Regressione Lineare e Anova

Progetto di Inferenza Statistica

T. Bucci, G. Corbo, D. Fabroni

Politecnico di Milano

Luglio 2021

Table of Contents

Scelta del dataset: Biomechanical features of orthopedic patients

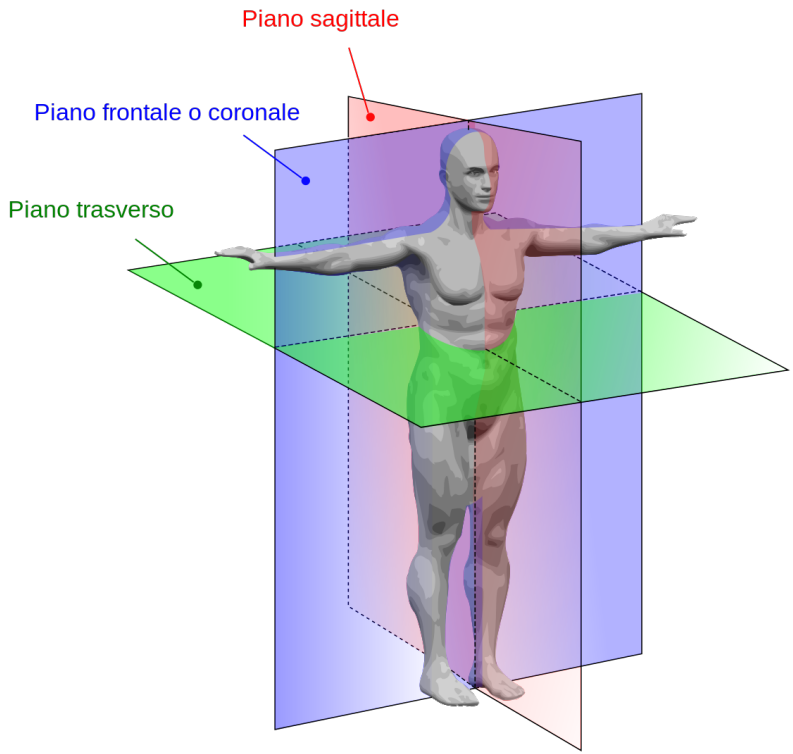
Fonte: Lichman, M. (2013). UCI Machine Learning Repository [http://archive.ics.uci.edu/ml]. Irvine, CA: University of California, School of Information and Computer Science

Covariate presenti

- pelvic incidence (continua)
- pelvic tilt (continua)
- lumbar lordosis angle (continua)
- sacral slope (continua)
- pelvic radius (continua)
- grade of spondylolisthesis (continua)
- class (categorica)

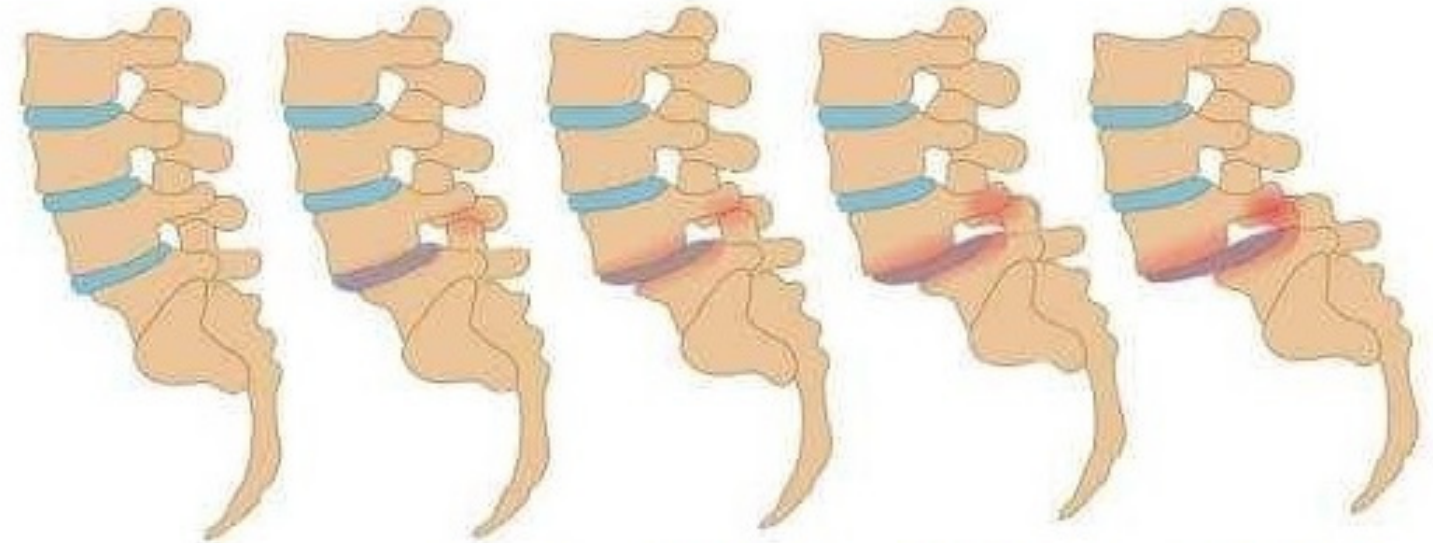
con 310 osservazioni.

Sono indici dell'inclinazione del bacino sul piano sagittale.

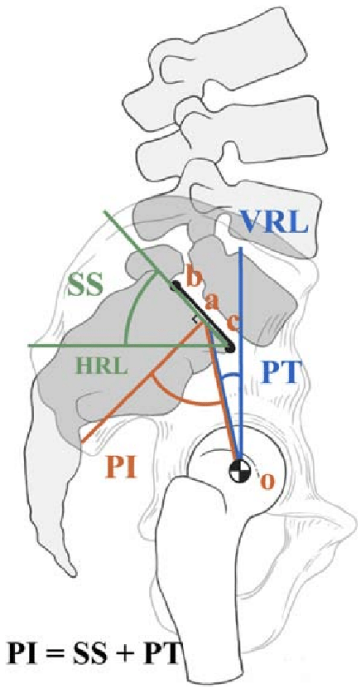


Le classi sono *Hernia*, *Spondylolisthesis*, *Normal*.

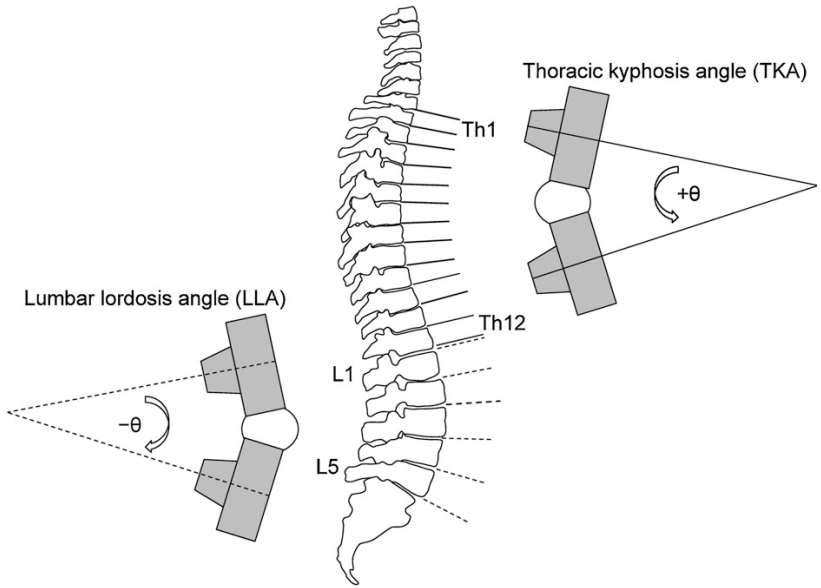
Classificazione



Vogliamo fare una regressione su misurazioni fisiche della zona pelvica...



