi) \quad (3.19)$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A \sin(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x(t) \quad (3.20)$$

A parte il valore dell'ampiezza, le tre funzioni rappresentate in Figura 3.1 mostrano lo

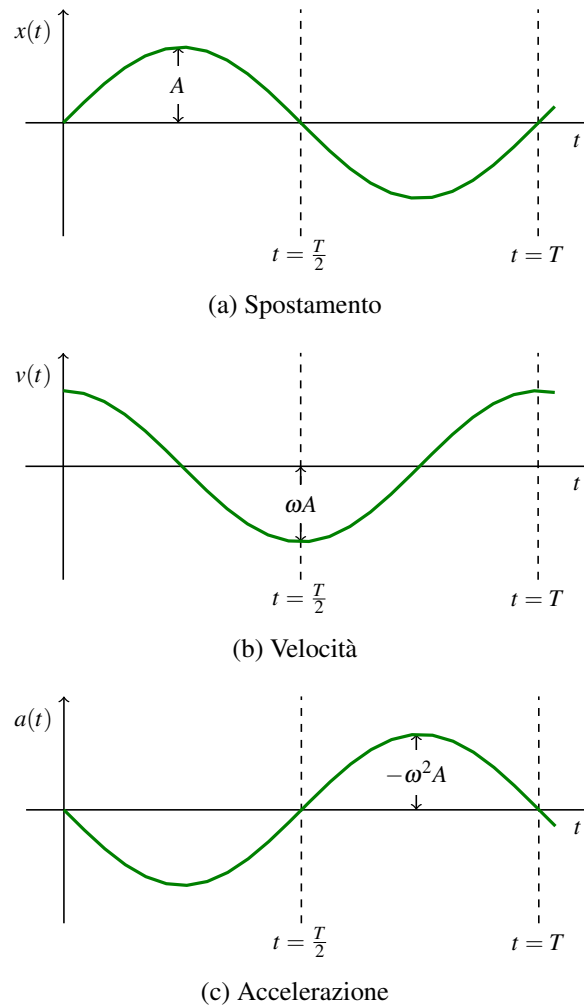


Figura 3.1: Grafici di  $x(t)$ ,  $v(t)$  e  $a(t)$  per il moto armonico semplice

stesso andamento temporale, con la differenza di essere spostate rispetto all'asse del tempo: si dice che le funzioni sono *sfasate* l'una rispetto all'altra. Inoltre si dice che la velocità è in *quadratura di fase* rispetto alla posizione (sfasamento di  $90^\circ$ ) e che l'accelerazione è in *opposizione di fase* rispetto alla posizione (sfasamento di  $180^\circ$ ).

Esiste una condizione necessaria e sufficiente per cui un moto sia definito armonico, ed è data dall'**equazione differenziale del moto armonico** (Equazione 3.21), la cui soluzione è sempre una funzione simile a quella che rappresenta la legge oraria del moto armonico.

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) + \omega x(t) = 0 \quad (3.21)$$

Conoscendo il valore della posizione, la posizione iniziale e la velocità iniziale si possono ricavare i valori dell'ampiezza e della fase iniziale.

$$\varphi = \arctan\left(\frac{\omega x_0}{v_0}\right) \quad (3.22)$$

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} \quad (3.23)$$

Al risultato della funzione arcotangente occorre aggiungere  $\pi$  nel caso in cui la velocità iniziale sia negativa.

*Dimostrazione.*

$$\begin{cases} x_0 = x(0) = A \sin \varphi \\ v_0 = v(0) = \omega A \cos \varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = \frac{x_0}{\sin \varphi} \\ v_0 = \omega \frac{x_0}{\sin \varphi} \cos \varphi = \frac{\omega x_0}{\tan \varphi} \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = \frac{x_0}{\sin \varphi} \\ \tan \varphi = \frac{\omega x_0}{v_0} \end{cases}$$

□

## Velocità e accelerazione in funzione della posizione

Finora abbiamo studiato il moto conoscendo il suo sviluppo temporale. Esistono però situazioni fisiche in cui la variazione temporale non compare esplicitamente, ma compare, ad esempio il valore dell'accelerazione in funzione della posizione.

In questi casi è possibile conoscere anche il valore dell'altra incognita in funzione sempre della posizione in questo modo:

$$\begin{aligned} a &= \frac{dv}{dt}, v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \\ \Rightarrow dt &= \frac{dv}{a}, dt = \frac{dx}{v} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{dv}{a} &= \frac{dx}{v} \Rightarrow v dv = a dx \Rightarrow \\ \Rightarrow \int_{v_0}^v v dv &= \int_{x_0}^x a dx \Rightarrow \\ \Rightarrow \int_{x_0}^x a dx &= \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v_0^2 \end{aligned} \quad (3.24)$$

Applicando l'Equazione (3.24) ai moti visti finora, otteniamo, per il moto uniformemente accelerato,

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0) \quad (3.25)$$

e, per il moto armonico semplice,

$$v^2 = v_0^2 + \omega^2(x_0^2 - x^2) \quad (3.26)$$

### 3.3 Moti nel piano

Fino a questo momento abbiamo visto moti di un corpo lungo una sola dimensione. Passiamo adesso ad analizzare il movimento di un corpo lungo due dimensioni, che viene descritto tramite l'utilizzo di vettori.

Prima di fare ciò, occorre definire un sistema di coordinate, alternativo al sistema di coordinate cartesiane, utilizzabile per definire la posizione di un punto su un piano: il sistema di *coordinate polari*.

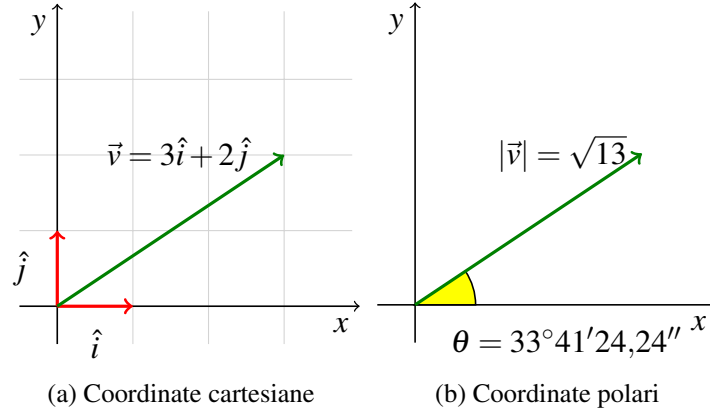


Figura 3.2: Sistemi di coordinate

Il sistema di coordinate polari è un sistema di coordinate bidimensionale nel quale ogni punto del piano è identificato da un angolo e da una distanza da un punto fisso detto *polo*. Il sistema di coordinate polari è utile specialmente nelle situazioni in cui le relazioni tra due angoli possono essere espresse più facilmente in termini di angoli e distanza; nel più familiare sistema di coordinate cartesiane tale relazione può essere espressa solamente tramite le funzioni trigonometriche.

Siccome il sistema di coordinate è bidimensionale, ogni punto è determinato da due coordinate polari: la *coordinata radiale* e quella *angolare*. La prima, di solito identificata con la lettera  $r$  o con  $|\vec{v}|$ , denota la distanza del punto da un punto fisso detto *polo* (equivalente all'origine del sistema cartesiano). La coordinata angolare, solitamente denotata con la lettera greca  $\theta$ , è anche detta *angolo azimutale* ed identifica l'angolo che la retta a  $0^\circ$  deve spazzare in senso antiorario per andare a sovrapporsi a quella che congiunge il punto al polo.

Un sistema di coordinate polari è in corrispondenza biunivoca con un sistema di coordinate cartesiane, ossia ad un vettore di coordinate cartesiane ne corrisponde uno e uno solo in coordinate polari.

Le relazioni che intercorrono tra le coordinate cartesiane e quelle polari sono:

$$r = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad (3.27)$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{v_y}{v_x}\right) \text{ (eventualmente } +\pi \text{ nell'argomento se } v_x < 0) \quad (3.28)$$

$$v_x = r \cos \theta \quad (3.29)$$

$$v_y = r \sin \theta \quad (3.30)$$

Quando il moto si svolge su un piano, la traiettoria descritta dal punto è in generale una *curva*.

I vari punti della traiettoria si possono descrivere mediante coordinate cartesiane o *coordinate curvilinee*. Le coordinate cartesiane si basano sulle leggi orarie che descrivono il moto lungo i due assi  $(x(t), y(t))$ , mentre le coordinate curvilinee misurano la distanza del punto da un'origine arbitraria posta sulla curva, orientata.

Infine, un altro modo per indicare la posizione di un punto della traiettoria è l'utilizzo del *raggio vettore*, che congiunge l'origine del sistema cartesiano con il punto  $P$ .

$$\vec{r}(t) = \mathbf{x}(t) = \overrightarrow{OP} = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} \quad (3.31)$$

**Definizione 3.9** (Velocità media nel piano). Si definisce **velocità media** del moto di un punto materiale in un piano in un intervallo temporale il rapporto tra il vettore ottenuto dalla differenza dei due raggi vettori indicanti le due posizioni e l'intervallo di tempo.

$$\bar{\mathbf{v}}_{12} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} \quad (3.32)$$

**Definizione 3.10** (Velocità istantanea nel piano). Si definisce **velocità istantanea** del moto su un piano di un punto materiale in un dato intervallo di tempo il limite, per  $\Delta t \rightarrow 0$  del rapporto tra lo spostamento, rappresentato tramite il raggio vettore, e l'intervallo temporale.

$$\mathbf{v} = \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)}{t_2 - t_1} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t_1 + \Delta t) - \vec{r}(t_1)}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad (3.33)$$

Geometricamente, il vettore velocità istantanea ha direzione tangente alla traiettoria in quel punto, verso determinato dalla differenza dei raggi vettori e modulo determinato dallo spostamento infinitesimo della coordinata curvilinea  $ds$ .

$$\mathbf{v} = \frac{ds}{dt} \hat{i}$$

Dal punto di vista delle componenti cartesiane, possiamo dire che le componenti del vettore velocità sono  $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(x\hat{i} + y\hat{j}) = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j}$ . Il vettore avrà modulo  $|\mathbf{v}| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$  e direzione, cioè l'angolo che si forma tra il vettore velocità e l'asse  $x$ , pari a  $\varphi = \arctan\left(\frac{dy}{dx}\right)$ .

Con queste condizioni, la *legge oraria del moto uniforme* nel piano è

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0) + \int_{t_0}^t \mathbf{v}(t) dt \quad (3.34)$$

che, nel caso più semplice, è riscrivibile come  $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0) + \mathbf{v}(t - t_0)$ . In base alla proiezione sugli assi del moto uniforme, inoltre, è possibile determinare la funzione che rappresenta la traiettoria del punto nel piano:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x(t) = x_0 + v_x t \\ y(t) = y_0 + v_y t \end{cases} &\Rightarrow \\ \begin{cases} t = \frac{x - x_0}{v_x} \\ t = \frac{y - y_0}{v_y} \end{cases} &\Rightarrow \\ \frac{x - x_0}{v_x} = \frac{y - y_0}{v_y} &\Rightarrow \\ y(x) = \frac{v_y}{v_x}(x - x_0) + y_0 &\quad (3.35) \end{aligned}$$

Anche per i moti nel piano è possibile definire una grandezza che esprima la variazione della velocità; in quanto vettore, dovrà indicare contemporaneamente sia la variazione del modulo del vettore velocità che la variazione della direzione del vettore velocità. Il *vettore accelerazione* avrà quindi due componenti cartesiane.

**Definizione 3.11** (Accelerazione media nel piano). Si definisce **accelerazione media** del moto di un punto materiale su un piano in un dato intervallo di tempo il rapporto tra la variazione del vettore velocità e l'intervallo temporale.

$$\bar{\mathbf{a}}_{12} = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{v}(t_2) - \mathbf{v}(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t)}{\Delta t} \quad (3.36)$$

**Definizione 3.12** (Accelerazione istantanea nel piano). Si definisce **accelerazione istantanea** del moto di un punto materiale su un piano in un dato intervallo di tempo il limite, per  $\Delta t \rightarrow 0$  del rapporto tra la variazione del vettore velocità e l'intervallo temporale.

$$\mathbf{a} = \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{\mathbf{v}(t_2) - \mathbf{v}(t_1)}{t_2 - t_1} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \quad (3.37)$$

Il vettore accelerazione, scritto attraverso le sue componenti cartesiane, risulta essere

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt} \hat{i} + \frac{dv_y}{dt} \hat{j} = \frac{d^2 x}{dt^2} \hat{i} + \frac{d^2 y}{dt^2} \hat{j}$$

Per indicare, invece, in maniera più esplicita la variazione del modulo e della direzione del vettore velocità, si preferisce usare un *sistema di riferimento intrinseco*: si individuano, mediante i versori  $\hat{\mathbf{t}}_T(t)$  e  $\hat{\mathbf{t}}_N(t)$ , un asse tangente alla traiettoria nel punto scelto e un asse ortogonale alla traiettoria; in base a questo sistema di riferimento, si ha che  $\mathbf{v}(t) = v(t) \hat{\mathbf{t}}_T(t) = \frac{ds}{dt} \hat{\mathbf{t}}_T(t)$ .

Secondo ciò, possiamo definire l'accelerazione come

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v \hat{\mathbf{t}}_T(t)) = \frac{dv}{dt} \hat{\mathbf{t}}_T + v \frac{d\hat{\mathbf{t}}_T}{dt}$$

dove  $\mathbf{a}_T = \frac{dv}{dt} \hat{\mathbf{t}}_T$  viene detta **accelerazione tangenziale** e rappresenta la rapidità con cui il vettore velocità varia di modulo, mentre  $\mathbf{a}_N = v \frac{d\hat{\mathbf{t}}_T}{dt}$  viene detta **accelerazione normale** e rappresenta la rapidità con cui il vettore velocità varia di direzione.

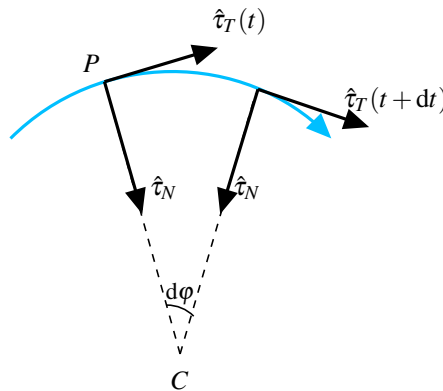


Figura 3.3: Componenti del vettore accelerazione

Un modo per rappresentare graficamente il vettore accelerazione normale è tramite l'uso del *cerchio osculatore* (detto anche *circonferenza osculatrice*), ovvero di un cerchio

che approssima meglio la traiettoria nel punto prescelto e tangente a essa. Il vettore accelerazione normale sarà diretto lungo il raggio  $R = \overline{CP}$  del cerchio, con il verso in direzione del centro e avrà modulo pari a  $|\vec{a}_N| = \frac{v^2}{R}$ .

Secondo quello che abbiamo detto finora, possiamo definire la legge della velocità per il moto uniformemente accelerato:

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}(t_0) + \int_{t_0}^t \mathbf{a}(t) dt \quad (3.38)$$

Proiettando il moto di un corpo lungo gli assi, nel caso di moto uniformemente accelerato, si ottengono le seguenti leggi orarie:

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \\ y(t) = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2 \end{cases} \quad (3.39)$$

Caso particolare del moto uniformemente accelerato è quello in cui la componente lungo l'asse  $x$  dell'accelerazione è nulla; questo è il caso dei corpi soggetti unicamente alla forza di gravità. Le leggi orarie del moto, in questo caso, sono:

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_{0x}t \\ y(t) = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases} \quad (3.40)$$

Per rappresentare la traiettoria sul piano cartesiano ci poniamo in una situazione ancor più comoda, quella in cui il corpo parta dall'origine degli assi, per cui la traiettoria del corpo segue la seguente equazione:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x(t) = v_{0x}t \\ y(t) = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases} &\Rightarrow \\ \begin{cases} t = \frac{x}{v_{0x}} \\ y(t) = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases} &\Rightarrow \\ y(x) = \frac{v_{0y}}{v_{0x}}x - \frac{1}{2}\frac{g}{v_{0x}^2}x^2 & \end{aligned} \quad (3.41)$$

Un caso particolare di moto uniformemente accelerato nel piano è il *moto parabolico*.



**Definizione 3.13** (Moto parabolico). Il **moto parabolico** è un particolare moto sul piano dato dalla composizione di un moto rettilineo uniforme lungo l'asse  $x$  e di un moto uniformemente accelerato lungo l'asse  $y$ , in cui l'accelerazione è quella di gravità. La traiettoria di questo tipo di moto è descritta tramite l'equazione

$$y(x) = x \tan \theta - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} x^2 \quad (3.42)$$

che rappresenta una parabola con concavità rivolta verso il basso.

*Dimostrazione.* In base alle componenti del vettore velocità, sappiamo che la funzione che rappresenta la traiettoria ha come espressione analitica l'Equazione (3.41). Il vettore velocità, però, forma un angolo  $\theta$  con l'asse  $x$ .

Possiamo quindi descrivere le componenti del vettore velocità come

$$\begin{aligned} v_{0x} &= v_0 \cos \theta \\ v_{0y} &= v_0 \sin \theta \end{aligned}$$

Sfruttando ciò, possiamo riscrivere la funzione che rappresenta la traiettoria come l'Equazione (3.42).  $\square$

Alcune caratteristiche del moto parabolico sono la *gittata*, la *quota massima* raggiunta e il *tempo di volo*.

La **gittata**, ovvero la distanza massima percorsa dal corpo, si ricava ponendo l'Equazione 3.42 uguale a zero e ottenendo due risultati, uno uguale a zero e uno uguale a

$$x_G = \frac{2v_0^2 \cos \theta \sin \theta}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g} = 2x_M$$

dove  $x_M$  rappresenta la coordinata del punto medio della traiettoria.

La **quota massima** raggiunta dal corpo è

$$y_M = y(x_M) = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g}$$

Inoltre, ricordandoci che  $t = \frac{x}{v_{0x}} = \frac{x}{v_0 \cos \theta}$ , possiamo ricavarci il **tempo di volo** necessario a percorrere la traiettoria con velocità  $v_x$  costante, mediante la formula

$$t_G = t(x_G) = 2 \frac{x_M}{v_0 \cos \theta} = 2 \frac{v_0 \sin \theta}{g} = 2t_M = 2t(x_M)$$

Infine, tramite calcoli particolari, si può ricavare il valore dell'**angolo di alzo**  $\theta$  per cui la gittata ha valore massimo, corrispondente a  $45^\circ$ .

Come abbiamo detto, nel moto parabolico la componente della velocità lungo l'asse  $x$  rimane costante, mentre la componente lungo l'asse  $y$  varia a seconda dell'istante in cui si osserva il moto; il modulo del vettore velocità è quindi  $v(t) = \sqrt{v_{0x}^2 + (v_{0y} - gt)^2}$ . Allo stesso modo, anche le componenti tangenziali e normali dell'accelerazione variano di modulo rispetto agli assi intrinseci.

Il modulo dell'accelerazione tangenziale, quindi, diminuirà fino al vertice per poi aumentare di nuovo, cambiando di verso. Anche il vettore accelerazione normale varierà di modulo, però sarà sempre diretto verso l'interno della concavità e avrà modulo massimo in corrispondenza del vertice. Sempre nel vertice, il *raggio di curvatura* (il raggio del cerchio osculatore) sarà pari a  $R = \frac{v_{0x}^2}{g}$ .

Altro particolare moto che si svolge nel piano è il *moto circolare*.

**Definizione 3.14** (Moto circolare). Si definisce **moto circolare** un moto nel piano la cui traiettoria è rappresentata da una circonferenza (Figura 3.4).

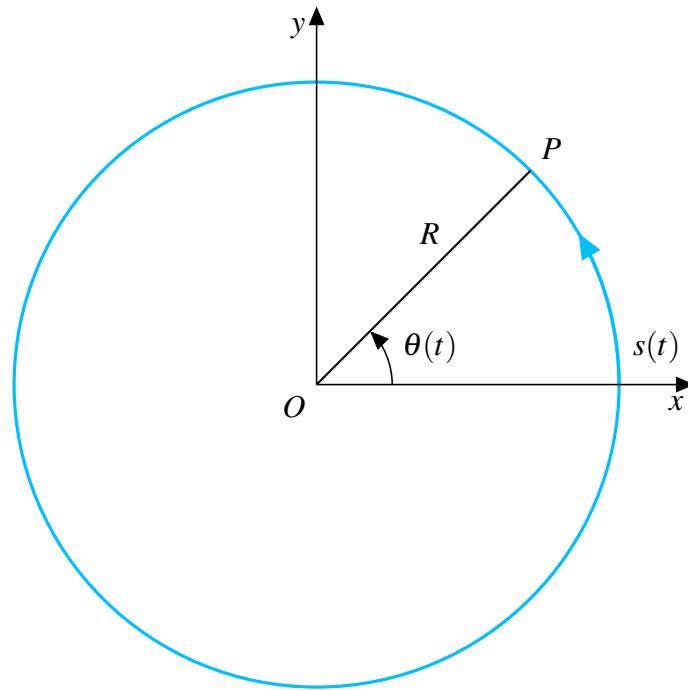


Figura 3.4: Traiettoria di un moto circolare

La posizione di un punto lungo la traiettoria è possibile identificarla mediante tre tipi di coordinate:

- le coordinate cartesiane  $(x(t), y(t))$ , che danno un'informazione per quanto riguarda le proiezioni del moto lungo gli assi cartesiani;
- le coordinate curvilinee  $(s(t) = R\theta(t))$ , che danno un'informazione sulla distanza del punto da un'origine fissata, in genere per  $\theta = 0$ ;
- le coordinate polari  $(r(t), \theta(t))$ , che danno un'informazione sullo spostamento angolare del punto.

Per la maggior parte dei calcoli, le coordinate polari sono preferibili, perché  $r(t) = R$  per ogni valore di  $t$ .

Come per gli altri moti, è possibile definire grandezze medie e istantanee.

**Definizione 3.15** (Velocità angolare media). Si definisce **velocità angolare media** in un intervallo temporale il rapporto tra l'angolo percorso e l'intervallo di tempo.

$$\bar{\omega}_{12} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\theta(t_2) - \theta(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\theta(t + \Delta t) - \theta(t)}{\Delta t} \quad (3.43)$$

**Definizione 3.16** (Velocità angolare istantanea). Si definisce **velocità angolare istantanea** di un punto materiale in un dato intervallo di tempo il limite, per  $\Delta t \rightarrow 0$  del rapporto tra lo spostamento angolare e l'intervallo temporale.

$$\omega = \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{\omega(t_2) - \omega(t_1)}{t_2 - t_1} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\omega(t + \Delta t) - \omega(t)}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} \quad (3.44)$$

L'unità di misura nel SI della velocità angolare è il **radiante al secondo** (rad/s).

**Definizione 3.17** (Accelerazione angolare media). Si definisce **accelerazione angolare media** in un dato intervallo di tempo il rapporto tra la variazione della velocità angolare e l'intervallo temporale.

$$\bar{\alpha}_{12} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega(t_2) - \omega(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\omega(t + \Delta t) - \omega(t)}{\Delta t} \quad (3.45)$$

**Definizione 3.18** (Accelerazione angolare istantanea). Si definisce **accelerazione istantanea** in un dato intervallo di tempo il limite, per  $\Delta t \rightarrow 0$  del rapporto tra la variazione della velocità angolare e l'intervallo temporale.

$$\alpha = \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{\omega(t_2) - \omega(t_1)}{t_2 - t_1} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\omega(t + \Delta t) - \omega(t)}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (3.46)$$

L'unità di misura nel SI dell'accelerazione angolare è il **radiante al secondo quadrato** (rad/s<sup>2</sup>).

Possiamo inoltre definire una **velocità vettoriale**, avente verso nella direzione antioraria di rotazione, direzione tangente alla circonferenza e modulo  $|\mathbf{v}| = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(R\theta(t)) = R\frac{d\theta}{dt} = R\omega$ , e un' **accelerazione vettoriale**, formata anch'essa da due componenti, una tangenziale e una normale; la componente normale ha per direzione la retta su cui giace il raggio, è direzionata verso il centro della circonferenza e ha modulo pari a  $|\mathbf{a}_N| = \frac{v^2}{R} = \frac{R^2\omega^2}{R} = R\omega^2$ , mentre la componente tangenziale ha per direzione la retta tangente alla circonferenza nel punto, stesso verso del vettore velocità e modulo pari a  $|\mathbf{a}_T| = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(R\omega) = R\frac{d\omega}{dt} = R\alpha$ .

Possiamo definire due tipi di moti circolari:

- il **moto circolare uniforme**, con velocità angolare costante in modulo e accelerazione normale costante, la cui legge oraria è

$$\theta(t) = \theta(t_0) + \omega(t - t_0)$$

che, nel caso più generale, ha la forma

$$\theta(t) = \theta(t_0) + \int_{t_0}^t \omega(t) dt \quad (3.47)$$

- il **moto circolare uniformemente accelerato**, con accelerazione tangenziale costante, la cui legge oraria è

$$\theta(t) = \theta(t_0) + \omega(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2}\alpha(t - t_0)^2$$

e la cui legge della velocità è

$$\omega(t) = \omega(t_0) + \alpha(t - t_0)$$

La legge della velocità, nel caso più generale, è

$$\omega(t) = \omega(t_0) + \int_{t_0}^t \alpha(t) dt \quad (3.48)$$

Per quanto riguarda le proiezioni del moto sui due assi, abbiamo

$$\begin{cases} x(t) = R \cos(\theta(t)) \\ y(t) = R \sin(\theta(t)) \end{cases} \quad (3.49)$$

Nel caso di moto circolare uniforme, consideriamo  $t_0 = 0$  ( $\theta(t) = \theta_0 + \omega t$ ), otteniamo

$$\begin{cases} x(t) = R \cos(\omega t + \theta_0) \\ y(t) = R \sin(\omega t + \theta_0) \end{cases}$$

corrispondenti a due moti armonici semplici, sfasati di  $90^\circ$ , aventi periodo pari a  $t = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi R}{v}$ .

# Capitolo 4

## Dinamica

Finora ci siamo occupati della descrizione di un moto, senza studiare le cause che lo creavano. Ora ci accingiamo a studiare quella branca della fisica che si occupa proprio dello studio delle cause del moto dei corpi, ovvero iniziamo a studiare la **dinamica** dei corpi.

La dinamica si basa su tre principi, ovvero tre leggi determinate da osservazioni sperimentali effettuate da Galileo Galilei e da Isaac Newton.

### 4.1 I principi della dinamica

**Definizione 4.1** (Primo principio della dinamica). In assenza di forze esterne a esso, un corpo permane nel suo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme.

Questo principio, noto anche come *principio d'inerzia*, fu intuito per la prima volta da Galilei; prima di lui, infatti, valeva ancora il principio formulato da Aristotele nella sua opera “*Fisica*” che affermava che *un corpo, per mantenere il suo stato di moto, doveva essere spinto (subire una forza)*.

Il primo principio non è visibile nella realtà, in quanto ogni corpo è soggetto a forze esterne, quindi non si può facilmente intuire. Se, però, ci poniamo nel caso in cui il nostro sistema sia fermo o si muova di moto rettilineo uniforme, ovvero ipotizzando che valga il principio d'inerzia, riusciamo a verificare la sua esistenza; i sistemi di riferimento che si comportano in questo modo possiamo definirli come **sistemi di riferimento inerziali**.

Il primo principio della dinamica ci permette di definire una grandezza, denominata **forza**, che esprime e misura l'interazione tra sistemi fisici. Una forza è misurabile tramite un **dinamometro**, ovvero una molla che si può dilatare o comprimere.

**Definizione 4.2** (Secondo principio della dinamica). L'interazione del punto con l'ambiente circostante, espresso tramite la forza  $\mathbf{F}$ , determina un'accelerazione del punto proporzionale a una costante  $m$ , detta *massa inerziale*, che rappresenta la resistenza che oppone il corpo alla variazione della velocità.

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \quad (4.1)$$

L'Equazione (4.1), riscrivibile come  $\mathbf{F} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}$ , esprime la *legge fondamentale della dinamica*, mediante la quale si riescono a esprimere tutte le proprietà cinematiche del corpo.

Il secondo principio, inoltre, include la definizione del principio d'inerzia, in quanto se

la forza che agisce sul corpo è nulla, anche l'accelerazione del corpo sarà nulla, quindi il corpo o è in quiete o si muove di moto rettilineo uniforme. Infine, su un corpo al quale sono state applicate più forze, è possibile che la forza risultante (ovvero il vettore risultante dalla somma vettoriale) sia nulla; anche in questo caso, per il corpo in questione è valido il principio d'inerzia (si parla quindi di *equilibrio statico* se la velocità è nulla).

In base alla definizione data mediante la legge fondamentale, l'unità di misura della forza è il **newton** ( $N = \text{kg} \cdot \text{m/s}^2$ ).

**Definizione 4.3** (Terzo principio della dinamica). Se un corpo  $A$  esercita una forza  $\mathbf{F}_{A,B}$  su un corpo  $B$ , allora anche il corpo  $B$  esercita una forza  $\mathbf{F}_{B,A}$  sul corpo  $A$ ; queste forze sono uguali e contrarie, ovvero hanno stessa direzione, stesso modulo e verso opposto e, inoltre, stessa retta di azione.

$$\mathbf{F}_{A,B} = -\mathbf{F}_{B,A} \quad (4.2)$$

Questo principio, noto anche come principio di azione e reazione delle forze, chiarisce il fatto che l'interazione tra due corpi è sempre un'azione reciproca.

## 4.2 Forza gravitazionale e forza peso

Nella vita di tutti i giorni abbiamo notevoli dimostrazioni di forze in azione.

La prima forza che analizziamo è la *forza gravitazionale*, il cui enunciato fu formulato da Newton nel XVII secolo.

**Definizione 4.4** (Legge di gravitazione universale). Date due masse qualsiasi  $m_1$  e  $m_2$ , di dimensioni trascurabili rispetto alla distanza reciproca, tra di loro agisce una forza di attrazione diretta lungo la retta che congiunge le due masse, il cui modulo è direttamente proporzionale al prodotto delle masse e inversamente proporzionale al quadrato delle distanza  $d$ .

$$|\mathbf{F}_{g1,2}| = G \frac{m_1 m_2}{d^2} \quad (4.3)$$

Il valore  $G$  che appare nella Equazione (4.3) prende il nome di **costante di gravitazione universale** e vale  $6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$ .

Consideriamo ora due esempi di azione della forza gravitazionale.

Il primo caso è quello di un corpo che si trova a una certa distanza  $h$  dalla superficie terrestre; questo corpo risente di molteplici forze attrattive nella realtà, una per ogni massa presente sulla Terra. Per i calcoli fisici, invece, si può approssimare la Terra a una sfera, e la sua massa concentrata nel suo centro. Il modulo della forza è  $|\mathbf{F}_{g1,2}| = G \frac{M_T m}{(R_T + h)^2}$ .

Se la distanza è molto più piccola del raggio terrestre, il corpo, se lasciato libero, assume in qualsiasi luogo, la stessa accelerazione, detta *accelerazione di gravità* ( $\mathbf{g}$ ). Il vettore accelerazione di gravità è diretto verticalmente verso la superficie terrestre e il suo modulo, sulla Terra, vale mediamente  $9,81 \text{ m/s}^2$ . Possiamo quindi dire che, in questo caso, la forza gravitazionale è

$$\begin{aligned} |\mathbf{F}_{g1,2}| &= G \frac{M_T m}{(R_T)^2} \\ \text{Supponendo } m &= 1 \text{ kg: } G \frac{M_T}{R_T} = \mathbf{g} \Rightarrow \\ \Rightarrow \mathbf{F}_{g1,2} &= m\mathbf{g} = \mathbf{P} \end{aligned} \quad (4.4)$$

e prende il nome di **forza peso**. La forza peso è quella che spiega dinamicamente il moto parabolico e il moto verticale dei corpi.

Come per il moto parabolico, infatti, qualsiasi altro moto che avviene nel piano o nello spazio risente di una forza, se il corpo subisce un'accelerazione; ad esempio, nel moto circolare uniforme, poiché esiste un'accelerazione (quella normale), esisterà anche una forza.

Il valore della massa che compare nella legge di gravitazione universale, però, non corrisponde fisicamente alla massa inerziale definita tramite il secondo principio della dinamica; se la massa inerziale indica la resistenza alla variazione della velocità, la massa definita tramite la legge di gravitazione universale, detta **massa gravitazionale**, indica la capacità di esercitare e subire una forza di attrazione gravitazionale. Nonostante questa differenza, è possibile sempre stabilire una relazione tra loro (tenendo conto del fatto che nella fisica classica, due masse non possono assolutamente coincidere).

$$g = \gamma \frac{m_{T,G}}{r_T^2} \frac{m_G}{m_I} \quad (4.5)$$

dove  $g$  rappresenta l'accelerazione di gravità,  $m_{T,G}$  la massa gravitazionale della Terra,  $m_G$  la massa gravitazionale del corpo in esame e  $m_I$  la sua massa inerziale.

## Le leggi di Keplero

Fin dall'antichità, si pensava che la fisica dei corpi celesti fosse completamente diversa da quella terrestre. La teoria che dominò fino al XVII secolo fu quella di Aristotele, che ipotizzava una forte differenza qualitativa tra i pianeti, il Sole, le stelle e la Terra. I corpi celesti, infatti, sono fatti di una sostanza, a suo parere, inalterabile, mentre la Terra è costituita da materia deteriorabile. Inoltre, Aristotele poneva la Terra al centro dell'Universo, quindi non aveva senso studiare la dinamica celeste.

Fu solamente grazie all'ipotesi avanzata da Copernico nel 1540, che poneva il Sole al centro dell'Universo che lo studio della dinamica celeste cominciò a svilupparsi. Fra gli scienziati che vi si dedicarono, ricordiamo Keplero, il quale, grazie alle misurazioni sulle posizioni dei corpi celesti nel tempo eseguite da Brahe, formulò le sue tre leggi.

**Definizione 4.5** (Leggi di Keplero). 1. I pianeti percorrono orbite ellittiche intorno al Sole, il quale occupa uno dei due fuochi dell'ellisse (Figura 4.1a).

2. La velocità areale (la rapidità con cui viene spazzata l'area dal raggio vettore) con cui il raggio vettore che unisce il Sole a un pianeta descrive l'orbita è costante (Figura 4.1b).

3. Il quadrato del periodo di rivoluzione di ogni pianeta è proporzionale al cubo del semiasse maggiore secondo la legge  $T^2 = ka^3$  (Figura 4.1c).

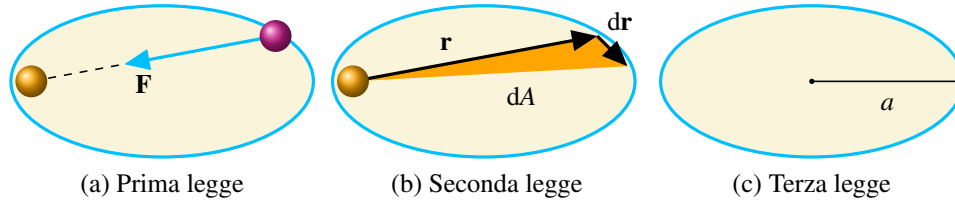


Figura 4.1: Le leggi di Keplero

Queste tre leggi forniscono solamente una spiegazione cinematica del moto dei pianeti. Per quanto riguarda l'aspetto dinamico, sappiamo che se su un corpo agiscono forze, questo corpo avrà un moto rettilineo uniforme. I pianeti, però, non hanno come traiettoria una retta, ma un'ellisse. Ciò è dovuto al fatto che la forza agente su di essi è una *forza centrale*. Si definisce **forza centrale** una forza agente in una certa regione dello spazio con le seguenti proprietà:

- in qualsiasi punto, la sua direzione passa sempre per un punto fisso  $O$ , detto *centro della forza*;
- il modulo è funzione soltanto della distanza dal centro stesso.

La presenza di una forza, funzione della posizione, che agisce in una certa regione dello spazio, costituisce una modifica dello spazio stesso e stabilisce quello che si chiama un *campo di forza*.

## Campo gravitazionale

In termini vettoriali, l'espressione della forza gravitazionale che la massa  $m_1$  esercita sulla massa  $m_2$  è

$$\mathbf{F}_{1,2} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{u}_{1,2}$$

dove  $\hat{u}_{1,2}$  è il versore della direzione che va da  $m_1$  a  $m_2$ . La forza  $\mathbf{F}_{2,1}$ , subita da  $m_1$  ad opera di  $m_2$ , è  $-\mathbf{F}_{1,2}$ .

Possiamo però riscrivere la forza gravitazionale nel seguente modo

$$\mathbf{F}_{1,2} = \left( -\gamma \frac{m_1}{r^2} \hat{u}_{1,2} \right) m_2 \mathbf{F}_{2,1} = \left( -\gamma \frac{m_2}{r^2} \hat{u}_{2,1} \right) m_1$$

In questo modo, possiamo notare che la forza  $\mathbf{F}_{1,2}$  esercitata dal corpo di massa  $m_1$  sull'altro di massa  $m_2$  è pari al prodotto di un vettore, indipendente da  $m_2$  ma dipendente



solo da  $m_1$  e dalla distanza da essa; viceversa per  $\mathbf{F}_{2,1}$ .

Il vettore tra parentesi prende il nome di **campo gravitazionale**  $\mathbf{G}$  generato dalla massa sorgente del campo nel punto  $P$  distante  $r$ .

### 4.3 Reazione normale

Altra forza di cui vediamo l'effetto, ma non notiamo nient'altro, è la **reazione normale** o *reazione vincolare*.

La reazione normale è una forza, uguale e contraria alla risultante delle forze agenti su un corpo, applicata al corpo stesso in modo tale che permanga nel suo stato di quiete. Nel caso di un piano, la reazione normale è diretta ortogonalmente al piano. In altri casi, però, non è possibile determinare a priori la reazione normale, ma bisogna determinarne il modulo volta per volta.

Vediamo due esempi.

Consideriamo un piano inclinato con un angolo  $\theta$  (Figura 4.2). In questo caso, la reazione normale è sempre ortogonale al piano, ma il suo modulo non è uguale alla forza peso. In base alla legge fondamentale, possiamo affermare che

$$\begin{cases} |\mathbf{F}_x^{(tot)}| = m|\mathbf{g}| \sin \theta \\ |\mathbf{F}_y^{(tot)}| = |\mathbf{N}| - |\mathbf{P}| \cos \theta = |\mathbf{N}| - m|\mathbf{g}| \cos \theta \end{cases} \Rightarrow |\mathbf{N}| = m|\mathbf{g}| \cos \theta$$

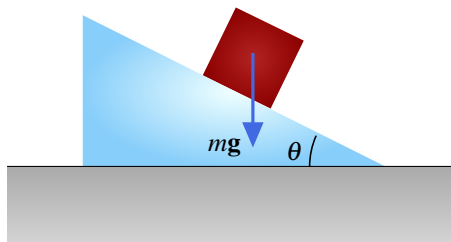


Figura 4.2: Piano inclinato

Consideriamo ora un piano parallelo al terreno (Figura 4.3). Nel caso in cui esistano due forze agenti contemporaneamente su un corpo appoggiato sul piano, si ha che la forza risultante lungo l'asse verticale sia la somma della forza peso (la prima forza agente), della reazione normale e della forza esterna che il corpo subisce (la seconda forza agente). Se questa forza esterna è pari alla forza peso, il corpo non è più retto dal piano.

### 4.4 Forze di attrito

Tutti i corpi che si muovono lungo un piano subiscono e restituiscono le *forze di coesione* tra il materiale che forma il corpo e il materiale del piano. Queste forze di coesione tendono a impedire il movimento del corpo.

Si può indicare queste forze come un vettore parallelo al piano, con verso opposto a quello della forza che crea il moto. Questo vettore, ovvero questo tipo di forze che rallentano o impediscono il moto di un corpo, prende il nome di **forze di attrito**.

Possiamo distinguere tre tipi di forze di attrito:

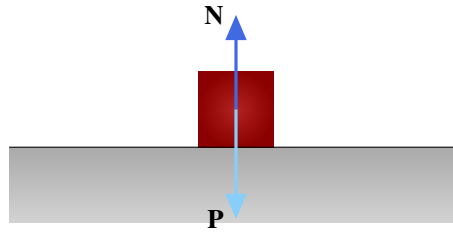


Figura 4.3: Reazione normale

- la forza di attrito *viscoso*, che agisce quando il corpo si muove in un fluido;
- la forza di attrito *radente*, che agisce quando il corpo si muove strisciando lungo una *superficie scabra*, ovvero in cui sono presenti queste forze di coesione;
- la forza di attrito *volvente*, che agisce quando il corpo rotola lungo una superficie scabra.

In questo capitolo parleremo dell'attrito radente (Figura 4.4), successivamente vedremo anche gli altri tipi di attrito.

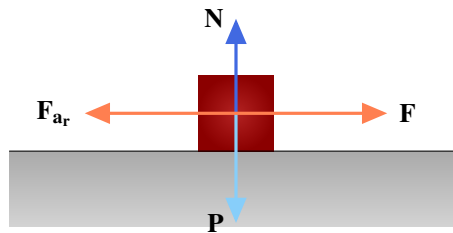


Figura 4.4: Forza di attrito radente

Riusciamo a distinguere due tipi di forza di attrito radente, come per le altre forze di attrito: la forza di *attrito statico* e la forza di *attrito dinamico*.

