

# Code con prioritá'

Luca Tagliavini

April 8-12, 2021

## Contents

## 0.1 Coda con priorit 

Struttura che mantiene il minimo (o massimo) in un insieme dinamico di chiavi su cui   definita una relazione d'ordine totale. Una coda con priorit    un insieme di  $n$  elementi di tipo *elem* cui sono associate chiavi.

- $k_1 \Rightarrow elem_1$
- $k_2 \Rightarrow elem_2$
- $k_3 \Rightarrow elem_3$
- ...

Un esempio puo' essere la sincronizzazione della banda dove c'  un continuo scambio di pacchetti tra client e server, e alcuni pacchetti hanno giustamente priorit  piu' alta e vengono dunque scambiati prima di altri (i.e. uno stream audio del presentatore della lezione vs un messaggio in chat). I pacchetti in ingresso possono dunque essere mantenuti in una coda con priorit  per gestire prima quelli con priorit  maggiore. Una cosa analoga puo' essere fatta lato server dove i pacchetti vengono distribuiti ai vari client.

### 0.1.1 Operazioni disponibili

- $find\_min() \rightarrow elem$ : restituisce l'elemento associato alla chiave minima.
- $insert(elem\ e, chiave\ k) \rightarrow void$ : inserisce un nuovo elemento  $e$  con associata la chiave  $k$ .
- $delete(elem\ e) \rightarrow void$ : rimuove un elemento dalla coda al quale assumiamo di avere si ha accesso diretto.
- $delete\_min() \rightarrow void$ : rimuove l'elemento associato alla chiave minima.
- $increase\_key(elem\ e, chiave\ k) \rightarrow void$ : aumenta la priorit  dell'elemento  $e$  della quantita'  $k$ .
- $decrease\_key(elem\ e, chiave\ k) \rightarrow void$ : decrementa la chiave dell'elemento  $e$  della quantita'  $d$ .

La struttura ammette metodi e funzionalita' molto simili quindi ci ispireremo fortemente alla sua costruzione. Tuttavia applicheremo alcuni cambiamenti:

- Non avremo piu' un albero binario, ma ogni nodo potra' avere un numero arbitrario di figli fino ad un numero massimo  $d$ . Chiameremo questa struttura  $d$ -heap.
- Implementeremo le operazioni *delete*, *increase\_key*, *decrease\_key* che non avevamo implementato ai tempi dell'heap sort poiche' non sfruttate.

NOTA: *increase\_key* tornera' utile quando studieremo l'algoritmo di Dijkstra.

## 0.2 $d$ -heap

Estende il concetto di min/max-heap già visto, con la differenza che un heap classico è binario mentre invece un  $d$ -heap sarà  $d$ -ario. Ha le seguenti proprietà:

- Un  $d$ -heap di  $h$  altezza è un albero perfetto almeno fino alla profondità  $h - 1$ . Le foglie (nel livello  $h$  vengono accatastate a sinistra).
- Ogni nodo  $v$  contiene una *chiave*( $v$ ) e un *elem*( $v$ ). L'insieme delle chiavi è un insieme ordinato (i.e.  $1, 2, 3, \dots, 10$ )
- Ogni figlio (diverso dalla radice) ha la chiave *non inferiore* ( $\geq$ ) a quella del padre.
- Un  $d$ -heap con  $n$  nodi ha profondità  $O(\log_d n)$ .  
Lo si prova con le serie geometriche come visto per le normali heap, vdi slide.

Anche i  $d$ -heap possono essere memorizzati tramite un array (index  $1 - n$ ), il cui processo è descritto nelle slide e ci offre un accesso diretto agli elementi in posizioni arbitrarie in modo da abbassare il costo di alcuni metodi (altrimenti logaritmici) a costanti.

### 0.2.1 Funzioni ausiliarie: *muovi\_basso*

```
algorithm muovi_basso(Node v)
  while true do
    if has_no_child(v) then
      break
    else
      u := min_child(v)
      if chiave(u) < chiave(v) then
        swap(u, v)
        v = u
      else
        break
    endif
  endwhile
endalgorithm
```

Costo:  $O(dh)$

Sposta il nodo  $v$  in basso nella heap (tra i suoi figli) fino ad una posizione in cui rende l'albero un  $d$ -heap, ossia posiziona il nodo  $v$  scambiandolo con un figlio in modo che esso sia il minore tra il sottoalbero preso in considerazione.

### 0.2.2 Funzioni ausiliarie: *muovi\_alto*

```
algorithm muovi_alto(Node v)
  while v != root(T) and chiave(v) < chiave(parent(v)) do
```

```

        swap(v, parent(v))
        v = parent(v)
    endwhile
endalgorithmh

```

Costo:  $O(d)$

Sposta il nodo  $v$  in alto fino a quando o esso non e' la radice (ci fermiamo perche' la chiamata *parent* fallirebbe) o **ha una chiave  $\geq$  di quella del padre**

### 0.2.3 Costi degli altri metodi della $d$ -heap

Si noti che  $d = \log_d n$  per le proprieta' della  $d$ -heap.

- $find\_min() \Rightarrow O(1)$  in quanto il minimo e' il nodo radice
- $insert(elem\ e, chiave\ k) \Rightarrow O(\log_d n)$  in quanto aggiunge l'elemento il piu' possibile a destra nell'ultimo livello e necessita di una chiamata di *muovi\_alto*
- $delete(elem\ e) \Rightarrow O(d \log_d n)$  in quanto si scambia la foglia piu' a destra dell'ultimo livello con il nodo scambiato e poi si esegue *muovi\_alto* o *muovi\_basso* in base alla situazione, tra i quali il peggiore ha costo  $O(d \log_d n)$
- $delete\_min() \Rightarrow O(d \log_d n)$  in quanto chiama *delete*
- $increase\_key(elem\ e, chiave\ k) \Rightarrow O(\log_d n)$  in quanto aumenta il valore e chiama *muovi\_alto* per riordinare l'albero dopo l'incremento
- $decrease\_key(elem\ e, chiave\ k) \Rightarrow O(d \log_d n)$  in quanto chiama *muovi\_basso* per ribilanciare la  $d$ -heap