... per poter stimare il **lumbar lordosis angle**, un parametro che riguarda la sezione medio-bassa della schiena che misura la concavità della zona lombare della schiena.



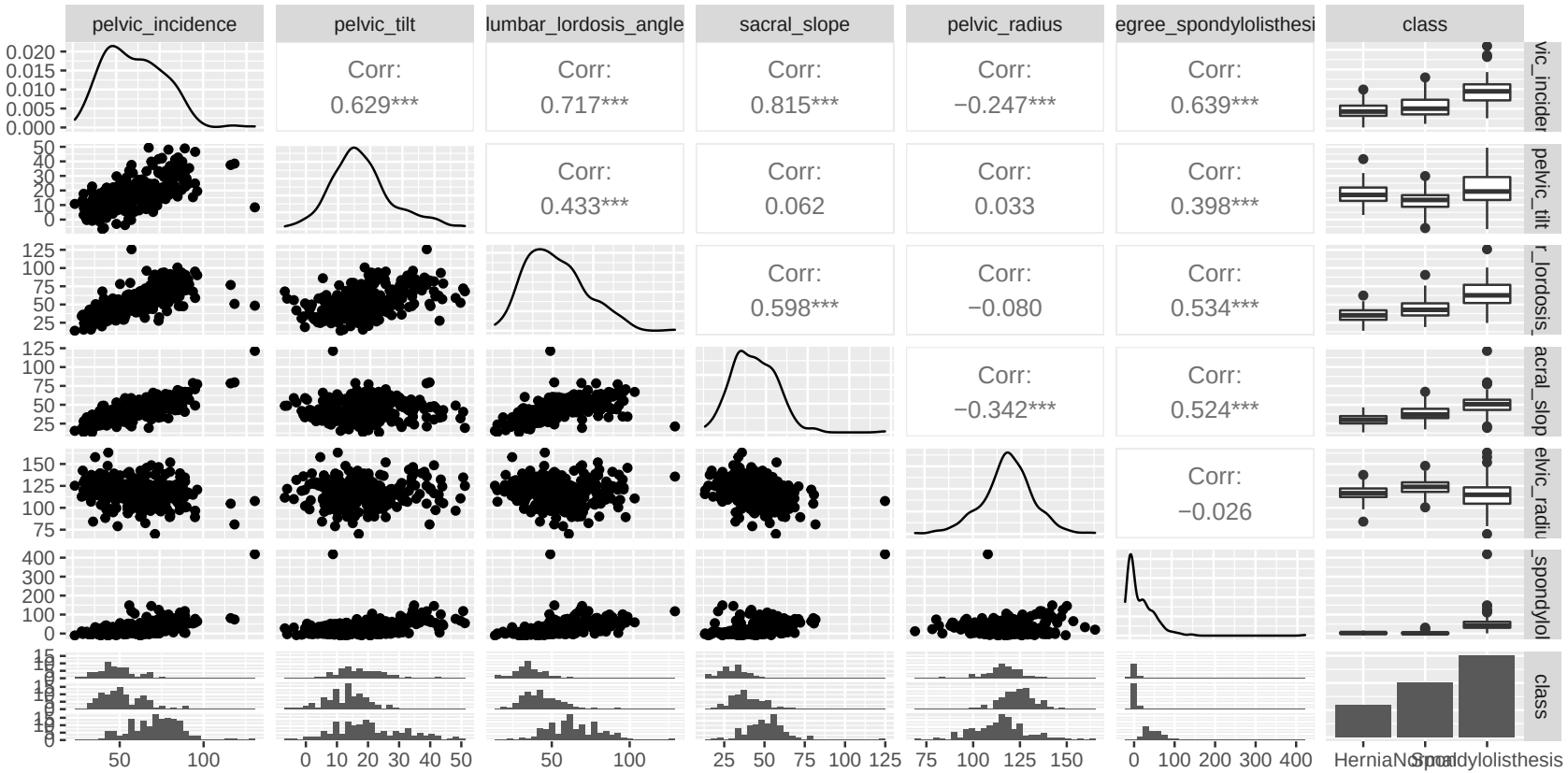
Vantaggi di questo approccio

- Poter prevedere una caratteristica della schiena senza fare una radiografia completa della schiena
- Risparmio di costi della radiografia
- Riduzione della quantità di raggi X a cui il paziente è esposto

Overview dei dati

	pelvic_incidence	pelvic_tilt	lumbar_lordosis_angle	sacral_slope	pelvic_radius	degree_spondylolisthesis	class
1	63.02782	22.552586	39.60912	40.47523	98.67292	-0.254400	Hernia
2	39.05695	10.060991	25.01538	28.99596	114.40543	4.564259	Hernia
3	68.83202	22.218482	50.09219	46.61354	105.98514	-3.530317	Hernia
4	69.29701	24.652878	44.31124	44.64413	101.86850	11.211523	Hernia
5	49.71286	9.652075	28.31741	40.06078	108.16872	7.918501	Hernia
6	40.25020	13.921907	25.12495	26.32829	130.32787	2.230652	Hernia

Non ci sono degli NA.


pelvic_incidence
pelvic_tilt
lumbar_lordosis_angle
sacral_slope
pelvic_radius
egree_spondylolisthesi
class
Corr: 0.629***
Corr: 0.717***
Corr: 0.815***
Corr: −0.247***
Corr: 0.639***
Corr: 0.433***
Corr: 0.062
Corr: 0.033
Corr: 0.398***
Corr: 0.598***
Corr: −0.080
Corr: 0.534***
Corr: −0.342***
Corr: 0.524***
Corr: −0.026
vic_incider
pelvic_tilt
r_lordosis_
acral_slop
elvic_radiu
_spondylol
class
HerniaNormal
Spondylolisthesis

Generiamo il primo modello lineare, come risposta `lumbar_lordosis_angle`.
Escludiamo `class`, che è la categorica.

```
Call:
lm(formula = lumbar_lordosis_angle ~ . - class, data = biomech)

Residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max
-76.720  -7.415  -1.261   6.878  70.183

Coefficients: (1 not defined because of singularities)
                          Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)              -10.55489    8.59928  -1.227   0.2206
pelvic_incidence           0.76884    0.06996  10.989   <2e-16 ***
pelvic_tilt               -0.11410    0.09650  -1.182   0.2380
sacral_slope                   NA         NA      NA       NA
pelvic_radius              0.14092    0.05911   2.384   0.0177 *
degree_spondylolisthesis   0.05166    0.02555   2.022   0.0441 *
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 12.76 on 305 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.5334,Adjusted R-squared:  0.5272
F-statistic: 87.15 on 4 and 305 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

R^2_{adj} iniziale abbastanza buono come punto di partenza: 0.5272.
Molto significativo `pelvic_incidence`.
p-value dell'F-test 2.2e-16, c'è evidenza per dire che almeno una covariata sia significativa.
Ci sono NA in corrispondenza di `sacral_slope`, scopriamo che è indice di lineare dipendenza da altre covariate, procediamo quindi subito con l'analisi di questo aspetto.

Prevediamo `sacral_slope` in funzione di tutto il resto, tranne la risposta originale e la categorica.