La **forza di attrito statico** è quella forza, parallela al piano su cui si svolge il moto, che resiste alla variazione di velocità. Il suo modulo è sempre pari alla forza impressa per effettuare il moto, ma avrà segno opposto, fino a quando non raggiunge un valore massimo, che fa passare il corpo dal suo stato di quiete, dovuto alla risultante nulla delle forze applicate ( $\mathbf{F}_{a,r,s} + \mathbf{F} + \mathbf{N} + \mathbf{P} = 0$ ) a uno stato di moto. Questo valore massimo è dato dalla formula

$$\mathbf{F}_{a,r,s}^{(max)} = \mu_s \mathbf{N} \quad (4.6)$$

dove  $\mu_s$  rappresenta il **coefficiente di attrito statico**, il cui valore, adimensionale, dipende dal materiale di cui sono composti sia il piano sia il corpo.

Da ciò possiamo ricavare che il valore massimo della forza di attrito statico sarà maggiore quanto più sarà maggiore il valore della reazione normale.

Se il corpo è poggiato su un piano inclinato scabro, ci troviamo nella situazione rappresentata nella Figura 4.5. Analizzando le forze agenti sul corpo lungo un asse parallelo al

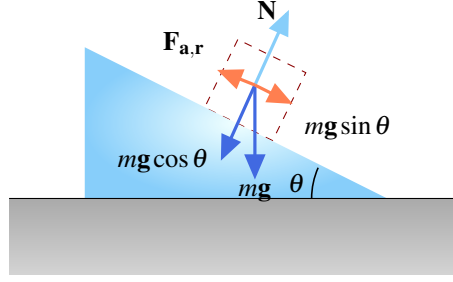


Figura 4.5: Forza di attrito radente su un piano inclinato

piano e uno ortogonale al piano, abbiamo che

$$\begin{aligned}
 & \begin{cases} |\mathbf{F}_y^{(tot)}| = |\mathbf{N}| - m|\mathbf{g}| \cos \theta \\ |\mathbf{F}_x^{(tot)}| = m|\mathbf{g}| \sin \theta - |\mathbf{F}_{a,r}| \end{cases} \Rightarrow \\
 & \text{condizione di equilibrio} \Rightarrow \begin{cases} |\mathbf{N}| - m|\mathbf{g}| \cos \theta = 0 \\ m|\mathbf{g}| \sin \theta - |\mathbf{F}_{a,r}| = 0 \end{cases} \Rightarrow \\
 & \Rightarrow \begin{cases} |\mathbf{N}| = m|\mathbf{g}| \cos \theta \\ |\mathbf{F}_{a,r}| = m|\mathbf{g}| \sin \theta \leq |\mathbf{F}_{a,r,s}^{(max)}| = \mu_s |\mathbf{N}| \end{cases} \Rightarrow \\
 & \Rightarrow m|\mathbf{g}| \sin \theta \leq \mu_s m|\mathbf{g}| \cos \theta \Rightarrow \\
 & \Rightarrow \tan \theta = \mu_s \Rightarrow \theta = \arctan \mu_s
 \end{aligned} \quad (4.7)$$

L'angolo  $\theta$  così determinato rappresenta il valore di angolo massimo per cui un corpo, su un piano inclinato scabro, si mantiene in equilibrio grazie alla forza di attrito statico.

La **forza di attrito dinamico** è quella forza che si oppone al movimento del corpo proprio durante il moto. Questa forza sarà sempre diretta parallelamente al piano, avrà direzione opposta a quella del vettore velocità e modulo pari a  $|\mathbf{F}_{a,r,d}| = \mu_d |\mathbf{N}|$ , dove  $\mu_d$  rappresenta il *coefficiente di attrito dinamico*, dovuto solamente dai materiali che compongono il piano e il corpo.

Le differenze tra l'attrito statico e l'attrito dinamico stanno nel valore dell'attrito e nel campo di azione: l'attrito statico agisce durante lo stato di quiete e il suo valore è compreso tra zero e un massimo pari a  $\mu_s |\mathbf{N}|$ , mentre l'attrito dinamico agisce durante il moto del corpo e il suo valore è costantemente  $\mu_d |\mathbf{N}|$ .

Se il moto avviene lungo un piano inclinato scabro, le forze che agiscono sul corpo sono:

$$\begin{aligned}
 & \begin{cases} |\mathbf{F}_y^{(tot)}| = |\mathbf{N}| - m|\mathbf{g}| \cos \theta \\ |\mathbf{F}_x^{(tot)}| = m|\mathbf{g}| \sin \theta - |\mathbf{F}_{a,r,d}| \end{cases} \Rightarrow \\
 & \text{condizione di equilibrio} \Rightarrow \begin{cases} |\mathbf{N}| - m|\mathbf{g}| \cos \theta = 0 \\ m|\mathbf{g}| \sin \theta - \mu_d |\mathbf{N}| = 0 \end{cases} \Rightarrow \\
 & \Rightarrow \begin{cases} |\mathbf{N}| = m|\mathbf{g}| \cos \theta \\ |\mathbf{F}_x^{(tot)}| = m|\mathbf{g}| \sin \theta - \mu_d m|\mathbf{g}| \cos \theta = m|\mathbf{g}| (\sin \theta - \mu_d \cos \theta) \end{cases} \Rightarrow \\
 & \Rightarrow a_x = m|\mathbf{g}| (\sin \theta - \mu_d \cos \theta)
 \end{aligned}$$

Per fare in modo che il moto sia uniforme, ovvero con velocità costante, bisogna imporre che l'accelerazione sia uguale a zero, quindi

$$\begin{aligned} a_x = 0 &\Rightarrow m|\mathbf{g}|(\sin \theta - \mu_d \cos \theta) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sin \theta - \mu_d \cos \theta = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \tan \theta = \mu_d \Rightarrow \theta = \arctan \mu_d \end{aligned} \quad (4.8)$$

$\theta$ , in questo caso, rappresenta il valore dell'angolo per cui un corpo, composto di un dato materiale, riesce a mantenere un moto uniforme su un piano di un dato materiale.

Secondo questi calcoli, possiamo affermare che il valore del coefficiente di attrito radente statico è generalmente maggiore del valore del coefficiente di attrito radente dinamico; ciò vuol dire che, nel caso di moto su un piano inclinato, servirà un angolo d'inclinazione maggiore per far iniziare il moto rispetto a quello che serve per far sì che il moto sia uniforme.

## 4.5 Forza centripeta

Per alcuni forze, come quella che vediamo ora, l'aiuto di un secondo corpo è utile. In genere, questo secondo corpo che considereremo è il *filo ideale*, ovvero un filo inestensibile e di massa trascurabile; il filo ideale viene utilizzato per trasferire forze tra due corpi. La forza che i corpi esercitano sul filo prende il nome di **tensione del filo**.

Poniamoci nel caso di una pallina, di massa  $m$ , legata a un filo ideale fissato in un punto di un piano liscio, che si muova a velocità costante. Per come abbiamo configurato il sistema, la massa si muoverà di moto circolare uniforme e risentirà di un'accelerazione normale, detta anche *accelerazione centripeta* perché tende a portare il corpo verso il centro della traiettoria, pari a  $\frac{v^2}{R}$ .

Il filo cui è legata la massa risente di una tensione pari a  $|\mathbf{T}| = m\frac{v^2}{R} = m|\mathbf{a}_N|$ . Questa tensione prende il nome di **forza centripeta**, perché è quella forza che tende a portare il corpo verso il centro della traiettoria (4.6). In casi come questo, se la massa è eccessiva,

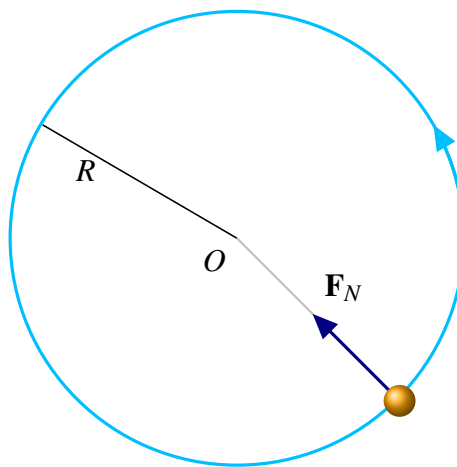


Figura 4.6: Forza centripeta

il filo ideale si può rompere; il valore massimo della tensione che un filo può sopportare

prende il nome di *carico di rottura del filo*.

Altro esempio di una forza centripeta è quella che risente una macchina quando compie una curva lungo una strada in pianura.

L'automobile risente della forza peso, che però è equilibrata dalla reazione normale della strada, e di una forza di attrito statico tra gli pneumatici e l'asfalto, dovuta al fatto che, rispetto al raggio di curvatura, la macchina non si muove. Questa forza di attrito ha modulo pari a  $m \frac{v^2}{R}$  e, come ogni forza di attrito statico, deve essere minore o uguale al suo valore massimo. Abbiamo quindi che

$$\begin{aligned} m \frac{v^2}{R} &\leq \mu_s mg \\ v^2 &\leq \mu_s g R \\ v &\leq \sqrt{\mu_s g R} \end{aligned} \quad (4.9)$$

ovvero che la velocità con cui un'automobile può prendere una curva senza andare dritto dipende dal coefficiente di attrito statico e dal raggio di curvatura.

La stessa cosa avviene se la strada sia in pendenza. L'automobile risente della forza peso e della reazione normale, quest'ultima perpendicolare al piano ma inclinata rispetto alla forza peso. Scomponendo la reazione normale lungo due assi, uno parallelo alla forza peso e uno perpendicolare, otteniamo che

$$\begin{aligned} &\begin{cases} |\mathbf{N}_y| = |\mathbf{N}| \cos \theta \\ |\mathbf{N}_x| = |\mathbf{N}| \sin \theta \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} |\mathbf{N}| \cos \theta = m|\mathbf{g}| \\ |\mathbf{N}| \sin \theta = m \frac{v^2}{R} \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} |\mathbf{N}| = \frac{m|\mathbf{g}|}{\cos \theta} \\ |\mathbf{N}| = \frac{mv^2}{R \sin \theta} \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{m|\mathbf{g}|}{\cos \theta} = \frac{mv^2}{R \sin \theta} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \tan \theta = \frac{v^2}{|\mathbf{g}|R} \Rightarrow \theta = \arctan \left( \frac{v^2}{|\mathbf{g}|R} \right) \end{aligned} \quad (4.10)$$

## 4.6 Forza elastica

Un'altra forza facilmente visibile è la *forza elastica*.

**Definizione 4.6** (Forza elastica). Si definisce **forza elastica** una particolare forza a direzione costante avente verso rivolto sempre un punto specifico, detto *centro del moto* o *origine*, e modulo proporzionale alla distanza dall'origine. Prendendo come riferimento una retta  $x$ , abbiamo che la forza elastica ha modulo

$$|\mathbf{F}_e| = -kx \quad (4.11)$$

dove  $k$  prende il nome di **costante elastica**.

La costante elastica, nel SI, si misura in *newton su metro* (N/m). La legge che descrive la forza elastica prende il nome di **legge di Hooke** (Figura 4.7).

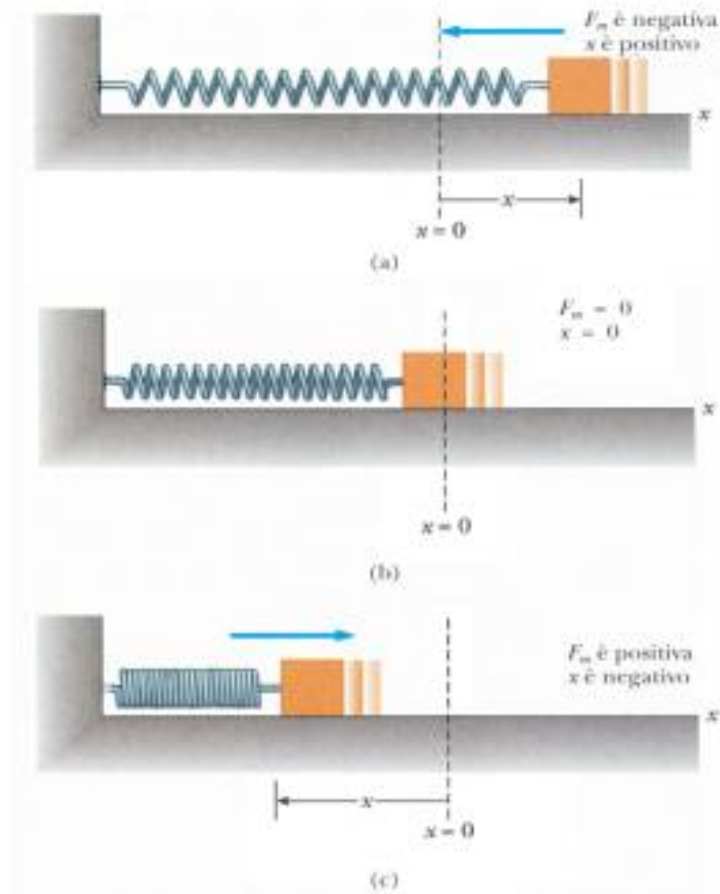


Figura 4.7: Legge di Hooke

La forza elastica è propria delle *molle*, ovvero corpi metallici a spirale che hanno la capacità di estendere o ridurre la propria lunghezza e poi di ritornare alle condizioni di partenza.

Se fissiamo un estremo della molla a una parete e l'altro estremo a un corpo di massa  $m$ , il corpo si muoverà seguendo una retta, ovvero lungo il piano su cui è poggiato il corpo, con

accelerazione pari a  $\frac{|\mathbf{F}_e|}{m} = -\frac{k}{m}x = -\omega^2 x$ . Come abbiamo detto, tutti i corpi che hanno un'accelerazione descrivibile con questa formula seguono un moto armonico semplice, avente pulsazione  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$  e periodo  $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ .

Forze che si comportano allo stesso modo della forza elastica prendono il nome di *forze di richiamo*.

## 4.7 Pendolo semplice

Un altro esempio di forza di richiamo è quella che subisce un **pendolo semplice** (Figura 4.8), ovvero un punto materiale appeso a un filo ideale che compie un moto circolare di raggio  $l$  (corrispondente alla lunghezza del filo).

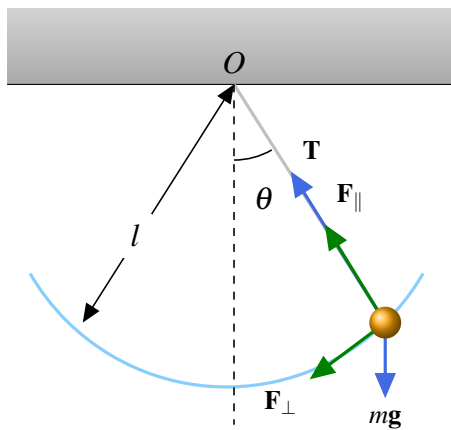


Figura 4.8: Pendolo semplice

La posizione di *equilibrio stabile* è quella verticale, con il punto fermo e il filo teso; la tensione del filo, in questo caso, vale in modulo  $|\mathbf{T}| = m|\mathbf{g}|$ . Se spostiamo il punto dalla verticale, inizia a oscillare percorrendo un arco di circonferenza.

Per studiare il moto di questo punto in assenza di attriti, usiamo degli assi di riferimento intrinseci come abbiamo fatto per l'accelerazione vettoriale: un asse sarà perpendicolare alla traiettoria e passante, quindi, per il filo, l'altro sarà tangente alla traiettoria.

Scomponendo le forze agenti sul punto rispetto a questi assi, otteniamo

$$\begin{cases} \mathbf{F}_{\parallel} = \mathbf{T} - m\mathbf{g}\cos\theta \\ \mathbf{F}_{\perp} = -m\mathbf{g}\sin\theta \end{cases}$$

La forza  $\mathbf{F}_{\perp}$  è la forza di richiamo del moto, che tende a riportarlo nella sua posizione di equilibrio stabile. Se il valore dell'angolo è positivo, la forza di richiamo punta verso sinistra, altrimenti punta verso destra.

Per determinare la legge oraria del moto di un pendolo dobbiamo fare i seguenti passaggi

matematici.

$$\begin{aligned} \begin{cases} |\mathbf{T}| - m|\mathbf{g}| \cos \theta = m|\mathbf{a}_N| \\ -m|\mathbf{g}| \sin \theta = m|\mathbf{a}_T| \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} |\mathbf{T}| - m|\mathbf{g}| \cos \theta = m \frac{v^2}{l} \\ -m|\mathbf{g}| \sin \theta = m \frac{dv}{dt} \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} |\mathbf{T}| - m|\mathbf{g}| \cos \theta = m \frac{v^2}{l} \\ -m|\mathbf{g}| \sin \theta = m \frac{d}{dt}(\omega l) \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} |\mathbf{T}| - m|\mathbf{g}| \cos \theta = m \frac{v^2}{l} \\ -m|\mathbf{g}| \sin \theta = ml \frac{d\omega}{dt} \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} |\mathbf{T}| = m \left( |\mathbf{g}| \cos \theta + \frac{v^2}{l} \right) \\ \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{|\mathbf{g}|}{l} \sin \theta \end{cases} \end{aligned}$$

L'espressione  $\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{|\mathbf{g}|}{l} \sin \theta$  corrisponde alla **legge oraria del moto di un pendolo**. Questa legge è in realtà un'equazione differenziale del secondo ordine, le cui soluzioni analitiche sarebbero molto complesse. Per questo, si possono considerare angoli molto piccoli ( $\theta \leq 0,122 \text{ rad} = 7^\circ$ ) e utilizzare lo sviluppo di Taylor della funzione seno, ottenendo così, per piccole oscillazioni

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{|\mathbf{g}|}{l} \theta = 0 \quad (4.12)$$

che corrisponde all'*equazione differenziale caratteristica di un moto armonico semplice*. La legge oraria assume quindi la forma di

$$\theta(t) = \theta_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

con pulsazione  $\omega = \sqrt{\frac{|\mathbf{g}|}{l}}$  e periodo  $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{|\mathbf{g}|}}$ , che risulta indipendente dall'ampiezza del moto. Questo fenomeno prende il nome di **isocronismo delle piccole oscillazioni**.

## 4.8 Grandezze dinamiche globali

Finora abbiamo analizzato grandezze che hanno un valore preciso per ogni punto della traiettoria. Vogliamo ora analizzare alcune grandezze il cui valore è valido in un intervallo di tempo, che derivano dall'integrazione di tutte queste grandezze specifiche. Questo tipo di grandezze prendono il nome di **grandezze globali**.

### Quantità di moto e impulso

La prima grandezza globale che incontriamo è la quantità di moto.

**Definizione 4.7** (Quantità di moto). Si definisce **quantità di moto** di un punto materiale il vettore

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} \quad (4.13)$$

che indica la capacità di un corpo di modificare il movimento di altri corpi con cui interagisce dinamicamente.

Questa grandezza è più utile per definire i sistemi di punti materiali, ma può tornare utile anche per i singoli punti. La definizione di quantità di moto permette una definizione alternativa, e più generale, del secondo principio della dinamica.

$$\mathbf{F}^{(tot)} = m\mathbf{a} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \stackrel{m \text{ costante}}{=} \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$



Considerare la massa del punto costante nel tempo è spesso fattibile nella realtà; alcuni casi in cui non avviene ciò sono le automobili in movimento (la massa diminuisce perché si consuma carburante) e i razzi spaziali.

Dal secondo principio della dinamica possiamo ricavare che  $\mathbf{F}dt = d\mathbf{p}$ , ovvero che l'azione di una forza in un intervallo infinitesimo provoca una variazione infinitesima della quantità di moto. Questa variazione infinitesima è determinabile in base all'impulso  $\mathbf{J}$ .

$$\mathbf{J} = \int_0^t \mathbf{F}(t) dt = \int_{\mathbf{p}(t_0)}^{\mathbf{p}(t)} d\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}(t) - \mathbf{p}(t_0) \quad (4.14)$$

Sia l'impulso che la quantità di moto, nel SI, si misurano in *chilogrammi per metri al secondo*, ovvero in *newton per secondo* ( $\text{kg} \cdot \text{m/s} = \text{N} \cdot \text{s}$ ).

Quando la forza è nulla, allora la quantità di moto è costante. In questo caso si dice che vale il **principio di conservazione della quantità di moto**:

*«In assenza di forze applicate, la quantità di moto di un punto materiale rimane costante».*

Applicando il teorema della media all'Equazione (4.14), otteniamo il valore medio della forza, che è possibile utilizzare in alcuni casi per alcuni calcoli.

## Lavoro e energia cinetica

Se l'impulso rappresenta un integrale della forza dell'unità di tempo, che indica la variazione della quantità di moto, cosa succede se vogliamo integrare la forza in funzione della posizione occupata dal punto?

Ipotizziamo di spostare un punto da una posizione  $x_A$  a una posizione  $x_B$  grazie a una forza che forma un angolo  $\theta$  con la parallela all'asse  $x$ . Si definisce *lavoro* compiuto da una forza da  $x_A$  a  $x_B$  il prodotto  $W_{AB} = \mathbf{F} \cdot (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_A) = F(x_B - x_A) \cos \theta$  (Figura 4.9). Definendo

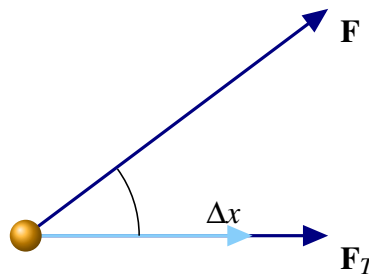


Figura 4.9: Lavoro su una retta

$\Delta x$  la distanza tra  $x_B$  e  $x_A$ , il prodotto scalare diventa  $W_{AB} = \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{x} = F \Delta x \cos \theta$ .

Si possono distinguere tre casi, a seconda del valore dell'angolo. Se l'angolo è di  $90^\circ$ , la funzione coseno è nulla, quindi il lavoro compiuto è nullo e la forza ha un'azione puramente centripeta. Se il valore della funzione coseno è maggiore di zero, la forza provoca un'accelerazione tangente concorde con la velocità, la quale aumenta di modulo e, quindi,

il lavoro sarà positivo; si parla quindi di **lavoro motore**. Se il valore della funzione coseno è minore di zero, la forza provoca un'accelerazione tangente discorde con la velocità, la quale diminuisce di modulo e, quindi, il lavoro sarà negativo; si parla quindi di **lavoro resistente**.

Ogni forza che subisce un corpo compie un lavoro, quindi se su un corpo agiscono più forze, il lavoro complessivo sarà dato dalla somma di ogni lavoro compiuto da ogni singola forza ( $W = \sum_{i=1}^n W_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \Delta \mathbf{x}_i$ ).

Consideriamo come esempio la situazione descritta nella Figura 4.4. Il lavoro compiuto dalla forza peso sul corpo in figura, come il lavoro compiuto dalla reazione normale, sono nulli, poiché la forza è perpendicolare al piano di spostamento, mentre la forza di attrito compie un lavoro resistente, perché l'angolo che forma col piano di azione è pari a  $180^\circ$ .

Il lavoro, essendo definito come una forza per uno spostamento, ha come unità di misura nel Sistema Internazionale il *newton per metro*, che prende il nome di **joule (J)**.

Consideriamo ora il caso di una forza variabile. Per determinare il lavoro compiuto da questa forza, bisogna considerare intervalli infinitesimi di spazio percorso, dove la forza rimanga costante. In ognuno di questi intervalli vale la relazione  $dW = \mathbf{F}(x) \cdot d\mathbf{x}$ . Sommando insieme tutti gli intervalli e considerando intervalli infinitesimi, otteniamo che

$$W_{AB} = \int_{x_A}^{x_B} \mathbf{F}(x) \, d\mathbf{x} \quad (4.15)$$

Il lavoro è legato anche alla variazione di un'altra grandezza globale di un moto: l'*energia cinetica*, allo stesso modo di come l'impulso è legato alla variazione della quantità di moto di un corpo.

**Definizione 4.8** (Energia cinetica). Si definisce **energia cinetica** ( $E_C$ ) il lavoro necessario a portare un corpo dal suo stato di quiete a una certa velocità.

La relazione tra lavoro ed energia cinetica è dovuta al fatto che

$$\begin{aligned} dW &= \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = F dx \cos \theta = \\ &= \mathbf{F}_T dx = m \mathbf{a}_T dx = \\ &= m \frac{dv}{dt} dx = m \frac{dx}{dt} dv = m v dv \end{aligned}$$

Possiamo quindi affermare che

$$\begin{aligned} W_{AB} &= \int_{x_A}^{x_B} \mathbf{F}(x) \, d\mathbf{x} = m \int_{v(A)}^{v(B)} v(x) \, dv = \\ &= \frac{1}{2} m v^2(x) \Big|_{v(A)}^{v(B)} = \\ &= \frac{1}{2} [v^2(B) - v^2(A)] = E_C(B) - E_C(A) = \Delta E_C \end{aligned} \quad (4.16)$$

Abbiamo così ottenuto quello che è noto come *teorema delle forze vive* o **teorema dell'energia cinetica**:

*«Qualunque sia la forza che agisce nello spostamento di un punto materiale dalla posizione A alla posizione B, il lavoro fatto dalla forza è uguale alla variazione dell'energia cinetica del punto materiale.»*

Possiamo affermare che se si compie un lavoro motore, allora si fornisce energia cinetica al corpo, mentre se il lavoro è resistente la forza assorbe energia cinetica.

L'unità di misura dell'energia cinetica, nel Sistema Internazionale, è la stessa del lavoro, cioè il **joule** (J).

Vediamo ora il valore del lavoro compiuto da alcune forze note.

**Lavoro della forza peso** La forza peso  $\mathbf{P} = m\mathbf{g}$ , applicata a un corpo, fa spostare la sua posizione dal valore  $y_A$  al valore  $y_B$ , percorrendo quindi uno spostamento  $h$ . Il lavoro compiuto dalla forza peso è quindi

$$W_{AB}^P = \int_{y_A}^{y_B} \mathbf{F}(y) \, dy = - \int_{y_A}^{y_B} m\mathbf{g} \, dy = mg(y_A - y_B) = mgh \quad (4.17)$$

Secondo ciò, possiamo affermare che se  $y_A > y_B$ , allora il lavoro sarà motore, altrimenti abbiamo un lavoro resistente.

Grazie al teorema dell'energia cinetica, possiamo ottenere la stessa formula ottenuta con la cinematica per determinare la velocità di schianto di un corpo.

$$E_C(A) = 0, E_C(B) = \frac{1}{2}mv_B^2$$

$$W_{AB}^P = mgh = \Delta E_C = \frac{1}{2}mv_B^2 \Rightarrow v_B = \sqrt{2gh}$$

**Lavoro della forza elastica** La forza elastica  $\mathbf{F}_e = -k\mathbf{x}$ , applicata a un corpo, lo fa spostare dalla posizione  $x_A$  alla posizione  $x_B$ . Il lavoro compiuto dalla forza elastica è quindi

$$W_{AB}^e = \int_{x_A}^{x_B} \mathbf{F}(x) \, dx = \int_{x_A}^{x_B} -kx \, dx = -\frac{1}{2}k(x_A^2 - x_B^2) \quad (4.18)$$

**Lavoro della forza di attrito radente** La forza di attrito radente dinamico  $\mathbf{F}_{a_r,d} = -\mu_d \mathbf{N}$ , applicata a un corpo in movimento da un punto  $x_A$  ad un punto  $x_B$ , compie un lavoro pari a

$$W_{AB}^{a_r,d} = \int_{x_A}^{x_B} \mathbf{F}(x) \, dx = \int_{x_A}^{x_B} -\mu_d |\mathbf{N}| \, dx = -\mu_d |\mathbf{N}| \int_{x_A}^{x_B} dx \quad (4.19)$$

ovvero, il lavoro compiuto da una forza di attrito radente dinamico dipende dalla traiettoria seguita dal corpo e non è esprimibile come differenza dei valori di una funzione nelle coordinate  $x_A$  e  $x_B$ .

Usando però il teorema dell'energia cinetica, in alcuni casi particolare, possiamo riuscire a determinare la distanza complessiva percorsa.

$$E_C(B) = 0, E_C(A) = \frac{1}{2}mv_A^2, |\mathbf{N}| = mg$$

$$W_{AB}^{a_r,d} = -\mu_d mgd = \Delta E_C = \frac{1}{2}mv_A^2 \Rightarrow d = \frac{v_A^2}{2\mu_d g}$$

Se il moto del corpo avviene su un piano, per calcolare il lavoro compiuto da una forza applicata al corpo devo considerare intervalli infinitesimi di traiettoria, in modo di poter considerare il moto uniforme e la forza costante ( $dW = |\mathbf{F}| \cos \theta |ds|$ ). La somma di tutti questi intervalli è quella che fornisce il lavoro di una forza in un piano.

$$W_{AB}^{(F)} = \int_A^B F(s) \cos \theta(s) ds \quad (4.20)$$

L'integrale che compare qui è un *integrale di linea*, ovvero un integrale la cui funzione integranda è valutata lungo una curva. Per scrivere in modo più elegante questo integrale, usiamo il vettore  $ds$ , diretto lungo la traiettoria, che ci permette di trasformare l'Equazione (4.20), grazie al fatto che  $dW = \mathbf{F} \cdot ds$ , come

$$W_{AB}^{(F)} = \left( \int_A^B \mathbf{F}(s) ds \right)_{(l)} \quad (4.21)$$

Per comprendere questo integrale, ipotizziamo di trovarci nel caso di un moto circolare, provocato da una forza  $\mathbf{F}_C$ . Poiché questa forza è perpendicolare al percorso, in particolare al vettore  $ds$ , possiamo affermare che il lavoro compiuto da questa forza sia nullo. Anche le reazioni normali sono sempre ortogonali alla traiettoria, quindi il lavoro compiuto da queste forze è nullo.

Su un piano inclinato, invece, il lavoro compiuto dalla forza peso è dovuto alla componente, rispetto al piano, della reazione normale; detta  $d$  la lunghezza del piano e  $h$  l'altezza rispetto al terreno, abbiamo

$$W_{AB}^{(P)} = |\mathbf{P}| \sin \theta d, \quad d = \frac{h}{\sin \theta}$$

$$W_{AB}^{(P)} = |\mathbf{P}| \sin \theta \frac{h}{\sin \theta} = |\mathbf{P}| h = m|g|h$$

Sul piano cartesiano, il lavoro compiuto dalla forza peso è

$$W_{AB}^{(P)} = \int_A^B \mathbf{F} ds = - \int_A^B m|g|\hat{y} ds =$$

$$= -mg\hat{y} \int_A^B ds = -mg\hat{y}\Delta r = -mg(y_B - y_A) = mgh$$

A seconda dei casi, per i problemi della dinamica, si può utilizzare sia le formule ottenute dalla cinematica sia le formule riguardanti l'energia cinetica e al lavoro. Altre volte, a seconda della traiettoria, è impossibile sfruttare le formule riguardanti le forze, ma solamente quelle che si riferiscono all'energia cinetica e al lavoro.

## Potenza

Un'altra grandezza globale di un moto è la potenza.

**Definizione 4.9** (Potenza media). Si definisce **potenza media** di un sistema fisico il rapporto tra il lavoro compiuto da una forza in un intervallo e l'intervallo di tempo.

$$\bar{P} = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{W(t_2) - W(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{W(t + \Delta t) - W(t)}{\Delta t} \quad (4.22)$$

**Definizione 4.10** (Potenza istantanea). Si definisce **potenza istantanea** di un sistema fisico il limite, per  $\Delta t \rightarrow 0$  del rapporto tra il lavoro compiuto da una forza in un intervallo e l'intervallo di tempo, che corrisponde al lavoro compiuto nell'unità di tempo.

$$P = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{W(t + \Delta t) - W(t)}{\Delta t} = \frac{dW}{dt} = \frac{\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \quad (4.23)$$

La potenza serve a qualificare le prestazioni di un dispositivo o di una macchina che fornisce lavoro.

L'unità di misura della potenza, nel Sistema Internazionale, siccome è definita come lavoro su tempo, è *joule su secondo*, che prende il nome di **watt** (W).

## Energia potenziale

Per ogni forza, oltre all'energia potenziale, è possibile definire una seconda energia, che rappresenta la capacità di compiere lavoro che il corpo possiede in base alla sua posizione.

Questa nuova energia prende il nome di **energia potenziale** ed è definita come

$$U(x) = -W_{OX} \quad (4.24)$$

che corrisponde all'opposto del lavoro compiuto da una forza per spostare un corpo da un punto  $O$  a un generico punto  $X$ .

Ogni forza ha la sua energia potenziale.

L'energia potenziale della forza peso è

$$W_{AB}^{(P)} = mg(y_A - y_B) = U(A) - U(B)$$

L'energia potenziale della forza peso è

$$W_{AB}^{(P)} = -\frac{1}{2}k(x_A^2 - x_B^2) = U(A) - U(B)$$

Per quanto riguarda la forza di attrito, non è possibile definire una formula unica, giacché il lavoro dipende dalla traiettoria percorsa.

Forze come la forza peso e la forza elastica, per cui il lavoro è indipendente dalla traiettoria del corpo, prendono il nome di **forze conservative**.

$$W_{AB}^{(F)} = \left( \int_A^B \mathbf{F}(s) \, ds \right)_{(I)} = \left( \int_A^B \mathbf{F}(s) \, ds \right)_{(II)}$$

Conseguentemente a ciò, il lavoro compiuto da una forza che agisce su un corpo che si muove lungo una traiettoria chiusa è nullo.

$$\oint \mathbf{F} \, ds = \left( \int_A^B \mathbf{F}(s) \, ds \right)_{(I)} - \left( \int_A^B \mathbf{F}(s) \, ds \right)_{(II)} = 0$$

Se una forza è conservativa, la somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale di un punto materiale che si muove sotto l'azione di questa forza si conserva.

Questa somma prende il nome di **energia meccanica** e l'affermazione precedente prende il nome di **legge della conservazione dell'energia meccanica**.

$$U(A) + E_C(A) = U(B) + E_C(B) \quad (4.25)$$

Come per il lavoro, se in un punto sono applicate più forze, l'energia potenziale posseduta corrisponde alla somma delle energie potenziali dovute alle varie forze. Inoltre, possiamo affermare che, essendo l'energia potenziale definita tramite un integrale, i valori che troveremo sono validi a meno di una costante arbitraria additiva, dipendente dal sistema di riferimento.

Ad esempio, abbiamo detto che l'energia potenziale che un punto materiale ha durante un moto verticale dipende dalla sua altezza rispetto all'origine di riferimento e la sua energia cinetica dipende dalla velocità del punto in quel dato istante. Per ogni punto della traiettoria, quindi, si può determinare un contributo al moto sia di energia cinetica sia di energia potenziale, come indicato nella Figura 4.10.

Ciò avviene anche nel caso della forza elastica, in cui energia potenziale ed energia cine-

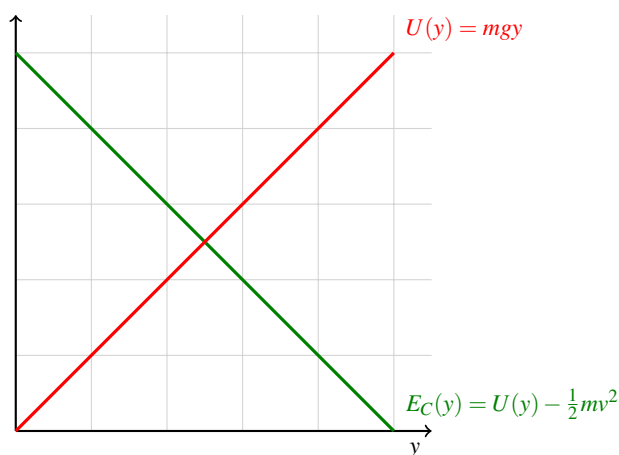


Figura 4.10: Energia meccanica della forza peso

tica dipendono dalla posizione della molla (Figura 4.11).

Un altro esempio di questo fatto è dato dall'**oscillatore armonico**, un sistema costituito una massa, legata a una molla, libera di muoversi lungo un piano. L'energia meccanica di

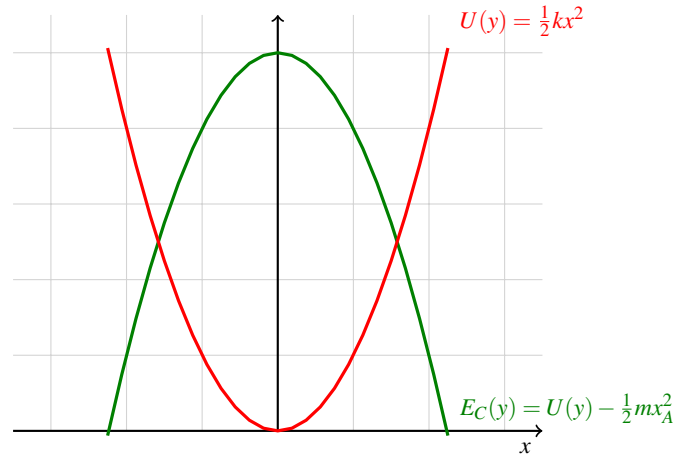


Figura 4.11: Energia meccanica della forza elastica

questo sistema è (Figura 4.12):

$$U(t) = \frac{1}{2} k x^2(t), x(t) = x_A \sin(\omega t + \varphi)$$

Scegliendo  $\varphi$  in maniera tale che  $v_A = 0$ , si ha  $x(t) = x_A \cos(\omega t)$  quindi

$$U(t) = \frac{1}{2} k \cos^2(\omega t) \quad (4.26)$$

$$E_C(t) = \frac{1}{2} m v^2(t), v(t) = \omega x_A \cos(\omega t + \varphi)$$

Scegliendo  $\varphi$  in maniera tale che  $v_A = 0$ , si ha  $v(t) = -x_A \sin(\omega t)$  quindi

$$E_C(t) = \frac{1}{2} m \omega^2 x_A^2 \sin^2(\omega t) \stackrel{\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}}{=} \frac{1}{2} k x_A^2 \sin^2\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right) \quad (4.27)$$

Se a un corpo sono applicate sia forze conservative che forze non conservative, il lavoro

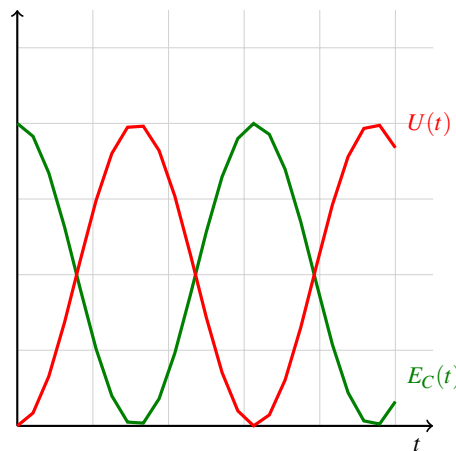


Figura 4.12: Energia meccanica di un oscillatore armonico

compiuto dalle forze che agiscono sul corpo è

$$W_{AB} = \int_A^B \mathbf{F}_{tot}(s) \, ds = \int_A^B \mathbf{F}_{cons}(s) \, ds + \int_A^B \mathbf{F}_{NC}(s) \, ds = U(A) - U(B) + |W_{NC}| \quad (4.28)$$

La legge di conservazione dell'energia meccanica diventa quindi

$$E_C(B) + U(B) = E_C(A) + U(A) + |W_{NC}|$$

ovvero, se in un corpo agiscono sia forze conservative sia forze non conservative, non vale il principio della conservazione dell'energia meccanica. Se la forza conservativa in questione è una forza di attrito, l'energia si dissipa nel passaggio da  $A$  a  $B$ , quindi il lavoro compiuto da essa è negativo.

## 4.9 Centro di massa e corpo rigido

Fino a questo momento abbiamo considerato il movimento di un corpo, considerandolo come un singolo punto materiale; studiamo cosa succede a un insieme di punti materiali, cioè a un **sistema di punti materiali**.

Possiamo descrivere un sistema di punti materiali attraverso un particolare punto geometrico che descrive il moto complessivo del sistema di punti: il **centro di massa**. Il raggio vettore che individua il centro di massa nella regione di spazio occupato dal sistema rispetto all'origine del sistema di riferimento è

$$\mathbf{r}_{CM} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{\sum_i m_i} \quad (4.29)$$

Essendo un particolare punto geometrico del sistema, se i punti materiali si muovono anche il centro di massa si muove, e la sua velocità è

$$\mathbf{v}_{CM} = \frac{d\mathbf{r}_{CM}}{dt} = \frac{\sum_i m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt}}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{v}_i}{\sum_i m_i} \quad (4.30)$$

mentre la sua accelerazione è

$$\mathbf{a}_{CM} = \frac{d\mathbf{v}_{CM}}{dt} = \frac{\sum_i m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt}}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{a}_i}{\sum_i m_i} \quad (4.31)$$

Un sistema di  $n$  punti materiali corrisponde quindi a un insieme di  $n$  punti materiali interagenti tra loro e per il quale è possibile definire un particolare punto geometrico, ovvero il centro di massa, che indica alcune grandezze cinematiche complessive del moto del sistema di punti.

Le interazioni tra i vari punti materiali sono di due tipi: *interne* ed *esterne*. Le **forze esterne**, indicate come  $\mathbf{F}_i^{(E)}$ , sono le varie forze, esterne al sistema di punti, che agiscono su un punto singolo, mentre le **forze interne**, indicate come  $\mathbf{F}_i^{(I)}$ , sono le varie forze



esercitate dagli altri  $n - 1$  punti del sistema.

