Code con priorita'

Luca Tagliavini

April 8-12, 2021

Contents

0.1 Coda con priorita'

Struttura che mantiene il minimo (o massimo) in un insieme dinamico di chiavi su cui e' definita una relazione d'ordine totale. Una coda con priorita' e' un insieme di n elementi di tipo *elem* cui sono associate chiavi.

- $k_1 \Rightarrow elem_1$
- $k_2 \Rightarrow elem_2$
- $k_3 \Rightarrow elem_3$
- ...

Un esempio puo' essere la sincronizzazione della banda dove c'e' un continuo scambio di pacchetti tra client e server, e alcuni pacchetti hanno giustamente priorita' piu' alta e vengono dunque scambiati prima di altri (i.e. uno stream audio del presentatore della lezione vs un messaggio in chat). I pacchetti in ingresso possono dunque essere mantenuti in una coda con priorita' per gestire prima quelli con priorita' maggiore. Una cosa analoga puo' essere fatta lato server dove i pacchetti vengono distribuiti ai vari client.

0.1.1 Operazioni disponbili

- *find_min()* $\rightarrow$ *elem*: restituisce l'elemento associato alla chiave minima.
- *insert(elem e, chiave k)* $\rightarrow$ *void*: inserisce un nuovo elemento e con associata la chiave k.
- *delete(elem e)* $\rightarrow$ *void*: rimuove un elemento dalla coda al quale assumiamo di avere si ha accesso diretto.
- *delete_min()* $\rightarrow$ *void*: rimuove l'elemento associato alla chiave minima.
- *increase_key(elem e, chiave k)* $\rightarrow$ *void*: aumenta la priorita' dell'elemento e della quantita' k.
- *decrease_key(elem e, chiave k)* $\rightarrow$ *void*: decrementa la chiave dell'elemento e eella quantita' d

La struttura ammette metodi e funzionalita' molto simili quindi ci ispireremo fortemente alla sua costruzione. Tuttavia applicheremo alcuni cambiamenti:

- Non avremo piu' un albero binario, ma ogni nodo potra' avere un numero arbitrario di figli fino ad un numero massimo d. Chiameremo questa struttura d-heap.
- Implementeremo le operazioni *delete, increase_key, decrease_key* che non avevamo implementato ai tempi dell'heap sort poiche' non sfruttate.

NOTA: *increase_key* tornera' utile quando studieremo l'agoritmo di Dijkstra.

0.2 d-heap

Estende il concetto di min/max-heap gia' visto, con la differenza che un heap classico e' binario mentre invece un d-heap sara' d-ario. Ha le seguenti proprieta':

- Un d-heap di h altezza e' un albero perfetto almeno fino alla profondita' $h-1$. Le foglie (nel livello h vengon accatastate a sinistra).
- Ogni nodo v contiene una *chiave*(v) e un *elem*(v). L'insieme delle chiavi e' un insieme ordinato (i.e. $1, 2, 3, \dots, 10$)
- Ogni figlio (diverso dalla radice) ha la chiave *non inferiore* ($\geq$) a quella del padre.
- Un d-heap con n nodi ha profondita' $O(\log_d n)$.
  Lo si prova con le serie geometriche come visto per le normali heap, vdi slide.

Anche i d-heap possono essere memorizzati tramite un array (index $1-n$), il cui processo e' descritto nelle slide e ci offre un accesso diretto agli elementi in posizioni arbitrarie in modo da abbassare il costo di alcuni metodi (altrimenti logaritmici) a costanti.

0.2.1 Funzioni ausiliarie: *muovi_basso*

```
algorithm muovi_basso(Node v)
  while true do
    if has_no_child(v) then
      break
    else
      u := min_child(v)
      if chiave(u) < chiave(v) then
        swap(u, v)
        v = u
      else
        break
    endif
  endwhile
endalgoritmh
```

Costo: $O(dh)$

Sposta il nodo v in basso nella heap (tra i suoi figli) fino ad una posizione in cui rende l'albero un d-heap, ossia posiziona il nodo v scambiandolo con un figlio in modo che esso sia il minore tra il sottoalbero preso in considerazione.

0.2.2 Funzioni ausiliarie: *muovi_alto*

```
algorithm muovi_alto(Node v)
  while v != root(T) and chiave(v) < chiave(parent(v)) do
```

```
    swap(v, parent(v))
    v = parent(v)
  endwhile
endalgoritmh
```

Costo: $O(d)$

Sposta il nodo v in alto fino a quando o esso non e' la radice (ci fermiamo perche' la chiamata *parent* fallirebbe) o **ha una chiave $\geq$ di quella del padre**

0.2.3 Costi degli altri metodi della d-heap

Si noti che $d = \log_d n$ per le proprieta' della d-heap.

- *find_min()* $\Rightarrow O(1)$ in quanto il minimo e' il nodo radice
- *insert(elem e, chiave k)* $\Rightarrow O(\log_d n)$ in quanto aggiunge l'elemento il piu' possibile a destra nell'ultimo livello e necessita di una chiamata di *muovi_alto*
- *delete(elem e)* $\Rightarrow O(d \log_d n)$ in quanto si scambia la foglia piu' a destra dell'ultimo livello con il nodo scambiato e poi si esegue *muovi_alto* o *muovi_basso* in base alla situazione, tra i quali il peggiore ha costo $O(d \log_d n)$
- *delete_min()* $\Rightarrow O(d \log_d n)$ in quanto chiama *delete*
- *increase_key(elem e, chiave k)* $\Rightarrow O(\log_d n)$ in quanto aumenta il valore e chiama *muovi_alto* per riordinare l'albero dopo l'incremento
- *decrease_key(elem e, chiave k)* $\Rightarrow O(d \log_d n)$ in quanto chiama *muovi_basso* per ribilanciare la d-heap