```
Call:
lm(formula = sacral_slope ~ . - class - lumbar_lordosis_angle,
    data = biomech)

Residuals:
       Min         1Q     Median         3Q        Max
-1.091e-08 -5.072e-10  1.020e-10  3.703e-10  1.057e-08

Coefficients:
                           Estimate Std. Error    t value Pr(>|t|)
(Intercept)               6.414e-10  3.159e-09  2.030e-01    0.839
pelvic_incidence          1.000e+00  2.570e-11  3.891e+10   <2e-16 ***
pelvic_tilt              -1.000e+00  3.545e-11 -2.821e+10   <2e-16 ***
pelvic_radius            -8.878e-12  2.171e-11 -4.090e-01    0.683
degree_spondylolisthesis  4.338e-12  9.388e-12  4.620e-01    0.644
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 4.687e-09 on 305 degrees of freedom
Multiple R-squared:      1,Adjusted R-squared:      1
F-statistic: 6.337e+20 on 4 and 305 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

R^2_{adj} vale 1, osservando i β scopriamo che

$$\text{sacralslope} + \text{pelvictilt} = \text{pelvicincidence}$$

In ambito medico abbiamo conferma di questa cosa:
Pelvic tilt and sacral slope are two angles directly correlated with the pelvic incidence angle. The angle of incidence is the algebraic sum of two angles: pelvic tilt (PT) and sacral slope (SS)[1]
Escludiamo questa covariata.

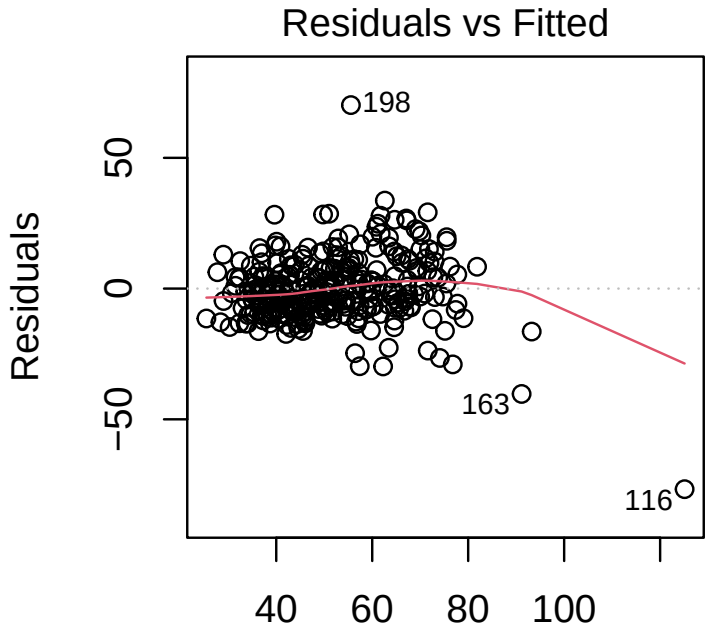
[1] https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC3175921/