Per le forze interne a un sistema di punti materiali vale il terzo principio della dinamica, quindi la risultante di tutte queste forze è nulla ( $\mathbf{F}_{tot}^{(I)} = \sum_i \mathbf{F}_i^{(I)} = 0$ ). Infine, se il sistema di riferimento del sistema di punti materiali è inerziale, abbiamo che

$$\begin{aligned} m_i \mathbf{a}_i &= \mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^{(I)} + \mathbf{F}_i^{(E)} \Rightarrow \\ \Rightarrow m \mathbf{a}_{CM} &= \mathbf{F}_{tot} = \mathbf{F}_{tot}^{(I)} + \mathbf{F}_{tot}^{(E)} = 0 + \mathbf{F}_{tot}^{(E)} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \mathbf{F}_{tot}^{(E)} = m \mathbf{a}_{CM} \end{aligned} \quad (4.32)$$

L'Equazione (4.32) prende il nome di **teorema del moto del centro di massa**, noto anche come *prima equazione cardinale per i sistemi di punti materiali*.

In un sistema di punti materiali, la quantità di moto propria di ogni punto del sistema è  $\mathbf{p}_i = m_i \mathbf{v}_i$ . Possiamo quindi determinare la quantità di moto totale del sistema come

$$\mathbf{p}_{CM} = \sum_i \mathbf{p}_i = \sum_i m_i \mathbf{v}_i = m \mathbf{v}_{CM} \quad (4.33)$$

Grazie alla definizione di quantità di moto totale la vita, possiamo riscrivere il secondo principio della dinamica, ovvero il teorema del moto del centro di massa come

$$\frac{d\mathbf{p}_{CM}}{dt} = m \mathbf{a}_{CM}$$

In assenza di forze esterne al sistema, la quantità di moto totale rimane costante nel tempo e il centro di massa si muove di moto uniforme o resta in quiete; quest'ultima affermazione è nota anche come *principio di conservazione della quantità di moto per un sistema di punti materiali*.

Consideriamo, per esempio, un corpo esteso come un sistema di punti materiali; se il corpo si muovesse sotto l'azione della forza peso, abbiamo un moto parabolico, la cui espressione della forza agente è

$$\mathbf{F}_{tot}^{(E)} = \sum_i \mathbf{F}_i^{(E)} = \sum_i -m_i g \hat{y} = -mg \hat{y}$$

Per capire meglio il principio di conservazione della quantità di moto per i sistemi di punti materiali, consideriamo questi esempi: una persona sta ferma su di un lago ghiacciato se la reazione normale del lago bilancia la forza peso e se la risultante delle forze parallele al piano è nulla, quindi se la quantità di moto del sistema parallela al piano è nulla. Se, però, questa persona lancia un oggetto, si muoverà con velocità proporzionale alla velocità e alla massa dell'oggetto lanciato e alla sua massa; per fare in modo che la quantità di moto totale del sistema si conservi, bisogna far sì che la quantità di moto della persona sia uguale alla quantità di moto dell'oggetto lanciato.

Per ogni sistema si può determinare anche il lavoro compiuto dalla forza  $\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^{(I)} + \mathbf{F}_i^{(E)}$  che ogni punto subisce come

$$dW_i = \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r} = (\mathbf{F}_i^{(I)} + \mathbf{F}_i^{(E)}) \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{F}_i^{(I)} \cdot d\mathbf{r} + \mathbf{F}_i^{(E)} \cdot d\mathbf{r} = dW_i^{(I)} + dW_i^{(E)}$$

Sommando i lavori per ogni punto otteniamo

$$dW_{tot} = \sum_i dW_i = \sum_i dW_i^{(I)} + \sum_i dW_i^{(E)} = dW_{tot}^{(I)} + dW_{tot}^{(E)}$$

Integrando tutto ciò lungo le traiettorie percorse da ogni singolo punto, otteniamo

$$W_{AB}^{(tot)} = W_{AB}^{(I)} + W_{AB}^{(E)} \quad (4.34)$$

Dalle deduzioni effettuate per la dinamica di un singolo punto materiale, sappiamo che il lavoro effettuato da una forza corrisponde alla variazione di energia cinetica che il corpo subisce da una posizione finale a una posizione iniziale. Per un sistema di punti materiali, possiamo affermare che il lavoro complessivo fatto dalle forze esterne e dalle forze interne che agiscono sul sistema è uguale alla variazione dell'energia cinetica complessiva del sistema calcolata tra una configurazione finale e una configurazione iniziale.

Consideriamo ora un particolare sistema di punti materiali, in cui i vari punti che lo compongono sono sottoposti a interazioni mutue tali da mantenerli in posizione fissa l'uno dall'altro. Questo particolare sistema prende il nome di **corpo rigido** e rappresenta, con una buona approssimazione un corpo solido reale.

Essendo formato da un numero elevato di punti materiali, il numero di variabili che si studiano (posizione, velocità, accelerazione, ecc...) è molto elevato; ciò nonostante, studiare un corpo rigido è molto semplice.

Il fatto che le distanze reciproche rimangano costanti nel tempo comporta che i *gradi di libertà* del sistema (ovvero il numero di variabili indipendenti necessarie per determinare univocamente il suo movimento nello spazio) passino da  $3n$  (dove 3 indica le dimensioni dello spazio e  $n$  il numero di punti del sistema) a 6, ovvero le tre coordinate spaziali di un punto e le direzioni di rotazione rispetto ai tre assi. Per i nostri studi, considereremo sempre le coordinate spaziali del centro di massa e la direzione di rotazione rispetto a un solo asse, ovvero l'asse  $z$ .

## 4.10 Fenomeni d'urto

Vediamo ora alcune situazioni fisiche di interesse che si verificano quando due punti materiali, o un punto e un corpo rigido, o due corpi rigidi vengono a contatto e interagiscono per un intervallo di tempo trascurabile. Questi fenomeni prendono il nome di **urti** e sono di così breve durata da giustificare l'assunzione che durante l'interazione i due corpi non si muovano in modo apprezzabile.

### Urti tra punti materiali

Cominciamo con il considerare l'urto tra due punti materiali.

Durante l'urto, si possono sviluppare forze molto intense che modificano la quantità di moto di ciascun punto e che agiscono per un tempo breve rispetto al tempo di osservazione (*forze impulsive*). Queste forze possono essere considerate interne al sistema costituito dai due punti materiali interagenti. *In assenza di forze esterne, pertanto, si verifica la conservazione della quantità di moto durante l'urto.*

Se indichiamo con  $\mathbf{v}_{1,i}$  e  $\mathbf{v}_{2,i}$  le velocità nell'istante precedente all'urto dei due punti materiali di massa  $m_1$  e  $m_2$ , e con  $\mathbf{v}_{1,f}$  e  $\mathbf{v}_{2,f}$  le corrispondenti velocità nell'istante successivo all'urto, si ha che

$$m_1 \mathbf{v}_{1,i} + m_2 \mathbf{v}_{2,i} = m_1 \mathbf{v}_{1,f} + m_2 \mathbf{v}_{2,f}$$

La quantità di moto di ciascun punto materiale, per effetto dell'impulso della forza di interazione, subisce una variazione.

$$\mathbf{v}_{1,f} - \mathbf{v}_{1,i} = \mathbf{J}_{2,1} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_{2,1}(t) dt$$

$$\mathbf{v}_{2,f} - \mathbf{v}_{2,i} = \mathbf{J}_{1,2} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_{1,2}(t) dt$$

Possiamo conservare la quantità di moto totale anche in presenza di forze esterne se la durata  $\tau$  dell'urto è sufficientemente piccola e queste forze esterne non sono impulsive. Questo ragionamento non sarebbe corretto se  $\mathbf{F}^{(E)}$  fosse impulsiva, in quanto il valor medio potrebbe assumere valori notevoli.

Quindi, nell'ipotesi che l'interazione tra i punti materiali abbia un'intensità molto grande rispetto alle eventuali forze esterne presenti, un urto può essere definito dalle seguenti proprietà:

- un urto comporta uno scambio di quantità di moto tra due punti sotto forma di impulsi dovuti alle forze interne tra gli stessi;
- nell'urto, la quantità di moto prima di esso è pari alla quantità di moto dopo di esso.

### Urto completamente anelastico

Un particolare tipo di urto è l'**urto completamente anelastico**, che avviene quando i due punti restano attaccati dopo l'urto, formando un unico corpo puntiforme di massa  $m_1 + m_2$ .

Se  $\mathbf{v}_1$  e  $\mathbf{v}_2$  sono le velocità dei due punti nell'istante prima dell'urto e  $\mathbf{v}'$  la velocità comune immediatamente dopo l'urto, si ha

$$m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = (m_1 + m_2) \mathbf{v}' = (m_1 + m_2) \mathbf{v}_{CM}$$

$$\mathbf{v}_{CM} = \frac{m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2}{m_1 + m_2} \quad (4.35)$$

Subito dopo l'urto, i punti si muovono con la velocità che aveva il centro di massa un istante prima dell'urto.

È possibile notare che, dopo l'urto completamente anelastico, non v'è più moto rispetto al centro di massa; in questo tipo di urto, infatti, viene assorbita l'energia cinetica che i punti avevano rispetto al centro di massa prima dell'urto (*le forze interne non sono conservative*).

$$\Delta E_C = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_{CM}^2 - \frac{1}{2}m_1 v_1^2 - \frac{1}{2}m_2 v_2^2$$

### Urto elastico

Un altro tipo di urto è l'**urto elastico**, durante il quale si conserva anche l'energia cinetica del sistema. Questo comporta che le forze interne, che si manifestano durante l'urto, sono conservative.

I due corpi reali che si urtano subiscono, durante l'urto, delle deformazioni elastiche, riprendendo la configurazione iniziale subito dopo l'urto.

Per studiare un urto elastico possiamo usare il principio di conservazione della quantità di moto e il teorema dell'energia cinetica.

Limitandoci ad un *urto centrale*, che avviene quando due punti materiali si muovono prima e dopo l'urto lungo la stessa direzione, abbiamo due equazioni di conservazione e due incognite (le velocità dei due punti dopo l'urto), per cui possiamo risolvere il problema.

$$\begin{cases} m_1 \mathbf{v}_{1,i} + m_2 \mathbf{v}_{2,i} = m_1 \mathbf{v}_{1,f} + m_2 \mathbf{v}_{2,f} = (m_1 + m_2) \mathbf{v}_{CM} \\ \frac{1}{2} m_1 v_{1,i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2,i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1,f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2,f}^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mathbf{v}_{1,f} = \frac{(m_1 - m_2) \mathbf{v}_{1,i} + 2m_2 \mathbf{v}_{2,i}}{m_1 + m_2} \\ \mathbf{v}_{2,f} = \frac{2m_1 \mathbf{v}_{1,i} + (m_2 - m_1) \mathbf{v}_{2,i}}{m_1 + m_2} \end{cases} \quad (4.36)$$

Nell'applicare l'Equazione (4.36) bisogna fare attenzione ai segni delle velocità.

### Urto anelastico

Il caso più comune di urto è l'**urto anelastico**, nel quale i punti ritornano separati dopo l'urto; durante questo tipo di urto, la quantità di moto si conserva, se non agiscono forze esterne di tipo impulsivo, ma non si conserva l'energia cinetica. Una parte dell'energia, infatti, viene assorbita, e ciò è determinato dal fatto che l'impulso della forza di interazione di una particella con l'altra risulta superiore a quello nella fase di ritorno dei corpi alla configurazione iniziale.

È possibile notare che  $E_{C,f}$  è sempre minore di  $E_{C,i}$ .

### Urti tra punti materiali e corpi rigidi o tra corpi rigidi

Anche per gli urti tra punti materiali e corpi rigidi o tra corpi rigidi occorre sempre considerare le leggi di conservazione.

Riassumendo, in un urto si può assumere la costanza dell'energia cinetica del sistema solo se si conosce a priori l'elasticità dell'urto. Se agiscono solo forze interne, o quelle esterne non sono di tipo impulsivo, si conserva la quantità di moto totale. Se invece esiste un vincolo che tiene fermo un punto del corpo rigido, sviluppando una forza esterna di tipo impulsivo durante l'urto, non si verifica la conservazione della quantità di moto. Infine, qualora, rispetto a un certo polo fisso in un sistema di riferimento inerziale o coincidente con il centro di massa, il momento delle forze esterne è nullo, si conserva il momento angolare rispetto a tale polo. Se agiscono solo forze interne,  $\mathbf{L}$  si conserva sempre, indipendentemente dalla scelta del polo.

Quando due corpi rigidi si urtano ma non restano attaccati, le quantità di moto dopo l'urto formano normalmente un certo angolo con la direzione che avevano prima dell'urto. Infatti, la forza interna impulsiva  $\mathbf{F}_{2,1}$  agente sul primo corpo non è parallela a  $\mathbf{p}_{1,i}$  e quindi  $\mathbf{p}_{1,f}$  risulta deviata rispetto alla direzione iniziale del moto; lo stesso succede per il secondo corpo.

# Capitolo 5

## Dinamica del moto rotatorio

Fino a questo momento abbiamo considerato, partendo da un singolo punto materiale fino ad arrivare al corpo rigido, una sola tipologia di moto, detto *moto di traslazione*. In questo tipo di moto, come abbiamo visto, tutti i punti descrivono traiettorie eguali, in genere curvilinee, percorse con la stessa velocità  $\mathbf{v}$ , che può variare nel tempo in modulo, direzione e verso.

Consideriamo ora un secondo tipo di moto che un corpo rigido può seguire: il **moto di rotazione**. Come noteremo, dal punto di vista cinematico, la trattazione è analoga a quella del moto di traslazione, sostituendo alcune grandezze. Dal punto di vista dinamico, invece, per descrivere le cause del moto di rotazione occorrono alcune grandezze che verranno analizzate in questo capitolo; inoltre, come abbiamo già detto, i corpi che rotolano subiscono una particolare forza di attrito, denominata **forza di attrito volvente**, la cui espressione è

$$\mathbf{F}_{a,v} = \frac{\mu_v}{r} \mathbf{F}_N \quad (5.1)$$

dove  $\mu_v$  rappresenta il **coefficiente di attrito volvente**,  $r$  è il raggio del corpo e  $\mathbf{F}_N$  la componente normale alla superficie di contatto della forza premente.

### 5.1 Momento di un vettore

Nella descrizione dell'algebra vettoriale abbiamo tralasciato la definizione di una particolare grandezza vettoriale, le cui applicazioni sono molto utili nello studio dei moti di rotazione dei corpi rigidi. Questa grandezza vettoriale è definita come **momento di un vettore rispetto a un punto** ( $\mathbf{X} = \mathbf{r} \times \mathbf{w}$ , Figura 5.1) e corrisponde al prodotto vettoriale tra il vettore prescelto  $\mathbf{w}$  e il vettore che congiunge un punto prestabilito del piano, detto *polo*, con la coda del vettore prescelto  $\mathbf{r}$ .

### 5.2 Momento angolare e di una forza

Due momenti molto importanti nello studio dei corpi rigidi sono il *momento della forza* e il *momento angolare*.

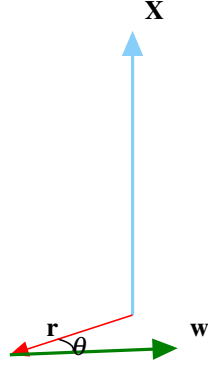


Figura 5.1: Momento di un vettore

**Definizione 5.1** (Momento di una forza). Si definisce **momento della forza** (o *momento torcente*) quel vettore

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (5.2)$$

che indica la rotazione del corpo rigido rispetto al polo per effetto della forza applicata.

L'unità di misura del momento di una forza, nel Sistema Internazionale, è il **newton per metro per secondo** ( $\text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}$ ).

**Definizione 5.2** (Momento angolare). Si definisce **momento angolare** (o *momento della quantità di moto*) quel vettore

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \quad (5.3)$$

che indica la variazione della velocità di rotazione del corpo.

L'unità di misura del momento angolare, nel Sistema Internazionale, è il **newton per metro** ( $\text{N} \cdot \text{m}$ ).

Per definizione, se il momento della forza è diretto sopra il piano su cui giacciono la forza e il raggio che congiunge il polo al vettore forza, allora il corpo rigido ruota in senso antiorario; se il momento della forza è diretto sotto il piano su cui si trovano forza e raggio congiungente, allora il corpo rigido ruota in senso orario.

Secondo ciò che abbiamo dedotto per i moti traslazionali dei punti materiali, sappiamo che  $\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$ , quindi la derivata del momento angolare rispetto al tempo corrisponde a

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{v} \times (m\mathbf{v}) + \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{M}$$

ovvero

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} \quad (5.4)$$

Possiamo quindi affermare che, se il momento della forza è nullo, allora il momento angolare è costante.

Nel caso di *forze centrali* il momento della forza sarà sempre nullo, perché il raggio e la forza sono antiparalleli, ovvero l'angolo tra il raggio e la forza è pari a  $\pi$ ; poiché il momento della forza è nullo, il momento angolare è costante. Per farlo rimanere costante, bisognerà che vari la velocità vettoriale durante il moto.

Per quanto riguarda i sistemi di punti materiali, consideriamo ora i momenti delle forze e i momenti angolari relativi a ogni punto. Sappiamo, infatti, che ogni punto subisce una forza  $\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^{(I)} + \mathbf{F}_i^{(E)}$ , che provoca una accelerazione  $\mathbf{a}_i$  e quindi una velocità  $\mathbf{v}_i$ ; per ogni punto, quindi, possiamo definire un vettore momento angolare  $\mathbf{L}_i = \mathbf{r}_i \times (m_i \mathbf{v}_i) = \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i$  e un vettore momento della forza  $\mathbf{M}_i = \frac{d\mathbf{L}_i}{dt} = \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = \mathbf{r}_i \times (\mathbf{F}_i^{(I)} + \mathbf{F}_i^{(E)}) = \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{(I)} + \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{(E)} = \mathbf{M}_i^{(I)} + \mathbf{M}_i^{(E)}$ . Possiamo così affermare che

$$\mathbf{M} = \sum_i \mathbf{M}_i = \sum_i \mathbf{M}_i^{(I)} + \sum_i \mathbf{M}_i^{(E)} = \mathbf{M}^{(I)} + \mathbf{M}^{(E)} \quad (5.5)$$

Il momento delle forze interne al sistema è nullo, perché l'angolo tra il raggio e la forza interna è nullo, quindi

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}^{(E)} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} \quad (5.6)$$

L'Equazione (5.6) è nota come **teorema del momento angolare**, oppure come *seconda equazione cardinale per i sistemi di punti materiali*.

## 5.3 Momento assiale e momento di inerzia

Come abbiamo detto, per semplicità studiamo solamente i moti di un corpo rigido intorno ad un asse fissato.

Poniamo, quindi, il nostro asse passante per il centro di massa del corpo rigido e definiamo un particolare vettore  $\vec{\omega}$  che rappresenti la direzione e la velocità di rotazione del corpo rigido e che denominiamo **velocità angolare**. Per come abbiamo descritto il sistema, il vettore velocità angolare avrà direzione parallela all'asse  $z$ , modulo pari alla velocità angolare con cui si muove ogni singolo punto del corpo rigido ed è diretto nella direzione positiva dell'asse di rotazione se la direzione del moto è antioraria, mentre è diretto nella direzione negativa dell'asse di rotazione se la direzione del moto è oraria.

Visto in sezione, ogni punto che compone il corpo si muove con velocità  $\mathbf{v}_i = \vec{\omega} R_i$ , dove  $R_i$  rappresenta la distanza tra l'asse di rotazione e il punto materiale. Poiché il corpo rigido ruota, sappiamo che il momento totale delle forze interne è nullo, mentre il momento totale delle forze esterne corrisponde alla derivata del momento angolare rispetto al tempo; sapendo che il momento angolare complessivo del corpo rigido corrisponde a  $\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{L}_i = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i$ , possiamo definire il **momento assiale della forza** come

$$\mathbf{M}_z = \frac{d\mathbf{L}_z}{dt} \quad (5.7)$$

e rappresenta la variazione della componente del momento angolare sull'asse  $z$  rispetto al tempo.

Poiché sappiamo che, posto il polo sull'asse di rotazione, il momento angolare sarà ortogonale al piano individuato dai vettori rappresentanti la velocità del punto e la distanza del punto dall'asse e che forma un angolo supplementare rispetto all'angolo formato dalla distanza con l'asse, abbiamo che l'espressione del singolo momento angolare assiale è

$$|\mathbf{L}_{z_i}| = |\mathbf{L}_i| \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta_i\right) = |\mathbf{L}_i| \sin \theta_i = r_i m_i v_i \sin \theta_i = m_i v_i R_i = m_i R_i^2 \omega$$

Il **momento angolare assiale** complessivo sarà quindi pari a

$$\mathbf{L}_z = \sum_i \mathbf{L}_{zi} = \left( \sum_i m_i R_i^2 \right) \vec{\omega} = I_z \vec{\omega} \quad (5.8)$$

dove la grandezza  $I_z$  rappresenta il **momento d'inerzia del corpo rigido rispetto all'asse  $z$  di rotazione**.

Il momento d'inerzia è una grandezza che dipende dalle masse di ogni singolo punto che forma il corpo rigido e dalla loro posizione rispetto all'asse di rotazione; per determinarlo, quindi, bisogna conoscere la posizione rispetto al corpo dell'asse di rotazione. Se sostituiamo ciò che abbiamo ora ottenuto nell'Equazione 5.6 otteniamo

$$\mathbf{M}_z = \frac{d\mathbf{L}_z}{dt} = \frac{d}{dt}(I_z \vec{\omega}) = I_z \frac{d\vec{\omega}}{dt} = I_z \vec{\alpha} \quad (5.9)$$

che corrisponde al *secondo principio della dinamica per i moti di rotazione*.

Determiniamo ora l'espressione del momento assiale della forza come prodotto vettoriale.

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \mathbf{r} \times \mathbf{F}, \mathbf{r} = h\hat{z} + \mathbf{R} = F_z\hat{z} + \mathbf{F}_{xy} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \mathbf{M} = (h\hat{z} + \mathbf{R}) \times (F_z\hat{z} + \mathbf{F}_{xy}) = \\ &= h\hat{z} \times F_z\hat{z} + h\hat{z} \times \mathbf{F}_{xy} + \mathbf{R} \times F_z\hat{z} + \mathbf{R} \times \mathbf{F}_{xy} = h\hat{z} \times \mathbf{F}_{xy} + \mathbf{R} \times F_z\hat{z} + \mathbf{R} \times \mathbf{F}_{xy} \\ \mathbf{M}_z &= \mathbf{R} \times \mathbf{F}_{xy} \end{aligned}$$

Se il momento assiale della forza è nullo, l'**accelerazione angolare**  $\vec{\alpha}$  è nulla e il corpo rigido rimane in quiete o ruota con velocità uniforme. Se, invece, il momento assiale della forza rimane costante, l'accelerazione angolare è costante e il corpo rigido ruota con accelerazione costante.

## 5.4 Esempi di moti rotatori

Consideriamo un corpo rigido su cui agisce una coppia di forze parallele ma opposte, ad esempio una porta cui sono applicate due forze, una all'estremo non vincolato e una nel centro. Per far sì che la porta rimanga in equilibrio, quindi ferma, il momento della prima forza deve essere uguale al momento della seconda forza, ovvero  $|\mathbf{F}_1|R_1 = |\mathbf{F}_2|R_2 \Rightarrow |\mathbf{F}_2| = \frac{R_1}{R_2}|\mathbf{F}_1|$ .

Anche la forza peso, se è l'unica forza agente sul corpo, può provocare una rotazione in un corpo rigido. Sappiamo che ogni punto del corpo rigido subisce una forza esterna  $\mathbf{F}_i^{(E)} = -m_i|\mathbf{g}|\hat{y}$  (dove  $\hat{y}$  è il versore dell'asse verticale), quindi la forza esterna applicata all'intero corpo rigido è pari a  $\mathbf{F}_{tot}^{(E)} = -m|\mathbf{g}|\hat{y}$ . Ogni punto del corpo rigido, inoltre, possiede un'energia potenziale  $U_i = m_i g y_i$  (dove  $y_i$  rappresenta l'altezza di ogni singolo punto sull'asse  $y$  rispetto a un punto fissato); l'intero corpo rigido, quindi, possiede un'energia potenziale pari a

$$U_{tot} = \sum_i U_i = \sum_i m_i g y_i = g \sum_i m_i y_i = m g y_{CM}$$

Infine, per ogni singolo punto del corpo rigido possiamo definire un momento della forza  $\mathbf{M}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{(E)} = \mathbf{r}_i \times (-m_i g \hat{y})$ ; quindi, l'intero corpo rigido risente di un vettore momento della forza pari a

$$\mathbf{M} = \sum_i \mathbf{M}_i = \sum_i \mathbf{r}_i \times (-m_i g \hat{y}) = -m \mathbf{r}_{CM} g \times \hat{y}$$



Consideriamo ora una persona, avente momento d'inerzia  $I_0$ , posta a sedere sopra uno sgabello che regge nelle mani due masse di egual valore  $m$  (Figura 5.2). Se inizia a ruotare

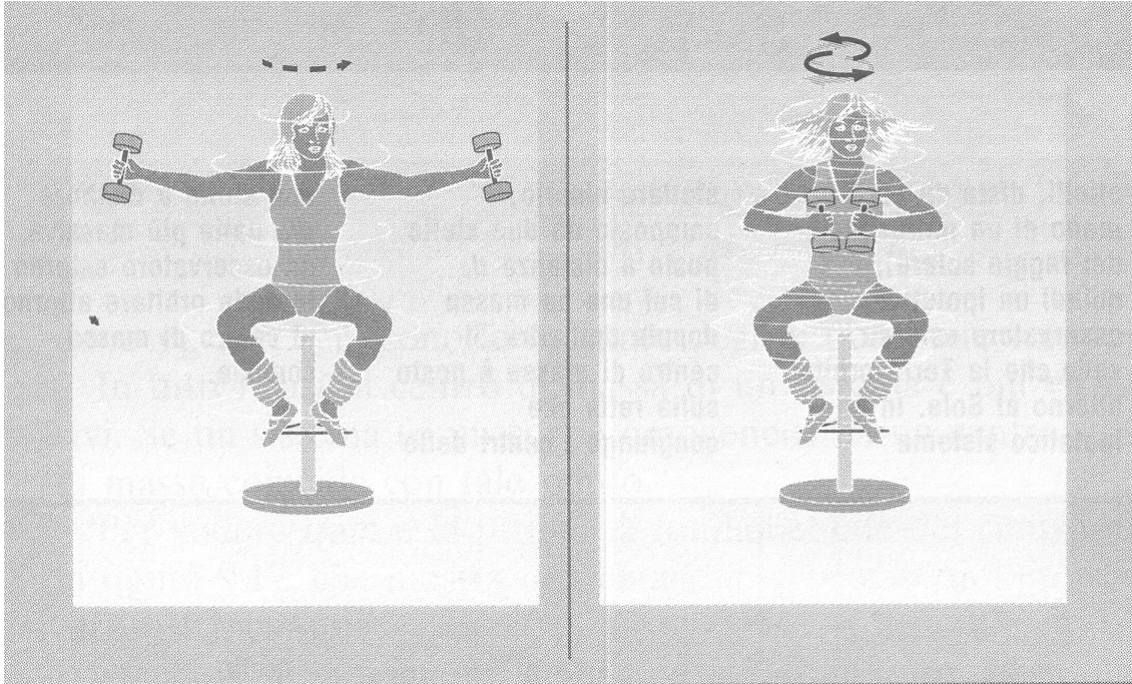


Figura 5.2: Rotazione di un corpo umano

con velocità angolare  $\vec{\omega}_1$  quando si trova con le braccia tese, il sistema formato dalle masse e dal corpo ha come momento angolare  $\mathbf{L}_1 = (I_0 + 2mR_1^2)\vec{\omega}_1$ , diretto parallelamente e con lo stesso verso rispetto all'asse di rotazione. Non appena la persona avvicina le braccia al corpo, il sistema cambia velocità di rotazione  $\vec{\omega}_2$  e il momento angolare, sempre diretto parallelamente e con lo stesso verso rispetto all'asse di rotazione, è  $\mathbf{L}_2 = (I_0 + 2mR_2^2)\vec{\omega}_2$ . In base al principio di conservazione del momento angolare, questi due valori devono essere uguali, quindi la velocità angolare della seconda situazione è maggiore alla velocità angolare della prima situazione, ed è pari a  $\vec{\omega}_2 = \frac{I_0 + 2mR_1^2}{I_0 + 2mR_2^2}\vec{\omega}_1$ .

Consideriamo ora sempre una persona seduta su uno sgabello; questa persona tiene ora in mano una ruota, fissata a due manubri per vincolarla, ponendo l'asse di rotazione parallelo al terreno. Se si pone in rotazione la ruota in una direzione qualsiasi, mantenendo l'asse di rotazione parallelo al terreno, otteniamo un momento angolare nullo, perché raggio e quantità di moto sono paralleli e hanno lo stesso verso. Se giriamo la ruota e poniamo l'asse di rotazione perpendicolarmente al terreno, la ruota continua a girare nello stesso verso, mentre il sistema inizia a girare nel verso opposto.

Questo avviene sempre per il principio di conservazione del momento angolare.

Consideriamo ora la stessa ruota fissata a due manubri. Se uno di questi manubri è legato a un filo e la ruota è ferma, su di essa agiscono solamente la forza peso e la reazione del filo, quindi il momento della forza agente sul corpo è un vettore, giacente sul piano parallelo all'asse di rotazione e diretto nel senso opposto dell'asse di riferimento. In virtù di ciò, la ruota inizia a comportarsi come un pendolo, iniziando a oscillare con una velocità  $\vec{\omega}$ . Se però al corpo è impressa una rotazione attorno al proprio asse, oltre ad

un vettore momento della forza, la ruota risente anche di un vettore momento angolare, che sarà collineare all'asse di rotazione e il cui modulo è pari a  $|\mathbf{dL}| = |\mathbf{M}|dt$ .

In questo caso, poiché momento angolare e vettore velocità angolare non sono paralleli, il corpo descrive un particolare moto, detto **moto di precessione**.

Infine, se sull'asse di rotazione di un oggetto si applica una **coppia di forze**, ovvero due forze aventi stesso modulo, direzione parallela e verso opposto, il corpo risentirà di un momento della forza pari a  $\mathbf{M} = 2\mathbf{RF}$ .

## 5.5 Sistema continuo

Finora abbiamo considerato sistemi di punti materiali discreti, ovvero sistemi di punti in cui la massa è distribuita in modo discreto. Tramite questo modello, abbiamo definito anche i corpi rigidi. Un corpo reale, invece, appare come una struttura continua dal punto di vista macroscopico.

**Definizione 5.3** (Sistema continuo). Si definisce **sistema continuo** un sistema la cui massa totale è distribuita con continuità nella regione di spazio occupata.

Con questo modello, possiamo vedere ogni singolo punto materiale come un piccolo volume  $dV$  avente massa  $dm$ .

Il vantaggio di questo modello è che possiamo sostituire le sommatorie nelle varie grandezze con integrali. Inoltre, possiamo definire una nuova grandezza, detta **densità (di massa)**, che è definita come il rapporto tra la massa infinitesima e il volume infinitesimo occupato.

$$\rho = \frac{dm}{dV} \quad (5.10)$$

Poiché è possibile che in ogni volume infinitesimo non vi sia la stessa massa, per determinare la *massa complessiva* del corpo si usa la formula

$$m = \int_V \rho(x, y, z) dV \quad (5.11)$$

**Definizione 5.4** (Corpo omogeneo). Un corpo si definisce **omogeneo** se la densità è costante in tutto il corpo.

Secondo queste considerazioni, possiamo definire la posizione del centro di massa di un sistema continuo come

$$\mathbf{r}_{CM} = \frac{1}{m} \int_V \mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) dV \quad (5.12)$$

In alcuni casi particolari, la massa del sistema è distribuita, invece che in un volume, su una superficie  $S$  o lungo una linea  $l$ .

In questi casi, vengono introdotti i concetti di **densità superficiale** (o *densità di superficie*,  $\rho_S$ ) e **densità lineare** (o *densità di linea*,  $\rho_l$ ).

$$\rho_S = \frac{dm}{dS} \quad (5.13)$$

$$\rho_l = \frac{dm}{dl} \quad (5.14)$$

Le unità di misura sono **chilogrammi al metro cubo** ( $\text{kg/m}^3$ ) per la densità di massa, **chilogrammi al metro quadrato** ( $\text{kg/m}^2$ ) per la densità superficiale e **chilogrammi al metro** ( $\text{kg/m}$ ) per la densità lineare.

Nel caso di massa distribuita lungo una linea, il centro di massa del corpo si trova:

$$x_{CM} = \frac{1}{m} \int x \, dm = \frac{1}{m} \int_0^L \rho_l(x) x \, dx \stackrel{\text{corpo omogeneo}}{=} \frac{1}{m} \rho_l \frac{1}{2} L^2 = \frac{1}{m} \frac{m}{L} \frac{1}{2} L^2 = \frac{L}{2}$$

Anche per un sistema continuo è possibile definire il **momento d'inerzia** come

$$I_z = \int_V R^2 \rho \, dV \quad (5.15)$$

Esistono alcuni corpi per cui, grazie a particolari simmetrie, è possibile determinare il momento d'inerzia.

Poniamo per ora il caso di un'asta sottile (Figura 5.3), di lunghezza  $L$ , per cui l'asse di rotazione passa per uno dei suoi estremi. Consideriamo un singolo elemento  $dx$  posto a distanza  $x$  dall'asse. Il momento d'inerzia in questa situazione è

$$I_z = \int_0^L x^2 \rho_l \, dx \stackrel{\text{corpo omogeneo}}{=} \frac{m}{L} \int_0^L x^2 \, dx = \frac{m}{L} \frac{L^3}{3} = \frac{1}{3} m L^2$$

Se l'asse di rotazione passasse per il centro di massa, il momento d'inerzia dell'asta sarebbe

$$I_z = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} x^2 \rho_l \, dx \stackrel{\text{corpo omogeneo}}{=} \frac{m}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} x^2 \, dx = \frac{m}{L} \frac{1}{3} \left( \frac{L^3}{8} + \frac{L^3}{8} \right) = \frac{1}{12} m L^2$$

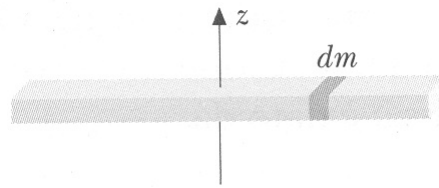


Figura 5.3: Asta sottile

Alcuni corpi rigidi con particolari simmetrie possiedono particolari valori per il proprio momento d'inerzia se l'asse rispetto al quale si calcola passa per il centro di massa. Una volta noto questo valore, si può calcolare il momento d'inerzia rispetto a qualsiasi asse parallelo al precedente, mediante ciò che prende il nome di **teorema di Huygens-Steiner**

$$I_z = I_{CM} + m d^2 \quad (5.16)$$

dove  $d$  rappresenta la distanza tra il nuovo e il vecchio asse.

L'unità di misura del momento d'inerzia, nel Sistema Internazionale, è il **chilogrammo per metro quadrato** ( $\text{kg} \cdot \text{m}^2$ ).

Mediante il teorema di Huygens-Steiner, riusciamo ad ottenere lo stesso risultato ottenuto in precedenza per quanto riguarda il momento d'inerzia di un'asta rispetto a un asse di rotazione passante per uno dei suoi estremi.

$$I_z = I_{CM} + md^2 = \frac{1}{12}mL^2 + m\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}mL^2 + \frac{1}{4}mL^2 = \frac{1}{3}mL^2$$

Vediamo ora il momento di inerzia per alcuni corpi particolari. Iniziamo da un anello di spessore infinitesimo.

$$I_z = \int R^2 dm = R^2 \int dm = R^2 M$$

Consideriamo ora un disco omogeneo di spessore infinitesimo e scomponiamolo in tanti piccoli anelli aventi momento d'inerzia  $dI_z = r^2 dm$ . Poiché il disco è omogeneo, la massa infinitesima dell'anello è definibile come  $dm = \rho_S dS = \rho_S 2\pi r dr$ ; il momento di inerzia infinitesimo vale quindi  $dI_z = 2\pi r^3 \rho_S dr$ . Il momento d'inerzia dell'intero disco è pari alla somma di tutti i singoli momenti infinitesimi, quindi

$$I_z = \int_0^R 2\pi r^3 \rho_S dr = 2\pi \rho_S \int_0^R r^3 dr = \pi \rho_S \frac{R^4}{2} = \frac{1}{2}MR^2$$

Consideriamo ora un cilindro omogeneo di altezza  $h$  e scomponiamolo in tanti piccoli dischi omogenei di altezza infinitesima, il cui momento d'inerzia è  $dI_z = \frac{1}{2}R^2 dm$ . Il momento d'inerzia dell'intero cilindro è la somma di tutti i singoli momenti infinitesimi, quindi

$$I_z = \int \frac{1}{2}R^2 dm = \frac{1}{2}R^2 \int dm = \frac{1}{2}MR^2$$

Infine, consideriamo una lastra omogenea e scomponiamola in tante piccole aste di massa infinitesima, il cui momento d'inerzia è  $dI_z = \frac{1}{3}L^2 dm$ . Il momento d'inerzia della lastra corrisponde alla somma di tutti questi momenti infinitesimi, quindi

$$I_z = \int \frac{1}{3}L^2 dm = \frac{1}{3}L^2 \int dm = \frac{1}{3}ML^2$$

## 5.6 Grandezze dinamiche globali per i moti di rotazione

Anche per i corpi rigidi in rotazione è possibile determinare il lavoro compiuto da una forza, la loro energia cinetica e la potenza sviluppata.

Sappiamo che la forza agente è  $\mathbf{F} = F_z \hat{z} + \mathbf{F}_{xy}$ , mentre il raggio che congiunge asse e forza è  $\mathbf{r} = h\hat{z} + \mathbf{R}$ . Poiché la stessa forza agisce su ogni punto del corpo rigido, il raggio che unisce asse a ogni singolo punto è  $d\mathbf{r} = d(h\hat{z}) + d\mathbf{R} = d\mathbf{R}$ . Il lavoro compiuto dalla forza sul singolo punto è pari a

$$\begin{aligned} dW &= \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = (F_z \hat{z} + \mathbf{F}_{xy}) \cdot d\mathbf{R} = \\ &= F_z \cdot d\mathbf{R} + \mathbf{F}_{xy} \cdot d\mathbf{R} = |\mathbf{F}_{xy}| \sin \beta |d\mathbf{R}| = \\ &= |\mathbf{F}_{xy}| |\mathbf{R}| \sin \beta d\theta = |\mathbf{M}_z| d\theta \end{aligned}$$

Il lavoro compiuto da una forza su un corpo in rotazione corrisponde, quindi, a

$$W_{AB} = \int_{\theta_A}^{\theta_B} |\mathbf{M}_z| d\theta \stackrel{\mathbf{M}_z \text{ fisso}}{=} |\mathbf{M}_z| \int_{\theta_A}^{\theta_B} d\theta = |\mathbf{M}_z| (\theta_B - \theta_A) \quad (5.17)$$

Poiché ogni singolo punto del corpo rigido si muove con una velocità  $v_i = R_i \omega$ , sappiamo che possiede un valore di energia cinetica pari a  $E_{C_i} = \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} m_i (R_i \omega)^2$ .

L'energia cinetica posseduta da un corpo rigido nel suo moto di rotazione è

$$E_C = \sum_i E_{C_i} = \sum_i \frac{1}{2} m_i (R_i \omega)^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_i m_i R_i^2 = \frac{1}{2} I_z \omega^2 \quad (5.18)$$

Possiamo quindi definire una versione del **teorema dell'energia cinetica**.

$$\begin{aligned} W_{AB} &= \int_{\theta_A}^{\theta_B} |\mathbf{M}_z| d\theta = \int_{\theta_A}^{\theta_B} I_z |\ddot{\alpha}| d\theta = I_z \int_{\theta_A}^{\theta_B} \frac{d|\ddot{\omega}|}{dt} |\ddot{\omega}| dt = \\ &= I_z \int_{\omega_A}^{\omega_B} |\ddot{\omega}| d\ddot{\omega} = \frac{1}{2} I_z (\omega_B^2 - \omega_A^2) = E_C(B) - E_C(A) \end{aligned} \quad (5.19)$$

Sempre seguendo il parallelo tra punti materiali e corpi rigidi, possiamo definire la **potenza istantanea sviluppata da una forza su un corpo rigido** come

$$P = \frac{dW}{dt} = |\mathbf{M}_z| \frac{d\theta}{dt} = |\mathbf{M}_z| \omega \quad (5.20)$$

## 5.7 Pendolo composto

Vediamo, infine, un esempio di corpo rigido particolare.

Se consideriamo un corpo rigido capace di oscillare, solo grazie all'azione della forza peso, in un piano verticale attorno ad un asse orizzontale non passante per il centro di massa, noteremo che si comporterà come un pendolo semplice. In questo caso, assegneremo nome di **pendolo composto** a questo corpo rigido (Figura 5.4).

Quando spostiamo il pendolo composto dalla posizione di equilibrio statico (ovvero quello per cui il centro di massa si trova sulla retta verticale che interseca l'asse di rotazione perpendicolarmente), la forza peso agisce in modo tale da riportare il corpo nella posizione di equilibrio. Il momento della forza peso (momento di richiamo) è parallelo all'asse di rotazione e vale  $|\mathbf{M}| = -m|g|l \sin \theta$ .

Se sul corpo non agiscono altre forze, non esisteranno altri momenti, pertanto l'equazione del moto è

$$\begin{aligned} -m|g|l \sin \theta &= I_z \frac{d^2 \theta}{dt^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{mgl}{I_z} \sin \theta &= 0 \end{aligned} \quad (5.21)$$

dove  $I_z$  rappresenta il momento di inerzia del corpo rispetto all'asse di rotazione.