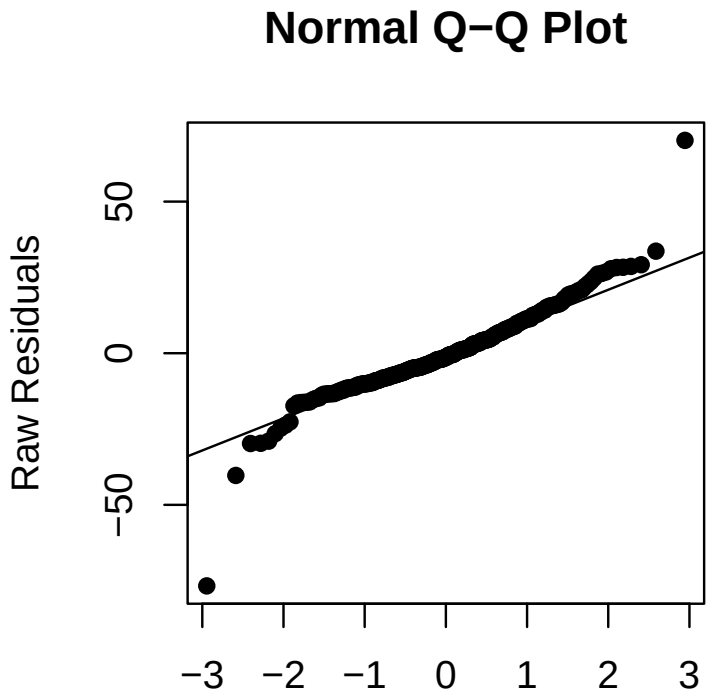
Procediamo con il nostro modello escludendo la `sacral_slope` e la categorica.

```
Call:
lm(formula = lumbar_lordosis_angle ~ . - class - sacral_slope,
    data = biomech)

Residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max
-76.720  -7.415  -1.261   6.878  70.183

Coefficients:
                         Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)             -10.55489    8.59928  -1.227   0.2206
pelvic_incidence          0.76884    0.06996  10.989   <2e-16 ***
pelvic_tilt              -0.11410    0.09650  -1.182   0.2380
pelvic_radius             0.14092    0.05911   2.384   0.0177 *
degree_spondylolisthesis  0.05166    0.02555   2.022   0.0441 *
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 12.76 on 305 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.5334,Adjusted R-squared:  0.5272
F-statistic: 87.15 on 4 and 305 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

Controlliamo le ipotesi

L'omoschedasticità non è fantastica e lo Shapiro test rifiuta la normalità con un p-value di 3.878e-11.





lm(lumbar_lordosis_angle ~ . − class − sacral_

Procediamo dapprima con la pulizia del dataset, controllando se migliorano le ipotesi di lavoro, e nel caso procediamo con la trasformazione box cox.

I **punti leva** ($h_{ii} > 2p/n$) risultano:

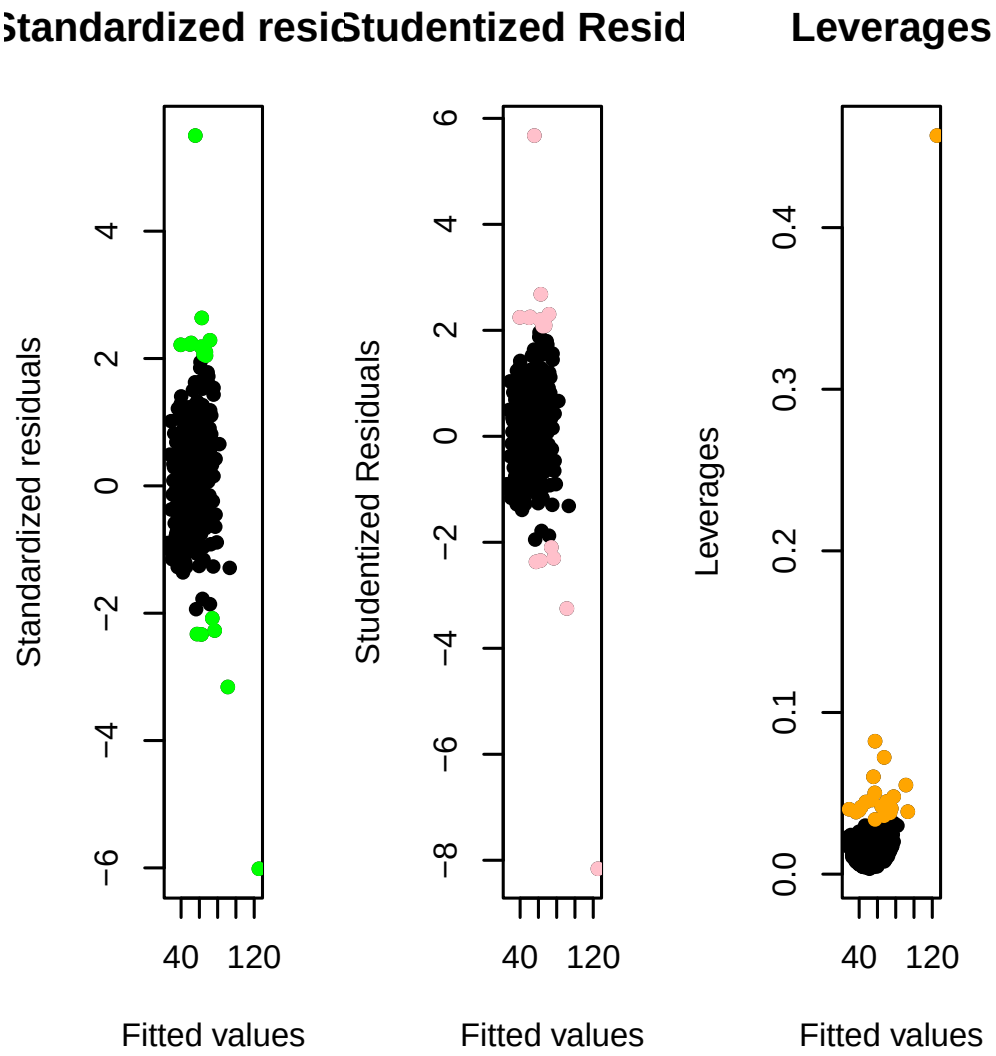
```
 10  52  76  84  86  96 116 123 142 163
164 168 174 180 181 191 193 198 203 207
```

Vediamo anche residui studentizzati e standardizzati.

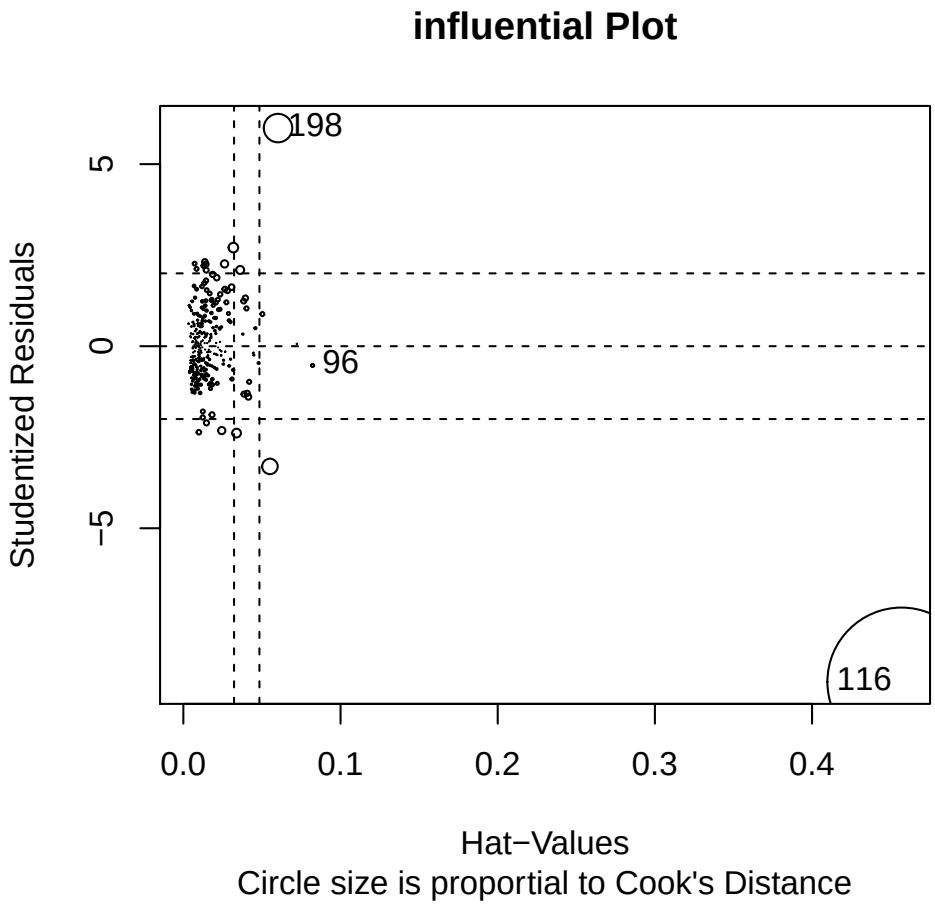
Gli standardizzati sono

```
 52  72  75  83  94  99 113 116
125 135 143 163 183 198 202 203
```

e coincidono con gli studentizzati.


Standardized resi
Studentized Resid
Leverages
Standardized residuals
Studentized Residuals
Leverages
Fitted values
Fitted values
Fitted values
40
120
40
120
40
120
−6
−4
−2
0
2
4
−8
−6
−4
−2
0
2
4
6
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4

Punti influenti



Dopo aver tolto i leverage:

```
Call:
lm(formula = lumbar_lordosis_angle ~ . - class - sacral_slope,
    data = biomech, subset = (lev < 2 * p/n))

Residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max
-38.740  -6.327  -0.724   5.792  26.955

Coefficients:
                          Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)              -14.65892    7.78281  -1.884  0.06065 .
pelvic_incidence           0.82717    0.06289  13.152  < 2e-16 ***
pelvic_tilt               -0.37281    0.09005  -4.140 4.58e-05 ***
pelvic_radius              0.15686    0.05499   2.853  0.00465 **
degree_spondylolisthesis   0.20055    0.03096   6.477 4.08e-10 ***
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 10.12 on 285 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.6929,Adjusted R-squared:  0.6886
F-statistic: 160.7 on 4 and 285 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