Se consideriamo oscillazioni di ampiezza molto piccola, otteniamo

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{mgl}{I_z} \theta = 0$$

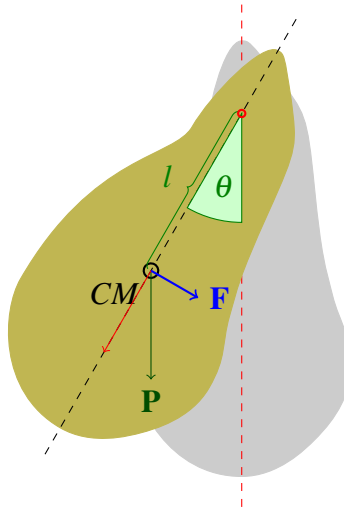


Figura 5.4: Pendolo composto

che corrisponde all'equazione di un *moto armonico*, la cui legge oraria risulta essere  $\theta(t) = \theta_0 \sin(\Omega t + \varphi)$ . La pulsazione  $\Omega$  del moto corrisponde a  $\sqrt{\frac{mgl}{I_z}}$ , mentre il periodo vale  $T = 2\pi\sqrt{I_z/mgl}$ .

Infine, un pendolo semplice che voglia oscillare avendo la stessa pulsazione di un pendolo composto deve avere un filo lungo  $l' = \frac{I_z}{ml}$ ; questa lunghezza prende il nome di *lunghezza ridotta del pendolo composto*.

# Capitolo 6

## Statica

Un problema importante in Fisica è la determinazione delle condizioni di *equilibrio*. La parte della Fisica che studia queste condizioni prende il nome di **statica**

**Definizione 6.1** (Equilibrio statico). Un corpo si dice in **equilibrio statico** quando è in quiete e rimane in quiete al passare del tempo.

Determinare le condizioni di equilibrio di un oggetto è un problema che può essere molto complesso.

Pensiamo a un grattacielo o a un ponte. Ogni piccolo volume di materia di cui è costituito il corpo deve continuare a restare in equilibrio anche in condizioni difficili, come per esempio un terremoto per il grattacielo o le continue sollecitazioni del traffico per un ponte.

In questo capitolo vedremo due casi di equilibrio statico. Il più semplice riguarda il punto materiale che, come abbiamo detto, è un oggetto così piccolo tale da poter essere equiparato a un punto. Successivamente, analizzeremo le condizioni di equilibrio statico per un corpo rigido.

### 6.1 Equilibrio statico di un punto materiale

Un punto materiale può spostarsi nello spazio, ma non può ruotare su se stesso, dal momento che non ha dimensioni.

Condizione necessaria affinché un punto materiale sia in equilibrio è che la somma di tutte le forze che gli sono applicate sia uguale al vettore nullo.

$$\sum_i \mathbf{F}_i = 0 \quad (6.1)$$

Questa affermazione è del tutto equivalente al criterio usato per riconoscere la presenza o l'assenza di forze agenti su un punto.

Infatti, se sul punto materiale non è applicata alcuna forza, va da sé che la forza totale è nulla. Se invece subisce due forze, esse devono controbilanciarsi perché vi sia equilibrio.

Un caso di due forze che si controbilanciano è quello del tiro alla fune, quando le due squadre esercitano trazioni eguali. Possiamo considerare, in questo caso, come punto materiale il fazzoletto annodato nel punto di mezzo della fune.

## 6.2 Equilibrio statico di un corpo rigido

Per quanto riguarda un corpo rigido, la condizione indicata nell'Equazione (6.1) non è sufficiente ad assicurare l'equilibrio.

Supponiamo che su un corpo rigido agisca una coppia di forze complanare. La somma di queste forze è pari al vettore nullo, ma il corpo tenderà a ruotare, avendo un momento  $\mathbf{M}$  pari a  $\mathbf{F} \times \mathbf{r} = \mathbf{F}' \times \mathbf{r}$ , dove  $\mathbf{r}$  è il vettore che rappresenta la distanza tra le rette di applicazione tra le due forze.

Nel caso in cui, inoltre, il corpo fosse vincolato e potesse solamente ruotare, l'applicazione di una o più forze provocherà un moto di rotazione.

In sostanza, condizione necessaria affinché un corpo rigido sia in equilibrio è che la somma di tutte le forze che gli sono applicate sia uguale al vettore nullo e la somma di tutti i momenti delle forze sia uguale al vettore nullo.

$$\left\{ \sum_i \mathbf{F}_i = 0 \quad \sum_i \mathbf{M}_i = 0 \right.$$

In questo modo, siamo sicuri che il centro di massa stia in equilibrio statico e che il corpo non ruoti.

Inoltre, visto che le forze agenti sul corpo sono nulle, il momento della forza è indipendente dal polo rispetto cui lo si sta calcolando.

Per essere più precisi, poiché in un corpo rigido non vi sono né forze interni né momenti relativi, la condizione di equilibrio è rappresentabile tramite

$$\left\{ \sum_i \mathbf{F}_i^{(E)} = 0 \quad \sum_i \mathbf{M}_i^{(E)} = 0 \right. \quad (6.2)$$

## 6.3 Tipologie di equilibrio

Il tipo di equilibrio in cui si trova un corpo si determina considerando il valore assunto dall'energia potenziale del centro di massa in corrispondenza di piccoli spostamenti dalla posizione di origine.

Sono perciò distinguibili tre tipi di equilibrio:

- l'**equilibrio stabile**, se il corpo, spostato leggermente dalla posizione in cui le forze sono nulle (*posizione di equilibrio*), tende a riportarsi in questa posizione;
- l'**equilibrio instabile**, se il corpo, spostato leggermente dalla posizione di equilibrio, tende ad allontanarsene;
- l'**equilibrio indifferente**, se il corpo, spostato leggermente dalla posizione di equilibrio, tende a mantenere la nuova posizione.

Definendo la forza come l'antiderivata dell'energia potenziale rispetto alla posizione, possiamo determinare le posizioni di equilibrio stabile e instabile sui grafici *forza-posizione* e *energia potenziale-posizione*.

Nel grafico forza-posizione, i punti di equilibrio sono i punti in cui la curva si annulla; per un punto di equilibrio stabile, la funzione forza è decrescente nell'intorno del punto, mentre per un punto di equilibrio instabile il grafico della funzione forza è crescente nell'intorno del punto. Nel grafico energia potenziale-posizione, un punto di equilibrio stabile è un punto di minimo relativo della funzione, mentre un punto di equilibrio instabile è un punto di massimo relativo della funzione.



# Capitolo 7

## Fluidostatica

Finora abbiamo parlato di corpi fermi o in movimento (sassi che cadono, automobili, ecc...), dando per scontato che fossero oggetti *solidi*. Per quanto riguarda i **fluidi** (*liquidi* e *aeriformi*) è necessaria una trattazione meccanica diversa, in quanto essi non hanno una forma propria e soprattutto perché l'azione di una forza non è visibile in un solo punto, ma su una intera superficie.

Ma perché i fluidi necessitano una trattazione diversa?

Osservando la materia che ci circonda a livello *macroscopico* (cioè a dimensioni confrontabili con quelle degli oggetti che fanno parte dell'esperienza quotidiana) è possibile, infatti, distinguere tra solidi, liquidi e aeriformi.

Un **solido** può essere afferrato o spostato come un oggetto unico. Esso è rigido, cioè ha forma e volume propri e, se non cambiano troppo le condizioni dell'ambiente circostante, conserva forma e volume nel tempo. Dividere in parti un solido, generalmente, richiede forze apprezzabili.

Un **liquido**, invece, non ha una forma propria, può essere raccolto in un recipiente e tende ad assumere la forma della parte di contenitore che occupa; se non c'è recipiente, si spande su un'ampia superficie. Solo piccole quantità, le *gocce*, mostrano la tendenza a prendere una forma all'incirca sferica, in base a un fenomeno noto come *tensione superficiale*. Un liquido ha volume proprio ed è assai difficile comprimerlo in un volume più piccolo.

Anche un **aeriforme** (*gas* o *vapore*) non ha forma propria, ma occupa tutto il volume del recipiente che lo contiene; al contrario dei liquidi, un aeriforme può essere compresso facilmente in un volume più piccolo di quello iniziale.

In questo capitolo analizzeremo brevemente le proprietà dei fluidi in quiete.

### 7.1 La pressione

Immaginiamo di prendere un baule e di metterlo sul pavimento, in modo che la base su cui appoggia sia quella di area più grande. Il suo peso è distribuito su tutta la superficie di appoggio.

Se voltiamo il baule, mettendolo in piedi su una delle basi più piccole, il suo peso si distribuisce su una superficie minore. Esso è, per così dire, più concentrato.

La grandezza che dà informazione su quanto una forza è concentrata su una superficie è la *pressione*.

**Definizione 7.1** (Pressione). La **pressione**  $p$  in un punto di un fluido in equilibrio viene definita come il rapporto tra la forza agente su una superficie infinitesima che circonda il punto e l'area della superficie stessa.

$$p = \frac{d|\mathbf{F}|}{dS} = \frac{|\mathbf{F}|}{S} \quad (7.1)$$

La pressione risulta essere perpendicolare alla superficie e non dipendente dalla direzione della forza, per cui si considera come funzione scalare del punto; la seconda espressione vale per una superficie finita se nei punti di questa la pressione sia costante.

Nel Sistema Internazionale, poiché la pressione è definita come rapporto tra forza e superficie, la sua unità di misura è il *newton su metro quadrato*, che prende il nome di **pascal** ( $\text{Pa} = \text{N/m}^2$ ). Un multiplo del pascal che si usa spesso in meteorologia, anche se non fa parte del Sistema Internazionale, è il **bar** ( $1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$ ).

## Lavoro della pressione

Quando un fluido si trova in equilibrio statico, non vi sono spostamenti, quindi il lavoro è nullo. È però possibile che, sotto l'azione delle forze di pressione vi sia uno spostamento e quindi un lavoro associato.

Consideriamo quindi una forza esterna  $|\mathbf{F}| = pS$  che agisce ortogonalmente ad una superficie  $S$  che, a seguito di ciò, si sposta in maniera concorde alla forza di una quantità  $dh$ . Il lavoro infinitesimo vale  $dW = |\mathbf{F}|dh = pSdh = pdV$ , dove  $dV = Sdh$  è il volume infinitesimo coperto dalla superficie  $S$  nello spostamento  $dh$ . Integrando sulla variazione complessiva di volume da  $V_1$  a  $V_2$  si ottiene

$$W = \int_{V_1}^{V_2} p(V) dV \quad (7.2)$$

## La pressione atmosferica

Vista dall'esterno, l'*atmosfera* che circonda la Terra assomiglia a un oceano d'aria, sul fondo del quale viviamo noi. Così come un pesce è sottoposto alla pressione dell'acqua che ha sopra di sé, anche noi subiamo la pressione dell'aria che ci sovrasta.

L'aria, come tutti gli altri corpi, è attratta dalla forza di gravità e, quindi, ha un peso; se non lo avesse, sarebbe soggetta soltanto alla tendenza ad espandersi che hanno tutti i gas, e fuggirebbe dalla Terra disperdendosi nello spazio. A causa del suo peso, l'atmosfera esercita una pressione, nota come **pressione atmosferica**, su tutti gli oggetti che vi sono immersi; non ci rendiamo conto di questa pressione perché, in base alla *legge di Pascal*, si esercita con la stessa intensità su tutte le superfici.

## 7.2 Legge di Pascal

Consideriamo un recipiente pieno di liquido (anche se andrebbe bene un generico fluido), avente un lungo collo nel quale scorre un pistone a tenuta perfetta. Se applichiamo una forza al pistone, spingendolo con una mano, esso esercita una forza sul liquido; si produce, così, un aumento di pressione, che genera una forza perpendicolare alla parete

del recipiente. Per rendersene conto, basta forare la parete in un punto qualsiasi: il liquido zampilla uscendo in direzione perpendicolare alla superficie che lo contiene e schizza fuori con una velocità che aumenta all'aumentare della forza esercitata sul pistone.

Se mettiamo un palloncino pieno di aria all'interno di un recipiente con un pistone, lo vediamo rimpicciolirsi per effetto della pressione esercitata dal pistone. Poiché il palloncino conserva sempre la forma sferica, vuol dire che subisce dappertutto la stessa pressione e che questa grandezza è, in ogni punto, perpendicolare alla superficie.

Tutto viene descritto nella *legge di Pascal*.

**Definizione 7.2** (Legge di Pascal). La pressione esercitata su una superficie qualsiasi di un liquido si trasmette con la stessa intensità su ogni altra superficie a contatto con il liquido, indipendentemente da come questa è orientata.

Questa proprietà viene usata in diverse tecnologie per amplificare le forze o per trasmetterle da un punto a un altro.

Uno di questi dispositivi è il *torchio idraulico*, costituito da due cilindri di sezioni molto diverse nei quali scorrono a tenuta due pistoni; i due cilindri sono uniti alla base da un tubo di comunicazione. Il dispositivo consente di equilibrare una forza molto intensa applicandone una piccola.

## La variazione della pressione atmosferica

La pressione atmosferica diminuisce con l'aumentare dell'altitudine; ciò è dovuto al fatto che il peso dell'aria sugli strati elevati dell'atmosfera è minore rispetto a quello che grava sugli strati più profondi.

La misura della pressione atmosferica consente di calcolare approssimativamente l'altezza di un luogo rispetto al livello del mare; inoltre, la pressione cambia anche a seconda delle condizioni meteorologiche. Le carte geografiche che si vedono alla televisione durante le previsioni del tempo contengono linee, denominate **isobare**, che congiungono i punti che hanno la stessa pressione.

Più in generale, la pressione di un fluido sottoposto alla forza peso si può esprimere anche in funzione della sola coordinata verticale, nel seguente modo:

$$p(z_2) = p(z_1) - \rho g(z_2 - z_1)$$

Un piano orizzontale immerso nel fluido, di equazione  $z = \text{costante}$ , il valore della pressione è costante; tale piano prende il nome di **superficie isobarica**.

## Vasi comunicanti

Consideriamo un sistema di recipienti in comunicazione tra loro, riempiti dello stesso liquido e aperto nello stesso ambiente. Il liquido nei vari recipienti assume lo stesso livello rispetto al suolo, ovvero le superfici libere appartengono tutte allo stesso piano isobarico. Questo risultato esprime il *principio dei vasi comunicanti*, facilmente ricavabile dalla *legge di Stevino*.

### 7.3 Legge di Stevino

Finora abbiamo considerato il caso in cui i liquidi sono sottoposti soltanto alle pressioni esercitate da un pistone. In realtà, però, ogni liquido sulla superficie terrestre è soggetto alla forza peso. Studiamo quindi il comportamento dei liquidi sotto la sola azione della forza peso. Dobbiamo considerare che, in condizioni di equilibrio, *la superficie libera di un liquido pesante deve essere piana e orizzontale*.

Uno strato orizzontale di liquido, che si trova a profondità  $h$ , subisce una determinata pressione dovuta al peso del liquido che gli sta sopra.

Per capire da cosa dipende questa pressione, consideriamo un liquido di densità  $\rho$ , contenuto in un recipiente cilindrico di sezione  $S$ . Sulla superficie, oltre alla pressione atmosferica, agisce una pressione aggiuntiva causata dal peso della colonna di liquido, di volume  $Sh$  e massa  $m = \rho Sh$ . Moltiplicando la massa per l'accelerazione di gravità otteniamo il peso  $G = \rho Shg$  della colonna di liquido. La pressione aggiuntiva  $\Delta p$  che la colonna di liquido esercita sulla superficie è  $\Delta p = \frac{G}{S} = \frac{\rho Shg}{S} = \rho gh$ .

**Definizione 7.3** (Legge di Stevino). La differenza di pressione tra i punti sulla superficie e quelli a profondità  $h$  è direttamente proporzionale alla profondità, alla densità del liquido e all'accelerazione di gravità.

$$p(h) = p_0 + \rho gh \quad (7.3)$$

### 7.4 Principio di Archimede

In un fluido in equilibrio, sotto l'azione della gravità, isoliamo idealmente un volume finito  $V_0$ , di forma qualsiasi. La risultante delle forze di pressione, esercitate dal resto del fluido sulla parte isolata, è uguale e opposta alla forza peso della stessa. Infatti, per la condizione di equilibrio del volume, si ha che  $\mathbf{F}_p = -m\mathbf{g}$ , dove  $m$  è la massa di fluido contenuta nel volume ( $m = \rho V_0$ ).

Se ora sostituiamo al volume  $V_0$  un identico volume di qualsiasi altra sostanza, con massa  $m' = \rho' V_0$ , la risultante  $\mathbf{F}_p$  delle forze di pressione esercitate dal fluido circostante rimane la stessa, mentre varia la forza peso del volume preso in considerazione; pertanto non sussiste più una condizione di equilibrio e la forza risultante agente su  $V_0$  vale  $(\rho' - \rho)V_0\mathbf{g}$ . Se  $\rho' > \rho$  la forza risultante ha la stessa direzione e verso di  $\mathbf{g}$  e quindi il corpo scende nel fluido; se invece  $\rho' < \rho$  il corpo sale.

Le considerazioni precedenti rimangono valide anche se una parte del corpo è immersa. In generale, possiamo enunciare il cosiddetto **principio di Archimede**, che è alla base dello studio dell'equilibrio dei corpi sommersi o galleggianti, quali sottomarini, navi, paloni sonda.

Anche il fatto che i liquidi meno densi dell'acqua galleggiano mentre quelli più densi vanno a fondo è una conseguenza del principio di Archimede.

**Definizione 7.4** (Principio di Archimede). Un corpo immerso in un fluido riceve una spinta verso l'alto pari al peso del volume di fluido che viene occupato dal volume di corpo immerso, esprimibile come

$$\mathbf{F}_A = -\rho V_0 \mathbf{g} \quad (7.4)$$

dove  $\rho$  è la densità del fluido e  $V_0$  il volume della parte immersa.



# Capitolo 8

## Fluidodinamica

Se, nel capitolo precedente, ci siamo occupati della statica dei fluidi, in questo capitolo ci occupiamo della loro dinamica, ovvero delle proprietà che hanno i fluidi quando sono in movimento.

Per descrivere il moto di un fluido in un condotto, infatti, non è più sufficiente conoscere la posizione del centro di massa e la sua velocità in un certo istante; sarebbe necessario trattare il moto delle singole molecole che lo compongono, ma ciò è difficilmente realizzabile. Si può, però, trattare con buona approssimazione il moto di un fluido conoscendo alcuni parametri che lo possono caratterizzare, come

- la *stazionarietà*,
- la *vorticosità*,
- l'*incomprimibilità*,
- la *viscosità*.

### 8.1 L'attrito nei fluidi e la viscosità

Quando un corpo (rigido o un punto materiale) si muove all'interno di un fluido, subisce due forze: la prima è la forza peso, la seconda è una particolare forza di attrito, nota come *forza di attrito viscoso* (Figura 8.1).

**Definizione 8.1** (Forza di attrito viscoso). Si definisce **forza di attrito viscoso** quella forza che si oppone al moto di un corpo in un fluido. La sua intensità è proporzionale alla velocità del corpo.

$$\mathbf{F}_{a,v} = -b\mathbf{v} \quad (8.1)$$

Applicando il secondo principio della dinamica abbiamo

$$mg - b\mathbf{v} = m\mathbf{a} \Rightarrow \mathbf{a} = \mathbf{g} - \frac{b}{m}\mathbf{v}$$

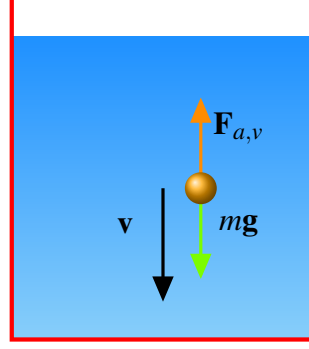


Figura 8.1: Forza di attrito viscoso

Se poniamo  $\tau = \frac{m}{b}$ , con  $[\tau] = 1/s$ , abbiamo

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a} &= \mathbf{g} - \frac{\mathbf{v}}{\tau} \Rightarrow \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{g} - \frac{\mathbf{v}}{\tau} \Rightarrow \\
 \Rightarrow \frac{d\mathbf{v}}{\mathbf{g} - \frac{\mathbf{v}}{\tau}} &= dt \Rightarrow \int_{v_0}^{v(t)} \frac{1}{\mathbf{g} - \frac{\mathbf{v}}{\tau}} d\mathbf{v} = \int_0^t dt \Rightarrow \\
 \Rightarrow -\tau \ln \left( \mathbf{g} - \frac{\mathbf{v}}{\tau} \right) \Big|_{v_0}^{v(t)} &= t \Rightarrow -\tau \left[ \ln \left( \mathbf{g} - \frac{\mathbf{v}(t)}{\tau} \right) - \ln \left( \mathbf{g} - \frac{v_0}{\tau} \right) \right] = t \Rightarrow \\
 \Rightarrow -\tau \ln \left( \frac{\mathbf{g} - \frac{\mathbf{v}(t)}{\tau}}{\mathbf{g} - \frac{v_0}{\tau}} \right) &= t \Rightarrow \ln \left( \frac{\mathbf{g} - \frac{\mathbf{v}(t)}{\tau}}{\mathbf{g} - \frac{v_0}{\tau}} \right) = -\frac{t}{\tau} \Rightarrow \\
 \Rightarrow \frac{\mathbf{g} - \frac{\mathbf{v}(t)}{\tau}}{\mathbf{g} - \frac{v_0}{\tau}} &= e^{-\frac{t}{\tau}} \Rightarrow \mathbf{g} - \frac{\mathbf{v}(t)}{\tau} = \left( \mathbf{g} - \frac{v_0}{\tau} \right) e^{-\frac{t}{\tau}} \Rightarrow \\
 \Rightarrow \tau \mathbf{g} - \mathbf{v}(t) &= (\tau \mathbf{g} - v_0) e^{-\frac{t}{\tau}} \Rightarrow \mathbf{v}(t) = \tau \mathbf{g} - (\tau \mathbf{g} - v_0) e^{-\frac{t}{\tau}}
 \end{aligned}$$

Se il corpo non ha alcuna velocità iniziale, la velocità del moto è pari a  $\mathbf{v}(t) = \tau \mathbf{g} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$ .

Per valori temporali molto maggiori di  $\tau$ , si ha che la velocità tenda al valore  $\tau |\mathbf{g}|$ .

In pratica, la velocità del corpo aumenta, quindi anche il valore della forza di attrito viscoso aumenta, fino a diventare pari alla forza peso, rendendo così il moto uniforme. a velocità raggiunta in questo caso è  $|\mathbf{v}_{lim}| = \tau |\mathbf{g}| = m \frac{g}{b}$ .

Quando si verifica una condizione di scorrimento relativo tra due elementi di fluido, compare, lungo l'area di contatto, una forza tangenziale di attrito, detta **forza di attrito interno**, con verso sempre contrario a quello della velocità relativa.

Il primo elemento del fluido esercita una forza sul secondo elemento e viceversa; le due forze sono uguali e contrarie. Se la velocità  $v_1$  del primo elemento è maggiore di quella  $v_2$  del secondo elemento, la forza di attrito interno è ritardante per il primo e accelerante per il secondo. Si trova sperimentalmente che il modulo della forza di attrito interno si può esprimere come

$$|\mathbf{F}| = \eta S \frac{\Delta v}{\Delta h} \quad (8.2)$$

dove  $S$  rappresenta l'area di contatto e  $\Delta v$  la differenza di velocità tra i due elementi distanti  $\Delta h$ .



Il coefficiente  $\eta$  è la **viscosità del fluido** e dipende dal tipo di fluido e dalla temperatura. Nei liquidi  $\eta$  decresce all'aumentare della temperatura, nei gas cresce. Nel Sistema Internazionale, l'unità di misura della viscosità è  $\text{kg} \cdot \text{s}/\text{m} = \text{Pa} \cdot \text{s}$ , però nella pratica si usa l'unità **poise** (P,  $1\text{P} = 10^{-1} \text{Pa} \cdot \text{s}$ ).

Consideriamo quindi il caso in cui l'attrito sia nullo e definiamo **fluido ideale** un fluido in cui  $\eta = 0$  e  $\rho = \text{costante}$ , cioè un fluido non viscoso e incompressibile.

## 8.2 La portata di un liquido

Un fluido in movimento genera una *corrente*, ovvero è possibile notare un movimento ordinato delle particelle del fluido all'interno della condotta in cui si muove.

Per analizzare questo moto, immaginiamo di suddividerlo in un numero enorme di volumetti  $dV$  così piccoli da poter essere considerati come punti materiali. Associamo a ciascun volumetto un corrispondente vettore velocità. Se seguiamo uno di questi volumetti nel suo moto, possiamo disegnare la sua traiettoria, che è tangente al vettore velocità; tutte le linee di corrente che passano per una generica sezione  $S$  individuano un **tubo di flusso** (Figura 8.2).

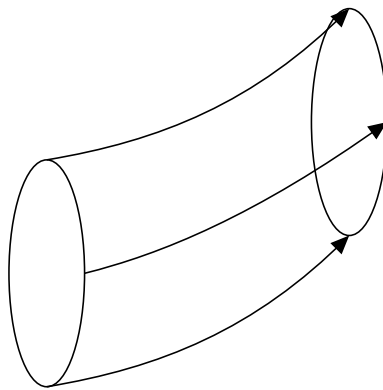


Figura 8.2: Tubo di flusso

Per descrivere in modo quantitativo l'intensità della corrente che fluisce in una condotta dobbiamo introdurre una nuova grandezza: la *portata* della corrente.

**Definizione 8.2** (Portata di un tubo di flusso di un fluido). Consideriamo un tubo di flusso di sezione infinitesima  $dS$ , ortogonale alla traiettoria di ogni singolo volumetto (*linea di corrente*); il volume di fluido  $dV$  che attraversa  $dS$  nell'istante  $dt$  è quello contenuto in un prisma di base  $dS$  e altezza  $vdt$  ( $dV = dSvdt$ ). Il volume di fluido che passa attraverso  $dS$  nell'unità di tempo prende il nome di **portata** del tubo di flusso.

$$dq = \frac{dV}{dt} = v dS \quad (8.3)$$

Nel Sistema Internazionale, la portata si misura in  $\text{m}^3/\text{s}$ .

In generale, la portata di un fluido in un punto di una condotta varia nel tempo. Quando, invece, la portata in ogni punto della condotta rimane costante, si dice che

la corrente di fluido è **stazionaria**. Stazionario non significa fermo e nemmeno statico; la parola indica un movimento che avviene con regolarità e rimane sempre lo stesso nel tempo. È possibile notare che, in regime stazionario, per un punto passa una sola linea di corrente, per cui le linee di corrente non si incontrano mai.

Consideriamo ora una condotta la cui sezione è variabile e analizziamo la portata in due sezioni di questa condotta,  $A$  e  $B$ . Il fluido si muoverà, attraversando la sezione  $S_A$ , con velocità  $v_A$ , mentre si muoverà, attraversando la sezione  $S_B$ , con velocità  $v_B$ . In un intervallo di tempo  $\Delta t$  scorre attraverso la condotta una porzione di fluido di lunghezza  $l_A$  nella zona  $A$ ; per fare posto a questo fluido, deve scorrere anche un altro tratto di fluido di lunghezza  $l_B$  nella zona  $B$ . I volumi di queste due porzioni di liquido devono essere uguali, quindi vale l'equazione  $S_A l_A = S_B l_B$ ; le lunghezze  $l_A$  e  $l_B$  sono eguali alla distanza percorsa dai volumetti di fluido posti nelle due zone nello stesso intervallo di tempo ( $l_A = v_A \Delta t$ ,  $l_B = v_B \Delta t$ ), quindi  $S_A v_A \Delta t = S_B v_B \Delta t$ . Semplifichiamo otteniamo la cosiddetta **equazione di continuità**

$$S_A v_A = S_B v_B \quad (8.4)$$

che ci porta a dire che, dove la sezione del condotto diminuisce, la velocità del fluido aumenta, mentre la velocità diminuisce dove la sezione del condotto aumenta.

### 8.3 L'equazione di Bernoulli

Ricaviamo ora la proprietà fondamentale della dinamica dei fluidi ideali, nota come *teorema di Bernoulli*.

Consideriamo un fluido ideale che scorre in condizioni di regime stazionario dentro un condotto a sezioni variabili. Un volume di fluido, compreso tra le sezioni  $S_1$  e  $S_2$  si sposta tra le sezioni  $S'_1$  e  $S'_2$ : sia  $\mathbf{s}_1$  lo spostamento da  $S_1$  a  $S'_1$  e  $\mathbf{s}_2$  lo spostamento da  $S_2$  a  $S'_2$ . Se il fluido è incompressibile, il volume  $\Delta V_1 = S_1 |\mathbf{s}_1|$  che attraversa la sezione  $S_1$  nel tempo  $\Delta t$  è uguale a quello  $\Delta V_2 = S_2 |\mathbf{s}_2|$  che attraversa nello stesso intervallo di tempo la sezione  $S_2$ .

Vogliamo ricavare la relazione tra velocità e pressione del fluido nelle varie sezioni del condotto. A tal fine, utilizziamo il teorema dell'energia cinetica.

Le forze agenti sul volume di fluido sono la forza peso e le forze di pressione, mentre non ci sono forze di attrito. Complessivamente, il movimento del volume di fluido equivale a spostare nel volume  $\Delta V_2$  la massa contenuta nel volume  $\Delta V_1$ ; l'energia potenziale del fluido compreso tra  $S'_1$  e  $S_2$  rimane invariata, anche se, nel tempo, gli elementi fluidi che lo compongono sono cambiati. Il lavoro della forza peso è quindi dato da  $W = -\Delta U = -mg(z_2 - z_1) = -\rho \Delta V g(z_2 - z_1)$ , dove  $z_1$  e  $z_2$  sono le quote dei due volumi di massa  $m$ .

Le forze di pressione dovute alle pareti del condotto danno lavoro nullo in quanto ortogonali allo spostamento, mentre il lavoro di quelle dovute agli elementi a monte di  $S_1$  e a valle di  $S_2$  è dato da  $W_p = \mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{s}_1 + \mathbf{F}_2 \cdot \mathbf{s}_2 = p_1 S_1 s_1 - p_2 S_2 s_2 = (p_1 - p_2) \Delta V$ . Il calcolo della variazione di energia cinetica, seguendo il ragionamento utilizzato per l'energia potenziale, fornisce  $\Delta E_C = \frac{1}{2} \rho \Delta V (v_2^2 - v_1^2)$ . Pertanto

$$= -\rho \Delta V g(z_2 - z_1) + (p_1 - p_2) \Delta V = \frac{1}{2} \rho \Delta V (v_2^2 - v_1^2)$$

e separando i termini relativi alle sezioni  $S_1$  e  $S_2$

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g z_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g z_2$$

ovvero

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z = \text{costante} \quad (8.5)$$

L'Equazione (8.5), valida per qualsiasi sezione  $S$  esprime il *teorema di Bernoulli*.

**Definizione 8.3** (Teorema di Bernoulli). In un fluido ideale in moto con regime stazionario, la somma della pressione, dell'energia cinetica per unità di volume e dell'energia potenziale per unità di volume è costante lungo il condotto, ovvero lungo un qualsiasi tubo di flusso.

## L'effetto Venturi

È molto interessante vedere cosa prevede il teorema di Bernoulli quando si può trascurare la variazione di quota subita dal fluido nel suo moto. In questo caso, i termini  $\rho g z_1$  e  $\rho g z_2$  sono uguali tra loro e possono essere eliminati.

Abbiamo così

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

Il significato di questa espressione è molto semplice: in una zona di un condotto dove la velocità del fluido aumenta, la pressione del fluido deve diminuire, in modo che la quantità  $p + \frac{1}{2}\rho v^2$  possa rimanere costante. Questa proprietà prende il nome di **effetto Venturi**.

Questo fenomeno trova applicazione in molti oggetti di uso quotidiano grazie a un semplice dispositivo: il *tubo di Venturi*.

Il dispositivo è un condotto orizzontale a sezione variabile e viene utilizzato per misure di velocità e di portata, inserendolo nella condotta in cui scorre il fluido.

## La portanza e il tubo di Pitot

Uno degli aspetti tecnologici più affascinanti del moto di un corpo in un fluido è il fatto che le ali di un aereo sono capaci di sostenere in volo l'aereo stesso. Per capire questo fenomeno, possiamo usare il teorema di Bernoulli.

Consideriamo un'ala ferma e due volumetti di aria,  $A$  e  $B$  che vengono separati dall'ala; il primo passa al di sotto di essa, mentre il secondo passa al di sopra di essa, per poi ricongiungersi. In base alla forma tipica di un'ala,  $A$  percorre una traiettoria praticamente rettilinea, mentre  $B$  deve descrivere un percorso curvo e quindi più lungo.

Dal momento che, per i due spostamenti, viene impiegato lo stesso tempo, dobbiamo ammettere che la velocità dell'aria al di sopra dell'ala sia maggiore di quella dell'aria al di sotto. Ma allora, la pressione che preme sulla faccia inferiore dell'ala è maggiore di quella che si esercita sulla faccia superiore: questa differenza di pressione genera parte della forza, denominata **portanza**, che sostiene l'aereo in volo.

Ma come si misura la velocità di un aereo in volo?

Se un ostacolo viene posto in una corrente fluida, le linee di corrente si aprono, ma nel punto  $O$  di ostacolo il fluido è in quiete rispetto all'ostacolo. Considerando due sezioni a

sufficiente distanza dall'ostacolo  $A$  e  $B$ , è possibile notare che la pressione e la velocità del fluido sono le stesse, per cui abbiamo

$$p_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 = p_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2 = p_O$$

Pratichiamo ora due piccoli fori nell'ostacolo, denominato **tubo di Pitot**, nei punti  $O$  e  $B$ , per misurare in quelle posizioni le pressioni del fluido: dalla loro differenza si calcola la velocità del fluido relativa al tubo.

## 8.4 I vortici e il moto vorticoso

Nello studio della meccanica dei fluidi, abbiamo visto le proprietà principali applicando le leggi generali della meccanica dei sistemi di punti, sia nel caso di equilibrio statico che di moto. D'altra parte, la natura continua dei fluidi e la loro caratteristica di non avere forma propria hanno indirizzato la nostra analisi verso una visione complessiva del moto, piuttosto che su ogni singolo elemento.

Il quadro generale che deriva dalla meccanica dei sistemi dei punti, però, rimane valido e pertanto anche nel moto dei fluidi dobbiamo attenderci gli effetti dinamici usuali.

Ad esempio, per realizzare il moto curvilineo deve essere applicata al fluido una forza centripeta, esercitata dal condotto, che subisce a sua volta una reazione. All'interno del fluido, l'azione della forza centripeta  $\mathbf{F}_c$  avviene attraverso una variazione radiale della pressione, che cresce verso l'esterno.

Un altro esempio di effetto dinamico usuale si può notare versando un liquido in un recipiente cilindrico con un foro sul fondo. Quest'azione riesce a imprimere alla massa fluida un **moto vorticoso**, cioè un moto in cui le linee di corrente sono spirali che convergono verso l'asse verticale passante per il foro, mentre la superficie libera si incava a imbuto verso il foro.

Nell'ipotesi di fluido ideale, le uniche forze agenti sono le forze di pressione (radiali) e la forza peso (verticale), che hanno momento angolare nullo rispetto all'asse verticale, per cui nel moto di un elemento di liquido si conserva il momento angolare. La formazione di **vortici** avviene anche nei fluidi reali, ma il fenomeno è complicato dalla presenza delle forze di attrito interno.

## 8.5 Il moto laminare

Consideriamo ora il moto all'interno dei fluidi reali, iniziando in cui la velocità non è elevata.

In tali condizioni, il moto è detto **laminare**, cioè il moto è stazionario, con le linee di corrente costanti nel tempo. Questa situazione si verifica, ad esempio, quando due lastre piane parallele, di area  $S$  e distanti  $h$ , sono separate da uno strato di fluido; facendo scorrere la lastra superiore con una velocità costante  $\mathbf{v}$  tramite una forza  $\mathbf{F}$  tangente alla lastra, si può notare che il fluido che si trova a contatto immediato con la lastra superiore si muove con velocità  $v$ , quello a contatto con la lastra inferiore è fermo, quello intermedio si muove con velocità variabile linearmente da zero a  $v$  con la distanza. È possibile immaginare, quindi, il liquido come diviso in strati, ognuno dei quali si muove con una certa velocità.

Sperimentalmente, si trova che la forza necessaria per mantenere questo moto laminare stazionario è

$$\mathbf{F} = \eta S \frac{\mathbf{v}}{h}$$

la quale, fisicamente, è riconducibile alla forza di attrito interno. Il moto laminare è, quindi, un caso di *equilibrio dinamico*<sup>1</sup>, in cui la forza agente e la forza di attrito sono uguali e opposte.

Un altro esempio di moto laminare si verifica quando un fluido scorre in un condotto. Il fluido a contatto con le pareti del condotto di raggio  $R$ , infatti, non si muove, mentre, avvicinandosi all'asse, la sua velocità aumenta; abbiamo, quindi, strati cilindrici coassiali di fluido che scorrono a velocità diverse.

Considerando un condotto orizzontale, lungo  $l$  e con una differenza di pressione  $p_2 - p_1$  agli estremi, si dimostra che

- il modulo della velocità varia con il raggio  $r$  dello strato cilindrico, secondo la legge

$$v(r) = \frac{p_1 - p_2}{4\eta l} (R^2 - r^2)$$

- la portata del condotto è data dalla *legge di Hagen-Poiseuille*

$$q = \frac{\pi R^4}{8\eta} \frac{p_1 - p_2}{l}$$

- nel regime laminare, la portata, la velocità media e le velocità dei singoli strati cilindrici sono direttamente proporzionali al gradiente di pressione  $\frac{p_1 - p_2}{l}$ .

La legge di Hagen-Poiseuille è sempre valida se il raggio del condotto è molto piccolo; quando il raggio cresce, esiste un valore critico della velocità oltre la quale il moto diventa vorticoso.

I meccanismi che determinano la formazione dei vortici sono legati a notevoli variazioni di velocità ortogonalmente alle linee di corrente. Per un condotto cilindrico, Reynolds ha provato sperimentalmente che si ha la transizione da regime laminare a regime vorticoso quando il parametro adimensionale

$$\mathcal{R} = \frac{\rho v R}{\eta}$$

detto *numero di Reynolds*, ha valore 1200. La *velocità critica* per la transizione è

$$v_c = 1200 \frac{\eta}{\rho R}$$

## 8.6 Il moto in un fluido

Lo studio del moto di un corpo immerso in un fluido è molto importante per ragioni pratiche: tutti i moti sulla Terra, infatti, avvengono dentro un fluido. L'interazione con il

<sup>1</sup>Si parla di equilibrio dinamico quando la somma di forze che agisce sul sistema in esame è nulla, cioè non causa accelerazioni totali risultate, in modo che la velocità del sistema sia costante.

fluido si manifesta attraverso una forza, che si oppone al moto e viene denominata *resistenza del mezzo*, il cui effetto dipende dal moto relativo.

Come esempio, consideriamo una sfera immersa in un fluido in moto. Se il fluido è ideale, si ha completa simmetria delle linee di corrente e quindi la stessa pressione a monte e a valle della sfera, la quale non subisce alcuna spinta e rimane ferma (*paradosso di d'Alembert*). Se, invece, il fluido è reale, si forma una scia vorticoso, facendo diminuire la pressione a valle della sfera, la quale verrà così trascinata dal fluido. A velocità relativamente basse non si formano vortici, però si perde in ogni caso la simmetria delle linee di corrente e compare una spinta sulla sfera.

I parametri che determinano la resistenza del mezzo sono la forma e le dimensioni del corpo in moto nel fluido, in particolare la sezione  $S$ , la densità e la viscosità del fluido e la velocità relativa.

$$|\mathbf{F}_{res}| = \frac{1}{2} c S \rho v^2$$

L'espressione di questa forza contiene anche un coefficiente adimensionale  $c$ , detto *coefficiente di resistenza*, che dipende dalla forma del corpo. In regime vorticoso,  $c$  è costante e  $|\mathbf{F}_{res}|$  è proporzionale a  $v^2$ ; in regime laminare,  $c$  è funzione dell'inverso della velocità e  $|\mathbf{F}_{res}|$  risulta lineare nella velocità.

In particolare, per sfere di raggio  $R$ , con piccola velocità, vale la **legge di Stokes**.

$$\mathbf{F}_{res} = -6\pi\eta R\mathbf{v} \quad (8.6)$$

## 8.7 La tensione superficiale

Il principio dei vasi comunicanti può essere spiegato se si tiene conto di altri tipi di forze, oltre a quelle di pressione e di gravità finora considerate, come le *forze di coesione* e le *forze di adesione intermolecolare*, con le quali le molecole dei fluidi interagiscono tra loro e con quelle dei recipienti che li contengono.

Un effetto di queste forze è dato dalla *tensione superficiale*.

**Definizione 8.4** (Tensione superficiale). Dal punto di vista fluidodinamico la tensione superficiale è definita come la forza specifica lineare che tiene uniti i lembi di un ipotetico taglio praticato sulla superficie libera del fluido, ovvero

$$\gamma = \frac{d\mathbf{F}_S}{dl} \quad (8.7)$$

dove  $dl$  è la lunghezza di un tratto infinitesimo del taglio e  $d\mathbf{F}_S$  è la forza infinitesima perpendicolare al taglio giacente sulla superficie.

Si può ricavare la stessa definizione tenendo conto del fatto che una lamina liquida tende spontaneamente a raggiungere la configurazione di minima superficie, per cui la tensione superficiale si definisce come

$$\gamma = \frac{dW}{dA} \quad (8.8)$$

dove  $dW$  è il lavoro elementare compiuto contro le forze di tensione superficiale per ottenere un aumento infinitesimo  $dA$  della superficie della lamina.