Dopo aver tolto gli studentizzati:

```
Call:
lm(formula = lumbar_lordosis_angle ~ . - class - sacral_slope,
    data = biomech, subset = (abs(stud) < 2))

Residuals:
     Min       1Q   Median       3Q      Max
-24.7494  -6.7045  -0.8731   6.1216  25.1839

Coefficients:
                         Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)              -7.11477    6.20910  -1.146   0.2528
pelvic_incidence          0.87282    0.05160  16.914  < 2e-16 ***
pelvic_tilt              -0.39784    0.07492  -5.310 2.19e-07 ***
pelvic_radius             0.08100    0.04293   1.887   0.0602 .
degree_spondylolisthesis  0.13697    0.02437   5.621 4.48e-08 ***
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 9.021 on 289 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.7298,Adjusted R-squared:  0.7261
F-statistic: 195.2 on 4 and 289 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

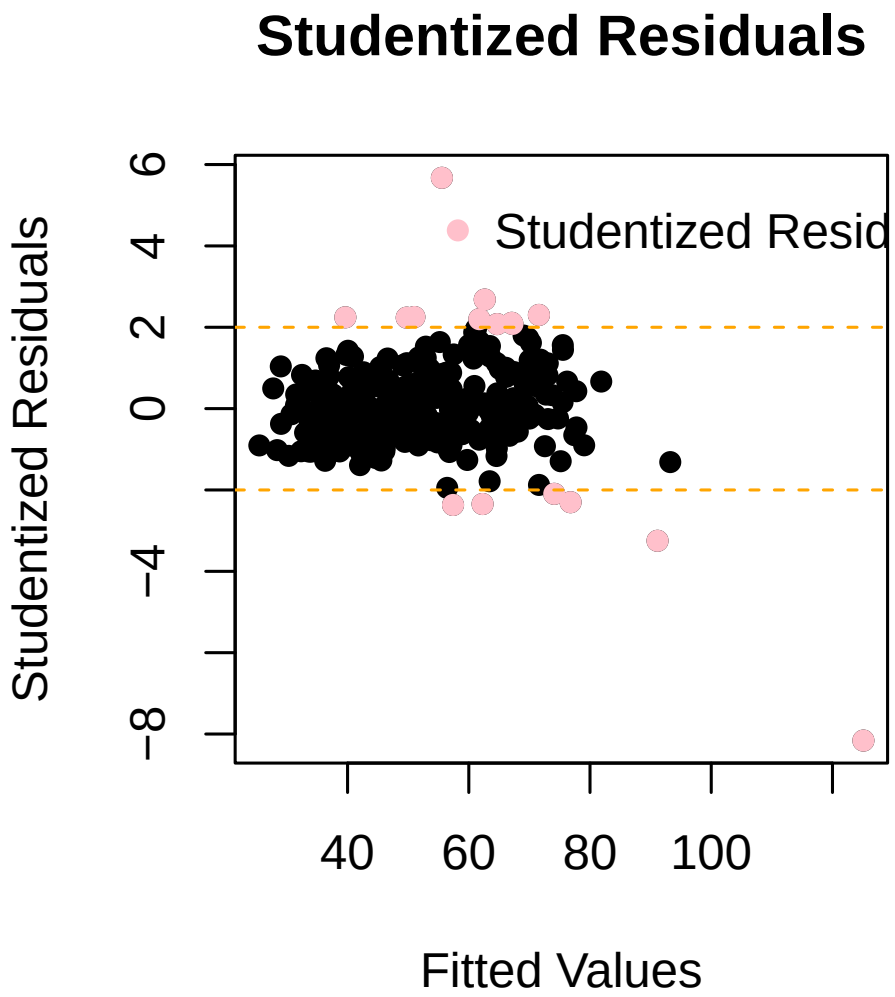
Dopo aver tolto i leverage e gli studentizzati:

```
Call:
lm(formula = lumbar_lordosis_angle ~ . - class - sacral_slope,
    data = biomech, subset = (abs(stud) < 2 | lev < 2 * p/n))

Residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max
-34.290  -7.025  -0.731   5.986  31.766

Coefficients:
                         Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)              -6.11635    6.98922  -0.875   0.3822
pelvic_incidence          0.83386    0.05816  14.337  < 2e-16 ***
pelvic_tilt              -0.40375    0.08410  -4.801 2.50e-06 ***
pelvic_radius             0.09063    0.04823   1.879   0.0612 .
degree_spondylolisthesis  0.16506    0.02716   6.077 3.71e-09 ***
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 10.32 on 300 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.6759,Adjusted R-squared:  0.6716
F-statistic: 156.4 on 4 and 300 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

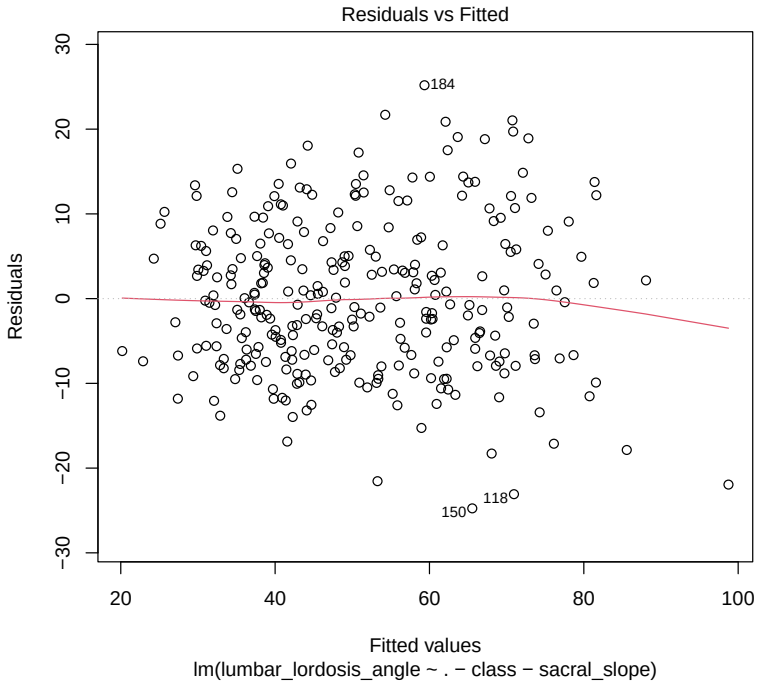
Aggiungiamo il calcolo dell'AIC.

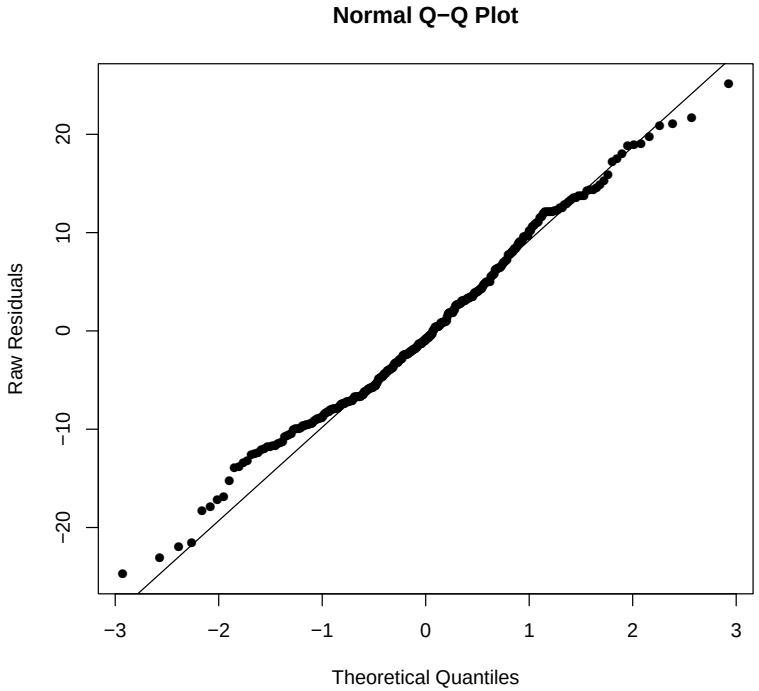
```
> AIC(g_post_lev)
[1] 2172.373
> AIC(g_post_rs)
[1] 2134.629
> AIC(g_post_both)
[1] 2296.307
```

Il modello migliore è quello senza i punti influenti trovati coi residui studentizzati, avendo R^2_{adj} maggiore e AIC minore.
L'R^2_{adj} aumenta notevolmente a 0.7261.
p-value è 2.2e-16, ci sono ancora covariate non significative, stavolta diverse da prima.