# Appendice A

## Riepilogo sul moto dei corpi

Rivediamo ora tutte le grandezze coinvolte nel moto di un corpo, sia esso di traslazione sia di rotazione, indicando eventuali formule di conversione tra una grandezza e l'altra e il loro significato fisico.

### A.1 Moto di traslazione

**Velocità** Variazione della posizione nell'unità di tempo.

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}}{dt}$$

**Accelerazione** Variazione della velocità nell'unità di tempo.

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}$$

**Accelerazione tangenziale** Variazione del modulo del vettore velocità nell'unità di tempo.

$$\mathbf{a}_T = \frac{dv}{dt} \hat{\mathbf{t}}_T$$

**Accelerazione normale** Variazione della direzione del vettore velocità nell'unità di tempo.

$$\mathbf{a}_N = v \frac{d\varphi}{dt} \hat{\mathbf{t}}_N = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$$

**Massa** Indicata con  $m$ , è una caratteristica di ogni corpo, che rappresenta la resistenza che oppone alla variazione della sua velocità.

**Forza** Causa che produce una accelerazione.

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

**Quantità di moto** Capacità di un corpo di modificare il movimento di altri corpi con cui interagiscono dinamicamente.

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}$$

**Lavoro** Spostamento di un corpo dovuto a una forza.

$$W_{AB}^{(F)} = \left( \int_A^B \mathbf{F} \, ds \right)_{(l)} = \Delta E_C$$

**Energia cinetica** Lavoro necessario a portare un corpo dal suo stato di quiete ad una certa velocità.

$$E_C = \frac{1}{2}mv^2$$

**Energia potenziale** Capacità di compiere lavoro che un corpo possiede in virtù della sua posizione.

$$U(A) = - \int_O^A \mathbf{F} \, ds$$

**Potenza** Quantità di energia scambiata nell'unità di tempo.

$$P = \frac{dW}{dt}$$

**Secondo principio della dinamica**

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

**Principio di conservazione della quantità di moto** In assenza di forze applicate, la quantità di moto di un punto materiale rimane costante.

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} = \text{costante}$$

## A.2 Moto di rotazione

**Velocità angolare** Variazione dell'angolo nell'unità di tempo.

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\theta}}{dt}$$

**Accelerazione angolare** Variazione della velocità angolare nell'unità di tempo.

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\vec{\theta}}{dt^2}$$

**Accelerazione tangenziale** Variazione del modulo del vettore velocità nell'unità di tempo.

$$\mathbf{a}_T = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \hat{\tau}_T$$

**Accelerazione normale** Variazione della direzione del vettore velocità nell'unità di tempo.

$$\mathbf{a}_N = v \frac{d\varphi}{dt} \hat{\tau}_N = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$$



**Momento di inerzia** Dipende dalla distribuzione della massa di corpo e rappresenta la resistenza che oppone un corpo che ruota alla variazione della sua velocità angolare.

$$I_z = \sum_i R_i^2$$

**Momento della forza** Causa che produce una accelerazione angolare.

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

**Momento angolare** Variazione della velocità di rotazione di un punto di un corpo rigido.

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

**Prima equazione cardinale**

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

**Seconda equazione cardinale**

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}$$

**Lavoro** Spostamento di un corpo dovuto a una forza.

$$W_{AB} = \int_{\theta_A}^{\theta_B} \mathbf{M}_z d\vec{\theta} = \Delta E_C$$

**Energia cinetica** Lavoro necessario a portare un corpo dal suo stato di quiete ad una certa velocità angolare.

$$E_C = \frac{1}{2} I_z \omega^2$$

**Energia potenziale** Capacità di compiere lavoro che un corpo possiede in virtù della sua posizione.

$$U(\theta) = - \int_0^A \mathbf{M}_z d\vec{\theta}$$

**Potenza** Quantità di energia scambiata nell'unità di tempo.

$$P = \mathbf{M}_z \cdot \vec{\omega}$$

**Secondo principio della dinamica**

$$\mathbf{M} = I_z \vec{\alpha}$$

**Principio di conservazione del momento angolare** In assenza di momenti di forze applicate, il momento angolare di un corpo rigido rimane costante.

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \text{costante}$$



# **Parte III**

## **Elettromagnetismo**



# Capitolo 9

## Elettrostatica

Iniziamo ora lo studio di una serie di fenomeni meno visibili di quelli meccanici ma comunque di grande interesse e utilizzo quotidiano: i fenomeni elettromagnetici. Classicamente, lo studio di questi fenomeni veniva diviso tra i fenomeni elettrici e quelli magnetici, ma dopo la scoperta della struttura della materia, i due fenomeni vengono sempre considerati come uno solo, poiché il magnetismo è una conseguenza del movimento delle cariche elettriche elementari.

È tuttavia ancora utile suddividere lo studio dei fenomeni in:

- elettrostatica;
- elettrodinamica;
- magnetostatica;
- elettromagnetismo.

Iniziamo con vedere l'*elettrostatica*, cioè lo studio degli effetti delle cariche elettriche localizzate e delle loro mutue interazioni.

### 9.1 L'elettricità

Come abbiamo visto in precedenza, tra le interazioni fondamentali esistenti in natura, la prima ad essere scoperta e studiata è stata l'*interazione gravitazionale*, che è un esempio pratico di **forza a distanza**.

Un'altra interazione fondamentale, che gioca un ruolo essenziale nella costituzione della materia, è quella *elettromagnetica*. Un aspetto particolare dell'interazione elettromagnetica è la **forza elettrica**, una particolare forza a distanza.

Il fenomeno dell'*elettricità* fu studiato e osservato sin dall'antichità. I greci, infatti, furono colpiti dalle caratteristiche dell'ambra, una resina fossile, la quale, dopo averla strofinata con una pelle di gatto (ma anche con seta o lana), acquista la proprietà di attrarre piccoli oggetti leggeri, come fili di paglia o piccoli semi, che si trovavano nelle sue vicinanze.

Un altro fenomeno osservato nell'antichità (s'ipotizza che fosse noto già 4000 anni fa in Cina, a causa dell'esistenza di una bussola rudimentale) è il *magnetismo*, collegato strettamente al fenomeno elettrico.

Dal punto di vista quantitativo, il fenomeno elettrico s'iniziò a studiare nel XVIII secolo

(risale al 1785, infatti, la *legge di Coulomb*), mentre il fenomeno magnetico s'iniziò a studiare nel XIX secolo (si ricordano gli studi di Ørsted). Nel 1864, poi, gli studi sull'elettricità e sul magnetismo furono unificati grazie agli studi di Maxwell.

Dal punto di vista sperimentale, se si strofinano particolari materiali con altri materiali (ad esempio stoffe), si possono ottenere due soli stati di elettrizzazione. Questi due stati di attrazione portano all'attrazione tra i corpi o la loro repulsione e prendono convenzionalmente il nome di **positivo** (attribuito all'elettrizzazione che si crea nell'ambra strofinata con pelle di gatto) e di **negativo** (attribuita all'elettrizzazione che si crea nell'ebanite strofinata con la seta).

## Trasmissione dell'elettrizzazione

Lo stato di elettrizzazione può essere trasmesso in tre modi: *per strofinio*, *per contatto* o *a distanza*.

L'**elettrizzazione per strofinio** è un fenomeno caratteristico di diversi materiali che, solo dopo lo strofinio, acquisiscono la capacità di attrarre o respingere altri oggetti, che possono essere stati a loro volta strofinati. Corrisponde in pratica a un trasferimento di enti portatori di carica, i quali sono liberi di muoversi all'interno del corpo.

L'**elettrizzazione per contatto** avviene quando un corpo non carico (*neutro*) è messo a contatto con un corpo carico, il quale cede parte dei suoi portatori di carica al corpo neutro.

L'**elettrizzazione a distanza**, denominata *induzione elettrostatica*, sarà studiata meglio in seguito.

## Struttura elettrica della materia

Oggi, i portatori di carica sono denominati **cariche elettriche** e sappiamo che preesistono all'interno dei corpi. In base alle affermazioni precedenti, possiamo dire che se due corpi possiedono cariche elettriche uguali, le forze che agiscono tra di loro sono repulsive; se due corpi possiedono cariche elettriche diverse, le forze che agiscono tra di loro sono attrattive.

L'elettrostatica ci permette di affermare che il passaggio della carica elettrica tra i corpi non è rappresentabile come un flusso continuo che può scorrere ugualmente da un corpo a un altro, ma avviene in modo *quantizzato*, avendo come unità di base la cosiddetta **carica elementare**, ovvero la carica dell'elettrone ( $-e = 1,9 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ ).

Nei fenomeni elettrici che noi riusciamo a osservare, è difficile che vi sia dispersione di cariche elettriche. Questo fatto è regolato dalla **legge di conservazione della carica elettrica**:

*«In un sistema elettricamente isolato, la carica complessiva si conserva, ovvero la somma algebrica delle cariche elettriche si mantiene costante.»*

Questa legge comporta che, se si creano cariche elettriche, queste si devono creare a coppie, ovvero una positiva e una negativa; ciò avviene regolarmente nell'atmosfera terrestre.

## 9.2 La legge di Coulomb

Abbiamo finora parlato di cariche elettriche. Ma come si misurano e qual è la loro unità di misura?

Il primo strumento utilizzato per rivelare e riconoscere lo stato di elettrizzazione fu l'*elettroscopio a foglie* (Figura 9.1).

L'elettroscopio è costituito da due foglioline metalliche molto sottili (d'oro o di allumi-

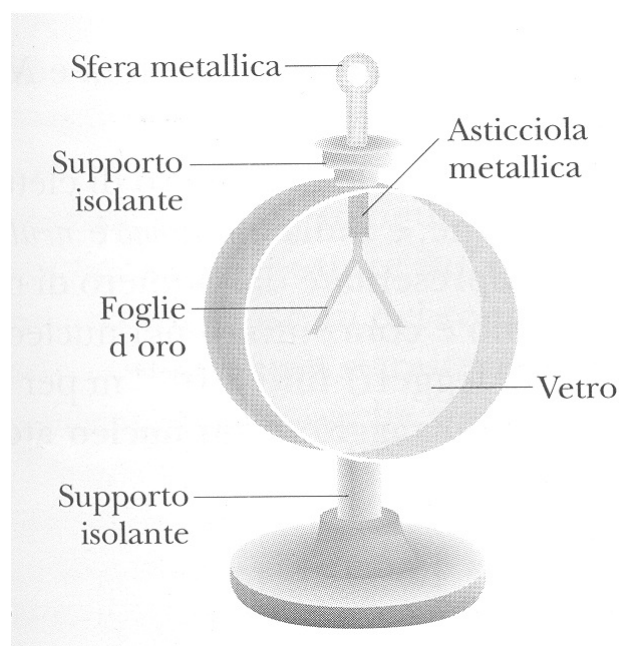


Figura 9.1: Elettroscopio a foglie

nio) sospese a un'asta metallica e contenute in un involucro di vetro. Se si tocca con una bacchetta carica l'estremità dell'asta, le due foglie acquistano dalla bacchetta una data carica avente stesso segno, quindi tendono a divergere. Queste due foglie raggiungeranno lo stato di equilibrio statico quando è nulla la risultante di tutte le forze.

L'angolo di deflessione tra le due foglie indica la quantità di carica presente, la cui unità di misura, nel Sistema Internazionale, è il **coulomb** (C).

Per misurare operativamente il valore della carica elettrica dei corpi si stabilisce prima di tutto che queste cariche hanno la stessa grandezza e lo stesso segno se, poste alla stessa distanza da una terza carica, agiscono su di essa con una forza uguale e avente lo stesso verso; se invece agiscono sulla terza carica con forze uguali in modulo ma con verso opposto, allora le due cariche sono uguali ma di segno opposto. In quest'ultimo caso, il confronto può diventare quantitativo solamente se si conosce l'espressione della forza con cui interagiscono le due cariche.

Questa espressione è dovuta alle misurazioni effettuate nel 1785 da Coulomb tramite una bilancia di torsione, che portarono alla formulazione della **legge di Coulomb**:

*«La forza di attrazione o di repulsione che si esercita tra due cariche puntiformi è direttamente proporzionale al prodotto delle quantità di carica pos-*

*sedute dai due corpi e inversamente proporzionale al quadrato della loro distanza.»*

La forma vettoriale di questa legge è

$$\mathbf{F}_{E,12} = k \frac{q \cdot q_0}{r^2} \hat{u}_{12} \quad (9.1)$$

ed è simile alla forma della legge di gravitazione universale. Possiamo quindi estendere tutte le deduzioni effettuate per la legge di gravità alla legge di Coulomb e viceversa.

Inoltre, come vedremo meglio in seguito, l'interazione elettrostatica descritta da Coulomb ha come caratteristica la determinazione della composizione della materia e le interazioni al suo interno fino alle dimensioni pari a  $10^{-10}$  m. Infatti  $\mathbf{F}_E \propto \frac{1}{r^{2+\alpha}}$ , con  $\alpha \approx 10^{-16}$  rappresentante l'errore sperimentale della relazione, ovvero rappresenta quell'incertezza dovuta alle misurazioni effettuate durante gli esperimenti dovute agli strumenti di misura stessi.

Analizziamo meglio la legge di Coulomb.

La costante  $k$  che appare nella relazione dipende dalla scelta delle unità di misura e dal mezzo in cui le cariche sono immerse. Le cariche  $q$  e  $q_0$ , inoltre, sono definite **sorgenti** del campo (definizione che approfondiremo a breve).

L'unità di misura della carica elettrica, il coulomb, non è una grandezza primitiva, ma derivata; la sua definizione è data sfruttando una delle sette grandezze fondamentali del SI, l'*ampere* (A) che vedremo in seguito, ed è pari alla carica trasportata da una corrente di 1 A in un secondo. Tramite questa definizione, possiamo notare il coulomb è un'unità di misura molto "grande", ovvero rappresenta una quantità di carica numerosa. Nella realtà, gli oggetti riescono a possedere cariche pari al massimo a qualche microcoulomb.

In base a ciò, l'unità di misura della costante  $k$  sono  $\text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2$ ; se le cariche sono immerse nel vuoto, il suo valore è  $k = 8,9875 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2 \approx 9 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2$ . Considerando che la costante di gravitazione universale  $\gamma$  vale  $\gamma \approx 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$ , possiamo notare che la forza di Coulomb è circa venti volte più forte di quella gravitazionale.

Per ragioni pratiche che saranno chiare in seguito, è comodo esprimere la costante  $k$  come  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ , dove  $\epsilon_0$  rappresenta la **costante dielettrica del vuoto**; il suo valore è pari a  $\epsilon_0 = 8,8542 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 \cdot \text{m}^2/\text{N}$ ; con questa notazione, l'Equazione (9.1) come

$$\mathbf{F}_{E,12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q \cdot q_0}{r^2} \hat{u}_{12} \quad (9.2)$$

Le forze elettrostatiche, come qualsiasi altra forza vista finora, sono rappresentate come grandezze vettoriali. Se su una carica  $q_0$  sono agenti più forze elettriche, la carica risente di un'unica forza, che è la somma vettoriale di tutte le forze agenti: vale, cioè, il cosiddetto *principio di sovrapposizione*.

$$\mathbf{F}_{E,\{q_i\}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i \cdot q_0}{r^2} \hat{u}_i$$

## Distribuzioni di carica

Finora abbiamo parlato di corpi puntiformi carichi elettricamente. Se invece consideriamo sistemi di punti carichi, la cui distribuzione nello spazio è continua, possiamo ipotizzare che anche la carica sia distribuita in modo continuo nella regione.



A seconda della distanza dalla quale si osserva il sistema di punti, oppure un corpo rigido carico, è possibile non considerare una o più delle sue dimensioni. Possiamo definire quindi particolari **distribuzioni di carica** all'interno dei corpi.

Se la distribuzione avviene lungo una linea, ovvero lungo un corpo approssimabile a una linea, possiamo definire la **densità lineare di carica** ( $\lambda = \rho_l = \frac{q}{x}$ ,  $[\lambda] = C/m$ ). Se la distribuzione avviene lungo una superficie, ovvero lungo un corpo il cui spessore è molto minore alla distanza di osservazione, possiamo definire la **densità superficiale di carica**, o *distribuzione superficiale* ( $\sigma = \rho_s = \frac{q}{S}$ ,  $[\lambda] = C/m^2$ ). Se, infine, la distribuzione avviene lungo tutto il volume del corpo, possiamo allora definire la **densità volumetrica di carica** ( $\rho = \rho_v = \frac{q}{V}$ ,  $[\lambda] = C/m^3$ ).

## 9.3 Campo elettrostatico

Abbiamo detto che la forza elettrostatica è una forza a distanza, ovvero una forza che agisce su corpi posti a grande distanza dal punto che origina la forza. Se nella distanza di azione della forza v'è il vuoto, è difficile spiegare come si trasmetta l'interazione. Per questo motivo, si è deciso di abbandonare il concetto di forza a distanza, preferendo definire una proprietà dello spazio, che abbiamo già visto per la forza di gravità ma per la quale non abbiamo dato una definizione precisa.

### Definizione di campo

In generale, un punto che genera una forza, detto **sorgente**, modifica lo spazio intorno ad esso, in modo che ogni altro punto presente nello spazio possa risentire della forza generata; se questo punto non è presente nello spazio, lo spazio non ha particolari proprietà. Definiamo quindi **campo** quella funzione che assegna una quantità fisica a ogni punto dello spazio.

I campi sono rappresentati, principalmente, in modo matematico come *scalari* e *vettoriali*.

Un **campo scalare** è una funzione che associa uno scalare a ogni punto dello spazio; i campi scalari sono utilizzati per indicare, ad esempio, la distribuzione della temperatura nello spazio o quella della pressione atmosferica. L'insieme dei punti che possiedono un determinato valore prende il nome di **superficie di livello**.

Un **campo vettoriale** su uno spazio euclideo è una costruzione del calcolo vettoriale che associa a ogni punto dello spazio un vettore dello spazio stesso. Esistono vari esempi in fisica di campi vettoriali.

In un fluido, le particelle presenti subiscono una certa velocità vettoriale, dipendente dal punto in cui si trova la particella e dal tempo, formando così un *campo di velocità*. Un altro esempio di campo vettoriale è il *campo gravitazionale* visto in precedenza.

Un campo vettoriale si può rappresentare qualitativamente mediante le cosiddette *linee di flusso* o *linee di campo*. Una linea di campo è una linea orientata che in ogni punto è tangente e concorde al vettore che descrive il campo (l'equivalente delle traiettorie delle particelle nei fluidi). Si rappresentano linee di forza più addensate nella regione di spazio, dove l'intensità del campo è maggiore; inoltre, le linee di forza non s'incrociano mai, perché un capo in un punto non può avere due direzioni diverse.

Consideriamo ad esempio una massa nello spazio; le linee del campo gravitazionale, viste per porzioni di superficie terrestre molto piccole, sono tutte perpendicolari alla superficie

ed equidistanti, poiché il campo è uniforme.

Infine, come abbiamo visto per i fluidi, per un campo vettoriale è definibile anche un *tubo di flusso*.

## Il campo elettrostatico

Anche una carica perturba lo spazio intorno a sé, in modo tale che una seconda carica posta nello spazio risenta dell'azione della prima carica, formando così un **campo elettrostatico**, definito tramite il vettore

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}_E}{q_0} \quad (9.3)$$

Poiché è definito nello spazio, il vettore campo elettrostatico ha un valore diverso a seconda del punto in cui si trova e descrive una componente diversa per ogni asse.

Nel Sistema Internazionale, l'unità di misura del campo elettrostatico è il **newton su coulomb** (N/C).

Per un campo elettrostatico, le linee di forza sono uscenti dalle cariche positive ed entranti nelle cariche negative.

Dal punto di vista vettoriale, il vettore campo elettrostatico è definibile come

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}_E}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{u} \quad (9.4)$$

Anche in questo caso, se nella regione di spazio sono presenti più cariche, ognuna di esse genererà un campo elettrostatico. Il campo elettrostatico rilevabile in un punto sarà quindi la somma dei vari campi elettrostatici, derivanti dal principio di sovrapposizione.

Se la sorgente del campo è un corpo rigido, quindi una distribuzione continua di carica, il campo complessivo generato da tutte le singole cariche  $dq$  presenti nel corpo è

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \int_{\text{tutte le cariche}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq_i}{r_i^2} \hat{u}_i$$

## 9.4 Teorema di Gauss

Consideriamo una superficie piana di estensione infinitesimo  $d\Sigma$ , racchiusa da una curva chiusa  $C$ , sul quale definiamo un verso di percorrenza. Si definisce quindi *versore normale orientato* quel versore perpendicolare alla superficie, passante nel centro e il cui verso è determinato dalla regola della mano destra.

Consideriamo ora una superficie di estensione finita ma aperta, ovvero una superficie che ha un contorno, corrispondente alla curva  $C$ . In questo caso, non esiste un unico versore normale alla superficie, ma infiniti versori, perché infinite sono le superfici infinitesime in cui si può suddividere la superficie iniziale. Il verso di questi infiniti versori è determinato dall'orientazione del contorno.

Nel caso di una superficie di estensione finita ma chiusa, cioè senza contorno, infine, il versore normale all'infinitesima superficie che la compone è sempre uscente, per convenzione.

Tutto questo discorso introduttivo serve per definire una nuova grandezza fisica. Supponiamo, infatti, di immergere una superficie orientata all'interno di un campo vettoriale; la quantità di linee di flusso che attraversano la superficie, ovvero il **flusso del vettore di un campo vettoriale attraverso una superficie orientata**, è definito come

$$\Phi_{\Sigma}(\mathbf{A}) = \int_{\Sigma} \mathbf{A} \cdot \hat{u}_n \, d\Sigma$$

Nel caso in cui il campo in cui sia immersa la superficie orientata sia il campo elettrostatico, scriviamo

$$\Phi_{\Sigma}(\mathbf{E}) = \int_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot \hat{u}_n \, d\Sigma$$

Se la superficie immersa è chiusa, l'integrale è

$$\Phi_{\Sigma}(\mathbf{E}) = \oint_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot \hat{u}_n \, d\Sigma \quad (9.5)$$

Definiamo ora un caso particolare. Consideriamo una superficie sferica e poniamo nel suo centro una carica  $q$ , che genera un campo elettrostatico. Il suo flusso è

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{sfera}}(\mathbf{E}) &= \oint_{\text{sfera}} \mathbf{E} \cdot \hat{u}_n \, d\Sigma = \oint_{\text{sfera}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{u}_r \cdot \hat{u}_n \, d\Sigma = \\ &= \oint_{\text{sfera}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \, d\Sigma = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \oint_{\text{sfera}} d\Sigma = \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{4\pi r^2}{r^2} = \frac{q}{\epsilon_0} \end{aligned} \quad (9.6)$$

Attraverso considerazioni geometriche, si arrivò a teorizzare che se la sorgente del campo è interna alla superficie chiusa, come nel precedente caso, il flusso del campo è sempre pari a  $\frac{q}{\epsilon_0}$ . Infatti, se il flusso lo definiamo qualitativamente come il numero di linee di campo che attraversano una superficie, ponendo la carica all'interno della superficie possiamo sempre determinare una sfera all'interno della superficie per cui il flusso è pari a  $\frac{q}{\epsilon_0}$ ; inoltre, il tubo di flusso che si forma tra la sfera e la superficie contiene sempre lo stesso numero di linee di flusso, quindi il flusso mantiene il suo valore. Se la carica, invece, è posta all'esterno della superficie, il numero di linee di campo che entrano nella superficie è uguale al numero di linee di campo che escono dalla superficie, quindi il flusso del campo è nullo.

In generale, se all'interno di una superficie chiusa sono poste  $n$  cariche elettriche, il flusso del campo elettrico attraverso la superficie è pari a

$$\Phi_{\Sigma}(\mathbf{E}) = \frac{\sum_i q_i}{\epsilon_0} = \frac{Q_{(\Sigma)}}{\epsilon_0} \quad (9.7)$$

L'Equazione (9.7) è nota come **teorema di Gauss**.

## Campi elettrostatici di configurazioni particolari

Vediamo ora alcuni campi elettrostatici di configurazioni particolari, alcuni derivanti dall'applicazione del teorema di Gauss, altri no.

Iniziamo da un *segmento uniformemente carico* con densità lineare  $\lambda$  positiva. Ogni singolo elemento  $dx$  contiene una carica elementare  $dq = \lambda dx$ , quindi la carica complessiva è pari a  $Q = \int_{-L}^L \lambda dx = 2\lambda L$ .

Ogni singolo elemento  $dx$ , inoltre, genera un campo elettrostatico infinitesimo  $d\mathbf{E}' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2}$ ; inoltre, in base alla simmetria del segmento, per ogni elemento  $dx$  ne esiste un altro in posizione simmetrica rispetto all'asse. Pertanto, il campo elettrostatico complessivamente generato da questi due elementi è  $d\mathbf{E} = 2d\mathbf{E}' = \frac{2\lambda dx \cos \alpha}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ , dove  $\alpha$  rappresenta l'angolo che il vettore forma con l'asse del segmento.

Il campo elettrostatico complessivamente generato dall'intero segmento è, quindi

$$\begin{aligned}
 |\mathbf{E}| &= \int_0^L \frac{2\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos \alpha}{r^2} dx = \frac{2\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_0^L \frac{\cos \alpha}{r^2} dx = \\
 &\text{Sostituisco } x = y \tan \alpha \rightarrow dx = \frac{y}{\cos^2 \alpha} d\alpha \quad \frac{2\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{\alpha_M} \frac{\cos \alpha}{r^2} \frac{y}{\cos^2 \alpha} d\alpha \\
 &\text{Notando che } y^2 = r^2 \cos^2 \alpha \quad \frac{2\lambda}{4\pi\epsilon_0 y} \int_0^{\alpha_M} \cos \alpha d\alpha = \\
 &= \frac{2\lambda}{4\pi\epsilon_0 y} \sin \alpha \quad \sin \alpha = \frac{L}{\sqrt{y^2 + L^2}} \quad \frac{2\lambda}{4\pi\epsilon_0 y} \frac{L}{\sqrt{y^2 + L^2}} \\
 \mathbf{E} &= \frac{2\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{L}{y \sqrt{y^2 + L^2}} \hat{y}
 \end{aligned}$$

Se portiamo la lunghezza  $L$  del filo all'infinito, ovvero se consideriamo un *filo indefinito carico*, il campo è

$$\mathbf{E} = \frac{2\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{y} \hat{y}$$

Le linee di campo, per queste configurazioni, sono radiali al filo stesso.

Consideriamo ora una *superficie*  $\Sigma$ , parallela al piano  $xy$ , *uniformemente carica* con densità superficiale  $\sigma$ . Anche in questo caso, l'elemento di superficie  $d\Sigma = dx dy$  contiene una carica  $dq = \sigma d\Sigma = \sigma dx dy$ . Se consideriamo una striscia di questa superficie, possiamo approssimarla a un filo infinito carico, per cui è possibile definire una densità  $\lambda_{\text{efficace}} = \frac{dq}{dx} = \sigma dy$ .

La carica  $dq$ , inoltre, genera un campo  $d|\mathbf{E}'| = \frac{\lambda_{\text{efficace}}}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$ . Poiché il piano è centrato nell'origine degli assi, è simmetrico rispetto all'asse  $z$ , quindi si possono effettuare tutte le considerazioni fatte per il filo infinito. Il campo elettrostatico complessivamente generato dall'intera superficie è

$$\begin{aligned}
 d|\mathbf{E}| &= 2dE' \cos \alpha = \frac{2\sigma dy \cos \alpha}{2\pi\epsilon_0 r} = \frac{\sigma dy \cos \alpha}{\pi\epsilon_0 r} \\
 |\mathbf{E}| &= \int_0^\infty \frac{\sigma}{\pi\epsilon_0} \frac{\cos \alpha}{r} dy = \frac{\sigma}{\pi\epsilon_0} \int_0^\infty \frac{\cos \alpha}{r} dy \stackrel{\cos \alpha dy = r d\alpha}{=} \frac{\sigma}{\pi\epsilon_0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r}{r} d\alpha = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \\
 \mathbf{E} &= \pm \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{z}
 \end{aligned}$$

## Applicazioni del teorema di Gauss

Vediamo ora alcune applicazioni del teorema di Gauss per il calcolo del flusso e del campo elettrostatico in particolari condizioni.

Consideriamo ad esempio un cubo che contenga al suo interno una carica  $q$  posizionata al centro del cubo. In base alla definizione di flusso, sappiamo che  $\Phi_{faccia}(\mathbf{E}) = \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_S \mathbf{E} \cdot \hat{n} dS$ .

Inoltre, per la simmetria del cubo, sappiamo che  $\Phi_{totale}(\mathbf{E}) = 6\Phi_{faccia}(\mathbf{E})$  e che, in base al teorema di Gauss,  $\Phi_{totale}(\mathbf{E}) = \frac{q}{\epsilon_0}$ . Possiamo quindi dire che  $\Phi_{faccia}(\mathbf{E}) = \frac{q}{6\epsilon_0}$ .

Se la carica è spostata in direzione di una faccia, il flusso non ha più quel valore, poiché non è più simmetrico il sistema. Il campo avrà flusso maggiore attraverso la superficie più vicina e flusso minore attraverso la superficie più lontana. Se la carica, invece, viene posta su una delle facce del cubo, si ritorna a un sistema simmetrico, in cui la carica è per metà all'interno e per metà all'esterno del cubo. In questo caso  $\Phi_{totale}(\mathbf{E}) = \frac{q}{2\epsilon_0}$ .

Sempre in situazioni opportunamente simmetriche, se si conosce la carica presente in una regione di spazio, si possono cercare opportune superfici in cui sia valido il teorema di Gauss e per cui il campo elettrostatico assume valore  $|\mathbf{E}| = \frac{Q}{\epsilon_0 \Sigma}$ .

Consideriamo di nuovo il caso del filo indefinito uniformemente carico. Sappiamo che il campo è radiale rispetto al filo; inoltre, traslando il filo, ruotandolo o ribaltandolo, il campo mantiene sempre stessa direzione e stesso verso. In base a queste simmetrie, la superficie che meglio contiene il filo è un cilindro indefinito coassiale con il filo. Il flusso del campo elettrostatico è  $\Phi(\mathbf{E}) = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_{S_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} + \int_{S_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} + \int_{S_3} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$ .

Poiché il flusso attraverso le superfici  $S_1$  e  $S_2$ , che sono le due basi del cilindro, è nullo, perché il campo è perpendicolare al versore normale orientato, il flusso attraverso il cilindro corrisponde solamente al flusso attraverso al mantello  $S_3$ . Per comodità, ora, passiamo alle coordinate cilindriche per definire il campo  $(\mathbf{E}(r, \theta, z))$ , dove  $r$  è la distanza dall'asse,  $\theta$  rappresenta l'angolo che la proiezione del punto forma sul piano di riferimento e  $z$  è l'altezza del punto rispetto all'origine). In questo caso, sia  $z$  sia  $\theta$  sono costanti, quindi possiamo affermare che  $\mathbf{E} = E(r)\hat{r}$ . Da queste considerazioni ricaviamo che

$$\Phi(\mathbf{E}) = \int_{S_3} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_{S_3} E(r)\hat{r} \cdot \hat{r} dS = E(r) \int_{S_3} dS = 2\pi r h E(r)$$

La carica interna alla superficie cilindrica è quella racchiusa al suo interno, quindi  $Q_\Sigma = \lambda h$ . Applicando il teorema di Gauss, abbiamo

$$\frac{\lambda h}{\epsilon_0} = 2\pi r h E(r) \Rightarrow E(r) = \frac{\lambda}{2\pi r \epsilon_0}$$

Consideriamo ora un cilindro indefinito uniformemente carico con densità  $\rho_0$ . In base alla sua geometria, il cilindro è simmetrico sia per rotazione, sia per traslazione sia per ribaltamento, quindi le linee del campo elettrostatico sono radiali.

Per sfruttare il teorema di Gauss, scegliamo come superficie un cilindro finito coassiale di raggio  $r$  e altezza  $h$ . Vedendo il campo elettrostatico in coordinate cilindriche ( $\mathbf{E} = E(r)\hat{r}$ ) e sfruttando le considerazioni effettuate per il filo indefinito, possiamo scrivere

$$\Phi(\mathbf{E}) = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_{S_3} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_{S_3} E(r)\hat{r} \cdot \hat{r} dS = E(r) \int_{S_3} dS = 2\pi r h E(r)$$

Anche la densità varia secondo la distanza dall'asse, secondo questa legge

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho_0 & \text{se } r \leq R \\ 0 & \text{se } r > R \end{cases}$$

Per questo motivo, la carica interna al cilindro finito è diversa secondo la distanza radiale

$$Q = \begin{cases} \rho_0 \pi r^2 h & \text{se } r \leq R \\ \rho_0 \pi R^2 h & \text{se } r > R \end{cases}$$

Il campo elettrostatico generato dal cilindro indefinito è quindi

$$E(r) = \begin{cases} \frac{\rho_0 \pi r^2 h}{2\pi \epsilon_0 r h} = \frac{\rho_0}{2\epsilon_0} r & \text{se } r \leq R \\ \frac{\rho_0 \pi R^2 h}{2\pi \epsilon_0 r h} = \frac{\rho_0 R^2}{2\epsilon_0 r} & \text{se } r > R \end{cases}$$

Consideriamo ora un piano indefinito uniformemente carico, con densità positiva  $\sigma$ . Effettuando considerazioni sulla simmetria anche in questo caso, notiamo che il piano è simmetrico rispetto alla traslazione lungo due delle tre direzioni e per rotazione di  $180^\circ$ . Per sfruttare il teorema di Gauss, la superficie da considerare è un cilindroide con asse parallelo alla direzione del campo elettromagnetico.

La carica interna al cilindroide corrisponde alla carica contenuta sulla superficie staccata dal cilindroide sul piano indefinito, ovvero  $Q_\Sigma = \sigma \cdot \Sigma$ . Il flusso attraverso questa superficie è  $\Phi(\mathbf{E}) = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_{S_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} + \int_{S_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} + \int_{S_3} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$ .

In questo caso, il flusso attraverso la superficie  $S_3$  è nullo, poiché il versore orientato è perpendicolare al campo elettrostatico; inoltre, il campo elettrostatico ha componente solamente lungo la direzione  $x$  ( $\mathbf{E} = E(x)\hat{x}$ ). Possiamo quindi calcolare il flusso come

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{E}) &= \int_{S_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} + \int_{S_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_{S_1} E(x)\hat{x} \cdot \hat{n}_1 dS + \int_{S_2} E(x)\hat{x} \cdot \hat{n}_2 dS = \\ &= \int_{S_1} E(x)\hat{x} \cdot \hat{x} dS + \int_{S_2} E(-x)\hat{x} \cdot (-\hat{x}) dS = S[E(x) - E(-x)] \end{aligned}$$

Poiché la funzione che regola il campo elettrostatico è una funzione dispari, e in base alle considerazioni sulla simmetria fatte all'inizio, possiamo dire che

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{E}) &= S[E(x) - E(-x)] = S[E(x) + E(x)] = 2S \cdot E(x) \Rightarrow \\ \Rightarrow 2S \cdot E(x) &= \frac{\sigma S}{\epsilon_0} \rightarrow E(x) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \end{aligned}$$

Consideriamo ora una lastra, di area indefinita, carica secondo la legge

$$\rho(x) = \begin{cases} \rho(x) & \text{se } |x| \leq D \\ 0 & \text{se } |x| > D \end{cases}$$

e avente come asse l'asse  $y$ , posta tra i punti  $-D$  e  $D$  dell'asse  $x$ . Sapendo che la densità è una funzione pari, determiniamo il campo sfruttando il teorema di Gauss.

La superficie che rispetta la simmetria dell'oggetto è un cilindro finito poco di lunghezza  $2x$ . Il flusso del campo elettrico generato dalla lastra corrisponde a  $2S \cdot E(x)$ . La carica interna, invece, varia secondo la posizione

$$Q_\Sigma = \int_V \rho(x) dV = \begin{cases} \int_{-x}^x \rho(x) S dx & \text{se } |x| \leq D \\ \int_{-D}^D \rho(x) S dx & \text{se } |x| > D \end{cases}$$

Il campo elettrostatico è quindi

$$E(x) = \begin{cases} \frac{\int_{-x}^x \rho(x) S dx}{2\epsilon_0} & \text{se } |x| \leq D \\ \frac{\int_{-D}^D \rho(x) S dx}{2\epsilon_0} & \text{se } |x| > D \end{cases}$$

Se la densità fosse costante all'interno della lastra e nulla fuori di essa, abbiamo che

$$E(x) = \begin{cases} \frac{\rho_0}{\epsilon_0} x & \text{se } |x| \leq D \\ \frac{\rho_0}{\epsilon_0} D & \text{se } |x| > D \end{cases}$$

Consideriamo ora una sfera carica di raggio  $R$ , la cui densità di carica è

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho(r) & \text{se } r < R \\ 0 & \text{se } r > R \end{cases}$$

cerchiamo di determinare quale sia il campo elettrostatico generato.

Sappiamo, da considerazioni simmetriche, che le linee di campo sono radiali alla sfera ( $\mathbf{E} = E(r)\hat{r}$ ), quindi una superficie valida per applicare il teorema di Gauss è una sfera concentrica di raggio  $r$ . Sappiamo che la carica interna alla superficie sferica varia secondo il raggio  $r$ , quindi

$$Q_\Sigma = \oint_{V \text{ sfera}} \rho(r) dV = \begin{cases} \rho_0 \frac{4}{3} \pi r^3 & \text{se } r < R \\ \rho_0 \frac{4}{3} \pi R^3 & \text{se } r > R \end{cases}$$

Il flusso del campo elettrostatico attraverso la superficie è

$$\Phi_{\text{sfera}}(\mathbf{E}) = \oint_{V \text{ sfera}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \oint_{V \text{ sfera}} E(r) \hat{r} \cdot \hat{r} r dS = E(r) 4\pi r^2$$

Applicando il teorema di Gauss, otteniamo che il campo elettrostatico di una sfera carica è

$$E(r) = \begin{cases} \frac{\rho_0 \frac{4}{3} \pi r^3}{4\pi \epsilon_0 r^2} = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} r & \text{se } r < R \\ \frac{\rho_0 \frac{4}{3} \pi R^3}{4\pi \epsilon_0 r^2} & \text{se } r > R \end{cases}$$

Vediamo ora una configurazione particolare, la cui determinazione del campo elettrostatico esula completamente dal teorema di Gauss.

Poniamo due piani indefiniti a distanza  $d$  l'uno dall'altro. Carichiamo un piano con densità superficiale  $\sigma$ , l'altro con densità  $-\sigma$ . Sappiamo che ognuno di questi genera un campo elettrostatico ( $|\mathbf{E}| = +\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$  per il piano caricato positivamente e  $|\mathbf{E}| = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$  per il piano caricato negativamente). Combinando settorialmente questi due campi, si ottiene che all'esterno dei due piani indefiniti il campo sia nullo, mentre all'interno si ottiene un campo d'intensità  $|\mathbf{E}| = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ .

Nel caso in cui i due piani indefiniti abbiano la stessa densità di carica  $\sigma$  positiva, abbiamo la situazione inversa a quella appena descritta, cioè in mezzo ai due piani nessun campo, all'esterno un campo d'intensità  $|\mathbf{E}| = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ .

## 9.5 Lavoro elettrico e potenziale elettrostatico

Abbiamo definito il campo elettrostatico come rapporto tra la forza elettrostatica agente tra due cariche e una delle due cariche. Poiché c'è una forza, questa compie un *lavoro* per spostare la seconda carica, detta *carica di prova*.

Per uno spostamento infinitesimo, questo lavoro è pari a

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = q_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$$

Per uno spostamento finito dalla posizione  $A$  alla posizione  $B$  lungo un percorso  $C_1$ , il **lavoro elettrico** è pari a

$$W_{AB} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = q_0 \int_{C_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \quad (9.8)$$

Dalla Meccanica sappiamo che, se la forza è conservativa, il lavoro non dipende dal percorso e che corrisponde alla differenza di energia potenziale tra la posizione  $A$  e la posizione  $B$ . Anche per la forza elettrostatica è possibile definire l'*energia potenziale elettrostatica*, la cui espressione analitica vedremo in seguito.

Se l'intensità della forza dipende dal punto in cui si trova e questa è conservativa, allora definisce un *campo conservativo*, per cui il lavoro che compie non dipende dal cammino d'integrazione.

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \oint_C \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{u}_n \cdot d\mathbf{s} = \oint_C \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \int_A^A \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = 0$$

Se la forza che genera il campo è una *forza centrale*, allora il campo, come sappiamo, si definisce *campo centrale*; i campi centrali sono sempre conservativi. Ad esempio, il campo elettrostatico generato da una sfera uniformemente carica è un campo conservativo proprio perché è centrale, mentre il campo elettrostatico generato da un filo indefinito uniformemente carico è conservativo in base solamente al principio di sovrapposizione.

Ritorniamo a parlare del campo elettrostatico. In quanto conservativo, il lavoro compiuto dal campo elettrostatico lungo una linea chiusa è nullo ( $\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0$ ). Se quest'affermazione è valida per ogni percorso lungo il quale s'integra il prodotto scalare, allora possiamo affermare che la **circuitazione** del campo elettrostatico è nulla.

Inoltre, proprio perché è conservativo, il lavoro compiuto tra due punti  $A$  e  $B$  può essere riscritto come differenza dei valori di una funzione tra i due punti. Questa funzione prende il nome di **potenziale elettrostatico** e la sua differenza è detta **differenza di potenziale** ( $\Delta V$  o d.d.p.).

$$\Delta V = V(A) - V(B) = - \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \quad (9.9)$$

Il lavoro può essere quindi riscritto come  $W_{AB} = -q_0 \Delta V$ . Possiamo ora definire la grandezza **energia potenziale elettrostatica** come

$$U_e = q_0 \Delta V \quad (9.10)$$

La differenza di potenziale è una grandezza valida solo per campi elettrici conservativi. La sua unità di misura, ricavata dall'ultima relazione scritta, è il *joule su coulomb*, che per i campi conservativi prende il nome di **volt** ( $V = J/C$ ). Mediante il volt, si può riscrivere



l'unità di misura del campo elettrostatico come *volt su metro* (V/m).

Come esempio, vediamo il valore della differenza di potenziale tra due punti  $A$  e  $B$  del campo elettrostatico generato da una carica puntiforme.

$$\Delta V = - \int_A^B \mathbf{E} \, ds = - \int_A^B \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right]$$

Per alcuni calcoli, è utile porre il secondo punto di riferimento all'infinito (**riferimento all'infinito**). Con questo riferimento, il potenziale di una carica puntiforme è

$$\Delta V = - \int_A^\infty \mathbf{E} \, ds = - \int_A^\infty \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (9.11)$$

che, nel caso in cui le cariche siano distribuite in modo continuo in una regione di spazio ben definita, diventa

$$\Delta V = \int_A^\infty dV = \int_A^\infty \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} dq \quad (9.12)$$

Il potenziale elettrostatico, poiché assume un singolo valore secondo il punto in cui si valuta, è un *campo scalare*. In quanto campo scalare, è valido il *principio di sovrapposizione* in caso di presenza di più cariche puntiformi.

$$\Delta V_{\{q_i\}} = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r} = \sum_i [V(r) - V(\infty)] \quad (9.13)$$

Finora abbiamo visto che conoscendo il campo elettrostatico è sempre possibile determinare il potenziale elettrostatico, il quale, in quanto definito da un'integrale, è una funzione continua.

Consideriamo dunque due punti  $A(x, y, z)$  e  $B(x+dx, y+dy, z+dz)$ , distanti  $d\mathbf{r}(dx, dy, dz)$  l'uno dall'altro. La differenza di potenziale  $V(B) - V(A) = -dV$  è pari al prodotto scalare  $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$ , mentre  $dV$  è definito, in base al *teorema del differenziale totale*<sup>1</sup>, come  $dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz$ .

Possiamo quindi scrivere:

$$\begin{aligned} -dV &= \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \\ - \left( \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz \right) &= E_x dx + E_y dy + E_z dz \\ \mathbf{E} &= \begin{pmatrix} -\frac{\partial V}{\partial x} \\ -\frac{\partial V}{\partial y} \\ -\frac{\partial V}{\partial z} \end{pmatrix} = -\vec{\nabla} V \end{aligned} \quad (9.14)$$

<sup>1</sup>Siano  $A \subseteq \mathbb{R}^N$  un insieme aperto,  $p \in A$  e  $f: A \rightarrow \mathbb{R}^M$  una funzione. Supponiamo che  $f$  ammetta tutte le derivabili parziali  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  in  $I_r(p)$  per un qualche  $r > 0$ , e che esse siano continue in  $p$ . Allora  $f$  è differenziabile in  $p$ .

Il campo elettrostatico è quindi definito come l'opposto del **gradiente**<sup>2</sup> del potenziale elettrostatico.

Abbiamo detto che il potenziale elettrostatico è un campo scalare. Il luogo dei punti del campo che hanno lo stesso potenziale sono dette **superfici equipotenziali**.

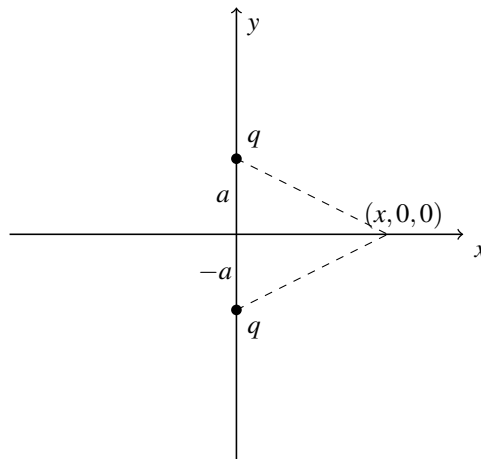
Dalla definizione di campo elettrostatico come gradiente del potenziale, possiamo affermare che *il campo è sempre perpendicolare alle superfici equipotenziali*. Inoltre, sempre da questa definizione, si può notare che *il campo elettrostatico è diretto da zone a potenziale minore a zone a potenziale maggiore*.

Esempi di superficie equipotenziale sono sfere concentriche nel caso della carica puntiforme e cilindri coassiali nel caso del filo indefinito carico.

## Particolari potenziali elettrostatici

Consideriamo ora alcune configurazioni particolari per determinare il loro potenziale elettrostatico e, se non lo conosciamo, il loro campo elettrostatico.

Iniziamo da due cariche  $q$  poste sull'asse  $y$  a distanza  $a$  dall'origine.



Il potenziale elettrostatico sull'asse  $x$  rispetto all'infinito è pari a

$$V_{\{2q\}}(x, 0, 0) - V(\infty) = \frac{2q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \quad r = \sqrt{a^2 + x^2} = \frac{2q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

Sapendo che il campo elettrostatico è il gradiente del potenziale elettrostatico, possiamo

<sup>2</sup>Nel calcolo differenziale vettoriale, il gradiente di una funzione a valori reali (ovvero di un campo scalare) è una funzione vettoriale. Il gradiente di una funzione è spesso definito come il vettore che ha come componenti le derivate parziali della funzione, anche se questo vale solo se si utilizzano coordinate cartesiane *ortonormali*.

In generale, il gradiente di una funzione  $f$ , denotato con  $\vec{\nabla}f$ , è definito in ciascun punto dalla seguente relazione: per un qualunque vettore  $\mathbf{v}$ , il prodotto scalare  $\mathbf{v} \cdot \vec{\nabla}f$  dà il valore della derivata direzionale di  $f$  rispetto a  $\mathbf{v}$ .

determinare che

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{\partial V}{\partial x} = -\left(\frac{2q}{4\pi\epsilon_0}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}2x = \frac{2q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \\ E_y &= -\frac{\partial V}{\partial y} = 0 \\ E_z &= -\frac{\partial V}{\partial z} = 0 \end{aligned}$$

Consideriamo ora un anello sottile, di raggio  $a$ , uniformemente carico con densità  $\lambda$ . Sappiamo che ogni carica  $dq = \lambda dl$  si trova a potenziale infinitesimo  $dV(dq) = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{\lambda dl}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$ .

Il potenziale complessivo dell'anello è quindi

$$\begin{aligned} V_{\{2q\}}(x, 0, 0) - V(\infty) &= \int_x^\infty dV(dq) = \int_x^\infty \frac{\lambda dl}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} = \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\pi a}{r} \underset{r=\sqrt{a^2+x^2}}{=} \frac{\pi a \lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}} \end{aligned}$$

Sapendo che il campo elettrostatico è il gradiente del potenziale elettrostatico, possiamo determinare che

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{\partial V}{\partial x} = -\left(\frac{\pi a \lambda}{2\pi\epsilon_0}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}2x = \frac{\pi a \lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \\ E_y &= -\frac{\partial V}{\partial y} = 0 \\ E_z &= -\frac{\partial V}{\partial z} = 0 \end{aligned}$$

Consideriamo ora una sfera uniformemente carica. Abbiamo già calcolato il campo elettrostatico, che corrisponde a

$$\mathbf{E}(r) = \begin{cases} \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \mathbf{r} & \text{se } r < R \\ \frac{\rho_0 \frac{4}{3}\pi R^3}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{Q_{\text{sfera}}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{u} & \text{se } r > R \end{cases}$$

Il potenziale elettrostatico è quindi

$$V(r) - V(\infty) = \int_r^\infty \mathbf{E}(r) dr = \begin{cases} \int_r^R \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \mathbf{r} dr + \int_R^\infty \frac{Q_{\text{sfera}}}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \frac{R^2 - r^2}{2} + \frac{Q_{\text{sfera}}}{4\pi\epsilon_0 r^2} & \text{se } r < R \\ \frac{Q_{\text{sfera}}}{4\pi\epsilon_0 r^2} & \text{se } r > R \end{cases}$$

## 9.6 Conduttori e dielettrici

Tutti i fenomeni descritti finora trovano una spiegazione coerente solo se si presuppone l'esistenza di cariche elettriche all'interno dei corpi.

Dagli studi della Fisica Atomica e della Chimica, infatti, sappiamo che tutta la materia che ci circonda è formata da tre *particelle elementari*, denominate **protoni**, **elettroni** e **neutroni**, raggruppati secondo rapporti precisi in **atomi** mediante l'*interazione forte*.

La massa dell'elettrone, con qualche approssimazione, è uguale alla massa del protone ( $m_n = 1,67 \cdot 10^{-27}$  kg), mentre la massa dell'elettrone è  $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31}$  kg. La carica dell'elettrone, indicata con  $e$ , è finora la carica elettrica più piccola osservata, per questo è detta **carica elementare** e viene considerata come puntiforme.

In base a questa descrizione, possiamo distinguere i corpi in due grosse classificazioni: *conduttori* e *isolanti* (o *dielettrici*).

I **conduttori** sono corpi in cui parte della carica elettrica, in altre parole parte degli elettroni, sono liberi di muoversi al loro interno; sono materiali conduttori i metalli e i solidi ionici, ad esempio.

Gli **isolanti** (detti anche **dielettrici**) sono corpi in cui la carica elettrica è molto ancorata al *nucleo atomico* (formato dai protoni e dai neutroni), rendendo impossibile così il loro moto; sono materiali isolanti, ad esempio, il vetro e la plastica.

Per il momento ci concentriamo sui materiali conduttori, e in particolare sui materiali metallici, in cui sono presenti più elettroni liberi di muoversi.

Se applichiamo un campo elettrostatico al metallo, gli elettroni al suo interno inizieranno a muoversi, generando una *corrente elettrica*, di cui discuteremo in seguito. Se consideriamo però fenomeni elettrostatici, le cariche devono rimanere ferme; ciò richiede che il campo elettrostatico all'interno del conduttore sia nullo, quindi che la forza elettrostatica applicata a ogni elettrone sia nulla. Quindi, se fuori esiste un campo elettrostatico, all'interno del conduttore vi sarà un cambiamento della distribuzione di carica tale da mantenere il campo nullo. Inoltre, il potenziale elettrostatico è costante in ogni punto del metallo, proprio perché il campo elettrostatico è nullo; ciò comporta che il conduttore è una superficie metallica.

La condizione di campo nullo all'interno del conduttore, comporta anche che se v'è presenza di eccesso o di difetto di carica, questa si porta sulla superficie del conduttore. In base al teorema di Gauss, infatti, se prendiamo una superficie tutta interna al conduttore, abbiamo flusso nullo, quindi carica interna nulla.

Al di fuori di un conduttore, nelle vicinanze della superficie, si ha che il campo elettrostatico è perpendicolare alla superficie, in quando il conduttore è perpendicolare alle superfici equipotenziali presenti nello spazio.

Tutto ciò serve a spiegare il fenomeno dell'*induzione elettrostatica*.

Supponiamo di avvicinare una bacchetta carica a un elettroscopio a foglie senza toccarlo: notiamo che le foglie divergono. Analizzando meglio, notiamo che sulle foglie si è accumulata una carica positiva pari a quella della bacchetta, mentre sulla parte esterna del conduttore si è accumulata una carica negativa, pari in modulo a quella positiva, tale quindi da mantenere il conduttore neutro. Questo processo comporta quindi una condizione di equilibrio a cariche ferme.

La perpendicolarità del campo elettrostatico alla superficie di un conduttore è dimostrabile applicando il teorema di Gauss.

Consideriamo una superficie infinitesima del conduttore e un cilindro retto di base  $\Sigma$ , altezza  $dh$  e avente una base all'interno del conduttore e una all'esterno. Sappiamo che la carica interna a questo cilindro è  $dQ_\Sigma = \sigma d\Sigma$  e che il flusso attraverso il cilindro è  $\mathbf{E}_{ext} \cdot \hat{u}_{n_1} d\Sigma + \mathbf{E}_{int} \cdot \hat{u}_{n_2} d\Sigma + d\Phi_{mantello}(dh)$ . Se portiamo  $dh$  a zero, il versore  $\hat{u}_{n_1}$  corrisponderà al versore  $\hat{u}_{n(\Sigma)ext}$ , il flusso attraverso il mantello diventa nullo e il campo esterno al

conduttore diventa il campo sulla superficie; otteniamo così:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{ext} \cdot \hat{u}_{n1} d\Sigma &= \frac{\sigma d\Sigma}{\epsilon_0} \\ \mathbf{E}_\Sigma \cdot \hat{u}_n d\Sigma &= \frac{\sigma d\Sigma}{\epsilon_0} \\ \mathbf{E}_\Sigma &= \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{u}_n\end{aligned}\quad (9.15)$$

L'Equazione 9.15 rappresenta il **teorema di Coulomb**, in cui il verso del campo è uscente se la densità è positiva, è entrante se la densità è negativa.

Dal teorema di Coulomb notiamo che il modulo del campo elettrostatico è maggiore dove è maggiore la densità, la quale è inversamente proporzionale al raggio di curvatura dalla superficie (*potere dispersivo delle punte*).

### Schermo elettrostatico e capacità di un conduttore

Consideriamo ora un conduttore carico che abbia al suo interno una cavità priva di cariche.

Nella totalità del conduttore, il campo elettrostatico è nullo, quindi è nullo il flusso attraverso qualunque superficie chiusa che racchiuda la cavità. Ciò comporta che sulle pareti della cavità la carica è nulla.

Non è nemmeno possibile sulle pareti una separazione della carica. Infatti, se sulle pareti ci fossero due distribuzioni di carica di segno opposto, ci sarebbe un campo elettrostatico, la cui circuitazione attraverso una linea che passi sia attraverso la cavità sia attraverso il vuoto e attraverso il conduttore non è nulla, in contrasto con il fatto che il campo è conservativo.

Secondo questa dimostrazione, il potenziale elettrostatico in un qualsiasi punto della cavità è uguale a quello del conduttore. Se è presente un campo elettrostatico esterno, cambia quindi il potenziale del sistema. Se la cavità non è in comunicazione con l'esterno, allora il conduttore costituisce uno **schermo elettrostatico** perfetto tra spazio interno e spazio esterno.

Consideriamo ora un conduttore carico, contenente carica  $Q$  sulla sua superficie e isolato dal resto dello spazio. Si definisce **capacità di un conduttore isolato** la grandezza

$$C = \frac{Q}{V - V_\infty} \quad (9.16)$$

La capacità, che nel Sistema Internazionale è misurata in *coulomb su volt*, cioè in **farad** (F), è un fattore geometrico, quindi non dipende dalla carica complessiva presente sulla superficie, ma dalla forma della superficie.

Poniamo ora all'interno della cavità del conduttore cavo carico un conduttore carico isolato. In condizioni di equilibrio, se il condensatore interno ha sulla sua superficie una carica  $q$ , nella superficie sulla cavità si dispone una carica  $-q$  e sulla superficie esterna una carica  $q$ . Tutto ciò è spiegabile grazie al teorema di Gauss. Attraverso una superficie  $\Sigma$  interna al conduttore cavo e contenente la cavità, il flusso è nullo, poiché è nullo il campo elettrostatico; quindi la carica del conduttore interno si dispone sulla superficie del conduttore esterno.

Il fenomeno qui descritto è denominato **induzione completa**.

Quando due conduttori dotati di carica opposta ma uguale in modulo sono in condizione d'induzione completa, tutte le linee del campo elettrostatico sono dirette dall'uno all'altro conduttore.

## 9.7 Condensatori

Quando due corpi sono dotati di cariche uguali in modulo ma opposte in segno e si trovano in condizione d'induzione completa, il sistema così formato prende il nome di **condensatore**. I due conduttori prendono il nome di **armature del condensatore**. Anche per il condensatore si definisce la grandezza **capacità del condensatore**

$$C = \frac{Q}{\Delta V} \quad (9.17)$$

che è un fattore geometrico misurato in *farad*.

Nei circuiti elettrici, un condensatore si indica con il simbolo visibile nella Figura 9.2, ove viene utilizzato come deposito di carica; infatti, pur essendo al suo interno la carica totale nulla, si può osservare una separazione delle cariche. Grazie a opportuni collegamenti

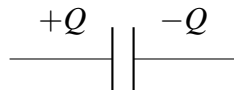


Figura 9.2: Rappresentazione circuitale di un condensatore

esterni è possibile far fluire la carica da un'armatura a un'altra, generando una *corrente elettrica di scarica*.

### Collegamenti in serie e in parallelo di condensatori

In un circuito si possono collegare, mediante fili conduttori, più condensatori tra loro, in modo da poter essere considerati come un condensatore unico. A seconda del collegamento, la capacità equivalente varia.

Le due connessioni possibili sono la *connessione in serie* e la *connessione in parallelo*.

La **connessione in parallelo** (Figura 9.3) consiste nel porre due o più condensatori alla stessa differenza di potenziale. Le cariche presenti su ogni singolo condensatore sono  $q_1 = C_1 \Delta V$  per il condensatore  $C_1$  e  $q_2 = C_2 \Delta V$  per il condensatore  $C_2$ . La carica globale presente sulle due armature superiori è  $q = q_1 + q_2 = (C_1 + C_2) \Delta V$ . La capacità del condensatore avente come armatura le due armature dei due condensatori collegati da un filo conduttore è

$$C_{eq} = \frac{q}{\Delta V} = \frac{q_1}{\Delta V} + \frac{q_2}{\Delta V} = C_1 + C_2$$

In generale, in un sistema di condensatori in parallelo, la capacità equivalente è la somma delle singole capacità, quindi è sempre maggiore di quella di ogni singolo condensatore.

$$C_{eq} = \sum_i C_i \quad (9.18)$$

La **connessione in serie** (Figura 9.4) consiste nel porre su ogni armatura di ogni condensatore collegato la stessa carica. Ai capi del condensatore  $C_1$  è applicata la differenza di

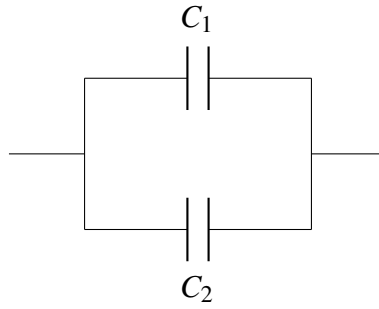


Figura 9.3: Collegamento in parallelo di condensatori



Figura 9.4: Collegamento in serie di condensatori

potenziale  $V_C - V_B = \frac{q}{C_1}$ , mentre ai capi del condensatore  $C_2$  è applicata la differenza di potenziale  $V_B - V_A = \frac{q}{C_2}$ . La differenza di potenziale complessivamente applicata è

$$V_C - V_A = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2} = q \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) = \frac{q}{C_{eq}}$$

In generale, l'inverso della capacità equivalente di un sistema di condensatori in serie corrisponde alla somma degli inversi delle capacità singole; il valore della capacità equivalente, quindi, è sempre minore delle singole capacità.

$$\frac{1}{C_{eq}} = \sum_i \frac{1}{C_i} \quad (9.19)$$

### Partitore capacitivo

Consideriamo ora tre condensatori in serie, ai capi dei quali applichiamo una differenza di potenziale  $\Delta V = V_A - V_B$  mediante un *generatore di differenza di potenziale* (Figura 9.5). Questa differenza di potenziale applicata è pari a  $\Delta V = \frac{q}{C_{eq}} = q \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \right)$ .

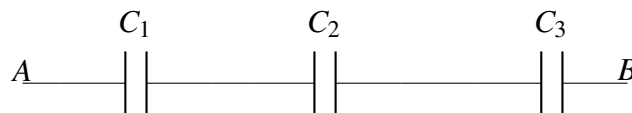


Figura 9.5: Partitore capacitivo

Se vogliamo determinare la differenza di potenziale ai capi di un singolo condensatore,

abbiamo che

$$\begin{aligned}\Delta V_{C_1} &= \frac{q}{C_1} = \frac{C_{eq}\Delta V}{C_1} = \frac{\frac{C_1 C_2 C_3}{C_1 C_2 + C_2 C_3 + C_1 C_3} \Delta V}{C_1} = \\ &= \frac{C_2 C_3}{C_1 C_2 + C_2 C_3 + C_1 C_3} \Delta V = \frac{1}{1 + \frac{C_1}{C_2} + \frac{C_1}{C_3}} \Delta V\end{aligned}\quad (9.20)$$

La situazione appena descritta prende il nome di **partitore capacitivo**, poiché ripartisce la differenza di potenziale ai capi di ogni singolo condensatore (o capacitore) secondo le loro capacità.

## Configurazioni particolari di condensatori

Vediamo ora alcune configurazioni particolari per i condensatori, per i quali è facile determinare la capacità.

Consideriamo un **condensatore sferico** e poniamo *a terra*<sup>3</sup> l'armatura esterna. La carica che era presente sulla superficie esterna si disperde a terra, mentre la carica presente nella cavità rimane collocata sempre sulle superfici.

Staccando la messa a terra, la superficie esterna è scarica, quindi il campo elettrostatico e il potenziale elettrostatico sono nulli nella regione di spazio esterna alle armature; anche all'interno della prima armatura campo e potenziale sono nulli, mentre tra la prima e la seconda armatura il campo vale  $E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ , mentre il potenziale vale  $V(r) - V(\infty) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R_2} \right)$ . All'interno della seconda armatura il campo è nullo, mentre il potenziale vale  $V(r) - V(\infty) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$ . Quest'ultimo valore corrisponde alla differenza di potenziale tra le armature.

La capacità di un condensatore sferico è

$$C = \frac{Q}{V(r) - V(\infty)} = \frac{Q}{\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)} = 4\pi \frac{R_1 R_2}{R_1 - R_2} \epsilon_0$$

Se la distanza tra le armature è molto piccola, la capacità del condensatore sferico è approssimata a quella di un *condensatore piano*.

$$C = 4\pi \frac{R_1 R_2}{R_1 - R_2} \epsilon_0 \approx \epsilon_0 \frac{4\pi E_1^2}{h} = \epsilon_0 \frac{\Sigma_{\text{sfera}}}{h}$$

Un **condensatore piano** è un condensatore formato da un doppio strato indefinito di carica con una delle dimensioni molto minori rispetto alla loro superficie (approssimazione effettuata in modo tale da poter risolvere analiticamente le espressioni del campo e del potenziale).

Trascurando l'effetto dei bordi, sappiamo che sul piano è presente una densità di carica  $\sigma = \frac{Q}{\Sigma}$ , che all'interno è presente un campo elettrostatico  $E = \frac{Q}{\epsilon_0 \Sigma}$  e che si può determinare il potenziale come  $\Delta V = \frac{Q}{\epsilon_0 \Sigma} h$ .

<sup>3</sup>Con **messa a terra** s'intende un collegamento elettrico tra la Terra e il conduttore, che acquista lo stesso potenziale del terreno; se un conduttore è collegato elettricamente a un involucro metallico, si dice **messa a massa**



La capacità di un condensatore piano è quindi

$$C = \epsilon_0 \frac{\Sigma}{h}$$

Consideriamo ora due superfici cilindriche coassiali, l'una di raggio  $R_1$  e l'altra di raggio  $R_2 > R_1$ , di ugual lunghezza  $d$  molto grande rispetto ai raggi. Formiamo così un **condensatore cilindrico**.

Sappiamo che la differenza di potenziale tra le armature è

$$V_1 - V_2 = \int_{R_1}^{R_2} \mathbf{E} \, dr = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \, dr = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

e che la carica contenuta è  $q = \lambda d$ , quindi la *capacità di un condensatore cilindrico* è

$$C = \frac{q}{V_1 - V_2} = \frac{\lambda d}{\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} = \frac{2\pi\epsilon_0 d}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$$

## Energia elettrostatica del condensatore

Per *caricare un condensatore* (processo che vedremo meglio in seguito) si deve passare dalla situazione di carica nulla sulle armature alla situazione di armature cariche che determina una differenza di potenziale tra le armature. Occorre, quindi, separare le cariche e, per farlo, bisogna usare un certo lavoro che, perché il campo elettrostatico è conservativo, dipende solo dalla situazione iniziale e dalla situazione finale.

Il lavoro che si compie per spostare una carica  $dq$  dalla seconda armatura alla prima è pari a  $dW(dq: 2 \rightarrow 1) = \int_2^1 d\mathbf{F}_{\text{operatore}} \, ds$ , dove  $d\mathbf{F}_{\text{operatore}} = -\mathbf{E} \cdot dq$ . La forza complessiva che un operatore deve applicare al sistema per spostare una carica è pari a

$$d\mathbf{F}_{\text{operatore}} = - \int_2^1 \mathbf{E} \cdot ds \, dq = dq \int_2^1 \mathbf{E} \, ds = dq(V_1 - V_2)$$

Il lavoro compiuto per spostare quella singola carica è

$$dW(dq: 2 \rightarrow 1) = \int_2^1 d\mathbf{F}_{\text{operatore}} \, ds = dq(V_1 - V_2) = \frac{q}{C} dq$$

e il lavoro complessivo compiuto per compiere la separazione delle cariche è

$$W = \int dW = \int_0^q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}$$

Questo lavoro, che dipende solo dalla carica trasportata e dalla capacità del condensatore e che viene effettuato contro la forza elettrostatica, è immagazzinato nel sistema sotto forma di **energia elettrostatica del condensatore**.

Imponendo che l'energia sia nulla se la carica è nulla, il lavoro corrisponde perfettamente all'energia potenziale elettrostatica; possiamo quindi scrivere che, per il condensatore

$$U_e = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} = \frac{1}{2} C (\Delta V)^2 = \frac{1}{2} q \Delta V \quad (9.21)$$

Questo ragionamento porta a legare l'energia potenziale alla capacità del condensatore.

È però possibile trovare un'espressione dell'energia legata al campo elettrostatico prodotto dal sistema di cariche.

Consideriamo per semplicità un *condensatore piano*, il cui campo elettrostatico tra le armature è uniforme. Se sostituiamo la capacità nota e la relazione  $\Delta V = Eh$ , otteniamo

$$U_e = \frac{1}{2}C(\Delta V)^2 = \frac{1}{2}\frac{\epsilon_0\Sigma}{h}E^2h^2 = \frac{1}{2}\epsilon_0E^2\Sigma h = \frac{1}{2}\epsilon_0E^2\tau$$

dove  $\tau = \Sigma h$  il volume occupato dal condensatore.

Se ipotizziamo che l'energia elettrostatica sia distribuita solamente dove c'è campo e che questa distribuzione sia uniforme come il campo, possiamo dire che la **densità di energia elettrostatica**, in altre parole l'energia per unità di volume, sia pari a

$$u_e = \frac{U_e}{\tau} = \frac{1}{2}\epsilon_0E^2 \quad (9.22)$$

## Polarizzazione elettronica

Finora abbiamo visto come varia il campo all'interno di un conduttore. Adesso vogliamo vedere cosa succede se applichiamo un campo elettrostatico a un materiale isolante.

Abbiamo detto che, applicando un campo elettrostatico a un conduttore, il fenomeno dell'induzione elettrostatica avviene la separazione delle cariche grazie al fatto che le cariche all'interno sono libere di muoversi.

Negli isolanti, gli elettroni non sono liberi di muoversi; per far avvenire la separazione, occorre agire dall'esterno. Applicando un campo elettrostatico dall'esterno ( $\mathbf{E}_0$ ), gli elettroni subiscono solamente un piccolo spostamento, dell'ordine di circa  $1 \text{ \AA}^4$ . Questo spostamento provoca un campo elettrostatico di verso opposto a quello esterno, denominato **campo di polarizzazione** ( $\mathbf{E}_p$ ), che si oppone allo spostamento, se pur minimo, della nube elettronica dell'isolante.

Questo campo è dovuto alle sole cariche spostate rispetto alla posizione iniziale (**cariche di polarizzazione**).

All'interno del materiale isolante, quindi, il campo totale di cui risentono le cariche elettriche ( $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_p$ ) è sempre minore del campo esterno applicato; ciò è il motivo per cui i materiali isolanti, quando sono elettrizzati, riescono ad attirare piccoli oggetti neutri.

Una spiegazione più semplice di questo fenomeno, denominato **polarizzazione elettronica**, si ha sfruttando il teorema di Gauss ( $\oint_{\Sigma} \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \hat{u}_n d\Sigma = (q + q_p)_{\Sigma}$ ). Questa considerazione ci permette di affermare che il campo di polarizzazione in un punto è direttamente proporzionale al campo esterno nello stesso punto. La costante di proporzionalità, che denominiamo  $C$ , indica la possibile variazione di direzione, modulo e verso del campo di polarizzazione rispetto al campo esterno.

La variazione della direzione comporterebbe che  $C$  sia una matrice di valori corrispondenti al punto in cui si trova, tale da modificare la direzione del vettore. Se la sostanza isolante è *isotropa*, ovvero le sue proprietà fisiche non dipendono dalla direzione di osservazione, allora  $C$  è solamente una costante che dipende dalla posizione del punto di osservazione. Infine, se il materiale isolante è *omogeneo*, cioè la sua densità è costante,

---

<sup>4</sup>  $1 \text{ \AA}$  (leggi *ångström*) =  $10 \cdot 10^{-10} \text{ m}$

allora  $C$  rappresenta solamente una costante moltiplicativa, tipica del materiale, che comprende in sé l'effetto delle cariche di polarizzazione ( $\mathbf{E}_p(x, y, z) = -C\mathbf{E}_0(x, y, z)$ ).

In conclusione, è possibile definire un particolare vettore, detto **vettore polarizzazione** ( $\mathbf{P} = -\epsilon_0\mathbf{E}_p$ ) che rappresenta l'effetto del campo di polarizzazione all'interno dell'isolante. Grazie a questo vettore possiamo determinare la relazione  $\epsilon_0\mathbf{E} = \epsilon_0\mathbf{E}_0 + \epsilon_0\mathbf{E}_p = \epsilon_0\mathbf{E}_0 - \mathbf{P}$ , la quale permette di ricalcolare il flusso del campo come

$$\oint_{\Sigma} \epsilon_0\mathbf{E} \cdot \hat{u}_n d\Sigma = \oint_{\Sigma} (\epsilon_0\mathbf{E}_0 - \mathbf{P}) \cdot \hat{u}_n d\Sigma = q_{\Sigma}$$

Abbiamo così determinato un nuovo vettore, detto **spostamento dielettrico** o **induzione elettrostatica** ( $\mathbf{D} = \epsilon_0\mathbf{E} - \mathbf{P}$ ) che rappresenta il campo elettrico attraverso un materiale isolante (*dielettrico*).

Vediamo ora qual è la relazione costitutiva che c'è tra il vettore campo elettrostatico e il vettore induzione elettrostatica.

$$\begin{aligned} \epsilon_0\mathbf{E} &= \epsilon_0\mathbf{E}_0 + \epsilon_0\mathbf{E}_p = \epsilon_0\mathbf{E}_0 - \mathbf{P} = \\ &= \epsilon_0 \left( -\frac{1}{C}\mathbf{E}_p + \mathbf{E}_p \right) = \epsilon_0\mathbf{E}_p \left( \frac{1}{C} \right) = \\ &= -\epsilon_0\mathbf{E}_p \left( \frac{1-C}{C} \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \epsilon_0\mathbf{E} &= \frac{1-C}{C}\mathbf{P} \end{aligned}$$

La grandezza  $\frac{C}{1-C}$  viene indicata con il simbolo  $\chi$  e prende il nome di **suscettività elettrica del dielettrico**.

Quindi si ha che  $\epsilon_0\mathbf{E} = \frac{1}{\chi}\mathbf{P} \Rightarrow \epsilon_0\chi\mathbf{E}$ , ovvero

$$\mathbf{D} = \epsilon_0\mathbf{E} - \mathbf{P} = \epsilon_0(1 + \chi)\mathbf{E}$$

La grandezza  $1 + \chi$ , indicata con la lettera  $\kappa = \epsilon_r$ , prende il nome di **costante dielettrica relativa del dielettrico** e rappresenta la riduzione della differenza di potenziale applicata a un conduttore in assenza e in presenza dell'isolante.

Questo valore, come la suscettività, sono numeri puri, quindi adimensionali; il vettore induzione elettrostatica e il vettore polarizzazione, invece, nel Sistema Internazionale si misurano in *coulomb su metro quadrato* ( $C/m^2$ ).

È possibile indicare in un'unica costante l'influenza del dielettrico sul campo elettrico; definiamo quindi la **costante dielettrica assoluta del dielettrico** come  $\epsilon = \kappa\epsilon_0$ .

Sappiamo che nel vuoto ( $\kappa = 1$ ), le cariche  $q$  determinano un campo d'induzione elettrostatica  $\mathbf{D} = \epsilon_0\mathbf{E}$ , mentre nel dielettrico le stesse cariche determinano un campo d'induzione elettrostatica  $\mathbf{D} = \epsilon_0\kappa\mathbf{E}$ . Il campo elettrico nel dielettrico è quindi  $\mathbf{E} = \frac{\mathbf{E}_0}{\kappa}$  e la differenza di potenziale è  $\Delta V = \frac{\Delta V_0}{\kappa}$ .

Se riempiamo un condensatore con un materiale dielettrico, la sua capacità sarà  $C_{\text{dielettrico}} = \kappa C_{\text{vuoto}}$ .

Se all'interno di un condensatore inseriamo un materiale dielettrico, la sua energia elettrostatica varia.

$$U_{e\kappa} = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C_{\text{dielettrico}}} = \frac{1}{2} \frac{q^2}{\kappa C_{\text{vuoto}}} < U_{e\text{vuoto}} \quad (9.23)$$

Anche per il condensatore piano varia l'energia elettrostatica se si inserisce materiale dielettrico.

$$\begin{aligned} U_{e\kappa} &= \frac{1}{2} \frac{q^2}{\kappa C_{\text{vuoto}}} = \frac{1}{2} q \Delta V = \frac{1}{2} q |\mathbf{E}_{\text{dielettrico}}| d = \frac{1}{2} q \frac{\sigma}{\epsilon_0 \kappa} d \frac{\Sigma}{\Sigma} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{\epsilon_0 \kappa} (d \Sigma) = \frac{1}{2} \sigma \frac{\sigma}{\epsilon_0 \kappa} (d \Sigma) = \frac{1}{2} |\mathbf{D}| |\mathbf{E}| \tau \end{aligned}$$

Se ipotizziamo che l'energia elettrostatica sia distribuita solamente dove c'è campo e che questa distribuzione sia uniforme come il campo, possiamo dire che la densità di energia elettrostatica è pari a

$$u_{e\kappa} = \frac{U_{e\kappa}}{\tau} = \frac{1}{2} |\mathbf{D}| |\mathbf{E}| \quad (9.24)$$

### Forza di attrazione tra le armature

Poiché sulle due armature sono distribuite cariche opposte, queste tenderanno ad attrarsi l'una con l'altra con una forza particolare. Sappiamo che il condensatore possiede un'energia elettrostatica  $U_e = \frac{1}{2} = \epsilon_0 E^2 \Sigma x$  complessiva. Questa energia complessiva è composta di contributi infinitesimi  $dU_e = \frac{1}{2} = \epsilon_0 E^2 \Sigma dx$ , ciascuno dei quali dovuto al lavoro infinitesimo  $dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}$ . Da qui ricaviamo che la **forza con cui le due armature si attraggono** è

$$|\mathbf{F}| = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \Sigma = \frac{\sigma^2}{2 \epsilon_0} \Sigma = \frac{\sigma}{2 \epsilon_0} Q \quad (9.25)$$

# Capitolo 10

## Elettrodinamica

Dopo aver studiato gli effetti delle cariche elettriche localizzate e le loro relazioni, possiamo ora a studiare come si muovono queste cariche in presenza di un campo elettrico. Iniziamo, dunque, l'analisi dell'*elettrodinamica*.

### 10.1 Corrente elettrica

Nel capitolo precedente, abbiamo affermato che i campi elettrostatici sono campi conservativi e che i conduttori che risentono di questi campi si trovano in una condizione di equilibrio elettrostatico, ovvero i portatori di carica si muovono solo per un breve tempo, fino a quando non riescono a trovare una posizione di equilibrio e si fermano, rimanendo poi in quiete. Il movimento delle cariche genera, all'interno del conduttore, una corrente elettrica temporanea.

Se vogliamo rendere questa corrente temporanea continua nel tempo, dobbiamo fare in modo che il conduttore risenta di un campo elettrico *non conservativo*.

Consideriamo un circuito formato solamente da un condensatore carico e da un interruttore.

Se il circuito è aperto ed è immerso in un campo coulombiano, ovvero conservativo, parte dell'energia elettrostatica propria del campo si trasforma in *calore* fino a quando le particelle all'interno del conduttore non raggiungono l'equilibrio elettrostatico.

Quando chiudiamo l'interruttore, in condizione di equilibrio elettrostatico, sia le cariche positive sia le cariche negative presenti sulle armature scorreranno lungo il filo, fino a quando il sistema non raggiungerà nuovamente l'equilibrio.

Inseriamo ora nel circuito un **generatore di differenza di potenziale**, il cui simbolo circuitale è visibile in Figura 10.1. Le cariche riescono a scorrere lungo il conduttore solamente grazie alla presenza di un campo non conservativo generato dal generatore, il cui verso è opposto a quello del campo elettrostatico presente in precedenza.

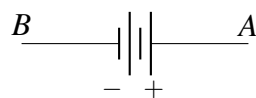


Figura 10.1: Rappresentazione circuitale di un generatore di differenza di potenziale

Tutto ciò, quindi, comporta che le cariche all'interno del conduttore non raggiungeranno mai una situazione di equilibrio elettrostatico, ma una situazione di equilibrio dinamico. Questo fenomeno, che avviene in assenza di equilibrio statico, prende il nome di **conduzione elettrica**.

Poiché la corrente scorre proprio grazie al campo non conservativo generato dal generatore, possiamo affermare che ai capi del generatore vi è una differenza di potenziale e che la corrente è diretta dalle zone con potenziale minore alle zone con potenziale maggiore.

L'equivalente della differenza di potenziale elettrostatico ( $\Delta V = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$ ) per i campi non conservativi prende il nome di **tensione elettrica tra due punti A e B lungo il percorso C**.

$$T_1 = \int_A^B \mathbf{E}_{nc} \cdot d\mathbf{s} \quad (10.1)$$

Anche per la tensione elettrica, l'unità di misura nel Sistema Internazionale è **joule su coulomb** (J/C).

Supponiamo ora che in una certa porzione di conduttore vi siano  $n$  portatori di carica per unità di volume e che in essa agisca un campo elettrico prodotto da un generatore; questi portatori di carica si muovono sotto l'azione di una forza, proporzionale al campo elettrico, lungo la stessa direzione del campo acquistando una certa velocità  $v_d$ , detta **velocità di deriva**. Questo moto, ordinato rispetto al moto preesistente, dà origine a una **corrente elettrica**.

Possiamo definire una nuova grandezza, denominata **intensità di corrente elettrica** attraverso una superficie  $\Sigma$  interna al conduttore come

$$i = \frac{dq}{dt} \quad (10.2)$$

Per mettere in relazione la corrente elettrica con il moto delle cariche, consideriamo una superficie infinitesima  $d\Sigma$ , il cui versore normale forma un angolo  $\theta$  con il vettore campo elettrico  $\mathbf{e}$ , quindi, con la velocità di deriva.

Se l'angolo  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , allora il volume infinitesimo percorso nel tempo  $dt$  è uguale a  $d\tau = v_d dt \cdot d\Sigma$ ; se invece la superficie è inclinata, il volume infinitesimo è uguale a  $d\tau = v_d dt \cdot d\Sigma \cos \theta$ . In questo volumetto sono contenute  $dq = nq d\tau = \rho d\tau$  cariche.

La corrente prodotta da queste cariche è

$$di = \frac{dq}{dt} = \frac{\rho d\tau}{dt} = \rho \frac{v_d dt \cdot d\Sigma \cos \theta}{dt} = \rho v_d d\Sigma \cos \theta$$

Dal punto di vista vettoriale, possiamo definire un vettore, parallelo alla velocità di deriva, che indica il numero di cariche elettriche che stanno attraversando una superficie: la **densità di corrente**.

$$\mathbf{J} = \rho v_d = nq v_d \quad (10.3)$$

Possiamo quindi scrivere che  $di = \mathbf{J} \cdot \hat{u}_n \cdot d\Sigma$ .

In generale, la densità di corrente non dipende dal segno della carica, ma dipende solo dal campo elettrico, rispetto al quale è concorde.

L'intensità di corrente attraverso una superficie finita è quindi

$$i = \int_{\Sigma} \mathbf{J} \cdot \hat{u}_n \, d\Sigma \quad (10.4)$$

Nel Sistema Internazionale, l'unità di misura dell'intensità di corrente è il *coulomb su secondo*, che prende il nome di **ampere** ( $A=C/s$ ).

Consideriamo ora una superficie chiusa attraversata da una corrente  $i = \oint_{\Sigma} \mathbf{J} \cdot \hat{u}_n d\Sigma$ . In base alla conservazione della carica elettrica, la quantità di cariche entranti nella superficie e di cariche uscenti dalla superficie deve rimanere costante nel tempo.

Si ottiene così la definizione della cosiddetta **equazione di continuità**.

$$i = \oint_{\Sigma} \mathbf{J} \cdot \hat{u}_n d\Sigma = -\frac{dq_{\Sigma}}{dt} \quad (10.5)$$

Abbiamo detto che la corrente è un fenomeno che può variare nel tempo.