Studentized Residuals
Studentized Resid
Studentized Residuals
6
4
2
0
−4
−8
40
60
80
100
Fitted Values

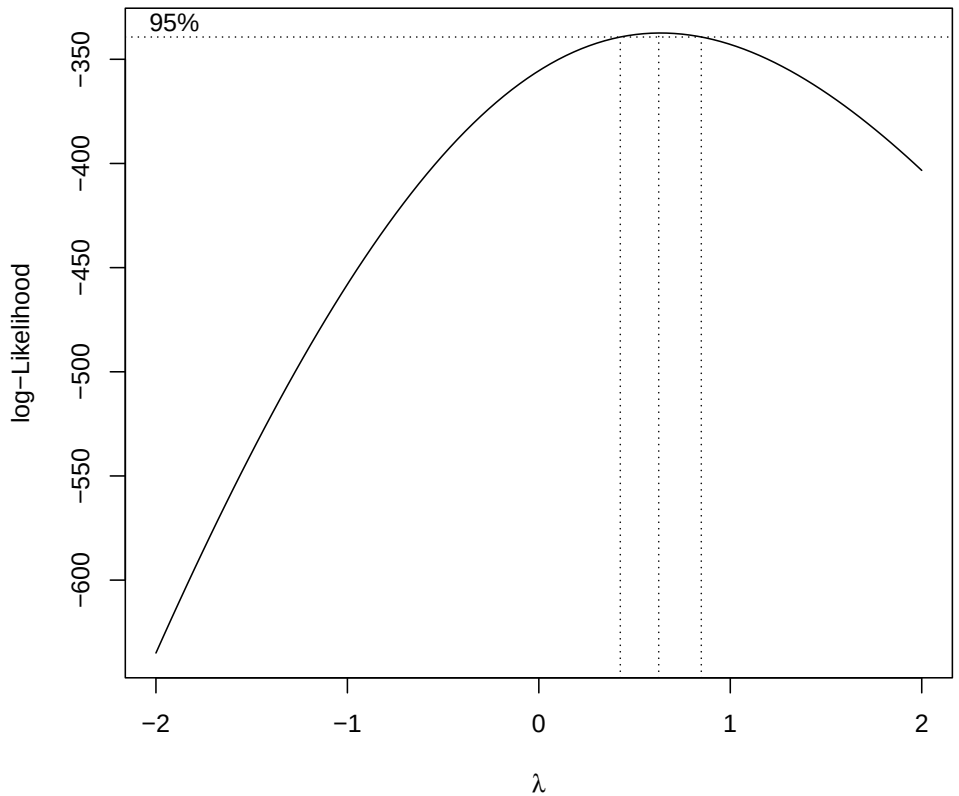
L'omoschedasticità migliora, lo Shapiro test rifiuta la normalità con un p-value di 0.04041.