Nel caso in cui, in un tratto di conduttore, il valore della corrente non varia nel tempo, allora ci troviamo in **condizioni stazionarie**. Applicando l'equazione di continuità, abbiamo che  $\oint_{\Sigma} \mathbf{J} \cdot \hat{u}_n d\Sigma = 0$ .

Ciò non significa che le cariche stanno ferme all'interno del conduttore, ma che, in quel tratto di conduttore, tante cariche entrano, tante cariche escono.

## 10.2 La legge di Ohm

Consideriamo ora un conduttore percorso da corrente e consideriamo due diverse sezioni del nostro conduttore.

Le intensità di corrente che attraversano queste due sezioni sono  $i_1 = \oint_{\Sigma_1} \mathbf{J} \cdot \hat{u}_{n_1} d\Sigma_1$  per la prima sezione e  $i_2 = \oint_{\Sigma_2} \mathbf{J} \cdot \hat{u}_{n_2} d\Sigma_2$  per la seconda sezione; questi due valori rappresentano la carica entrante e la carica uscente nel volume di conduttore delimitato dalle sue sezioni. Se s'ipotizza che all'interno di questo volume la carica contenuta non vari nel tempo, in altre parole se s'ipotizza di trovarsi in condizioni stazionarie, questi due valori dovranno essere uguali.

Se la condizione di stazionarietà ( $\oint_{\Sigma} \mathbf{J} \cdot \hat{u}_n d\Sigma = 0$ ) è valida per qualunque superficie chiusa, il vettore densità di corrente è definito **vettore solenoidale** e il flusso di questo vettore attraverso una superficie aperta di contorno  $C$  dipende solo dal contorno.

Se consideriamo una superficie chiusa e la dividiamo a metà con una linea chiusa  $C$ , il flusso attraverso la prima metà di superficie è uguale a quello attraverso la seconda metà di superficie, quindi il flusso dipende solo dalla linea scelta. In questo caso,  $\oint_{\Sigma(C)} \mathbf{J} \cdot \hat{u}_n d\Sigma$  è detto **flusso concatenato al contorno  $C$** .

Solo se ci troviamo, quindi, in condizioni di stazionarietà si può parlare di *vettore densità di corrente solenoidale*. La particolarità dei vettori solenoidali che i campi da loro descritti hanno sempre linee di flusso chiuse; se non fosse così, il flusso attraverso la superficie sarebbe pari a zero.

Riepilogando, in un conduttore sottoposto a una differenza di potenziale, abbiamo che, in condizioni stazionarie, la densità di corrente  $\mathbf{J}$  è legata al campo elettrico dalla relazione, nota come **legge di Ohm della conduttività elettrica**.

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (10.6)$$

In questa formula,  $\sigma$  rappresenta una grandezza caratteristica del conduttore, detta conduttività elettrica.

Questa legge venne stabilita sperimentalmente e verificata anche nella conduzione nei gas

e nei liquidi.

Applicando il secondo principio della dinamica ai portatori di carica descritti dalla densità di corrente, abbiamo che  $m_q \mathbf{a} = q\mathbf{E} - b\mathbf{v}$ , dove  $b$  rappresenta l'*attrito viscoso* interno del conduttore. Sapendo che l'accelerazione è la derivata della velocità nell'unità di tempo, ricaviamo qual è la velocità limite cui si possono muovere i portatori di carica quando l'accelerazione è nulla.

$$q\mathbf{E} = b\mathbf{v}_{lim} \Rightarrow q\mathbf{E} = b\mathbf{v}_d \Rightarrow \mathbf{v}_d = \frac{q}{b}\mathbf{E}$$

Se moltiplichiamo tutto per la densità volumetrica di carica otteniamo

$$\rho \mathbf{v}_d = \rho \frac{q}{b}\mathbf{E}$$

La grandezza  $\rho \frac{q}{b}\mathbf{E}$  corrisponde alla conducibilità, quindi possiamo scrivere

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \Rightarrow \mathbf{E} = \rho \mathbf{J}$$

In questo caso,  $\rho$  prende il nome di **resistività** del conduttore: minore è la resistività del conduttore, maggiore è la densità di corrente che può circolare in un conduttore, a parità di campo elettrico.

Applichiamo ora la legge di Ohm a un conduttore metallico cilindrico di lunghezza  $l$  e sezione  $\Sigma$ .

Ai capi del conduttore è applicata una differenza di potenziale tramite un generatore di forza elettromotrice. A regime stazionario, l'intensità di corrente è costante ed è legata al campo elettrico tramite la relazione  $|\mathbf{E}| = \rho |\mathbf{J}| = \frac{\rho}{\Sigma} i$ . Sapendo che la differenza di potenziale applicata è  $\Delta V = V_A - V_B = |\mathbf{E}|h = \frac{\rho h}{\Sigma} i$ , possiamo definire una nuova grandezza, detta **resistenza del conduttore** ( $R = \frac{\rho h}{\Sigma}$ , nota anche come **seconda legge di Ohm**), tale da determinare la **legge di Ohm per i conduttori metallici**.

$$\Delta V = V_A - V_B = Ri \Rightarrow Ri = \Delta V - T_i$$

Nel Sistema Internazionale, l'unità di misura della resistenza è il *volt su ampere*, che prende il nome di **ohm** ( $\Omega = \text{V/A}$ ).

Conduttori per cui è valida la legge di Ohm vengono detti *conduttori ohmici*.

## Resistori

I conduttori ohmici caratterizzati da un determinato valore della resistenza a temperatura ambiente sono molto utilizzati nei circuiti elettrici e prendono il nome di **resistori** (detti anche brevemente *resistenze*, Figura 10.2).



Figura 10.2: Rappresentazione circuitale di un resistore



### Collegamento in serie e in parallelo di resistori

Come per i condensatori, anche per i resistori è possibile effettuare collegamenti in serie e in parallelo.

Per i resistori, il **collegamento in serie** consiste nel far attraversare da una corrente avente medesima intensità due o più resistenze (Figura 10.3).

Ad ogni resistore è applicata una differenza di potenziale  $\Delta V_i = R_i i$ ; la differenza di poten-

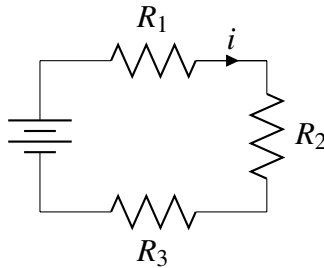


Figura 10.3: Resistori in serie

ziale totale è pari a  $\Delta V = \left( \sum_i R_i \right) i$ , ovvero pari alla corrente che attraversa una resistenza equivalente il cui valore è la somma dei valori delle singole resistenze.

Il collegamento in parallelo, invece, consiste, anche in questo caso, nel porre due o più resistori alla stessa differenza di potenziale (Figura 10.4). Poiché la differenza di

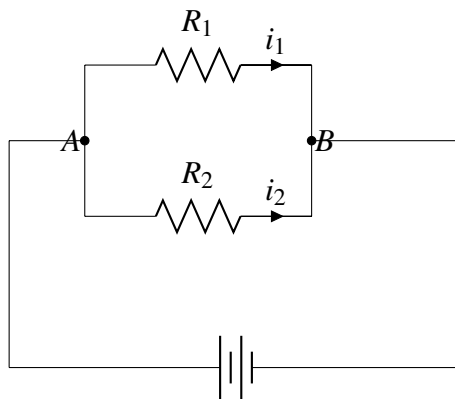


Figura 10.4: Resistori in parallelo

potenziale è la stessa, sappiamo che ogni resistore è attraversato da una corrente  $i_k = \frac{\Delta V}{R_k}$ . La somma di tutte queste correnti corrisponde alla corrente entrante nel nodo A e uscente dal nodo B ( $i = \Delta V \sum_k \frac{1}{R_k}$ ).

In generale, l'inverso della resistenza equivalente in un collegamento in parallelo è pari alla somma degli inversi delle singole resistenze.

### 10.3 Potenza elettrica e effetto Joule

Consideriamo ora una carica  $dq$  all'interno di un conduttore; questa carica si muove attraversando la differenza di potenziale  $\Delta V$ . Per compiere questo spostamento, il campo elettrico compie un lavoro  $dW = dq\Delta V = \Delta V \cdot i \cdot dt$ .

Per fare ciò viene spesa una certa potenza, detta **potenza elettrica**, pari a

$$P_e = \Delta V \cdot i \quad (10.7)$$

Questa potenza, in generale, sarà sempre diversa da zero.

Se il conduttore attraverso il quale si muove la particella è ohmico, allora la potenza elettrica può essere calcolata come

$$P_e = Ri^2 = \frac{(\Delta V)^2}{R} \quad (10.8)$$

e in questo caso il suo valore sarà sempre positivo, poiché vi è trasferimento di energia alle particelle.

Il passaggio di corrente attraverso un conduttore metallico composta dunque un lavoro  $W = \int_0^t P_e dt = \int_0^t Ri^2 dt$ , che se la corrente è costante nel tempo, diventa  $W = Ri^2 t$ . Questo lavoro è necessario per vincere la resistenza opposta dal reticolo cristallino al moto ordinato degli elettroni e, dal punto di vista termodinamico, viene assorbito dal conduttore la cui energia interna aumenta; conseguentemente a ciò, aumenta la temperatura del conduttore, il quale, se è isolato termicamente, si fonderà, mentre se è in contatto con l'ambiente raggiungerà una temperatura tale per cui la sua energia interna non varia e il lavoro è ceduto all'ambiente sotto forma di calore.

Questo effetto di riscaldamento di un conduttore è denominato **effetto Joule**.

### 10.4 Forza elettromotrice

Abbiamo detto in precedenza che la circuitazione del campo elettrostatico è nulla e che il flusso del campo elettrico ( $\mathbf{E} = \mathbf{E}_s + \mathbf{E}_{nc}$ ) è pari alle cariche sia di polarizzazione sia di conduzione presenti all'interno della superficie, in base al teorema di Gauss. Inoltre sappiamo che  $V_{AB} = \int_{C_1} \mathbf{F} ds = q_0 \int_{C_1} \mathbf{E} ds$ .

Possiamo definire quindi il rapporto tra il lavoro compiuto sulla carica lungo un percorso  $C$  e la carica stessa come **forza elettromotrice**.

$$f = \oint_C \mathbf{E} ds \quad (10.9)$$

La forza elettromotrice non è una vera e propria forza, è in generale diversa da zero e dipende dalle caratteristiche del campo e del percorso  $C$  scelto per l'integrazione. Inoltre, la forza elettromotrice è la responsabile del movimento delle cariche, ed è generata dal generatore, che per questo viene anche denominato **generatore di forza elettromotrice**. Nel Sistema Internazionale, la forza elettromotrice si misura in **joule su coulomb** (J/C).

Se applichiamo la legge di Ohm per i conduttori a un circuito chiuso, otteniamo

$$\oint \mathbf{E} ds = R_{tot} i$$

dove  $R_{tot}$  rappresenta la resistenza totale del circuito.

Il primo membro corrisponde alla definizione di forza elettromotrice, quindi la relazione afferma che per ottenere una corrente d'intensità  $i$  è necessaria la presenza nel circuito di una sorgente di forza elettromotrice, ovvero è necessaria di un campo elettrico non conservativo.

Consideriamo ora un generatore isolato, a morsetti aperti.

Al suo interno vi è un campo elettrico non conservativo diretto dal polo negativo al polo positivo che genera un campo elettrostatico. Per fare in modo che il generatore si trovi in condizioni di equilibrio elettrostatico, all'interno del generatore il campo elettrostatico deve essere uguale e opposto a quello non conservativo. Ciò provoca all'esterno un campo elettrostatico, diretto allo stesso modo di quello interno, non nullo.

La forza elettromotrice generata in questa condizione è

$$\begin{aligned} f &= \oint_C \mathbf{E} \, ds = \oint_C (\mathbf{E}_{nc} + \mathbf{E}_s) \, ds = \\ &= \oint_C \mathbf{E}_{nc} \, ds + \oint_C \mathbf{E}_s \, ds = \int_A^B \mathbf{E}_{nc} \, ds = \\ &= \int_A^B (-\mathbf{E}_s) \, ds = V_B - V_A = V_0 \end{aligned}$$

Il valore così trovato prende il nome di **potenziale nel vuoto** del generatore.

Collegiamo ora il generatore a un filo conduttore. Nel sistema generatore–filo si determina un equilibrio dinamico, il che ci porta a dire che, all'interno del generatore, il campo elettrostatico è diverso dal campo elettrico non conservativo. In questo caso, si determina sperimentalmente che la differenza di potenziale ai capi del generatore è  $\Delta V = f - ri$ , dove  $r$  viene detta **resistenza interna del generatore reale**.

Definiamo quindi **generatore ideale** un generatore che ha resistenza interna nulla. All'interno di un circuito, il generatore ideale viene indicato come in Figura 10.5.

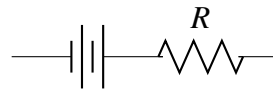


Figura 10.5: Rappresentazione circuitale di un generatore ideale

## 10.5 Leggi di Kirchhoff

Finora abbiamo considerato circuiti elettrici semplici, formati da un generatore e un resistore, o da un generatore e un condensatore.

Esistono però circuiti con geometrie complicate, in cui non è possibile eseguire le operazioni di riduzione mediante i collegamenti in serie e in parallelo. Sia il caso semplice sia il caso complesso di circuito è denominato rete elettrica.

Una **rete elettrica**, in pratica, è una serie di bipoli legati tra loro da conduttori con resistenza interna trascurabile.

Gli elementi geometrici distintivi di una rete sono i nodi e i rami. Un **nodo** è un punto nel quale convergono tre o più conduttori; questi particolari punti sono collegati da **rami**, che sono fili conduttori cui sono collegati anche dipoli. All'interno di una rete è possibile individuare determinati cammini chiusi, detti **maglie**, costituiti da più rami.

L'analisi delle reti elettriche viene semplificata dall'uso di due leggi generali, note come **leggi di Kirchhoff**, che sono valide per circuiti elettrici resistivi percorsi da correnti stazionarie.

La **prima legge di Kirchhoff**, nota anche come *legge dei nodi*, afferma che la somma algebrica delle correnti che confluiscono in un nodo è nulla, fissando un segno per le correnti uscenti e per le correnti entranti ( $\sum_k i_k = 0$ ).

La **seconda legge di Kirchhoff**, nota anche come *legge delle maglie*, afferma che, fissato un verso di percorrenza nella maglia, la somma algebrica delle differenze di potenziale applicate ai nodi è nulla ( $\sum_k \Delta V_k = 0$ ).

Stabilire il verso di percorrenza della maglia serve a determinare il verso da assegnare alla corrente entrante nel resistore, nel generatore o nel capacitore. Per il resistore, si assegna segno positivo a  $\Delta V = Ri$  se la corrente che lo percorre è concorde al verso della maglia, segno negativo in caso contrario. Per il generatore di forza elettromotrice, si assegna segno positivo a  $\Delta V = f$  se il verso della maglia entra nel polo positivo, segno negativo se il verso della maglia esce dal polo positivo. Per il capacitore, si assegna segno positivo a  $\Delta V = \frac{Q}{C}$  se la corrente che lo percorre è concorde al verso della maglia, segno negativo in caso contrario.

## Partitore resistivo

Consideriamo ora un circuito composto solo da un generatore e più resistori in serie, come quello in Figura 10.6.

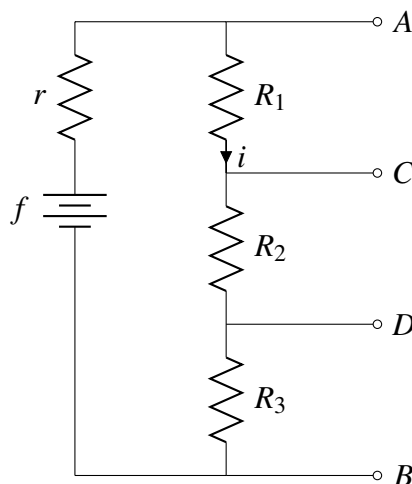


Figura 10.6: Partitore resistivo

Mediante la legge delle maglie, determiniamo che  $f = ri + R_1i + R_2i + R_3i$ ; la corrente che circola all'interno del circuito è  $i = \frac{f}{r+R_1+R_2+R_3}$ . Se vogliamo determinare la differenza di potenziale ai capi del secondo resistore, dobbiamo calcolare  $V_2 = V_C - V_D = R_2i = R_2 \frac{f}{r+R_1+R_2+R_3}$ .

La situazione qui descritta corrisponde a un **partitore resistivo**, che consente di suddividere il potenziale elettrostatico fornito da un generatore in parti differenti secondo le resistenze.

## Processo di carica e di scarica di un condensatore in un circuito RC

Prendiamo ora in esame un semplice circuito formato da un generatore di forza elettromotrice, un condensatore e un resistore, nel quale la corrente varia nel tempo (Figura 10.7).

All'inizio, l'interruttore  $T$  è aperto e il condensatore è scarico.

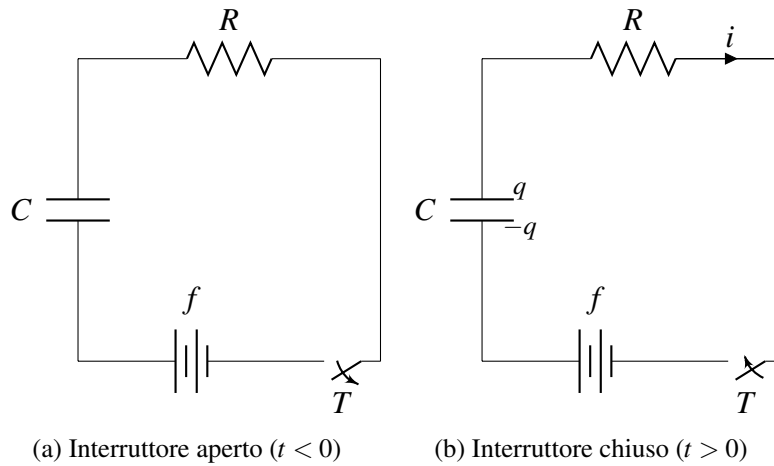


Figura 10.7: Circuito RC - carica di un condensatore

Al tempo  $t = 0$ , l'interruttore viene chiuso e inizia a circolare corrente nel circuito. Questa corrente trasporta cariche che si depositeranno all'interno del condensatore.

La carica depositata, quindi, varia nel tempo, ma i tempi di assestamento del circuito, in altre parole il tempo che il sistema impiega a raggiungere l'equilibrio, sono brevissimi, in modo tale che, nei nodi, non vi siano accumuli di carica (*condizioni quasi stazionarie*).

Sfruttando la legge delle maglie, in un istante generico  $t$ , otteniamo la seguente equazione

$$R \cdot i(t) + \frac{q(t)}{C} - f = 0$$

Sostituiamo la definizione d'intensità di corrente, ottenendo

$$R \cdot \frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C} - f = 0$$

Otteniamo così un'equazione differenziale simile a quella che descrive il moto di un corpo all'interno di un mezzo viscoso.

Se separiamo le variabili e integriamo le espressioni, otteniamo

$$\begin{aligned} \int_0^{q(t)} \frac{1}{Cf - q(t)} dq(t) &= \int_0^t \frac{1}{RC} dt \\ -\ln\left(\frac{q(t) - Cf}{-Cf}\right) &= \frac{t}{RC} \\ \ln\left(\frac{Cf - q(t)}{Cf}\right) &= -\frac{t}{RC} \\ 1 - \frac{q(t)}{Cf} &= e^{-\frac{t}{RC}} \end{aligned}$$

Ponendo  $RC = \tau$ , otteniamo

$$q(t) = Cf \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \quad (10.10)$$

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = \frac{f}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (10.11)$$

$$V_C(t) = \frac{q(t)}{C} = f \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \quad (10.12)$$

Nel *processo di carica* qui descritto (Figura 10.8), il generatore complessivamente il lavoro  $W_{gen} = \int_0^{q_0=Cf} f dq = f \cdot Cf = Cf^2$ ; poiché  $\Delta U_e = \frac{1}{2} Cf^2$ , per il principio della conservazione dell'energia si ha che, sulla resistenza, viene dissipato il lavoro  $W_R = \frac{1}{2} Cf^2$  come calore.

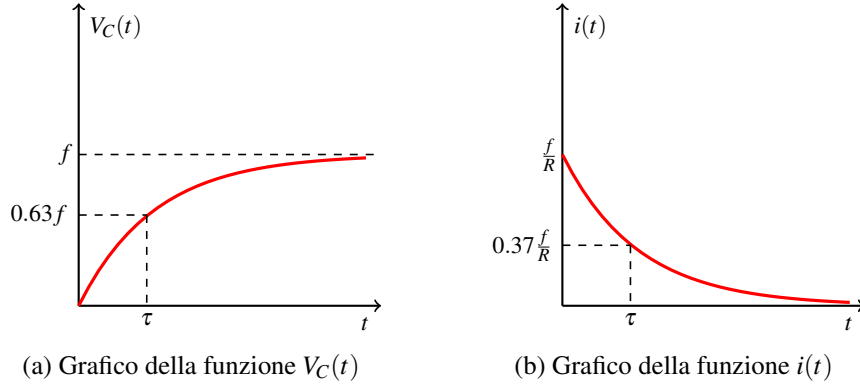


Figura 10.8: Differenza di potenziale ai capi del condensatore e intensità di corrente nel circuito durante la carica

Consideriamo ora la situazione opposta, ovvero il *processo di scarica* di un condensatore (Figura 10.9).

In questo circuito non è presente un generatore e il condensatore è carico.

Effettuando lo stesso ragionamento abbiamo

$$R \cdot i(t) + \frac{q(t)}{C} = 0$$

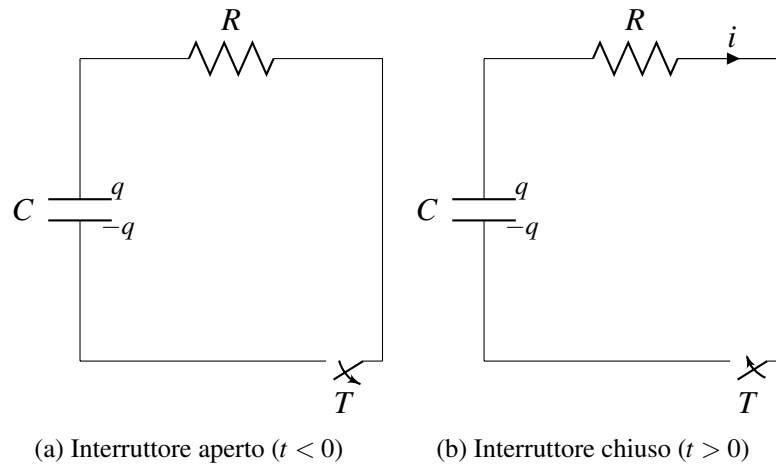


Figura 10.9: Circuito RC - scarica di un condensatore

Sostituiamo la definizione d'intensità di corrente, ottenendo

$$R \cdot \frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C} = 0$$

Se separiamo le variabili, integriamo le espressioni e poniamo  $\tau = RC$ , otteniamo

$$q(t) = C f e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (10.13)$$

$$V_C(t) = \frac{q(t)}{C} = f e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (10.14)$$

$$i(t) = -\frac{dq(t)}{dt} = \frac{f}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (10.15)$$





# Capitolo 11

## Magnetostatica e magnetodinamica

Dopo aver visto l'elettrostatica e l'elettrodinamica, analizziamo ora l'*magnetostatica*, cioè lo studio dei campi magnetici statici, e la *magnetodinamica*, cioè lo studio dei campi magnetici nel tempo, con particolare riferimento all'interazione tra campi magnetici e campi elettrici.

### 11.1 Il campo magnetico

Come abbiamo detto precedentemente, il fenomeno dell'interazione magnetica tra corpi è collegato ai fenomeni elettrici.

L'**interazione magnetica**, infatti, fu scoperta già nel VII secolo a.C. in Antica Grecia, osservando che piccoli pezzi di *magnetite* (una roccia formata da combinazioni di ossidi di ferro) avevano la capacità di attrarre, in alcune determinate parti, la limatura di ferro. In seguito, si definirono **magneti** oggetti, aventi geometria qualsiasi, in grado di riprodurre lo stesso fenomeno; le parti che attraggono sono detti **poli dei magneti**.

Nel XVI secolo, poi, Gilbert compì una serie di esperienze con i magneti, con lo scopo di determinare, per quanto possibile, l'entità della forza di attrazione magnetica. Da questa serie di esperienze, sono state ricavate una serie di osservazioni.

Se a un magnete sospeso nel centro tramite un filo avviciniamo un secondo magnete, osserviamo che quest'ultimo esercita una certa forza sul magnete sospeso. Come per la forza elettrostatica, quindi, possiamo interpretare questo fatto affermando che un magnete genera un campo, detto **campo magnetico**, e che l'altro magnete risente dell'azione che il campo magnetico esercita.

Inoltre, si può stabilire che la forza d'interazione tra i magneti è attrattiva o repulsiva a seconda dei poli che si affacciano; esistono, quindi, due soli tipi di poli, detti **polo positivo** e **polo negativo**.

Se si avvicina a un magnete naturale (un pezzo di magnetite) una bacchetta di ferro, quest'ultima acquista la capacità di attrarre la limatura di ferro, specialmente nelle estremità. La bacchetta è diventata quindi un magnete, cioè si è *magnetizzata*. In questo caso, la bacchetta prende il nome di magnete artificiale o *calamita*; se la calamita è molto sottile e di piccole dimensioni, abbiamo un *ago magnetico*.

Sospendendo a un filo un ago magnetico, osserviamo che tende a disporsi parallelamente al meridiano terrestre del luogo; l'ago, quindi, risente di un campo magnetico naturale, il

**campo magnetico terrestre** (Figura 11.1).

L'ago, risentendo del campo terrestre, si comporta come un dipolo magnetico e si orienta nella direzione e nel verso del campo magnetico locale. Il polo dell'ago che si orienta approssimativamente verso il nord geografico prende il nome di *polo nord* (N), mentre al polo opposto si attribuisce nome di *polo sud* (S).

Definendo in questo modo i poli, tramite sperimentazioni possiamo affermare che poli omonimi si respingono, poli eteronimi si attraggono. Per questo motivo, in corrispondenza del polo nord geografico è situato il polo sud magnetico e viceversa.

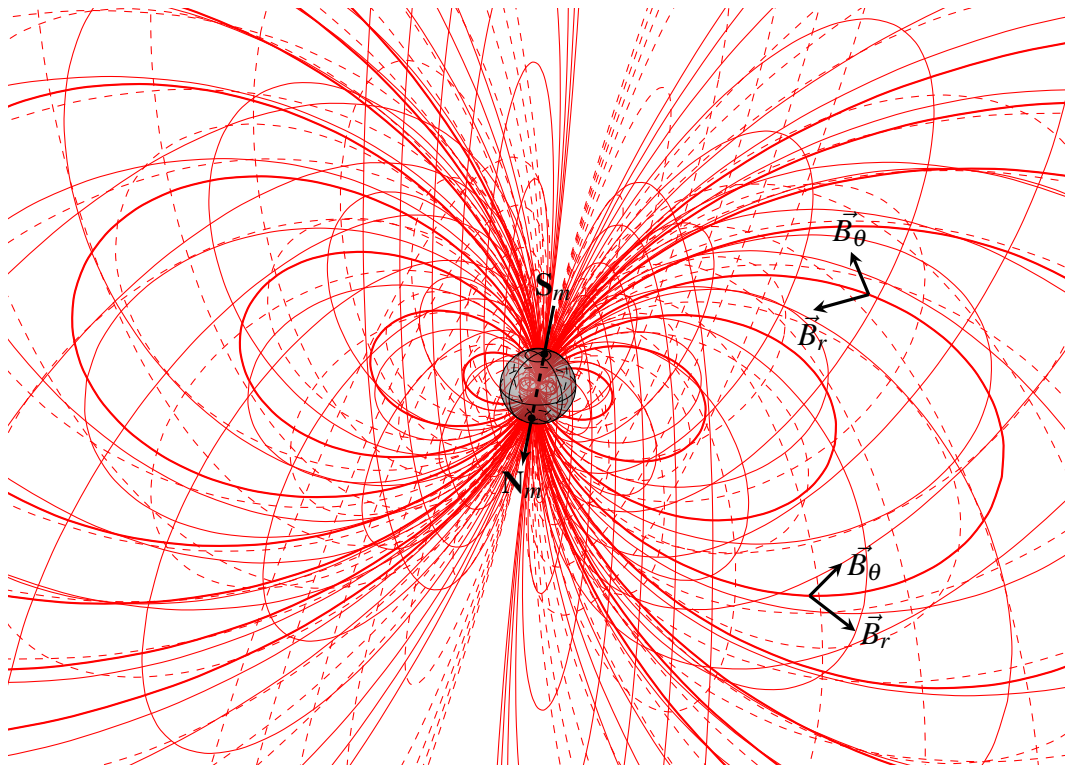


Figura 11.1: Rappresentazione schematica del campo magnetico terrestre.

Allo stesso modo di ciò che abbiamo fatto per il campo elettrico, possiamo definire le linee del campo magnetico, indicando il vettore che lo rappresenta con la lettera **B**. Direzione e verso del campo magnetico sono determinati ponendo un piccolo ago magnetico in ogni punto in cui è presente il campo; le linee di flusso del campo magnetico, quindi, sono tangenti all'ago in ogni suo punto e il verso sarà quello che va dal polo sud al polo nord attraverso l'ago.

## Relazioni tra campo magnetico e campo elettrico

Abbiamo detto che elettricità e magnetismo sono due fenomeni strettamente collegati. Ciò è dimostrato dal fatto che una spira circolare, nella quale circola una corrente d'intensità  $i$ , genera un campo magnetico.

La prima relazione tra fenomeni magnetici ed elettrici fu scoperta, come abbiamo detto, da Ørsted nel 1811; in seguito l'argomento fu approfondito da Ampère.

Ørsted mostrò che un ago magnetico, posto vicino a un filo percorso da corrente, tende ad assumere una posizione ben definita. Ampère dimostrò che anche due fili percorsi da corrente interagiscono e intuì che le interazioni magnetiche non sono altro che la manifestazione dell'interazione tra le cariche elettriche in movimento.

## Forza di Lorentz

Cerchiamo un modo per determinare la sua intensità.

Abbiamo detto che le interazioni magnetiche sono il risultato delle interazioni tra le cariche in moto. Per determinare quindi l'intensità del campo, consideriamo una particella, di massa  $m$  e carica  $q$ , posta in un campo magnetico.

Se la particella è in movimento con velocità  $\mathbf{v}$ , notiamo che la forza che la particella subisce è proporzionale alla carica presente, alla sua velocità, al modulo del seno dell'angolo che il vettore velocità forma con il vettore campo magnetico. Inoltre, si può sperimentalmente notare che la forza è perpendicolare al piano in cui sono contenuti il vettore velocità e campo magnetico.

La forza che agisce è detta forza di Lorentz e si determina come

$$\mathbf{F} = q \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (11.1)$$

Il suo modulo ha valore  $|\mathbf{F}| = bq|\mathbf{v}| \sin \theta$ , dove  $b$  rappresenta una costante che racchiude tutti i fattori di proporzionalità enunciati in precedenza, che rappresentano il valore del campo magnetico ( $\mathbf{B} = b \cdot \hat{B}$ ).

La forza di Lorentz, essendo sempre ortogonale alla velocità, non compie lavoro sulla particella, poiché fornisce solamente un'accelerazione centripeta, che implica la variazione di direzione del moto. Se, insieme con un campo magnetico, la particella risente anche di un campo elettrico, l'espressione della forza di Lorentz diventa

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (11.2)$$

Vediamo un esempio sulla forza di Lorentz.

Supponiamo di trovarci in un vagone di un treno in movimento e di lasciar cadere una particella carica. Quello che noi percepiamo è che la particella segue un percorso rettilineo, cadendo sul pavimento del vagone. Se un osservatore esterno al treno osserva la stessa scena nello stesso istante, vede che la particella sbatte contro il fianco del vagone.

Sembra quasi che, a seconda del sistema di riferimento, la forza che la particella subisce sia diversa. In realtà è la stessa.

La particella effettivamente sbatte sul fianco del vagone, ma noi che stiamo all'interno del vagone, quindi ci muoviamo alla stessa velocità del sistema di riferimento della particella, non ce ne accorgiamo. Tutto ciò è spiegabile applicando le *trasformazioni di Lorentz*, utili per la relatività, di cui noi non parleremo.

## Selettore di velocità e spettrometro di massa

Consideriamo ora il modo di poter selezionare particelle cariche secondo la loro velocità di moto. Esiste un macchinario, denominato **selettore di velocità**, che si occupa proprio di questo.

Le particelle vengono ionizzate e spedite all'interno di due fenditure, ove è presente una differenza di potenziale. Dopo la seconda fenditura, gli ioni vengono fatti passare in

una regione ove sono presenti un campo magnetico e un campo elettrico perpendicolari tra loro.

Uno ione, quindi, risente sia della forza elettrica  $\mathbf{F}_e = q\mathbf{E}$  sia della forza magnetica  $\mathbf{F}_m = q \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ .

Per fare in modo che si muova di moto rettilineo uniforme, bisogna imporre che  $\mathbf{E} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ . Senza un campo magnetico, infatti, lo ione tenderebbe ad andare verso l'alto se la sua carica è positiva e verso il basso se la sua carica è negativa; stessa cosa accadrebbe se non ci fosse campo elettrico. Per mantenere, quindi, un moto uniforme, la forza applicata deve essere nulla, quindi  $|\mathbf{v}| = \frac{|\mathbf{E}|}{|\mathbf{B}|}$ .

Se, dopo aver definito la velocità degli ioni, volessimo definire il tipo di ioni che formano il fascio selezionato, dovremmo usare uno *spettrometro di massa*.

Esistono vari modelli di spettrometri; quello che descriviamo è il cosiddetto **spettrometro di massa di Bainbridge**.

Il fascio di ioni selezionato entra in una regione in cui agisce solamente un campo magnetico uniforme. La traiettoria che seguiranno sarà una semicirconferenza di raggio  $r = \frac{m|\mathbf{v}|}{qB_0}$ .

Conoscendo la velocità delle particelle, otteniamo che  $\frac{m}{q} = \frac{B_0 B}{E} r$ .

## Seconda formula di Laplace

Finora abbiamo considerato cariche in moto nel vuoto. Che cosa succede, invece, se applichiamo un campo magnetico a un filo conduttore percorso da corrente?

Anche in questo caso, i portatori di carica in moto all'interno del conduttore risentono della forza di Lorentz ( $\mathbf{F}_m = q \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ ).

Tramite gli urti che gli elettroni in moto hanno con gli ioni del reticolo cristallino, questa forza viene trasmessa alla massa del filo, supposto indeformabile. In un tratto di conduttore lungo  $ds$  e di sezione  $\Sigma$  sono contenute  $n\Sigma ds$  cariche; la forza di Lorentz loro applicata è  $d\mathbf{F}_m = nq\Sigma ds \cdot \mathbf{v}_d \times d\mathbf{B} = \Sigma ds \cdot \mathbf{J} \times \mathbf{B}$ .

Otteniamo così una relazione, nota come **seconda formula di Laplace**, che esprime che la forza magnetica su un tratto infinitesimo di filo percorso da corrente è ortogonale al filo e al campo magnetico.

$$d\mathbf{F}_m = i \cdot ds \times \mathbf{B} \quad (11.3)$$

Se il conduttore è rettilineo, otteniamo  $d\mathbf{F}_m = i \cdot \mathbf{l} \times \mathbf{B}$ .

## Analisi meccanica della forza di Lorentz

Da un punto di vista meccanico, la forza di Lorentz corrisponde alla risultante di un sistema di forze applicate in punti diversi, che provocano uno spostamento del sistema, in accordo con il teorema del moto del centro di massa.

Consideriamo una spira rettangolare, libera di ruotare attorno ad un asse verticale passante per il suo centro di massa, immersa in un campo  $\mathbf{B}$ .

La forza di Lorentz provoca una rotazione sulla spira, in modo tale che la superficie attraversata dal campo magnetico sia la più grande possibile, quindi il flusso sia nullo.

## 11.2 Legge di Gauss per il campo magnetico

Anche all'interno di un ago magnetico esiste un campo magnetico, ma la sua misurazione e la sua determinazione è molto complicata.

Ciò è dovuto al fatto che i poli magnetici sembrano esistere sempre a coppie di uguale valore ma nome opposto. Questa considerazione è dimostrabile spezzando una calamita a metà: una volta spezzata la calamita, compaiono sempre due poli eteronimi nel punto del taglio. Ripetendo questo all'infinito, non si riesce mai a ottenere un polo magnetico isolato, cioè un *monopolo magnetico*.

Il fatto che ogni calamita possiede sia un polo nord sia un polo sud comporta che le linee di flusso del campo  $\mathbf{B}$  sono sempre chiuse, quindi *il campo non è sicuramente conservativo*. Infatti, linee aperte, come sono possibili nel campo elettrico, sono necessarie affinché un campo vettoriale si possa definire conservativo. Questa considerazione porta alla determinazione della legge di Gauss per il campo magnetico.

$$\oint_{\Sigma} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{u}}_n d\Sigma = 0 \quad (11.4)$$

Questo comporta che il campo magnetico sia **solenoidale**.

Il fatto che non è conservativo, inoltre è dimostrato dal fatto che la sua circuitazione attraverso una linea chiusa non vale sempre zero.

L'unità di misura del flusso magnetico, rappresentato nella legge di Gauss, è il **weber** ( $\text{Wb} = \text{V} \cdot \text{s}$ ).

## 11.3 Campo magnetico prodotto da una corrente: la legge di Ampère-Laplace

Abbiamo detto che elettricità e magnetismo sono strettamente collegati. Infatti, un campo magnetico  $\mathbf{B}$  è generato sia da correnti elettriche sia da corpi magnetizzati. Vediamo quale sia il legame esplicito tra il campo magnetico e le correnti che lo generano, come abbiamo rintracciato in precedenza la relazione tra campo elettrico e le cariche sorgenti. Purtroppo, non è possibile rintracciare un'espressione semplice come quella rintracciata per il campo elettrico.

L'analisi dei primi esperimenti sulle caratteristiche del campo magnetico effettuate da molti scienziati, come Laplace, Ampère, Biot e Savart, servirono per determinare un'espressione sperimentale; per fare questo, si è ipotizzato che le correnti scorressero in conduttori filiformi e che la distanza del punto di osservazione dal filo sia molto grande rispetto alla sua sezione.

Tutto ciò portò alla formulazione della **prima formula di Laplace**, che esprime il campo elettrico prodotto da un tratto infinitesimo  $ds$  di filo, percorso dalla corrente  $i$ , in un punto  $P$  distante  $r$  dall'elemento.

$$d\mathbf{B}(P) = k_m i \frac{ds \times \hat{\mathbf{u}}_r}{r^2} \quad (11.5)$$

La prima formula di Laplace ci permette di effettuare alcune considerazioni.

La prima riguarda l'unità di misura del campo magnetico  $\mathbf{B}$ , denominato ufficialmente **campo di induzione magnetica**, che è il *newton per secondo su coulomb per metro*, cui

è assegnato il nome di **tesla** ( $T = N \cdot s / (C \cdot m)$ ).

Sulla superficie terrestre è presente un campo di induzione magnetica d'intensità 50 mT, i magneti degli altoparlanti producono un campo d'intensità pari a 0,1 T, le espansioni polari degli elettromagneti (la cui potenza è in genere di  $(3 \div 4)$  W) generano un campo di 2 T; in laboratorio si ottengono campi di induzione magnetica d'intensità pari a  $(6 \div 10)$  T, mentre solo particolari magneti alimentati da centrali idroelettriche riescono a generare campi d'intensità maggiore ai 20 T.

La seconda considerazione riguarda la costante  $k_m$  presente nella formula, che dipende dal sistema di unità di misura e dal mezzo materiale in cui si sperimenta. Nel vuoto e nel Sistema Internazionale,  $k_m = 10 \cdot 10^{-7} T \cdot m/A$ . In pratica, questa costante è sempre indicata come  $\frac{\mu_0}{4\pi}$ , dove  $\mu_0$  viene detta **permeabilità magnetica del vuoto** e vale  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} T \cdot m/A$ .

La prima formula di Laplace può, quindi, essere riscritta come  $d\mathbf{B}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{d\mathbf{s} \times \hat{u}_r}{r^2}$ . Per ottenere il campo di induzione magnetica prodotto da un circuito chiuso, occorre suddividerlo in elementi infinitesimi  $ds$ , calcolare per ognuno di essi il campo di induzione magnetica e poi sommare tutti i contributi.

$$\mathbf{B}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} i \oint_{\text{circuito}} \frac{d\mathbf{s} \times \hat{u}_r}{r^2} \quad (11.6)$$

La relazione così ottenuta prende il nome di **legge di Ampère-Laplace** e risulta verificata sperimentalmente, fornendo il legame cercato tra il campo magnetico e la corrente che lo genera.

## Campi magnetici prodotti da circuiti particolari

Vediamo ora alcune applicazioni della prima formula di Laplace e della legge di Ampère-Laplace; queste applicazioni riducono l'integrale della legge di Ampère-Laplace a un integrale unidimensionale.

### Legge di Biot-Savart

Consideriamo un filo conduttore rettilineo indefinito e poniamoci in un punto  $P$  a distanza  $r$  dal filo.