Trasformazione box cox

Otteniamo $\lambda = 0.6262626$

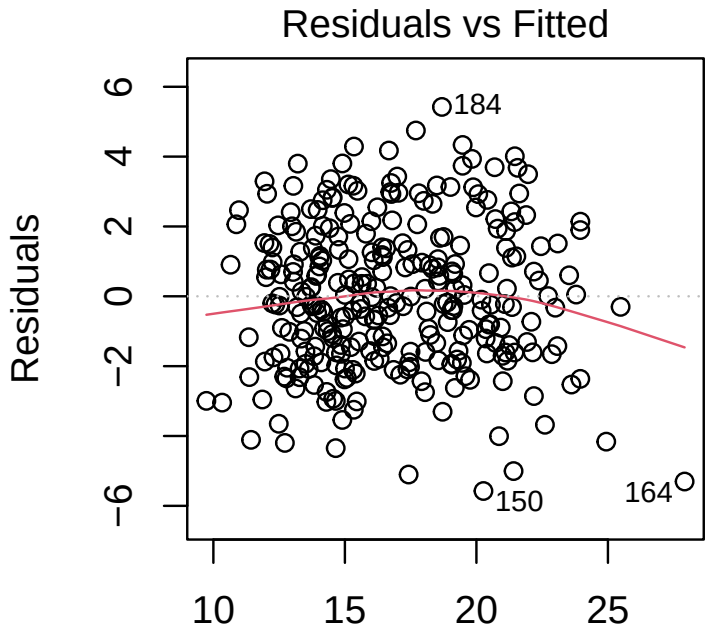


Generiamo il nuovo ML dove modelliamo $\frac{Y^{\lambda}-1}{\lambda}$

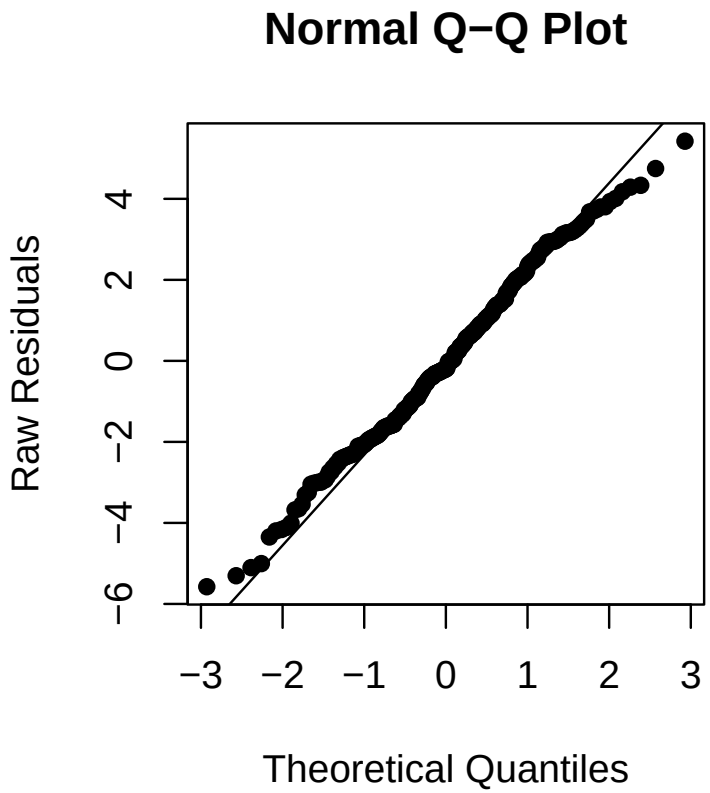
```
Call:
lm(formula = (lumbar_lordosis_angle^best_lambdagl - 1)/best_lambdagl ~
    . - class - sacral_slope, data = biomech, subset = (abs(stud) <
    2))

Residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max
-5.5750 -1.5905 -0.1978  1.4263  5.4229

Coefficients:
                          Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)               3.517005   1.436634   2.448   0.0150 *
pelvic_incidence          0.204373   0.011940  17.117  < 2e-16 ***
pelvic_tilt              -0.096457   0.017334  -5.565 6.00e-08 ***
pelvic_radius             0.017717   0.009934   1.784   0.0755 .
degree_spondylolisthesis  0.030430   0.005638   5.397 1.41e-07 ***
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 2.087 on 289 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.7288,Adjusted R-squared:  0.725
F-statistic: 194.1 on 4 and 289 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

R^2_{adj} diminuisce da 0.7261 a 0.725.
Verifichiamo se ora le ipotesi di normalità sono soddisfatte.

L'omoschedasticità rimane la stessa, lo Shapiro test non rifiuta la normalità con un p-value di 0.196.



'dosis_angle^best_lambdagl − 1)/best_lambda(



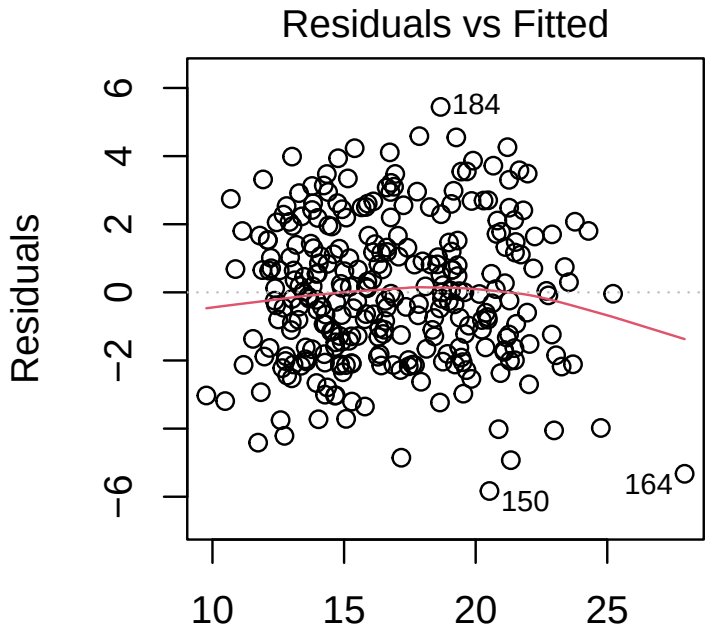
Selezione delle covariate

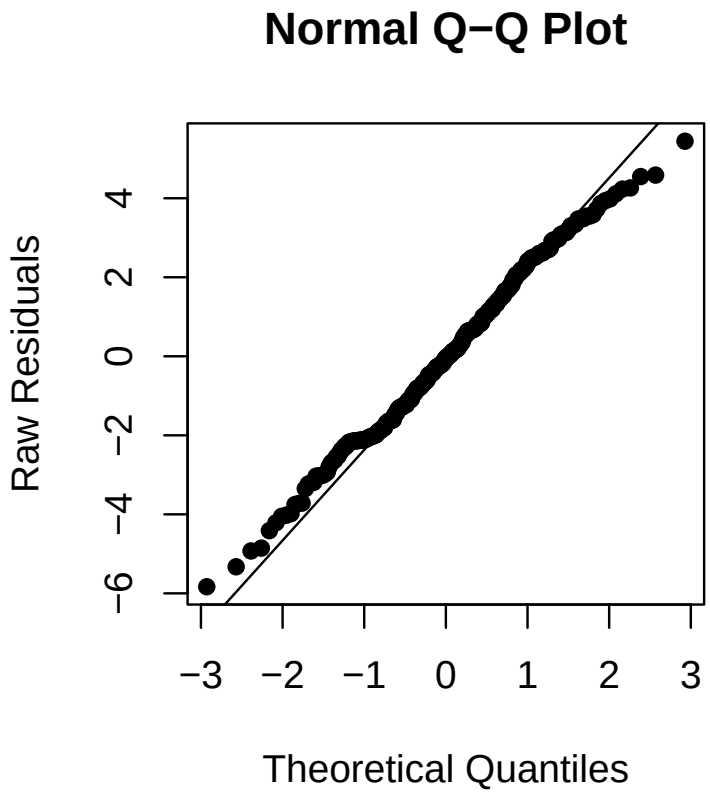
Rimuoviamo `pelvic_radius` che ha un p-value *one-at-a-time* di 0.0755, c'è evidenza per dire che non è significativo.

```
Call:
lm(formula = (lumbar_lordosis_angle^best_lambdagl - 1)/best_lambdagl ~
    . - class - sacral_slope - pelvic_radius, data = biomech,
    subset = (abs(stud) < 2))

Residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max
-5.8320 -1.6205 -0.0449  1.4739  5.4439

Coefficients:
                         Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)              5.902680   0.526115  11.219  < 2e-16 ***
pelvic_incidence         0.196926   0.011228  17.539  < 2e-16 ***
pelvic_tilt             -0.089619   0.016969  -5.282 2.52e-07 ***
degree_spondylolisthesis 0.031657   0.005617   5.635 4.13e-08 ***
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 2.095 on 290 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.7258,Adjusted R-squared:  0.723
F-statistic: 255.9 on 3 and 290 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

R^2_{adj} scende da 0.725 a 0.723, ma semplifica di molto il modello, quindi procediamo con questa modifica.
Verifichiamo come cambiano le ipotesi di normalità e omoschedasticità.

L'omoschedasticità rimane la stessa, lo Shapiro test migliora con un p-value di 0.22.



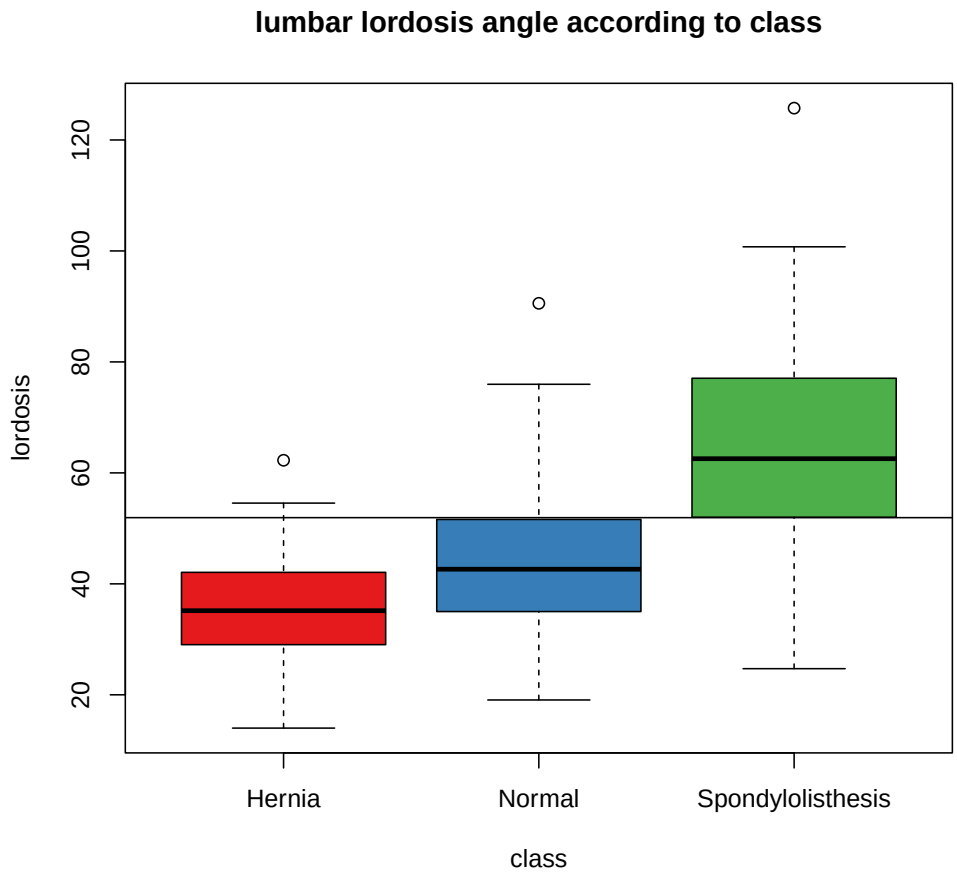


Modello conclusivo

$$\frac{LLA^{\lambda}-1}{\lambda} = 5.902680 + 0.196926 \cdot \mathrm{PI} - 0.089619 \cdot \mathrm{PT} + 0.031657 \cdot \mathrm{DS}$$

dove $\lambda = 0.6262626$.

Procediamo ora con l'ANOVA, siamo interessati a capire se la media della nostra risposta LLA è diversa tra le classi.



Lo Shapiro test ci porta tuttavia a rifiutare la normalità nei gruppi.

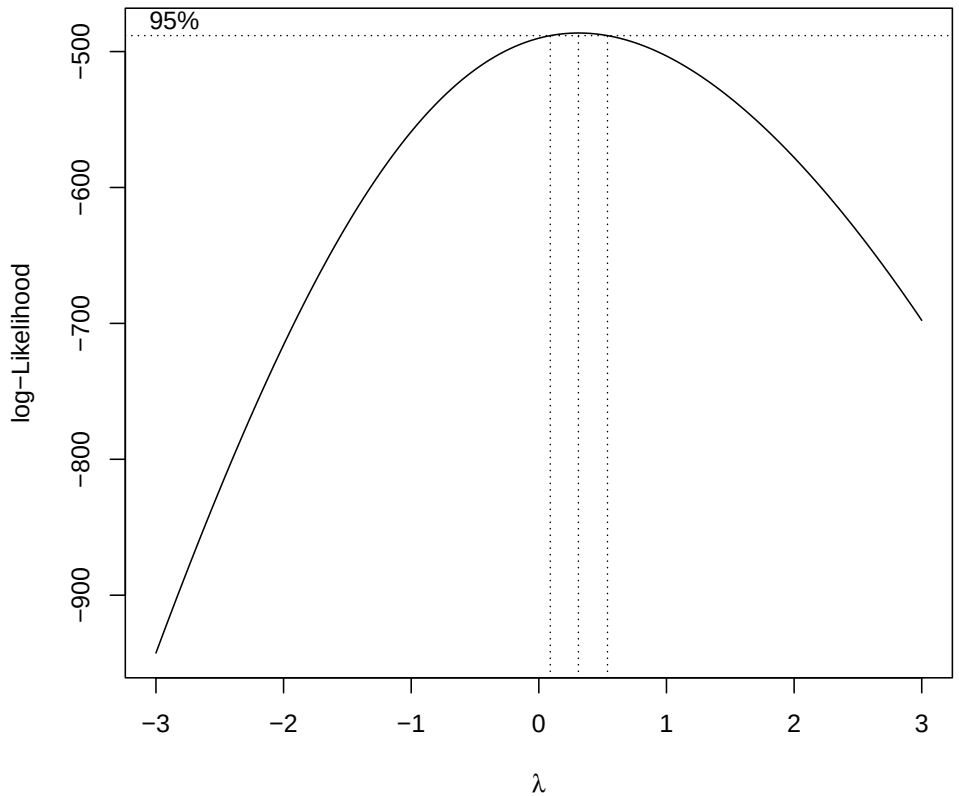
Hernia	Normal	Spondylolisthesis
0.68493698	0.01650640	0.07089939

Sia il Levene test che il Bartlett test ci portano a rifiutare anche l'omoschedasticità tra i gruppi.

```
> leveneTest(biomech$lumbar_lordosis_angle, biomech$class)
Levene's Test for Homogeneity of Variance (center = median)
       Df F value    Pr(>F)
group   2  9.8185 7.357e-05 ***
      307
---
> bartlett.test(biomech$lumbar_lordosis_angle, biomech$class)

Bartlett test of homogeneity of variances

data:  biomech$lumbar_lordosis_angle and biomech$class
Bartlett's K-squared = 23.183, df = 2, p-value = 9.242e-06
```

Trasformazione box cox

Otteniamo $\lambda = 0.31$



Lo Shapiro test ci porta ora a non rifiutare la normalità nei gruppi.

Hernia	Normal	Spondylolisthesis
0.1834879	0.9761894	0.7439135

Sia il Levene test che il Bartlett test ora confermano l'omoschedasticità.

```
> leveneTest( (biomech$lumbar_lordosis_angle^best_lambda -1)/best_lambda ,biomech$class )
Levene's Test for Homogeneity of Variance (center = median)
       Df F value Pr(>F)
group   2  0.5628 0.5702
      307
---
> bartlett.test(  (biomech$lumbar_lordosis_angle^best_lambda -1)/best_lambda ,biomech$class )

Bartlett test of homogeneity of variances

data:  (biomech$lumbar_lordosis_angle^best_lambda - 1)/best_lambda and biomech$class
Bartlett's K-squared = 0.49971, df = 2, p-value = 0.7789
```

Generiamo ora il modello.

```
Call:
lm(formula = (biomech$lumbar_lordosis_angle^best_lambda - 1)/best_lambda ~
    class - sacral_slope, data = biomech)

Residuals:
     Min       1Q   Median       3Q      Max
-2.91535 -0.59753  0.01302  0.66488  2.80340

Coefficients:
                        Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)               6.4423     0.1179  54.623  < 2e-16 ***
classNormal               0.6371     0.1492   4.271  2.6e-05 ***
classSpondylolisthesis    1.9655     0.1395  14.084  < 2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 0.9136 on 307 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.4449,Adjusted R-squared:  0.4413
F-statistic:   123 on 2 and 307 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

L'R^2_{adj} non è altissimo, 0.4413, ma procediamo comunque con l'ANOVA.

```
Analysis of Variance Table

Response: (biomech$lumbar_lordosis_angle^best_lambda - 1)/best_lambda
           Df Sum Sq Mean Sq F value    Pr(>F)
class       2 205.39 102.695  123.05 < 2.2e-16 ***
Residuals 307 256.22   0.835
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1
```

Il p-value 2.2e-16 è basso e ci porta a rifiutare l'ipotesi nulla che le medie siano tutte uguali.