Nel punto  $P$  il campo di induzione magnetica è entrante rispetto al piano in cui giace il filo. L'elemento  $ds$  che dista  $r$  dal punto  $P$  produce un campo di induzione magnetica  $d\mathbf{B}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{ds}{r^2} \sin \alpha$ , dove  $\alpha = \frac{\pi}{2} - \theta$ . Sapendo che  $r d\theta = ds \sin \alpha$  e  $r \cos \theta = d$ , otteniamo  $d\mathbf{B}(P) = \frac{\mu_0 i}{4\pi d} \cos \theta d\theta$ .

Integrando questa espressione otteniamo

$$\mathbf{B}(P) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mu_0 i}{4\pi d} \cos \theta d\theta = \frac{\mu_0 i}{2\pi d} \quad (11.7)$$

che è nota come **legge di Biot-Savart**.

### Spira circolare

Passiamo ora a calcolare il campo magnetico sull'asse di una spira circolare di raggio  $R$  percorsa dalla corrente  $i$ .

Nel punto  $P$ , distante  $x$  dal centro  $O$  della spira, un elemento  $ds$  di spira genera il campo  $d\mathbf{B}(P) = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{ds}{r^2} \sin \theta$ . Integrando lungo tutta la spira, sommando quindi i vari contributi degli elementi della spira, otteniamo  $\mathbf{B}(P) = \int_{\text{spira}} \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{\sin \theta}{r^2} ds = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{\sin \theta}{r^2} 2\pi R$ . Posto  $r^2 = x^2 + R^2$  e  $\sin \theta = \frac{R}{r}$ , otteniamo

$$\mathbf{B}(P) = \frac{\mu_0 i}{2} \frac{R^2}{(x^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{u}_x$$

### Azioni elettrodinamiche tra fili percorsi da corrente

Consideriamo, infine, due fili rettilinei paralleli molto lunghi e abbastanza vicini da poter essere considerati indefiniti, percorsi dalle correnti  $i_1$  e  $i_2$ .

Il filo 1 agisce sul filo 2 con una forza  $\mathbf{F}_{1,2} = i_2 ds_2 \times \mathbf{B}_1$ , mentre il filo 2 agisce sul filo 1 con una forza  $\mathbf{F}_{2,1} = i_1 ds_1 \times \mathbf{B}_2$ . Ciò comporta che due fili si attraggono se sono percorsi da correnti aventi lo stesso verso, mentre si respingono se le due correnti sono discordi.

La forza che agisce sul singolo elemento  $ds$  di ogni filo è  $f_{12} = \frac{d\mathbf{F}_{1,2}}{ds} = i_2 \hat{u}_2 \times \mathbf{B}_1$ ,  $f_{21} = \frac{d\mathbf{F}_{2,1}}{ds} = i_1 \hat{u}_1 \times \mathbf{B}_2$ . Conoscendo il campo di induzione magnetica di un filo rettilineo indefinito ( $\mathbf{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$ ), otteniamo che  $f_{12} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i_1}{r} i_2$ .

Questo meccanismo è stato utilizzato per ottenere una definizione operativa dell'ampère, che viene definito come *l'intensità di corrente che, circolando in due fili rettilinei paralleli distanti  $r = 1$  m, dà luogo a una forza  $|\mathbf{F}| = \frac{\mu_0}{2\pi} = 2 \cdot 10^{-7}$  N per metro di ciascun conduttore.*

## 11.4 Legge di Ampère

Il legame tra le correnti e il campo magnetico da esse prodotto, che abbiamo visto con la legge di Ampère - Laplace, può essere espresso attraverso una particolare legge integrale, così come avviene per il campo elettrostatico con il teorema di Gauss.

Consideriamo un filo rettilineo indefinito, percorso dalla corrente stazionaria  $i$ , che produce il campo magnetico  $|\mathbf{B}| = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$  e le cui linee di flusso sono circonferenze concentriche con il filo stesso.

Fissiamo un tratto di linea di flusso  $ds$  e consideriamo il prodotto scalare  $\mathbf{B} \cdot ds = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} ds = \frac{\mu_0 i}{2\pi} d\theta$ , dove  $d\theta$  è l'angolo sotteso da  $ds$ . Per un tratto finito di circonferenza otteniamo  $\int_C \mathbf{B} \cdot ds = \int_C \frac{\mu_0 i}{2\pi} d\theta = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \theta$ , dove  $\theta$  è l'angolo sotteso dall'arco percorso.

Questo risultato, come si può notare, non dipende assolutamente dal percorso geometrico seguito per l'integrazione. Proviamo ora a determinare questo prodotto scalare per una linea chiusa.

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot ds = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \oint_C d\theta$$

Si devono distinguere due casi: se la linea geometrica  $C$  gira attorno alla corrente  $i$  (ovvero *concatena* la corrente) allora  $\oint_C \mathbf{B} \cdot ds = \mu_0 i$ , mentre se non *concatena* la corrente allora  $\oint_C \mathbf{B} \cdot ds = 0$ .

In generale, ricordando che la corrente può essere rappresentata attraverso il vettore densità di corrente, otteniamo

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot ds = \mu_0 \int_{\Sigma(C)} \mathbf{J} \cdot \hat{u}_n d\Sigma \quad (11.8)$$

Ciò che abbiamo ottenuto è noto come **teorema di Ampère**: *la circuitazione del campo di induzione magnetica è uguale al flusso, attraverso una superficie aperta che ha per contorno la linea di circuitazione, della densità di corrente*. Il termine  $\int_{\Sigma(C)} \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{u}}_n d\Sigma$  rappresenta la cosiddetta *corrente concatenata alla curva C*.

## Campo di induzione magnetica per configurazioni particolari

Consideriamo ora un conduttore rettilineo indefinito non filiforme, cioè un filo il cui spessore  $R$  non è trascurabile, attraversato da una corrente  $i$ .

Dal punto di vista geometrico, per il conduttore è possibile trovare una simmetria cilindrica, per cui  $\mathbf{B} = B(r)\hat{\mathbf{r}}$ . Sapendo poi che il campo di induzione magnetica è solenoidale, possiamo affermare che le sue linee di flusso sono circonferenze concentriche rispetto all'asse del conduttore.

Scegliendo una qualsiasi tra le circonferenze che rappresentano il campo e orientandola in modo tale che l'elemento  $d\mathbf{s}$  sia concorde al campo, abbiamo che  $\oint_{\text{Circonferenza}} \mathbf{B} d\mathbf{s} = \oint_{\text{Circonferenza}} B(r) dr$ . Inoltre, per definizione, il campo di induzione magnetica è costante lungo la circonferenza, quindi  $\oint_{\text{Circonferenza}} B(r) dr = B(r) \oint_{\text{Circonferenza}} dr = \oint_{\text{Circonferenza}} 2\pi r$ .

Consideriamo ora la corrente che attraversa il filo.

Se il conduttore è omogeneo, la corrente è uniforme e si può descrivere come  $|\mathbf{J}| = \frac{i}{\pi R^2}$ . Se la circonferenza considerata ha raggio  $r > R$ , la corrente concatenata a questa linea è pari alla corrente  $i$  che scorre nel filo; se, invece, la circonferenza considerata ha raggio  $r < R$ , allora la corrente concatenata è  $|\mathbf{J}| \pi r^2$ .

Applicando, con questi dati, il teorema di Ampère, abbiamo

$$B(r) = \begin{cases} \frac{\mu_0 i}{2\pi r} & r > R \\ \mu_0 |\mathbf{J}| \frac{r}{2} & r < R \end{cases}$$

Un esempio particolare di questa configurazione è il *cavo coassiale*.

Un cavo coassiale è formato da un filo rettilineo conduttore, che per approssimazione possiamo considerare indefinito, avvolto da un cilindro metallico, detto *maglia* o *calza metallica*. La corrente nei due conduttori scorre in direzioni opposte, in modo che si crei una situazione **auto-schermante**, ovvero che il campo di induzione magnetica, fuori dal cavo, sia nullo.

Anche in questo caso, il sistema ha simmetria cilindrica ( $\mathbf{B} = B(r)\hat{\mathbf{r}}$ ) e le linee di flusso del campo di induzione magnetica sono circonferenze concentriche all'asse. Sappiamo che  $\oint_{\text{Circonferenza}} \mathbf{B} d\mathbf{s} = B(r)2\pi r$ . Inoltre, se la circonferenza considerata ha raggio  $r > R$ , la corrente concatenata a questa linea è nulla; se, invece, la circonferenza considerata ha raggio  $r < R$ , allora la corrente concatenata è  $i$ .

Quindi

$$B(r) = \begin{cases} \frac{\mu_0 i}{2\pi r} & r < R \\ 0 & r > R \end{cases}$$

Consideriamo ora il campo magnetico generato da una struttura particolare, denominata solenoide. Un **solenoid** è formato da un filo conduttore, avvolto attorno ad un supporto, le cui spire sono ravvicinate e all'interno del quale circola corrente. Il supporto può avere forme diverse; consideriamo, come esempi, due supporti particolari: un toroide e un cilindro indefinito.



Un **toroide** (o *toro*) è una superficie a forma di ciambella, ottenuta facendo ruotare, attorno ad un asse fissato, una qualunque figura geometrica piana.

Il solenoide che ha come supporto un toro è detto **solenoide toroidale** o *solenoide torico*.

Per le nostre considerazioni, basate sul teorema di Ampère, usiamo una circonferenza complanare al toro, di raggio  $r$  e concentrica rispetto all'asse di rotazione. Se la circonferenza è interna al toro, abbiamo che  $\oint_{\text{Circonferenza}} \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{\mu_0} B(r) 2\pi r$ .

Sapendo che sono avvolte  $N$  spire attorno al toro e che vi scorre una corrente  $i$ , possiamo determinare che la corrente concatenata è  $i_c = Ni$  se la circonferenza è interna al toro e nulla se è esterna.

Per il teorema di Ampère, quindi

$$B(r) = \begin{cases} \frac{\mu_0 Ni}{2\pi r} & \text{dentro al solenoide} \\ 0 & \text{fuori dal solenoide} \end{cases}$$

Come si vede, il campo di induzione magnetica interno al solenoide torico non dipende dalla forma delle spire, ma solamente dal fatto che il supporto ha una simmetria per rotazione del campo.

Se lo spessore del toro è molto piccolo rispetto alla distanza dall'asse di rotazione, il solenoide è definito *sottile* e il suo campo di induzione magnetica interno è  $B(r) = \frac{\mu_0 Ni}{2\pi r} = \mu_0 ni$ , dove  $n$  rappresenta il numero di spire per unità di lunghezza.

Se il supporto del solenoide è un cilindro indefinito, otteniamo un **solenoide rettilineo indefinito**.

Possiamo considerare il solenoide rettilineo, con buona approssimazione, a un solenoide torico sottile, all'interno del quale è presente un campo di induzione magnetica uniforme, d'intensità.

$$B(r) = \begin{cases} \mu_0 ni & \text{dentro al solenoide} \\ 0 & \text{fuori dal solenoide} \end{cases}$$

## 11.5 Proprietà magnetiche della materia

Quando abbiamo introdotto l'interazione magnetica, abbiamo notato che esistono in natura materiali che producono permanentemente un campo magnetico o che, sottoposti all'azione di un campo, diventano a loro volta sorgenti.

Vediamo ora le proprietà magnetiche della materia, in altre parole il suo comportamento in presenza di un campo magnetico prodotto da correnti elettriche. Poiché non esiste un'unica teoria che descriva ciò, per la nostra trattazione ci riferiamo, per analogia, alle proprietà dei dielettrici descritte in precedenza.

Consideriamo, a tal proposito, un solenoide rettilineo indefinito, il cui campo magnetico è  $\mathbf{B}_0 = \mu_0 ni$ , dove  $\mathbf{B}_0$  indica il campo di induzione magnetica misurato quando il solenoide è vuoto. Supponiamo ora di riempire il solenoide con un mezzo omogeneo e di riuscire a misurare il campo di induzione magnetica all'interno del solenoide.

Il campo  $\mathbf{B}$ , misurato all'interno del solenoide pieno, è parallelo al vettore  $\mathbf{B}_0$ ; la sua intensità, invece, può essere minore o maggiore al campo  $\mathbf{B}_0$ , secondo il tipo di materiale. Il rapporto tra l'intensità del campo  $\mathbf{B}$  e del campo  $\mathbf{B}_0$  determina una costante, denominata **permeabilità magnetica relativa** ( $\kappa_m = \mu_r$ ), ed è rappresentata da un numero puro.

Secondo queste considerazioni, possiamo definire che  $\mathbf{B} = \kappa_r \mathbf{B}_0$ .

È possibile introdurre quindi una nuova grandezza, detta propriamente **campo magnetico**, che viene determinato come  $\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0 \kappa_r} = \frac{\mathbf{B}_0}{\mu_0}$  e che dipende solamente dalle sorgenti elettriche. La variazione del campo magnetico dovuta alla presenza del mezzo è  $\mathbf{B}_m = \mathbf{B} - \mathbf{B}_0 = (\kappa_m - 1)\mathbf{B}_0 = \chi_m \mathbf{B}_0$ , dove  $\chi_m$  è detto **suscettività magnetica**; questa grandezza rappresenta quindi la variazione relativa del campo magnetico dovuta al materiale.

In base a queste considerazioni, possiamo distinguere tre tipi di sostanze: *diamagnetiche*, *paramagnetiche* e *ferromagnetiche*.

Le **sostanze diamagnetiche** sono quelle sostanze che riducono l'intensità del campo magnetico, quindi la loro permeabilità magnetica è minore di uno e la loro suscettività magnetica è minore di zero ( $\chi_m \approx -10^{-9} \div -10^{-6}$ ).

Le **sostanze paramagnetiche** sono quelle sostanze che aumentano l'intensità del campo magnetico, quindi la loro permeabilità magnetica è maggiore di uno e la loro suscettività magnetica è maggiore di zero ( $\chi_m \approx 10^{-6} \div 10^{-3}$ ).

Le **sostanze ferromagnetiche** sono particolari, perché in genere non sono lineari; se le approssimiamo come lineari isotrope omogenee, notiamo che il campo magnetico al loro interno è molto più forte che nel vuoto. La loro permeabilità magnetica e la loro suscettività magnetica arrivano a valori dell'ordine di  $10^3 \div 10^5$ . Un campo elettrico generato da un'elettrocalamita è un esempio della variazione d'intensità all'interno di una sostanza ferromagnetica.

Esistono delle sostanze particolari, però, non classificabili o che si comportano diversamente della loro classificazione.

Ad esempio la grafite, sostanza paramagnetica, possiede valori di suscettibilità magnetica pari a quelli di una sostanza ferromagnetica, il che comporta che, alla presenza di un campo magnetico, un pezzo di grafite pura lieviti (**lievitazione magnetica**). I *materiali superconduttori*, invece, sono particolari materiali diamagnetici, la cui suscettività magnetica è pari a -1.

Per spiegare questo fenomeno dal punto di vista della corrente elettrica, possiamo dire brevemente che le sostanze magnetiche generano, sulla loro superficie, delle correnti (ideali, a livello atomico, in quanto non sono correnti di conduzione) che giocano un ruolo analogo alle cariche di polarizzazione per i materiali dielettrici. Queste correnti sono dette *correnti di magnetizzazione* o *correnti amperiane*, in onore di Ampère che ne intuì per primo l'esistenza.

Nei materiali diamagnetici, queste correnti di magnetizzazione sono discordi alle correnti esterne, e quindi il campo magnetico al loro interno è meno intenso di quello nel vuoto; nei materiali paramagnetici, invece, queste correnti amperiane sono concordi alle correnti esterne, quindi il campo magnetico al loro interno è più intenso che nel vuoto.

## 11.6 Legge di Faraday–Neumann–Lenz

Fino a questo momento abbiamo considerato solamente fenomeni elettrici e magnetici statici.

Ora vogliamo vedere cosa succede se il campo elettrico e il campo magnetico variano d'intensità nel tempo.

Esperimenti condotti da Faraday e da Henry misero in evidenza il fatto che un campo magnetico variabile nel tempo genera un campo elettrico non conservativo, il quale, in opportuni circuiti, genera una forza elettromotrice e quindi una corrente elettrica. Un fenomeno simile avviene se un circuito e un campo magnetico si muovono relativamente. Poniamo il caso di avere un magnete che si muove avvicinandosi e allontanandosi da una spira collegata a un *amperometro*<sup>1</sup>.

Sia in questo caso che nel caso in cui si muova la spira, attraversata da una corrente, e si tenga fermo il magnete, nella spira si nota la comparsa di una *corrente indotta*. Poiché, per esserci una corrente deve essere presente una forza elettromotrice, diremo che questo moto relativo genera una *forza elettromotrice indotta*, che determina un *campo non conservativo indotto*. Ciò si può notare anche se, ai capi della spira, viene posto un *galvanometro*<sup>2</sup>.

Gli stessi effetti riscontrati in questo caso si avrebbero se al posto della spira avessimo un solenoide.

Tutto ciò porta a dire che se abbiamo campi elettrici o magnetici variabili nel tempo, i flussi di questi campi rimangono costanti nel tempo, mentre le loro circuitazioni variano.

$$\begin{aligned}\oint_{\Sigma} \mathbf{D}(t) \cdot \hat{u}_n \, d\Sigma &= \oint_{\Sigma} \mathbf{D} \cdot \hat{u}_n \, d\Sigma = q_{\Sigma} & (\mathbf{D} = \epsilon_0 \kappa \mathbf{E}) \\ \oint_{\Sigma} \mathbf{H}(t) \cdot \hat{u}_n \, d\Sigma &= \oint_{\Sigma} \mathbf{H} \cdot \hat{u}_n \, d\Sigma = 0 & \left( \mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0 \kappa_m} \right)\end{aligned}$$

Consideriamo quindi una curva chiusa orientata  $C$  e una superficie orientata  $\Sigma$  di contorno  $C$ . Nella regione di spazio così delimitata esiste un campo magnetico la cui intensità varia nel tempo.

Se la curva non si modifica nel tempo, si può notare che lungo la linea  $C$  si genera una forza elettromotrice indotta tale che  $f_i = -\frac{d}{dt} \Phi_{\Sigma(C)}(\mathbf{B}) = -\frac{d}{dt} \left( \int_{\Sigma(C)} \mathbf{B} \cdot \hat{u}_n \, d\Sigma \right)$ .

Questa qui enunciata rappresenta la cosiddetta **legge di Faraday–Neumann–Lenz** (*legge dell'induzione elettromagnetica*): *ogni qualvolta il flusso del campo magnetico concatenato con un circuito varia nel tempo, si ha nel circuito una forza elettromotrice indotta, data dall'opposto della derivata del flusso nel tempo, tale da opporsi sempre alla causa che l'ha generata.*

Questa legge spiega che, ogni volta che si accende una lampadina, la corrente impiega alcuni secondi al filamento della lampadina.

Se la linea chiusa  $C$  è rappresentata da un circuito aperto, in base alla legge di Faraday–Neumann–Lenz nel circuito agisce una forza elettromotrice indotta che sposta le cariche; ai capi del circuito, dove si accumulano le cariche, si genera quindi una differenza di potenziale positiva.

<sup>1</sup>Un amperometro è lo strumento usato per la misura dell'intensità di corrente elettrica.

<sup>2</sup>Il galvanometro è lo strumento di misura delle correnti continue.

## Campi elettrici indotti di configurazioni particolari

Consideriamo come esempio un solenoide rettilineo indefinito, composto di  $n$  spire per unità di lunghezza. Sappiamo che, per questa configurazione, il campo magnetico è

$$B(r) = \begin{cases} \mu_0 n i \cdot \hat{z} & \text{dentro al solenoide} \\ 0 & \text{fuori dal solenoide} \end{cases}$$

Se la corrente che attraversa le spire, grazie ad opportuni generatori, varia nel tempo secondo una legge lineare, si genera nello spazio circostante un campo elettrico indotto, la cui entità è determinabile proprio grazie alla legge di Faraday–Neumann–Lenz.

$$\oint_C \mathbf{E}_i \, ds = -\frac{d}{dt} \left( \int_{\Sigma(C)} \mathbf{B} \cdot \hat{u}_n \, d\Sigma \right)$$

La linea chiusa  $C$  lungo la quale si determina la circuitazione del campo elettrico indotto corrisponde a una delle sue linee di flusso, in altre parole a una circonferenza di raggio  $r$ ; ciò è dovuto al fatto che il solenoide ha simmetria cilindrica. Quindi

$$\oint_C \mathbf{E}_i \, ds = \oint_C \mathbf{E}_i(r) \, ds = |\mathbf{E}_i(r)| 2\pi r$$

Il flusso del campo magnetico è

$$\oint_{\Sigma(C)} \mathbf{B} \cdot \hat{u}_n \, d\Sigma = \begin{cases} \mu_0 n i \cdot \pi r^2 = \mu_0 n k t \cdot \pi r^2 & r < R \\ \mu_0 n i \cdot \pi R^2 = \mu_0 n k t \cdot \pi R^2 & r > R \end{cases}$$

Applicando quindi la legge dell'induzione elettromagnetica abbiamo che

$$|\mathbf{E}_i(r)| = \begin{cases} -\frac{\mu_0 n k}{2} r & r < R \\ -\frac{\mu_0 n k}{2} \frac{R^2}{r} & r > R \end{cases}$$

## 11.7 Autoinduzione e mutua induzione

Consideriamo ora un circuito  $C_1$  formato da materiale conduttore e orientato; supponiamo che all'intero del circuito scorra una corrente  $i_1$  nello stesso verso dell'orientazione del circuito e che questa corrente generi un campo magnetico  $\mathbf{B}_1$ .

Il flusso di questo campo magnetico attraverso una qualsiasi superficie aperta avente come contorno il circuito ( $\Phi_{\Sigma(C)}(\mathbf{B}_1(i_1))$ ) è detto **flusso concatenato alla curva  $C$**  o *auto-flusso*. Poiché sia il campo magnetico sia il suo flusso sono proporzionali alla corrente, l'autoflusso è definibile come

$$\Phi_{\Sigma(C_1)}(\mathbf{B}_1(i_1)) = Li$$

dove  $L$  prende il nome di **coefficiente di autoinduzione (induttanza)** del circuito ( $L \equiv \frac{\Phi_{\Sigma(C_1)}(\mathbf{B}_1(i_1))}{i_1} = \int_{\Sigma(C)} \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \oint_{C_1} \frac{ds \times \hat{u}_{n_1}}{r_1^2} \right) \cdot \hat{u}_n \, d\Sigma$ ). Questo coefficiente è di tipo geometrico, ovvero dipende solamente dalla forma del circuito e non dal campo magnetico o dalla corrente elettrica.

Usando lo stesso ragionamento, si può definire il flusso del campo magnetico prodotto da un circuito  $C_1$  attraverso un circuito  $C_2$  come  $\Phi_{\Sigma(C_2)}(\mathbf{B}_1(i_1)) = \int_{\Sigma(C_2)} \mathbf{B}_1 \cdot \hat{u}_1 \, d\Sigma$ . Giacché

il campo magnetico è proporzionale all'intensità di corrente elettrica, possiamo scrivere  $\Phi_{1,2} = M_{1,2}i_1$ .

Allo stesso modo è definibile il flusso del campo magnetico prodotto da un circuito  $C_2$  attraverso un circuito  $C_1$  ( $\Phi_{2,1} = M_{2,1}i_1$ ). I coefficienti  $M_{1,2}$  e  $M_{2,1}$  sono detti **coefficienti di mutua induzione**, sono geometrici e, in base alle proprietà generali del campo magnetico, sono uguali.

Nel Sistema Internazionale, l'unità di misura dei coefficienti di autoinduzione e dei coefficienti di mutua induzione è il *weber su ampere*, che prende il nome di **henry** ( $H = \text{Wb/A}$ ).

### Esempi di fenomeni di autoinduzione e mutua induzione: l'alternatore

Consideriamo ora alcuni esempi di fenomeni di autoinduzione e di mutua induzione.

Prendiamo un solenoide torico, di cui conosciamo il campo magnetico generato e determiniamo il suo coefficiente di autoinduzione.

Per determinare il suo coefficiente di autoinduzione, in base alla sua definizione, occorre determinare il flusso del campo di induzione magnetica attraverso una superficie aperta. Questa superficie è data dalle  $N$  spire del solenoide.

Grazie alla particolare simmetria dell'oggetto, il flusso attraverso la superficie di  $N$  spire del solenoide corrisponde a  $N$  volte il flusso attraverso la superficie di una spira.

Una volta scelta l'orientazione della spira, possiamo calcolare il flusso.

$$\begin{aligned}\Phi_{\text{spira}}(\mathbf{B}(i)) &= \int_{\text{spira}} \mathbf{B} \cdot \hat{u}_n \, d\Sigma = \int_{\text{spira}} B(r) \, d\Sigma = \\ &= \int_{R_0}^{R_0+a} \int_{h_0}^{h_0+b} B(r) \, dh \, dr = \int_{R_0}^{R_0+a} B(r) b \, dr = \\ &= \frac{\mu_0 N i b}{2\pi} \ln \left( 1 + \frac{a}{R_0} \right) \xrightarrow[a \ll R_0]{\text{Sviluppo di Taylor}} \frac{\mu_0 N i b}{2\pi} \frac{a}{R_0} = B \Sigma_{\text{spira}}\end{aligned}$$

Ciò che è stato trovato corrisponde al coefficiente di autoinduzione di un solenoide rettilineo indefinito.

Vediamo ora cosa succede quando, in una stessa regione di spazio, sono presenti due solenoidi.

Ognuno dei due solenoidi genera un campo di induzione magnetica ( $\mathbf{B}_1 = \mu_0 \frac{N_1}{l} i_1$  per il primo solenoide e  $\mathbf{B}_2 = \mu_0 \frac{N_2}{l} i_2$  per il secondo solenoide). Nella porzione di spazio delimitata dai due solenoidi, accade il fenomeno di mutua induzione.

Sapendo che  $\Phi_{\Sigma_1}(\mathbf{B}_1) = N_1 \mathbf{B}_1 \Sigma$ , possiamo affermare che

$$M_{1,2} = M_{2,1} \frac{N_1 \mu_0 \frac{N_2}{l} i_2 \Sigma}{i_2} = \mu_0 \frac{\Sigma}{l} i_2 N_1 N_2$$

Anche nel caso del cavo coassiale, tra le due superfici conduttrici accade il fenomeno dell'induzione mutua.

Se il raggio del conduttore interno è molto minore del raggio del conduttore esterno, sapendo l'espressione del campo di induzione magnetica generato da questa configurazione,

possiamo determinare che

$$M_{1,2} = M_{2,1} = \frac{\frac{\mu_0 i_2}{2a_2} \pi a_1^2}{i_2} = \frac{\mu_0}{2} \pi \frac{a_1^2}{a_2}$$

Come abbiamo detto, la variazione del flusso del campo di induzione magnetica provoca la generazione di una forza elettromotrice indotta tale da opporsi alla variazione del campo. Questo fenomeno è riscontrabile anche nel funzionamento dell'**alternatore**.

Supponiamo di avere una bobina rettangolare realizzata con  $N$  spire (i ragionamenti in realtà non dipendono dalla forma, ma per semplificazione usiamo la forma rettangolare), fatta ruotare lungo un asse passante per il suo centro e parallelo ai lati e immersa in un campo di induzione magnetica uniforme perpendicolare all'asse di rotazione. Immaginiamo, inoltre, che la bobina sia collegata, tramite fili conduttori, a una resistenza.

A causa della rotazione della bobina, il flusso attraverso la resistenza varierà in funzione del tempo, quindi nella bobina si genererà una forza elettromotrice.

Nell'istante  $t = 0$  la bobina forma un angolo  $\theta = 0$  con l'asse. La rotazione avviene con velocità angolare  $\omega$  costante.

Per applicare la legge di Faraday–Neumann–Lenz, dobbiamo determinare il flusso del campo di induzione magnetica attraverso la superficie  $\Sigma$  della bobina.

$$\Phi_\Sigma(\mathbf{B}) = \int_\Sigma \mathbf{B} \cdot \hat{u}_n \, d\Sigma = \int_\Sigma |\mathbf{B}| \cos \theta \, d\Sigma = |\mathbf{B}| \cos \theta \Sigma$$

Applicando la legge dell'induzione elettromagnetica abbiamo che

$$f_i(t) = -\frac{d}{dt} \left( \int_\Sigma \mathbf{B} \cdot \hat{u}_n \, d\Sigma \right) = -B\Sigma(-\sin \theta) \frac{d\theta}{dt} = B\Sigma\omega \sin \theta = B\Sigma\omega \sin(\omega t)$$

## Circuito RL

Riepilogando, quando in un circuito, immerso in un campo di induzione magnetico, è percorso da una corrente variabile nel tempo, al suo interno si genera una forza elettromotrice. Ad esempio, se la corrente varia nel tempo in modo lineare, la forza elettromotrice indotta è costante.

Dopo molto tempo, la forza elettromotrice fa sì che la corrente che percorre il circuito assume intensità  $i = \frac{f}{R}$ . Questa corrente genera a sua volta un campo di induzione magnetica, che si somma algebricamente a quello già presente, essendo diretto in verso opposto a quello già presente; questo nuovo campo magnetico provoca una forza elettromotrice autoindotta nel circuito e così via.

Il processo qui descritto è ciclico, cioè si ripete sempre in un circuito; risulta quindi che  $f(t) = f_a(t) + ri(t)$  (*legge di Ohm*). Ricordandoci che  $f_a(t) = -\frac{d\Phi_{\Sigma(C)(B(i))}}{dt}$  e che  $\Phi_{\Sigma(C)(B(i))} = Li$ , la legge di Ohm diventa

$$f(t) - \frac{d}{dt}(Li) = Ri(t) \quad (11.9)$$

Abbiamo detto che il coefficiente  $L$  di autoinduzione è un coefficiente geometrico; se il circuito è indeformabile ed è orientabile solamente in un modo (ovvero la sua geometria è invariabile), allora  $f(t) - L \frac{di}{dt} = Ri(t)$ , mentre se è deformabile, il valore del coefficiente d'induttanza tende a zero e il circuito, per opporsi alla variazione del flusso magnetico, si contrae.

Quando, in un circuito con valore d'induttanza non nullo, si può concentrare questa caratteristica in un solo tratto, ad esempio in un tratto di filo avvolto in modo da formare un solenoide rettilineo, questo particolare tratto di filo è denominato **induttore** e viene rappresentato circuitamente mediante il simbolo in Figura 11.2. Se, all'interno del solenoide, inseriamo una sbarretta di materiale ferromagnetico, abbiamo che vuoto  $L_\mu = \kappa L_{\text{vuoto}}$ .

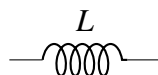


Figura 11.2: Rappresentazione circuitale di un induttore

La legge di Ohm, nella sua espressione  $f(t) - L \frac{di}{dt} = Ri(t)$ , rappresenta anche la *legge delle maglie* per un particolare circuito, detto **circuito RL in serie**, in cui sono presenti e collegati in serie un generatore di forza elettromotrice, un induttore e un resistore (Figura 11.3).

Per far sì che scorra della corrente elettrica all'interno di un circuito RL, occorre spendere

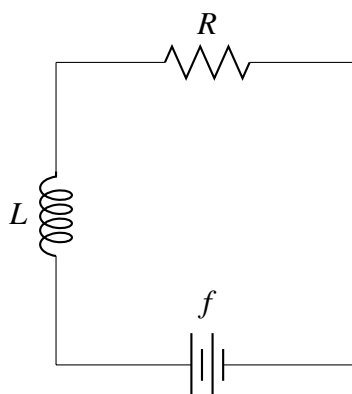


Figura 11.3: Circuito RL in serie

lavoro, la cui espressione è determinabile tramite l'equazione di Kirchhoff del circuito.

$$f i dt = Ri^2 dt + L i di$$

Il termine  $Ri^2 dt$  rappresenta il lavoro speso dalla resistenza per far circolare corrente nel circuito, trasformato in calore per *effetto Joule*, mentre il termine  $L i di$  rappresenta il lavoro speso contro la forza elettromotrice autoindotta, necessario per far aumentare la corrente da  $i$  a  $i + di$ .

Inoltre, quando l'intensità di corrente passa da 0 al valore  $I$ , il generatore di forza elettromotrice, oltre al lavoro corrispondente all'effetto Joule, deve spendere, contro la forza elettromotrice autoindotta, il lavoro  $W = \int_0^I L i di = \frac{1}{2} LI^2$ . Questo valore non dipende dal modo in cui avviene la variazione d'intensità di corrente, ma solo dal suo valore iniziale e da quello finale.

Possiamo quindi definire l'**energia contenuta in un induttore** (*energia intrinseca della corrente*) come

$$U_L = \frac{1}{2} LI^2$$

Come l'energia contenuta in un condensatore è stata associata all'energia propria del campo elettrostatico, anche l'energia contenuta in un induttore è associabile all'energia propria del campo magnetico.

Consideriamo ora un tratto di solenoide rettilineo indefinito lungo  $d$ , nel quale sono contenute  $n$  spire (ovvero  $N = nd$  spire per unità di lunghezza). In questa situazione, il solenoide indefinito è equivalente a un solenoide torico sottile, per cui  $|\mathbf{B}| = \mu_0 n I$ .

Il coefficiente di autoinduzione è, quindi,  $L = \frac{N|\mathbf{B}|\Sigma}{I}$ , dove  $\Sigma$  è la superficie di una spira. L'energia contenuta nell'induttore, che prende anche il nome di **energia magnetica**, diventa

$$U_L = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} \frac{N|\mathbf{B}|\Sigma}{I} I^2 = \frac{1}{2} \frac{N\mu_0 n I \Sigma}{I} I = \frac{1}{2} (\mu_0 n I) (n I) (\Sigma d) = \frac{1}{2} |\mathbf{B}| |\mathbf{H}| V = u_m V$$

dove il termine  $u_m = \frac{1}{2} |\mathbf{B}| |\mathbf{H}| = \frac{1}{2} \frac{|\mathbf{B}|^2}{\mu_0} = \frac{1}{2} \mu_0 |\mathbf{H}|^2$  è detto **densità di energia magnetica**. L'espressione dell'energia magnetica ottenuta mostra che il suo valore dipende solamente dall'entità del campo magnetico in quella regione di spazio e dalla permeabilità magnetica del mezzo in cui si propaga il campo.

### Carica e scarica di un circuito RL

Vediamo ora che succede in un circuito RL dotato d'interruttore alla chiusura e all'apertura di quest'ultimo.

Sappiamo che, in un circuito di questo tipo, la forza elettromotrice vale  $f(t) = Ri(t) + L \frac{di}{dt}$  e che la corrente, nulla prima della chiusura dell'interruttore, rimarrà nulla anche nell'istante successivo alla chiusura ( $i(0) = 0$ ).

Ci troviamo in una condizione simile a quella che avevamo per la carica di un condensatore, quindi

$$i(t) = \frac{f}{R} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

dove  $\tau = \frac{L}{R}$ .

Durante i transitori, ovvero durante il passaggio da un valore di equilibrio a un altro, il valore del coefficiente di autoinduzione è molto importante, perché determina la velocità con cui viene raggiunto il regime; quando è raggiunto il regime, invece, non vi sono variazioni nel tempo del valore dell'intensità di corrente e il valore della resistenza è molto importante. Infatti, se  $L$  è molto grande, il circuito impiega un tempo molto grande per raggiungere il regime, mentre se  $R$  è molto grande, il circuito impiega un tempo molto piccolo per raggiungerlo.

La differenza di potenziale ai capi dell'induttore varia secondo la legge  $V_A - V_B = L \frac{di}{dt} = L \frac{f}{R} \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} = f e^{-\frac{t}{\tau}}$ .

Alla chiusura dell'interruttore, la differenza di potenziale ai capi dell'induttore ha una variazione brusca, arrivando fino al valore della forza elettromotrice; questa variazione brusca, però non avviene all'interno dell'induttore. Ciò comporta che, a regime, l'induttore agisca come un filo conduttore, proprio perché si è caricato di energia.

Quando si riapre il circuito, al suo interno scorre una corrente d'intensità  $i = \frac{f}{R}$ ; questa corrente, per mantenere il suo valore, provoca un innalzamento del potenziale elettrico prima dell'induttore. Quest'ultimo si opporrà alla variazione della corrente, per questo l'intensità di corrente varia secondo la legge  $i(t) = \frac{f}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$ .



## 11.8 Teorema di Ampère-Maxwell

Le leggi fondamentali dell'elettrostatica e della magnetostatica viste finora non sono sempre valide.

Consideriamo la situazione di carica di un condensatore piano.

In questo caso, non esiste sempre una superficie tale per cui la corrente è concatenata a essa in base al teorema di Ampère. Per questo motivo, bisogna correggere l'espressione di questa legge; vi riuscì Maxwell, tenendo conto dell'equazione di continuità. Viene introdotta, quindi, una **corrente di spostamento** all'interno del condensatore, la cui entità è legata alla variazione del campo elettrostatico al suo interno.

$$i_s = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

Secondo queste considerazioni, possiamo affermare che  $\int_{\Sigma} \left( \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot \hat{u}_n \, d\Sigma$ , cioè che il vettore  $\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$  è un vettore solenoidale (e questa affermazione è vera sempre, poiché rappresenta l'unione dell'equazione di continuità con il teorema di Gauss), e che  $\oint_C \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \, ds = \int_{\Sigma(C)} \left( \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot \hat{u}_n \, d\Sigma$ .

Quest'ultima espressione prende il nome di **teorema di Ampère-Maxwell**, il quale afferma che i campi magnetici sono prodotti sia delle correnti di conduzioni sia da variazioni temporali del campo elettrico, ovvero che il campo elettrico e il campo magnetico sono legati tra di loro.

Ipotizziamo che ai capi del condensatore vi sia un generatore di differenza di potenziale tale che  $V_0 = kt$ ; sappiamo che, in base alle considerazioni precedenti,  $\mathbf{E} = \frac{V_0}{d} = \frac{kt}{d}$ . Sfruttiamo il teorema di Ampère-Maxwell per determinare il campo di induzione magnetica indotta.

$$\oint_C \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \, ds = \int_{\Sigma(C)} \left( \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot \hat{u}_n \, d\Sigma = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \pi r^2$$

$$\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \frac{r^2}{2} = \epsilon_0 \frac{K}{d} \frac{r}{2}$$



# Bibliografia

- [1] Ugo Amaldi. *Fisica: idee ed esperimenti*, volume 1. Zanichelli, 2001.
- [2] Paolo Mazzoldi, Massimo Nigro, e Cesare Voci. *Elementi di Fisica: Meccanica - Termodinamica*, volume 1. Edizioni EdiSES, 1<sup>a</sup> edizione, 2007.
- [3] Paolo Mazzoldi, Massimo Nigro, e Cesare Voci. *Elementi di Fisica: Elettromagnetismo - Onde*, volume 2. Edizioni EdiSES, 2<sup>a</sup> edizione, 2008.



# Elenco delle figure

1.1	Metro quadrato e metro cubo . . . . .	6
1.2	Un angolo misurato in radianti . . . . .	6
1.3	Rappresentazione grafica di un steradiano . . . . .	6
2.1	Un vettore . . . . .	11
2.2	Metodo “punta-coda” . . . . .	12
2.3	Metodo del parallelogramma . . . . .	12
2.4	Differenza tra vettori . . . . .	13
2.5	Moltiplicazione di un vettore per uno scalare . . . . .	13
2.6	Prodotto scalare . . . . .	14
2.7	Prodotto vettoriale . . . . .	15
2.8	Scomposizione di un vettore . . . . .	16
3.1	Grafici di $x(t)$ , $v(t)$ e $a(t)$ per il moto armonico semplice . . . . .	28
3.2	Sistemi di coordinate . . . . .	30
3.3	Componenti del vettore accelerazione . . . . .	33
3.4	Traiettoria di un moto circolare . . . . .	36
4.1	Le leggi di Keplero . . . . .	42
4.2	Piano inclinato . . . . .	43
4.3	Reazione normale . . . . .	44
4.4	Forza di attrito radente . . . . .	44
4.5	Forza di attrito radente su un piano inclinato . . . . .	45
4.6	Forza centripeta . . . . .	46
4.7	Legge di Hooke . . . . .	48
4.8	Pendolo semplice . . . . .	49
4.9	Lavoro su una retta . . . . .	51
4.10	Energia meccanica della forza peso . . . . .	56
4.11	Energia meccanica della forza elastica . . . . .	57
4.12	Energia meccanica di un oscillatore armonico . . . . .	57
5.1	Momento di un vettore . . . . .	64
5.2	Rotazione di un corpo umano . . . . .	67
5.3	Asta sottile . . . . .	69
5.4	Pendolo composto . . . . .	72
8.1	Forza di attrito viscoso . . . . .	82
8.2	Tubo di flusso . . . . .	83
9.1	Elettroscopio a foglie . . . . .	97

9.2	Rappresentazione circuitale di un condensatore . . . . .	112
9.3	Collegamento in parallelo di condensatori . . . . .	113
9.4	Collegamento in serie di condensatori . . . . .	113
9.5	Partitore capacitivo . . . . .	113
10.1	Rappresentazione circuitale di un generatore di differenza di potenziale . . .	119
10.2	Rappresentazione circuitale di un resistore . . . . .	122
10.3	Resistori in serie . . . . .	123
10.4	Resistori in parallelo . . . . .	123
10.5	Rappresentazione circuitale di un generatore ideale . . . . .	125
10.6	Partitore resistivo . . . . .	126
10.7	Circuito RC - carica di un condensatore . . . . .	127
10.8	Differenza di potenziale ai capi del condensatore e intensità di corrente nel circuitto durante la carica . . . . .	128
10.9	Circuito RC - scarica di un condensatore . . . . .	129
11.1	Rappresentazione schematica del campo magnetico terrestre. . . . .	132
11.2	Rappresentazione circuitale di un induttore . . . . .	145
11.3	Circuito RL in serie . . . . .	145